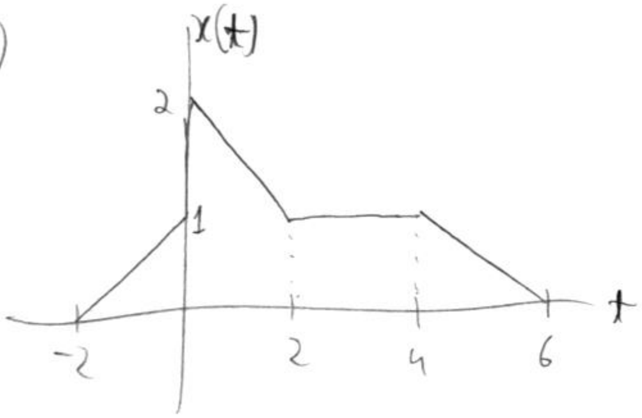
EXERCÍCIOS DE REVISÃO - PROVA 1

(1)



ESBOCE $y(t) = 5 \cdot x\left(\frac{4-t}{2}\right)$

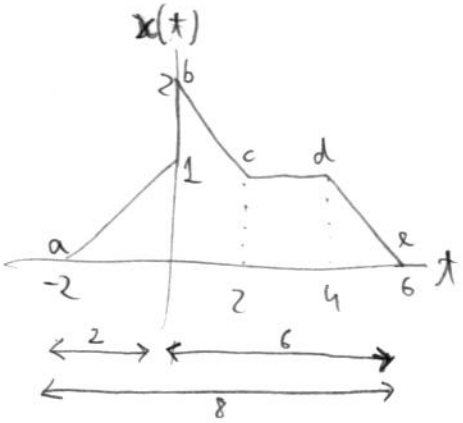
→ COLOCANDO NA FORMA $y(t) = \lambda \cdot x(\pm k(t - t_0))$; $y(t) = 5 \cdot x\left(-\frac{1}{2}(t-4)\right)$

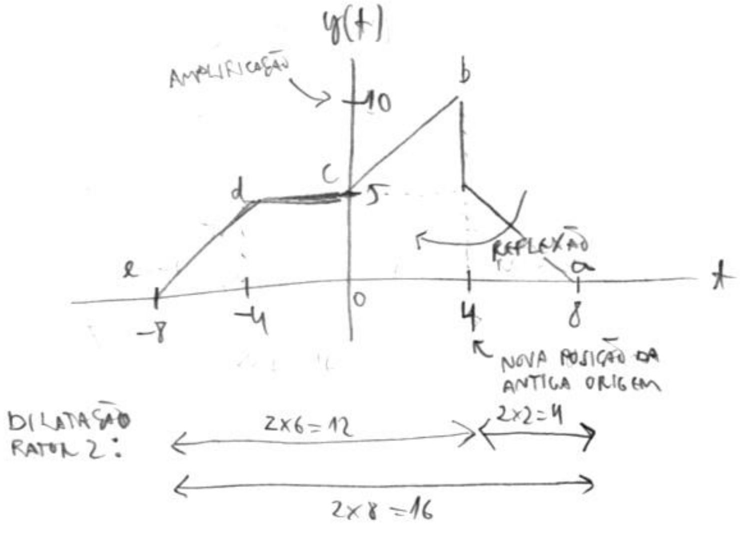
$\lambda = 5$ AMPLIFICAÇÃO

REFLEXÃO

$k = \frac{1}{2}$ DILATAÇÃO FATOR 2

$t_0 = 4$ (NOVA POSIÇÃO DA ANTIGA ORIGEM)





VERIFICANDO:

$y(-8) = 5x\left(\frac{4-(-8)}{2}\right) = 5\,x(6) = 5 \cdot e$

$y(-4) = 5\,x\left(\frac{4-(-4)}{2}\right) = 5 \cdot x(4) = 5 \cdot d$

$y(0) = 5\,x\left(\frac{4-0}{2}\right) = 5 \cdot x(2) = 5 \cdot c$

$y(4) = 5\,x\left(\frac{4-4}{2}\right) = 5 \cdot x(0) = 5 \cdot b$

$y(8) = 5 \cdot x\left(\frac{4-8}{2}\right) = 5 \cdot x(-2) = 5 \cdot a$

(2) ENTRADA: $x(t)$

SAÍDA: $y(t)$

SISTEMA: $y(t) = 4\cos\left[2\pi x(-t)\right]$

(a) SEM MEMÓRIA?

