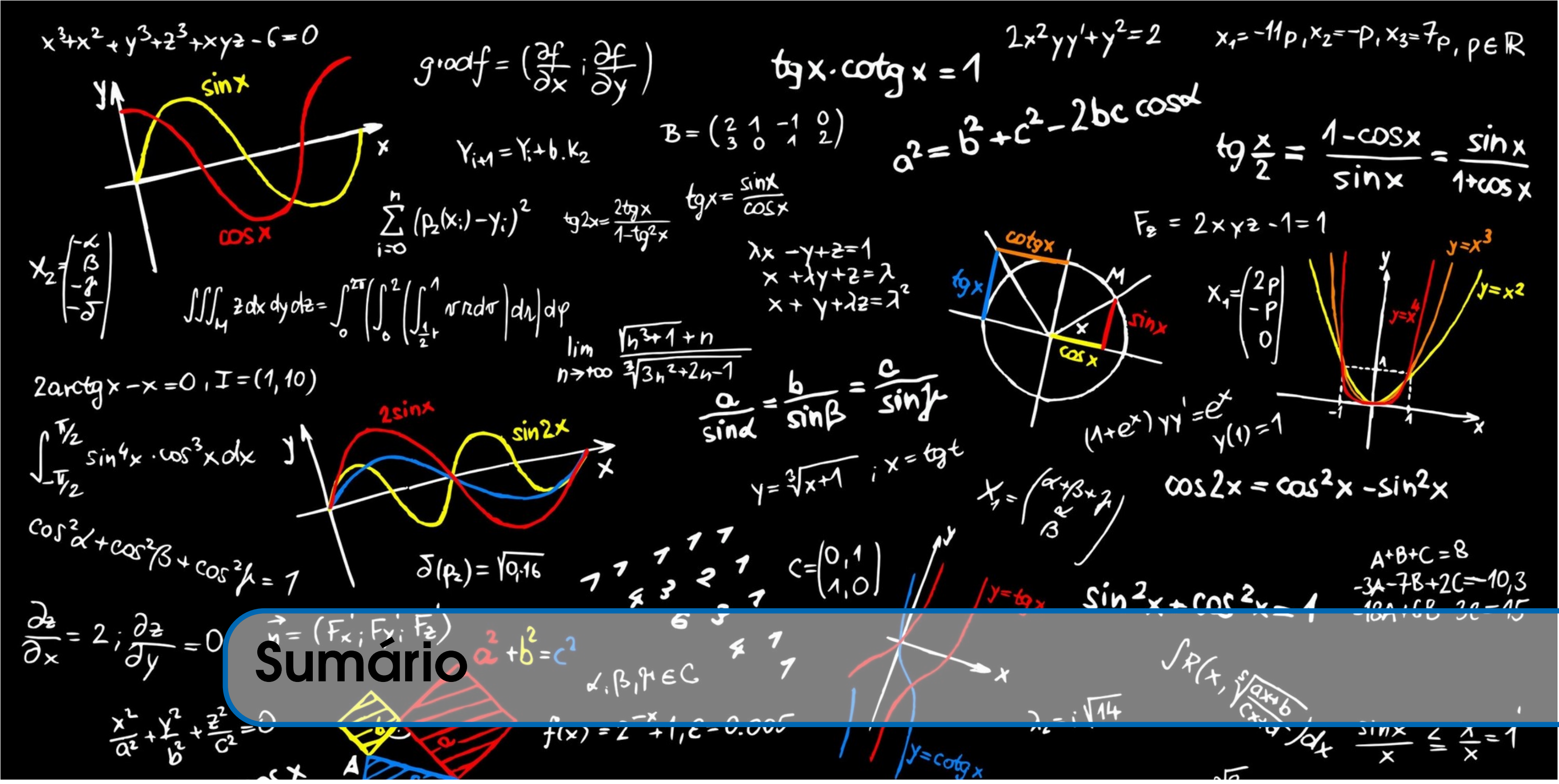
Cálculo Diferencial e Integral

Notas de Aula

Bruno de Araujo Coutinho



Sumário

1 Números Reais 5

2 Funções e Modelos 7

3 Limites e Continuidade 9

4 Integrais Múltiplas 11

4.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 11

Bibliography 15

Books 15

Articles 15

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

1. Números Reais

Os

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

2. Funções e Modelos

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$$

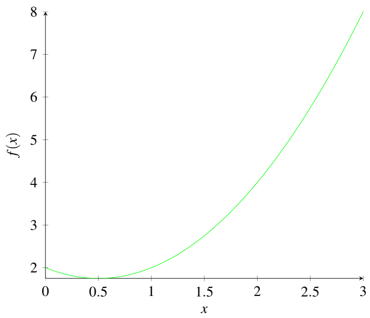
3. Limites e Continuidade

Chama-se limite o comportamento de uma função $f(x)$ em torno de um valor x. Escrevemos

$$lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a é igual a L"se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

■ **Example 3.1** Vamos investigar o comportamento de uma função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$, para valores de x próximos de 2.



