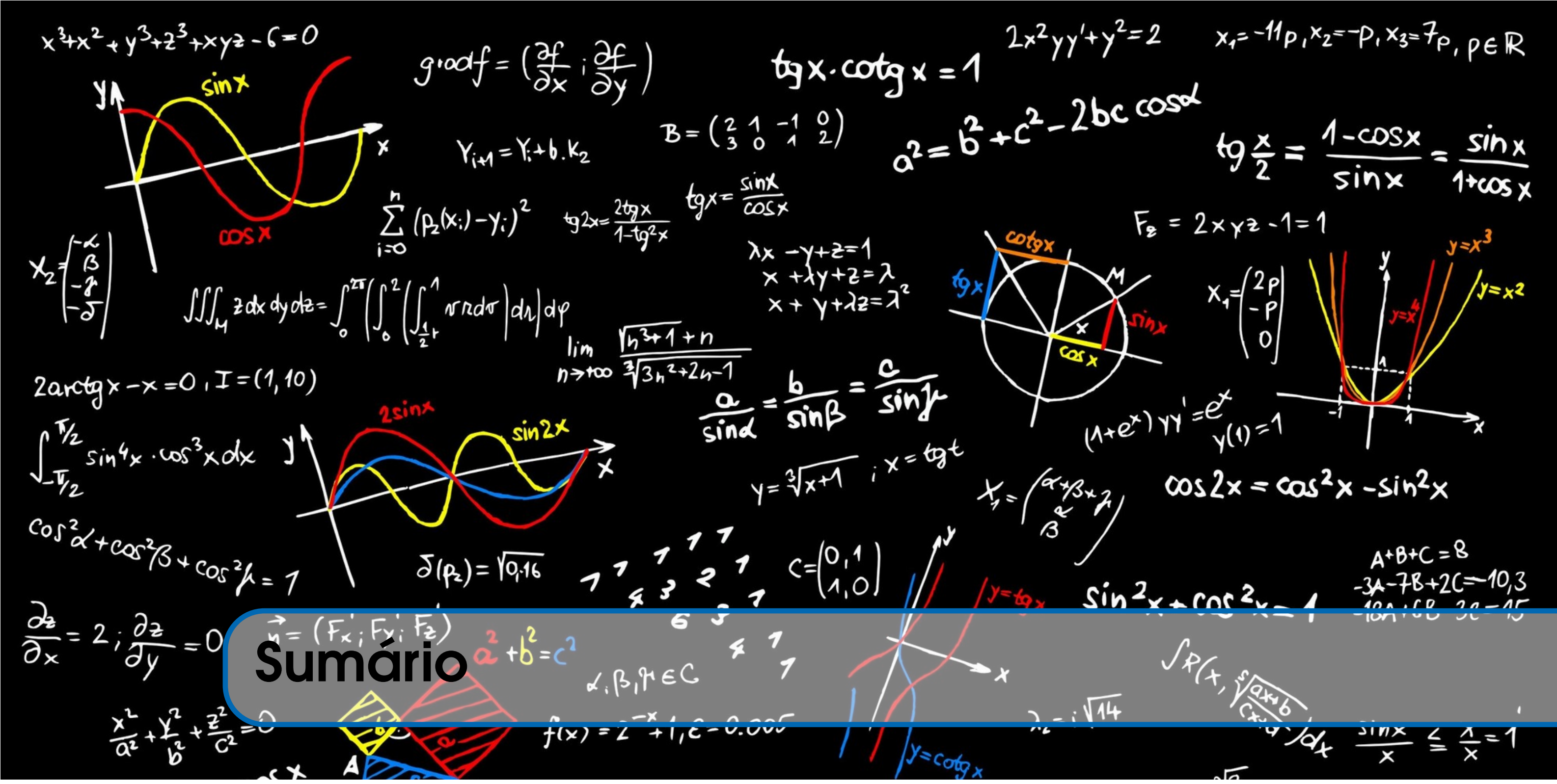
Cálculo Diferencial e Integral

Notas de Aula

Bruno de Araujo Coutinho



Sumário

1 Números Reais 5

2 Funções e Modelos 7

3 Limites e Continuidade 9

4 Integrais Múltiplas 11

4.1 Integrais Duplas sobre Retângulos 11

Bibliography 15

Books 15

Articles 15

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = 1$$

1. Números Reais

Os

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

2. Funções e Modelos

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

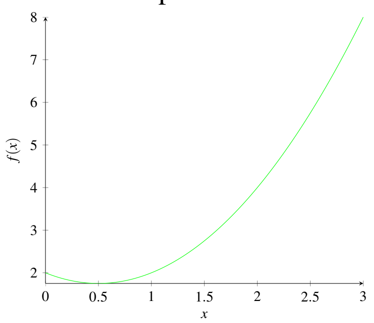
3. Limites e Continuidade

Chama-se limite o comportamento de uma função $f(x)$ em torno de um valor x. Escrevemos

$$lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a é igual a L"se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

■ **Example 3.1** Vamos investigar o comportamento de uma função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$, para valores de x próximos de 2.