PARA CALCULAR $y(t_0)$ É NECESSÁRIO O VALOR DE $x(-t_0)$. COMO, EM GERAL, $t_0 \neq -t_0$, O SISTEMA É <u>COM MEMÓRIA</u>.

(b) CAUSAL?

PARA CALCULAR $y(t_0)$ É NECESSÁRIO O VALOR DE $x(-t_0)$.

P/ $t_0 \geq 0$, $t_0 \geq -t_0$ $\longrightarrow$ ATÉ AQUI, OK.

MAS, P/ $t_0 < 0$, $t_0 < -t_0$ $\longrightarrow$ É NECESSÁRIO UM VALOR FUTURO DE $x(t)$.

PORTANTO, O SISTEMA É <u>NÃO CAUSAL</u>.

(c) INVERTÍVEL?

SUPONHA $x(t) = 0 \; \forall t$. TEMOS QUE $y(t) = 4 \cdot \cos(0) = 4$.

MAS, SE $x(t) = 1 \; \forall t$, TEMOS QUE $y(t) = 4 \cdot \cos(2\pi) = 4$.

ENTRADAS DISTINTAS $\longrightarrow$ SAÍDAS IGUAIS

PORTANTO, O SISTEMA É <u>NÃO INVERTÍVEL</u>.

(d) ESTÁVEL?

COMO $|y(t)| \leq 4$ P/ QUALQUER $x(t)$, O SISTEMA É <u>ESTÁVEL</u>.

(e) INVARIANTE NO TEMPO?

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = 4\cos\left[2\pi x_1(-t)\right]$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = 4\cos\left[2\pi x_2(-t)\right]$

$\therefore y_2(t) = 4 \cdot \cos\left[2\pi x_1((-t)-t_0)\right] = 4\cos\left[2\pi x_1(-t-t_0)\right]$

$y_1(t-t_0) = 4\cos\left[2\pi x_1(-(t-t_0))\right] = 4\cos\left[2\pi x_1(-t+t_0)\right]$

COMO $y_1(t-t_0) \neq y_2(t)$, O SISTEMA É <u>VARIANTE NO TEMPO</u>.

(CONTINUA NA PRÓXIMA PÁGINA)

② (f) LINEAR?

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = 4\cos[2\pi x_1(-t)]$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = 4\cos[2\pi x_2(-t)]$$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = 4\cos[2\pi x_3(-t)]$$

$$\therefore y_3(t) = 4\cos\{2\pi[a x_1(-t) + b x_2(-t)]\}$$
$$= 4\cos\{\underbrace{a 2\pi x_1(-t)}_{\alpha} + \underbrace{b 2\pi x_2(-t)}_{\beta}\} \leftarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$= 4(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta)$$

$$= 4\cos[a2\pi x_1(-t)] \cdot \cos[b2\pi x_2(-t)] - 4\sin[a2\pi x_1(-t)] \cdot \sin[b2\pi x_2(-t)]$$

MAS: $a y_1(t) + b y_2(t) = 4a\cos[2\pi x_1(-t)] + 4b\cos[2\pi x_2(-t)]$.

COMO $y_3(t) \neq a y_1(t) + b y_2(t)$, O SISTEMA É NÃO LINEAR.

DEMONSTRAÇÃO ALTERNATIVA: POR CONTRA-EXEMPLO

SUPONHA $x_1(t) = 1 \longrightarrow y_1(t) = 4\cos(2\pi \cdot 1) = 4 \cdot 1 = 4$

$$x_2(t) = \frac{1}{4}x_1(t) \longrightarrow y_2(t) = 4\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot x_1(t)\right) = 4\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 1\right) = 4\cos(\pi/2) = 0$$

MAS, $\frac{1}{4} y_1(t) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

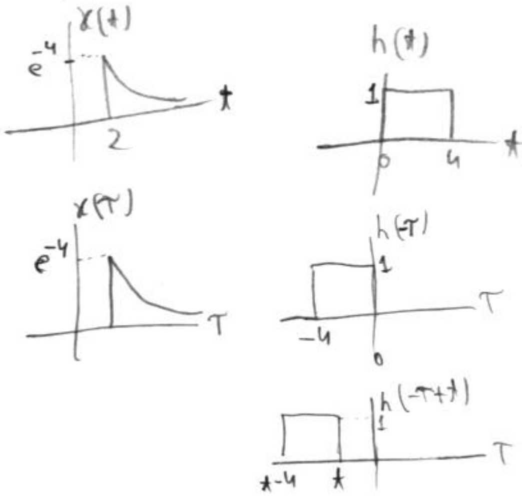
COMO $y_2(t) \neq \frac{1}{4} y_1(t)$, O SISTEMA É NÃO LINEAR.

