

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Modelos ARMA-GARCH na modelagem da volatilidade de ações financeiras

por

Paulo Siga Thomaz

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, Abril, 2019

Paulo Siga Thomaz

“ Modelos ARMA – GARCH na modelagem da volatilidade de ações financeiras ”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

Aprovado em 25/03/2019

BANCA EXAMINADORA



Prof.^a. Dr.^a. Viviane Leite Dias de Mattos
Orientadora – FURG



Prof. Dr. Luiz Ricardo Nakamura
Coorientador – UFSC



Prof.^a. Dr.^a. Diana Francisca Adamatti
FURG



Prof.^a. Dr.^a. Andrea Cristina Konrath
UFSC

Rio Grande - RS
2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de Mestrado que fez com que a realização deste trabalho fosse possível.

Agradeço também a Universidade Federal de Rio Grande (FURG) e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) por me proporcionarem a oportunidade de ingressar no programa de mestrado e aprofundar meus conhecimentos acadêmicos.

Por fim, agradeço a minha família e amigos pelo apoio durante os dois anos de mestrado.

RESUMO

O presente estudo teve como objetivo avaliar o desempenho da aplicação conjunta dos modelos Autoregressivos de Médias Móveis (ARMA) e Autoregressivos de Heteroscedasticidade Condicional (GARCH) na previsão da volatilidade das ações diárias da empresa AmBev (ABEV3), do banco Bradesco (BBDC3) e da empresa Vale (VALE3). Além do modelo GARCH, também foram aplicadas algumas de suas extensões assimétricas, os modelos GARCH Exponencial (EGARCH), GARCH com limiar (TGARCH), Potência GARCH (PGARCH) e o GARCH Glosten-Jaganathan - Rukle (GJR-GARCH), com o objetivo de considerar o efeito alavanca, geralmente presente em séries financeiras. Além disso, como as três séries de retornos apresentaram volatilidade persistente, o modelo GARCH Integrado (IGARCH) também foi aplicado. Os modelos foram especificados considerando-se duas distribuições para os resíduos, normal e *t* de *Student*. Na avaliação da previsão, foi utilizada a volatilidade realizada, calculada a partir de retornos intradiários computados a cada 15 minutos, durante o intervalo de previsão de 21 dias. Os achados do estudo indicam que a melhor modelagem foi da série ABEV3, de menor volatilidade dentre as três séries, em que os modelos PGARCH(1,1) – *Student* e GARCH(1,1) – *Student* apresentaram os menores erros, respectivamente, nas previsões dinâmica e estática. Os resultados evidenciaram superioridade por parte dos modelos seguindo a distribuição *t* de *Student*, os quais, ao contrário dos modelos seguindo a distribuição normal, foram capazes de produzir resíduos seguindo a distribuição especificada no modelo. Além disso, na modelagem de todas as séries, os modelos seguindo a distribuição *t* de *Student* apresentaram critérios de informação menores nos ajustes e erros menores de previsão. No que diz respeito ao desempenho dos modelos, os assimétricos se mostraram, de forma geral, superiores no ajuste, de acordo com os critérios de informação. Em relação a previsão, no entanto, a modelagem da série BBDC3 apresentou como melhor modelo o GARCH(1,1) – *Student* simétrico, indicando que, para essa série, os modelos assimétricos não resultaram em uma melhoria de desempenho na previsão. Comparando-se os modelos simétricos, o modelo IGARCH apresentou menores critérios de informação que o modelo GARCH nas séries ABEV3 e VALE3, entretanto não teve erros menores de previsão em nenhuma das três séries. Os achados se alinham com outros trabalhos presentes na literatura, em que, de forma geral, os modelos GARCH apresentam melhor desempenho em séries de baixa volatilidade e que o uso de modelos assimétricos especificados com outras distribuições além da normal podem conduzir a resultados melhores de previsão da volatilidade.

Palavras-chaves: Modelos heteroscedásticos. Modelos Assimétricos. Previsão. Caudas pesadas.

