Revisão de estatística para finanças

Ricardo Buscariolli

June 21, 2017

1 Retorno esperado

Valor esperado e média são termos que serão usados de forma intercambiável neste texto. O valor esperado de um retorno r de um ativo (variável aleatória) é definido como

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} p(i) r(i) \tag{1}$$

Sendo $p(i)$ a probabilidade de ocorrência de cada cenário i e $r(i)$ o retorno em cada cenário i.

1.1 Valor esperado quando os retornos aumentam pela soma de uma constante

Se cada retorno nos diferentes cenários é aumentado por uma constante temos que o valor esperado se altera da seguinte forma

$$\begin{aligned}
E(r+a) &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\left[r(i)+a\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(i) r(i) + \sum_{i=1}^{n} p(i) a = \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(i) r(i)}_{E(r)} + a \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(i)}_{1} = \\
&= E(r) + a \qquad (2)
\end{aligned}$$

1.2 Valor esperado quando os retornos aumentam pela multiplicação de um fator

$$
\begin{aligned}
E(wr) &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\,[wr(i)] = \\
&= w\sum_{i=1}^{n} p(i)r(i) = \\
& wE(r)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

1.3 Valor esperado do retorno de um portfolio com dois ativos de risco: E e D

A fração investida em E é w_E. Fração investida em D é w_D. O retorno total do portfolio é dado por

$$
r_p(i) = w_D r_D(i) + w_E r_E(i) \tag{4}
$$

Usando (2) e (3), o valor esperado do retorno do ativo é dado por

$$
\begin{aligned}
E(r_p) &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\,[w_D r_D(i) + w_E r_E(i)] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(i) w_D r_D(i) + \sum_{i=1}^{n} p(i) w_E r_E(i) \\
&= w_D \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(i) r_D(i)}_{E(r_D)} + w_E \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(i) r_E(i)}_{E(r_E)} = \\
&= w_D E(r_D) + w_E E(r_E)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ou seja, o retorno do portfolio é a média ponderada dos retornos dos ativos que o compõem.

2 Variância

Vem da análise de cenários e é dada por

$$
\sigma^2(r) = \sum_{i=1}^{n} p(i)\,[r(i) - E(r)]^2 \tag{6}
$$

e o desvio padrão é dado por

$$
\sigma(r) = \sqrt{\sigma^2(r)} \tag{7}
$$

2.1 Os retornos aumentam pela soma de uma constante

Nada se altera.

$$\begin{aligned}\sigma^2(r) &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\left[r(i)+a-[E(r)+a]\right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\left[r(i)-E(r)\right]^2 \qquad (8)\end{aligned}$$

2.2 Os retornos aumentam pela multiplicação de um fator w

$$\begin{aligned}\sigma^2(r) &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\left[wr(i)-E(wr)\right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\left\{w\left[r(i)-E(r)\right]\right\}^2 = \\ &= w^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(i)\left\{\left[r(i)-E(r)\right]\right\}^2}_{\sigma^2} = \\ &= w^2\sigma^2 \qquad (9)\end{aligned}$$

E assim, o desvio padrão é dado por

$$\sigma = \sqrt{w^2\sigma^2} = w\sigma \qquad (10)$$

2.3 Outra forma de escrever a variância

$$\begin{aligned}\sigma^2(r) &= E\left[r-E(r)\right]^2 = \\ &= E\left\{r^2 - 2rE(r) + [E(r)]^2\right\} = \\ &= E(r^2) - 2E(r)^2 + [E(r)]^2 = \\ &= E(r^2) - [E(r)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(i)r(i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} p(i)r(i)\right]^2 \qquad (11)\end{aligned}$$

2.4 Variância de um portfolio com dois ativos de risco: E e D

Tomemos um portfolio com dois ativos. O retorno deste portfolio é dado por

$$r_p(i) = w_D r_D(i) + w_E r_E(i) \tag{12}$$

Note que

$$\begin{aligned} r_p - E(r_p) &= w_D r_D(i) + w_E r_E(i) - \{w_D E[r_D] + w_E E[r_E]\} \\ &= w_D \underbrace{[r_D(i) - E(r_D)]}_{d(i)} - \underbrace{w_E [r_E(i) - E(r_E)]}_{e(i)} = \\ &= w_D d(i) + w_E e(i) \end{aligned} \tag{13}$$

Então a variância é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^{n} p(i) [r_p - E r_p]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(i) [w_D d(i) + w_E e(i)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(i) \left[w_D^2 d(i)^2 + 2 w_D d(i) w_E e(i) + w_E^2 e(i)^2\right] = \\ &= w_D^2 \sum_{i=1}^{n} p(i) d(i)^2 + w_E^2 \sum_{i=1}^{n} p(i) e(i)^2 + 2 w_D w_E \sum_{i=1}^{n} p(i) d(i) e(i) \end{aligned} \tag{14}$$

Mas note que $\sum_{i=1}^{n} p(i) d(i)^2$ é a variância de r_D e $\sum_{i=1}^{n} p(i) e(i)^2$ é a variância de r_E. Assim

$$\sigma_p^2 = w_D^2 \sigma_D^2 + w_E^2 \sigma_E^2 + 2 w_D w_E \sum_{i=1}^{n} p(i) d(i) e(i) \tag{15}$$

O termo $\sum_{i=1}^{n} p(i) d(i) e(i)$ é muito importante em estatística. Ele é tão importante que recebe uma denominação: covariância.

3 Covariância

A covariância entre 2 variáveis é definida como

$$\begin{aligned} cov(r_D, r_E) &= E(d \times e) = E\{[r_D - E(r_D)][r_E - E(r_E)]\} = \\ &= E(r_D r_E) - E[r_D E(r_E)] - E[r_E E(r_D)] + E[E(r_E) E(r_D)] = \\ &= E(r_D r_E) - E(r_D) E(r_E) \end{aligned} \tag{16}$$

A covariância é uma medida de "covariação" entre as variáveis.