(3) $x(t) = e^{-2t} \cdot u(t-2)$

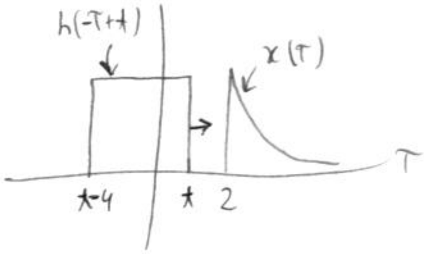
$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

CALCULE $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

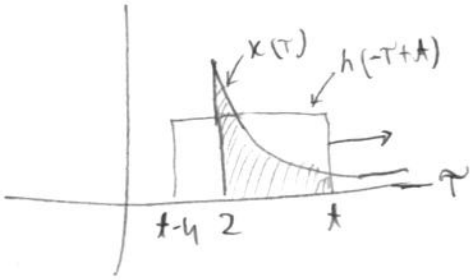


p/ $t<2$



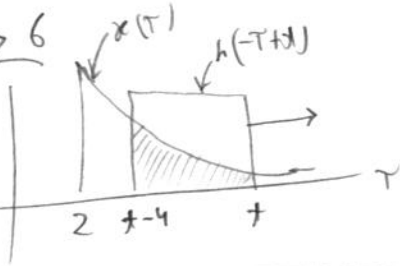
$$\longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, d\tau = 0$$

p/ $2<t<6$



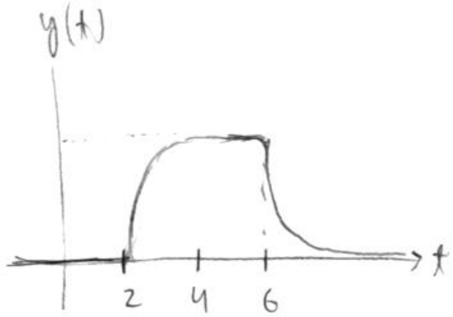
$$\longrightarrow y(t) = \int_{2}^{t} e^{-2\tau}\, d\tau = \left.\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right|_{2}^{t} = \frac{e^{-2t} - e^{-4}}{-2} = \frac{e^{-4} - e^{-2t}}{2}$$

p/ $t>6$



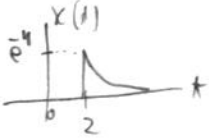
$$\longrightarrow y(t) = \int_{t-4}^{t} e^{-2\tau}\, d\tau = \left.\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right|_{t-4}^{t} = \frac{e^{-2t} - e^{-2t+8}}{-2} = \frac{(e^{8}-1)\, e^{-2t}}{2}$$

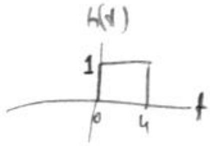
$$\therefore\ \boxed{y(t) = \begin{cases} 0, & t<2 \\ \dfrac{e^{-4} - e^{-2t}}{2}, & 2<t<6 \\ \dfrac{(e^{8}-1)}{2}\, e^{-2t}, & t>6 \end{cases}}$$



(OUTRA FORMA DE RESOLVER NA PRÓXIMA PÁGINA)

(OUTRA FORMA DE FAZER)





3) $x(t) = e^{-2t} \cdot u(t-2)$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \longrightarrow \text{CALCULE } y(t) = x(t) * h(t)$$

TEMOS QUE: $h(t) = u(t) - u(t-4)$

AINDA, $y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [u(t) - u(t-4)] = x(t) * u(t) - x(t) * u(t-4)$

$$= s(t) - s(t-4)$$

EM QUE $s(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{u(t-\tau)}_{=1 \text{ p/ } \tau < t,\ =0 \text{ p/ } \tau > t} d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