ABSTRACT

The aim of this study was to evaluate the performance of the joint application of the Autoregressive Moving Average (ARMA) and Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) models in forecasting the volatility of the daily stocks of the AmBev company (ABEV3), Bradesco bank (BBDC3) and Vale company (VALE3). In addition to the GARCH model, some of its asymmetric extensions have also been applied, the Exponential GARCH (EGARCH), Threshold GARCH (TGARCH), Power GARCH (PGARCH) and Glosten-Jaganathan-Rukle GARCH (GJR-GARCH), with the objective of considering the leverage effect, usually present in financial time series. Also, since the three series of returns presented persistent volatility, the Integrated GARCH model (IGARCH) was also applied. The models were specified considering two distributions for the residues, normal and Student's t . In the forecast evaluation, the realized volatility was calculated from intraday returns, computed every 15 minutes, during the forecast interval of 21 days. The results showed superiority for the models following the Student's t distribution, which, unlike the models following the normal distribution, were able to produce residues following the specified distribution. In addition, in the modelling of all three series, the models following the Student's t distribution presented smaller information criteria in the fitting and smaller forecast errors. Regarding the performance of the models, the asymmetric models were, in general, better in the fitting, according to the information criteria. Regarding the forecast, however, the modelling of the BBDC3 series presented as the best model the GARCH(1,1) – *Student* symmetric, indicating that, for this series, the consideration of the leverage effect did not result in a performance improvement in the forecast. In the comparison between the symmetric models, the IGARCH model presented smaller information criteria than the GARCH model in the ABEV3 and VALE3 series, however it did not obtain smaller forecast errors in any of the three series. The findings agree with other studies, where GARCH models generally perform better in low volatility time series and the use of asymmetric models specified with other distributions besides the normal can lead to better results in forecasting the volatility.

Keywords: Heteroskedasticity models. Asymmetric models. Forecast. Heavy tails.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	16
2. CONTEXTUALIZAÇÃO	20
2.1. Bolsa de Valores	20
2.2. Ações.....	21
2.3. Risco.....	22
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
3.1. Conceitos básicos.....	24
3.1.1. Modelos lineares e não lineares	24
3.1.2. Processos estocásticos.....	25
3.1.3. Autocovariância e autocorrelação.....	25
3.1.4. Ruído branco	26
3.1.5. Estacionariedade e ergodicidade	26
3.1.6. Invertibilidade.....	27
3.1.7. Passeio aleatório	27
3.1.8. Retornos	28
3.2. Estrutura básica dos modelos ARMA-GARCH	30
3.2.1. Equação para a média: modelos ARMA.....	31
Modelos autorregressivos (AR)	31
Modelos de médias móveis (MA)	32
Modelos autorregressivos de médias móveis (ARMA).....	32
Modelos autorregressivos integrados de médias móveis (ARIMA)	33
3.2.2. Equação para a variância: modelos GARCH	33
Modelos autorregressivos de heteroscedasticidade condicional (ARCH).....	34
Modelos autorregressivos de heteroscedasticidade condicional generalizados (GARCH) ...	36
3.3. Identificação dos modelos ARMA-GARCH.....	38
3.3.1. Função de autocorrelação (FAC) e Função de autocorrelação Parcial (FACP).....	38
3.3.2. Critérios de informação.....	40
3.4. Estimação dos parâmetros dos modelos ARMA-GARCH	41
3.4.1. Função de máxima verossimilhança para os modelos ARMA.....	42
3.4.2. Função de máxima verossimilhança para os modelos GARCH.....	43
3.5. Testes de estacionariedade	44
3.6. Diagnóstico dos resíduos dos modelos ARMA-GARCH	46
3.7. Previsão com modelos GARCH	48
3.8. Extensões assimétricas do modelo GARCH	50