Exemplo:

Probabilidade	r_B	r_E	$r_B - \overline{r_B}$	$r_E - \overline{r_E}$	$(r_B - \overline{r_B})(r_E - \overline{r_E})$
0,25	-2	30	-8	20	-160
0,5	6	10	0	0	0
0,25	14	-10	8	-20	-160
Média	6	10	0	0	-80

A covariância é -80.

Se os retornos forem multimplicados por constantestemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} cov(w_D r_D, w_E r_E) &= E\left\{\left[w_D r_D - w_D E(r_D)\right]\left[w_E r_E - w_E E(r_E)\right]\right\} = \\ &= w_D w_E E(r_D r_E) - w_D w_E E(r_E)E(r_D) - w_D w_E E(r_E)E(r_D) + w_D w_E E(r_E)E(r_D) = \\ &= w_D w_E \left[E(r_D r_E) - E(r_E)E(r_D)\right] = \\ &= w_D w_E cov(r_D, r_E) \end{aligned} \tag{17}$$

Assim, reerscrevemos (15) como

$$\sigma_p^2 = w_D^2 \sigma_D^2 + w_E^2 \sigma_E^2 + 2 w_D w_E \times cov(r_D, r_E) \tag{18}$$

A unidade de medida da covariância é "porcentagem ao quadrado". Seria bom para a interpretação que tivessemos essa medida em "porcentagem". No entanto, não podemos tirar a raiz quadrada, como fizemos com a variância, pois a covariância pode ser menos que zero. Assim, para fazer a escala em porcentagem dividimos a covariância por $\sigma_D \sigma_E$ e chegamos a um termo chamado de correlação.

4 Correlação

Definimos correlação como

$$corr(r_D, r_E) = \frac{cov(r_D, r_E)}{\sigma_D \sigma_E} \tag{19}$$

Esta variável varia entre 0 e 1. Para verificar isso note que a maior covariância se dá entre a variável e ela mesma, ou seja

$$\begin{aligned} cov(r_D, r_D) &= E\left\{\left[r_D - E(r_D)\right]\left[r_D - E(r_D)\right]\right\} = \\ &= E\left[r_D - E(r_D)\right]^2 = \sigma_D^2 \end{aligned} \tag{20}$$

A correlação entre r_D e r_D é definida como

$$corr(r_D, r_D) = \frac{cov(r_D, r_D)}{\sigma_D \sigma_D} = \frac{\sigma_D^2}{\sigma_D^2} = 1 \tag{21}$$

O menor grau possível de co-movimentação se dá entre a variável e seu oposto. Então

$$
\begin{aligned}
cov(r_D, -r_D) &= E\left\{\left[r_D - E(r_D)\right]\left[-r_D - E(-r_D)\right]\right\} = \\
&= E\left\{\left[r_D - E(r_D)\right](-1)\left[r_D - E(r_D)\right]\right\} = \\
&= -E\left\{\left[r_D - E(r_D)\right]\left[r_D - E(r_D)\right]\right\} = \\
&= -E\left[r_D - E(r_D)\right]^2 = -\sigma_D^2 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

A correlação entre r_D e -r_D é definida como

$$
corr(r_D, -r_D) = \frac{cov(r_D, -r_D)}{\sigma_D \sigma_D} = \frac{-\sigma_D^2}{\sigma_D^2} = -1 \qquad (23)
$$

Uma propriedade importante da correlação é que esse coeficiente não é afetado pela multiplicação por qualquer constante. Observe

$$
\begin{aligned}
corr(r_D, r_E) &= corr(w_D r_D + a, r_E) = \\
&= \frac{cov(w_D r_D + a, r_E)}{\sqrt{var(w_D r_D + a)} \times \sigma_E} = \\
&= \frac{w_D cov(r_D, r_E)}{\sqrt{w_D^2 \sigma_D^2} \times \sigma_E} = \\
&= \frac{w_D cov(r_D, r_E)}{w_D \sigma_D \times \sigma_E} = \\
&= corr(r_D, r_E) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Como correlação é mais intuitivo que covariância, já sabemos que

$$
corr(r_D, r_E) = \frac{cov(r_D, r_E)}{\sigma_D \times \sigma_E}
$$

então, geralmente usamos a seguinte relação

$$
cov(r_D, r_E) = \sigma_D \times \sigma_E \times corr(r_D, r_E) \qquad (25)
$$

e reescrevemos a variância do portfolio como

$$
\sigma_p^2 = w_D^2 \sigma_D^2 + w_E^2 \sigma_E^2 + 2 w_D w_E \times \sigma_D \times \sigma_E \times corr(r_D, r_E) \qquad (26)
$$

Variância do portfolio em notação matricial

A variância do portfolio pode ser reescrita de uma forma mais simples e genérica. Tomemos a matriz de pesos de cada ativo no portfolio e a matriz de variância-covariância. A variância do portfolio pode ser escrita simplesmente como

$$
\begin{bmatrix} w_D & w_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} var(r_D) & cov(r_D, r_E) \\ cov(r_D, r_E) & var(r_E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_D \\ w_E \end{bmatrix} \qquad (27)
$$

A multiplicação destas três matrizes é exatamente $w_D^2\sigma_D^2+w_E^2\sigma_E^2+2w_Dw_E\times\sigma_D\times\sigma_E\times corr(r_D,r_E)$. Esta notação é especialmente interessante pois permite que calculemos a variância do portfolio para n ativos sem que nos preocupemos com "formulas".