→ EM OUTRAS PALAVRAS, $s(t)$ É A RESPOSTA AO DEGRAU DE UM SLIT CUJA RESPOSTA AO IMPULSO É $x(t)$.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2\tau} \underbrace{u(\tau-2)}_{\substack{=1 \text{ p/ } \tau > 2 \\ =0 \text{ p/ } \tau < 2}} d\tau = \begin{cases} \int_{-\infty}^{2} 0\, d\tau + \int_{2}^{t} e^{-2\tau} d\tau, & \text{p/ } t > 2 \\ \int_{-\infty}^{t} 0\, d\tau, & \text{p/ } t \leq 2 \end{cases}$$

$\therefore$ p/ $t \leq 2$, $s(t) = 0$

p/ $t > 2$, $s(t) = \int_{2}^{t} e^{-2\tau} d\tau = \left.\dfrac{e^{-2\tau}}{-2}\right|_{2}^{t} = \dfrac{e^{-2t} - e^{-4}}{-2} = \dfrac{e^{-4} - e^{-2t}}{2}$

→ $y(t) = s(t) - s(t-4)$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 2 \\ \dfrac{e^{-4} - e^{-2t}}{2}, & t > 2 \end{cases} - \begin{cases} 0, & t \leq 6 & (\text{ou } (t-4) \leq 2) \\ \dfrac{e^{-4} - e^{-2(t-4)}}{2}, & t > 6 & (\text{ou } (t-4) > 2) \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 2 \\ \dfrac{e^{-4} - e^{-2t}}{2}, & 2 < t \leq 6 \\ \dfrac{\cancel{e^{-4}} - e^{-2t}}{2} - \dfrac{\cancel{e^{-4}} - e^{8} \cdot e^{-2t}}{2} = \dfrac{(e^{8} - 1) e^{-2t}}{2}, & t > 6 \end{cases}}$$

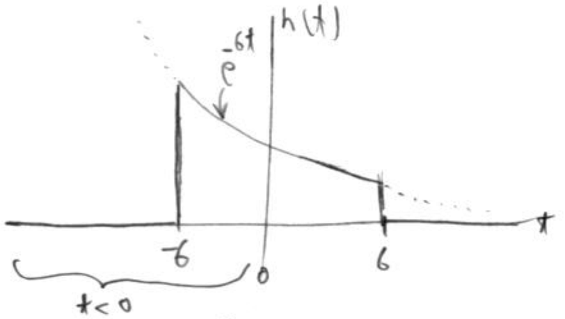
4) A RESPOSTA AO IMPULSO DE UM SLIT É: $h(t) = e^{-6t}\cdot[u(t+6) - u(t-6)]$

a) O SLIT É SEM MEMÓRIA?

NÃO, POIS $h(t) \neq 0$ p/ $t \neq 0$. NA VERDADE, $h(t) \neq 0$ p/ $-6 < t < 6$!

b) O SLIT É CAUSAL?

NÃO, POIS $h(t) \neq 0$ p/ $t < 0$.



c) O SLIT É ESTÁVEL?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-6t}[u(t+6) - u(t-6)] \right| dt = \int_{-6}^{6} e^{-6t}\,dt = \frac{e^{-6t}}{-6}\Bigg|_{-6}^{6} = \frac{e^{-36} - e^{+36}}{-6}$$

$$= \frac{e^{36} - e^{-36}}{6} = 7,2\cdot 10^{14} < \infty$$ → SIM, É ESTÁVEL, POIS É ABSOLUTAMENTE INTEGRÁVEL.

d) É INVERTÍVEL?

→ $h(t)$ É INVERTÍVEL SE E SOMENTE SE EXISTE UM $h_1(t)$ TAL QUE $h(t) * h_1(t) = \delta(t)$.

MAS COMO ENCONTRAR $h_1(t)$, SE É QUE ELE EXISTE? É PRECISO USAR TRANSFORMADA DE FOURIER OU TRANSFORMADA DE LAPLACE, QUE NÃO ESTUDAMOS AINDA.