■

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2,000000	3	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030099
1,999	3,997001	2,001	4,003000

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$$

4. Integrais Múltiplas

4.1 Integrais Duplas sobre Retângulos

Se $f(x)$ é uma função de uma única variável real e é definida para $a \leq x \leq b$, subdividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual a $\Delta x = (b-a)/n$ e escolhemos pontos arbitrários x_i^* em cada um desses intervalos. Em seguida, formamos a soma de Riemann e tomamos o limite dessa soma quando $n \to \infty$ para oter a integral definida de a até b da função f

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

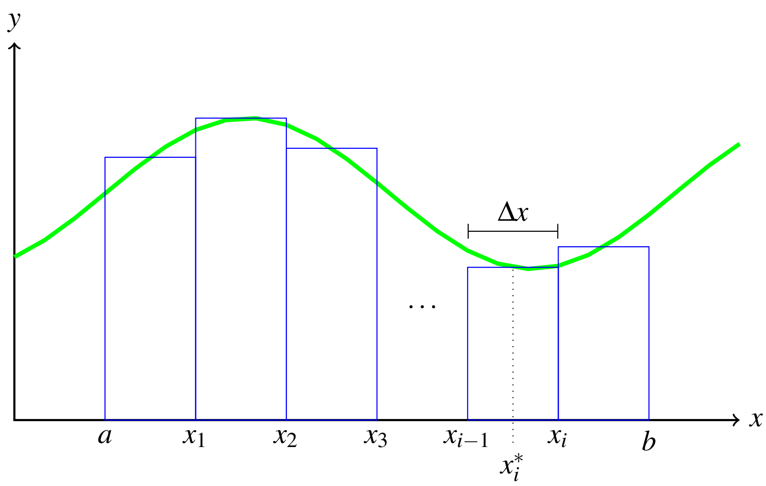


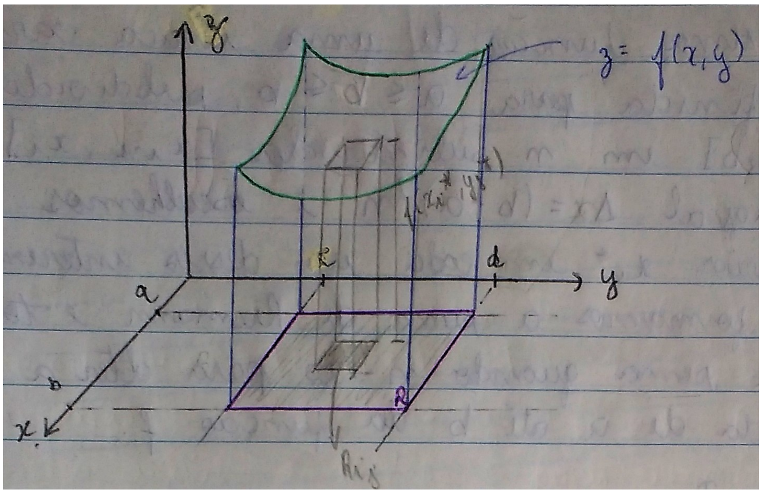
Figura 4.1: Somas de Riemman para funções de uma variável

De modo semelhante, considere uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado.