■

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2,000000	3	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030099
1,999	3,997001	2,001	4,003000

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = 1$$

4. Integrais Múltiplas

4.1 Integrais Duplas sobre Retângulos

Se $f(x)$ é uma função de uma única variável real e é definida para $a \leq x \leq b$, subdividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual a $\Delta x = (b-a)/n$ e escolhemos pontos arbitrários x_i^* em cada um desses intervalos. Em seguida, formamos a soma de Riemann e tomamos o limite dessa soma quando $n \to \infty$ para oter a integral definida de a até b da função f

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

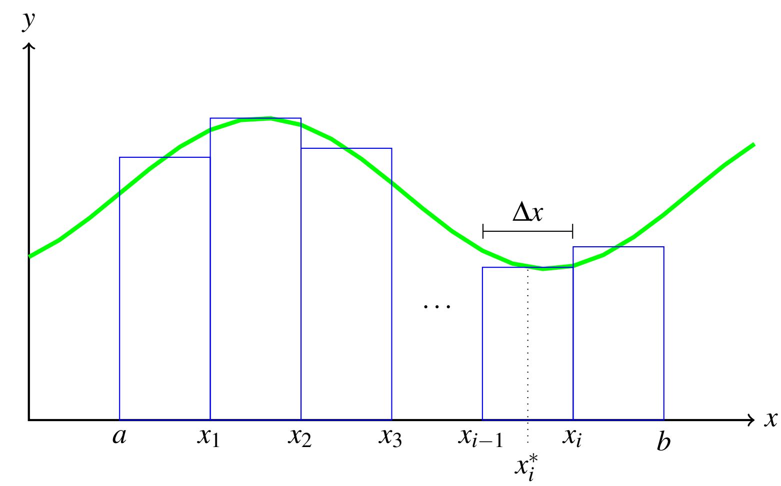


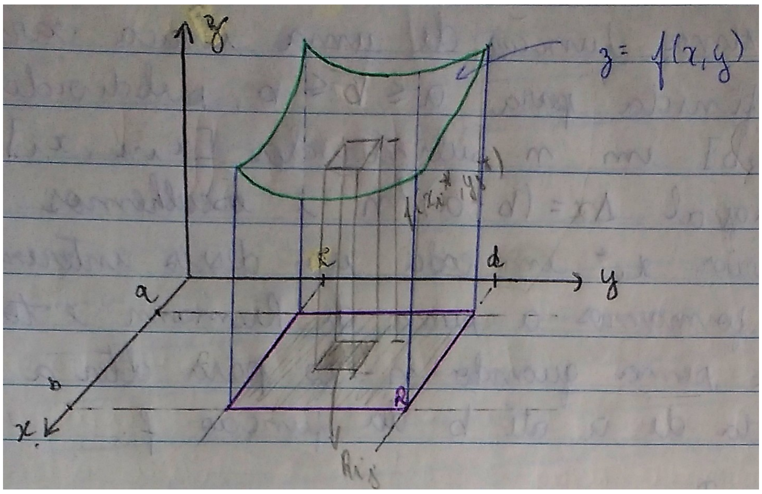
Figura 4.1: Somas de Riemman para funções de uma variável

De modo semelhante, considere uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado.

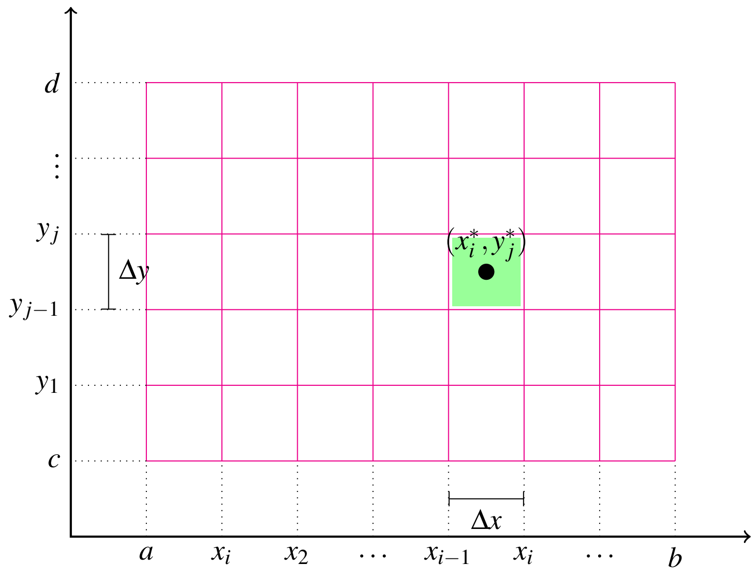
$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x,y)$. Seja S o sólido contido acima de R e abaixo da superfície z:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in R\}$$



Para determinar o volume de S, o primeiro passo é dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isto dividindo o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\delta x = (b-a)/m$ e o intervalo $[c,d]$ em n subintervalos iguais $[y_{j-1}, y_j]$ de comprimento $\delta y = (d-c)/n$.



Se escolhermos um ponto arbitrário em cada R_{ij}, (x_i^*, y_j^*) definimos o volume da caixa de base R_{ij} e altura $f(x_i^*, y_j^*)$ como:

$$f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A$$

Se realizarmos este procedimento para os demais retângulos, vamos obter uma estimativa do volume:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A$$

A aproximação do volume acima melhora quando aumentamos os valores de m e n, portanto:

$$V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A$$

Daí, podemos enunciar a definição de integral dupla sobre um retângulo R_{ij}.

Definition 4.1.1 — Integral Dupla. A integral dupla de f sobre o retângulo R_{ij} é:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A \tag{4.2}$$

se este limite existir.

O significado preciso da definição anterior é que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número N talque

$$\| \iint_R f(x,y)dA - \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum j = 1^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta A \| < \varepsilon$$

para todos inteiros m e n maiores que N e para qualquer escolha de (x_i^*, y_j^*) em R_{ij}.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$$

Bibliography

Books
Articles