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$$

$$H_1(s) = \frac{1}{H(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_1(t)$$

(SE CONVERGIR)

OU

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

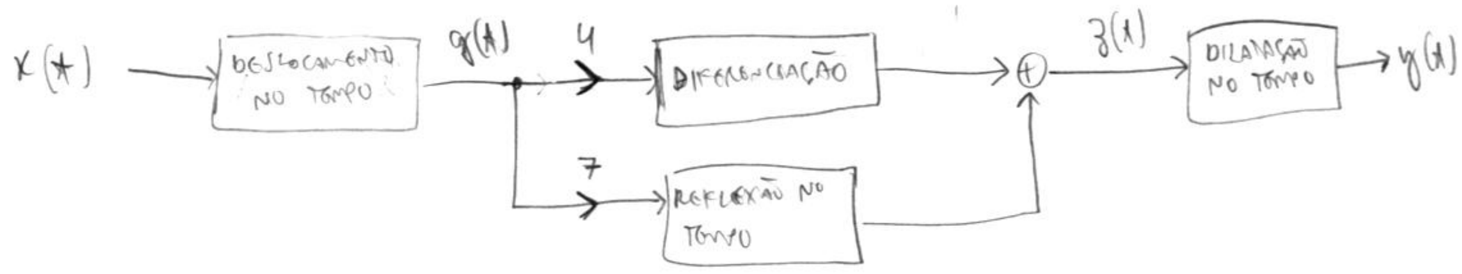
$$H_1(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h_1(t)$$

(SE CONVERGIR)

(5) $x(t)$ É UM SINAL PERIÓDICO COM PERÍODO 2. OS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER DE $x(t)$ SÃO:

$$a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \dfrac{j(-1)^k}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}$$

CONSIDERE A SEGUINTE INTERCONEXÃO DE SISTEMAS:



TEMOS QUE: $x(t) \longleftrightarrow a_k$

$$g(t) = x(t+3) \longleftrightarrow b_k$$

$$z(t) = 4\frac{d}{dt}g(t) + 7g(-t) \longleftrightarrow c_k$$

$$y(t) = z(t/5) \longleftrightarrow d_k$$

(a) $b_k = ?$

$$\underset{t_0=-3}{x(t+3)} \longleftrightarrow a_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0} \quad , \quad t_0 = -3, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$\therefore \; b_k = a_k \cdot e^{-jk\pi(-3)} = e^{jk\pi 3} \cdot a_k = (e^{j3\pi})^k \cdot a_k$$

$$= (-1)^k \cdot a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ j/k\pi, & k \neq 0 \end{cases}$$

5 b $c_k = ?$

$$\frac{d}{dt} g(t) \longleftrightarrow jk\omega_0 \cdot b_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ jk\pi \cdot \frac{j}{k\pi} = -1, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$g(-t) \longleftrightarrow b_{-k} = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{j}{(-k)\pi} = -j/k\pi, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$z(t) = 4\frac{d}{dt} g(t) + 7g(-t) \longleftrightarrow c_k = \begin{cases} 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0, & k=0 \\ 4 \cdot (-1) + 7\left(\frac{-j}{k\pi}\right), & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k=0 \\ -4 - j(7/k\pi), & k \neq 0 \end{cases}$$

c) $d_k = ?$

$y(t) = z(t/5) \longleftrightarrow d_k = c_k$, MAS COM PERÍODO 5X MAIOR: $T = 10$
E FREQUÊNCIA 5X MENOR: $\omega_0 = \pi/5$

$$\therefore \boxed{d_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ -4 - j\left(\frac{7}{k\pi}\right), & k \neq 0 \end{cases}}$$

⑥ $x(t) = 3 + 5\cos\left(6\pi t + \pi/4\right) + 9\,\text{sen}\left(18\pi t\right)$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{j2\omega}{1+j7\omega}$$

ⓐ CALCULE a_k, OS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER DE $x(t)$.

$$x(t) = \underset{k=0}{3} + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\underset{k=1}{e^{j6\pi t}} + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\underset{k=-1}{e^{-j6\pi t}} + \frac{9}{2j}\underset{k=3}{e^{j3\cdot 6\pi t}} - \frac{9}{2j}\underset{k=-3}{e^{-j3\cdot 6\pi t}}$$

$\therefore\ \omega_0 = 6\pi$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{3}$

$a_0 = 3$

$a_1 = \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

$a_{-1} = \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$a_3 = \frac{9}{2j}$

$a_{-3} = \frac{-9}{2j}$

$a_k = 0$ p/ $|k| = 2, 4, 5, 6, 7, \ldots$

ⓑ CALCULE b_k, OS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER DE $y(t)$.