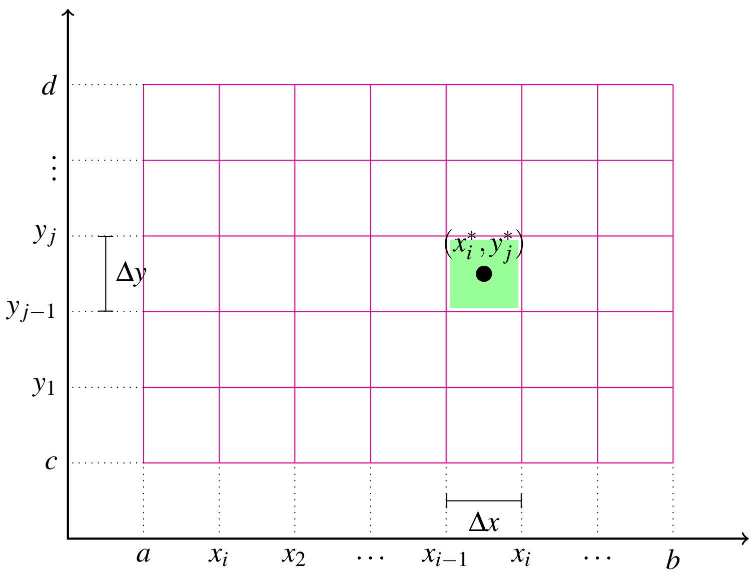
$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x,y)$. Seja S o sólido contido acima de R e abaixo da superfície z:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in R\}$$



Para determinar o volume de S, o primeiro passo é dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isto dividindo o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\delta x = (b-a)/m$ e o intervalo $[c,d]$ em n subintervalos iguais $[y_{j-1}, y_j]$ de comprimento $\delta y = (d-c)/n$.



Se escolhermos um ponto arbitrário em cada R_{ij}, (x_i^*, y_j^*) definimos o volume da caixa de base R_{ij} e altura $f(x_i^*, y_j^*)$ como:

$$f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A$$

Se realizarmos este procedimento para os demais retângulos, vamos obter uma estimativa do volume:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A$$

A aproximação do volume acima melhora quando aumentamos os valores de m e n, portanto:

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A$$

Daí, podemos enunciar a definição de integral dupla sobre um retângulo R_{ij}.

Definition 4.1.1 — Integral Dupla. A integral dupla de f sobre o retângulo R_{ij} é:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A \tag{4.2}$$

se este limite existir.

O significado preciso da definição anterior é que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número N talque

$$\| \iint_R f(x,y)dA - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A \| < \varepsilon$$

para todos inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_i^*, y_j^*) em R_{ij}.

4.2 Integrais Iteradas

Suponha que f seja uma função de duas variáveis contínua no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Usaremos a notação

Theorem 4.2.1 — Teorema de Fubini. Se f for contínua no retângulo $R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \tag{4.3}$$

Genericamente, esse resultado vale se supusermos que f seha limitada em R, f oissa ser descontínua em um número finito de curvas lisas e a integral iterada exista.

4.3 Integrais Duplas em Regiões Gerais

Uma região plana D é dita ser do tipo I se está contida entre o gráfico de duas funções contínuas de x, ou seja,

$$D_1 = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a,b]$.

4.4 Mudança de Variáveis em Integrais Duplas

4.4.1 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

4.5 Aplicações das Integrais Duplas

4.6 Integrais Triplas

4.7 Mudança de Variáveis em Integrais Triplas

4.7.1 Coordenadas Cilíndricas

4.7.2 Coordenadas Esféricas

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

Bibliography

Books
Articles