$$x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(jk\omega_0)\, e^{j\omega_0 t}$$

$\therefore\ b_k = a_k H(jk\omega_0)$

$$b_0 = a_0 \cdot \frac{j\cdot 2\cdot 0\cdot \omega_0}{1+j7\cdot 0\cdot \omega_0} = 0$$

$$b_1 = a_1 \cdot \frac{j\cdot 2\cdot 1\cdot \omega_0}{1+j7\cdot 1\cdot \omega_0} = \frac{5}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot \frac{j12\pi}{1+j42\pi} = \frac{j60\pi}{2+j84\pi}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$b_{-1} = a_{-1}\,\frac{j2(-1)\cdot \omega_0}{1+j7(-1)\cdot \omega_0} = \frac{5}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot \frac{(-j12\pi)}{1-j42\pi} = \frac{-j60\pi}{2-j84\pi}\cdot e^{-j\pi/4}$$

(CONTINUA NA PRÓXIMA PÁGINA)

$$b_3 = a_3 \cdot \frac{j2\cdot 3\omega_0}{1+j7\cdot 3\omega_0} = \frac{9}{2j}\cdot\frac{j36\pi}{1+j126\pi} = \frac{j324\pi}{2j-252\pi} = \frac{-j162\pi}{126\pi - j}$$

$$b_{-3} = a_{-3}\cdot\frac{j2(-3)\omega_0}{1+j7(-3)\omega_0} = -\frac{9}{2j}\cdot\frac{(-j36\pi)}{1-j126\pi} = \frac{j324\pi}{2j+252\pi} = \frac{j162\pi}{126\pi + j}$$

$$b_k = a_k\cdot\frac{j2\cdot k\omega_0}{1+j7k\omega_0} = 0 \quad p/\ |k| = 2,4,5,6,7,\dots$$

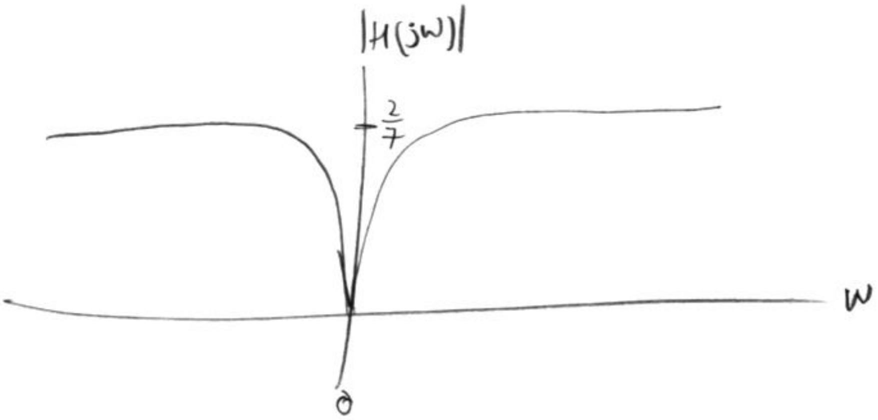
(c) É UM FILTRO PASSA-BAIXAS OU PASSA-ALTAS?

COM $\omega = 0$, $|H(j\omega)| = \left|\frac{j2\cdot 0}{1+j7\cdot 0}\right| = 0$

L'HÔPITAL

COM $\omega \to \infty$, $|H(j\omega)| = \lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{j2\omega}{1+j7\omega}\right| = \left|\frac{j2}{j7}\right| = \left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$

É UM FILTRO <u>PASSA-ALTAS</u> DE PRIMEIRA ORDEM:



(d) O SISTEMA É INVERTÍVEL?

<u>NÃO</u>, POIS A COMPONENTE D.C. DE $x(t)$ FOI COMPLETAMENTE ANULADA PELO SISTEMA $\{a_0 = 3$, mas $b_0 = 0\}$; ASSIM, $y(t)$ NÃO PODE SER RECUPERADO A PARTIR DE $x(t)$, UMA VEZ QUE a_0 NÃO PODE SER CALCULADO A PARTIR DE b_0.

AS DEMAIS COMPONENTES PODERIAM SER RECUPERADAS, FAZENDO:

$$a_k = \frac{b_k}{H(jk\omega_0)} = \frac{1+j7k\omega_0}{j2k\omega_0}\cdot b_k \quad , \quad k \neq 0$$