3.8.1.	GARCH Exponencial (EGARCH)	51
3.8.2.	GARCH com limiar (TGARCH) e GARCH Glosten-Jaganathan-Rukle (GJR-GARCH)	51
3.8.3.	Potência GARCH (PGARCH)	52
3.8.4.	Curva de impacto de informação	52
3.9.	Estudos relacionados	54
4.	METODOLOGIA	56
5.	RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
5.1.	Ações da empresa AmBev (ABEV3)	61
5.1.1.	Análise exploratória	61
5.1.2.	Verificação da estacionariedade e autocorrelação	62
5.1.3.	Aplicação do modelo ARMA e diagnóstico dos resíduos	63
5.1.4.	Aplicação dos modelo GARCH e diagnóstico dos resíduos	66
5.1.5.	Previsão e avaliação dos modelos selecionados	70
5.1.6.	Curva de impacto de informações	72
5.2.	Ações do banco Bradesco (BBDC3)	74
5.2.1.	Análise exploratória	74
5.2.2.	Verificação da autocorrelação e estacionariedade	75
5.2.3.	Aplicação do modelo ARMA e diagnóstico dos resíduos	76
5.2.4.	Aplicação dos modelos GARCH e diagnóstico dos resíduos	78
5.2.5.	Resultados e avaliação da previsão dos modelos GARCH	83
5.2.6.	Curva de impacto de informações	84
5.3.	Ações da empresa Vale (VALE3)	86
5.3.1.	Análise exploratória	86
5.3.2.	Verificação da autocorrelação e estacionariedade	87
5.3.3.	Aplicação do modelo ARMA e diagnóstico dos resíduos	88
5.3.4.	Aplicação dos modelos GARCH e diagnóstico dos resíduos	91
5.3.5.	Resultados e avaliação da previsão dos modelos GARCH	95
5.3.6.	Curva de impacto de informações	97
5.4.	Análise comparativa dos resultados	98
6.	Considerações finais	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Estatísticas descritivas dos retornos da série ABEV3	62
Tabela 5.2: Modelos ARMA aplicados aos retornos da série ABEV3	64
Tabela 5.3: Modelos GARCH aplicados aos retornos da série ABEV3	66
Tabela 5.4: Modelos IGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3	67
Tabela 5.5: Modelos EGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3	67
Tabela 5.6: Modelos TGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3	68
Tabela 5.7: Modelos PGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3	68
Tabela 5.8: Modelos GJR-GARCH aplicados aos retornos da série ABEV3	69
Tabela 5.9: Resultados dos modelos na previsão da volatilidade dos retornos da série ABEV3	71
Tabela 5.10: Estatísticas descritivas dos retornos da série BBDC3	75
Tabela 5.11: Modelos ARMA aplicados aos retornos da série BBDC3	76
Tabela 5.12: Modelos GARCH aplicados aos retornos da série BBDC3	79
Tabela 5.13: Modelos IGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3	79
Tabela 5.14: Modelos EGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3	80
Tabela 5.15: Modelos TGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3	80
Tabela 5.16: Modelos PGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3	81
Tabela 5.17: Modelos GJR-GARCH aplicados aos retornos da série BBDC3	81
Tabela 5.18: Resultados dos modelos na previsão da volatilidade dos retornos da série BBDC3	83
Tabela 5.19: Estatísticas descritivas dos retornos da série BBDC3	87
Tabela 5.20: Modelos ARMA aplicados aos retornos da série VALE3	89
Tabela 5.21: Modelos GARCH aplicados aos retornos da série VALE3	91
Tabela 5.22: Modelos IGARCH aplicados aos retornos da série VALE3	91
Tabela 5.23: Modelos EGARCH aplicados aos retornos da série VALE3	92
Tabela 5.24: Modelos TGARCH aplicados aos retornos da série VALE3	92
Tabela 5.25: Modelos PGARCH aplicados aos retornos da série VALE3	93
Tabela 5.26: Modelos GJR-GARCH aplicados aos retornos da série VALE3	93
Tabela 5.27: Resultados dos modelos na previsão da volatilidade dos retornos da série VALE3	95
Tabela 5.28: Resumo dos resultados obtidos na modelagem das séries ABEV3, BBDC3 e VALE3	98

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Fluxograma do processo de compra de ações.....	22
Figura 3.1: (a) Preços e (b) retornos diários da série IBOVESPA no período entre 02/01/2007 e 11/04/2018.....	29
Figura 3.2: (a) FAC da série de retornos e (b) de retornos ao quadrado do IBOVESPA no período entre 02/01/2007 e 11/04/2018.....	34
Figura 3.3 – (a) FAC e (b) FACP de um modelo AR(1).....	39
Figura 3.4 – (a) FAC e (b) FACP de um modelo MA(1).....	39
Figura 3.5 – (a) FAC e (b) FACP de um modelo ARCH(1)	40
Figura 3.6: Curva de impacto de informação do modelo GARCH e suas extensões assimétricas aplicados a série de retornos BBSA3	53
Figura 4.1: Fluxograma da metodologia utilizada no estudo	60
Figura 5.1: (a) Série de preços e de (b) retornos das ações ABEV3 no período compreendido entre 02/01/2007 até 11/04/2018.....	61
Figura 5.2: Histograma da série de retornos ABEV3	62
Figura 5.3: (a) FAC e (b) FACP da série de retornos ABEV3.....	63
Figura 5.4: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos do modelo ARMA(1,1).....	65
Figura 5.5: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(1,1)	65
Figura 5.6: Gráficos quantil-quantil (Q-Q) dos resíduos do modelo TGARCH(1,1), seguindo a (a) distribuição normal e a (b) <i>t</i> de <i>Student</i> , aplicado à série de retornos ABEV3.	70
Figura 5.7: (a) Previsão dinâmica da volatilidade pelo modelo PGARCH(1,1) - <i>Student</i> e (b) previsão estática da volatilidade pelo modelo GARCH(1,1) – <i>Student</i>	72
Figura 5.8: Curva de impacto de informação dos modelos especificados com distribuição <i>t</i> de <i>Student</i> aplicados aos retornos da série ABEV3.....	73
Figura 5.9: (a) Série de preços e (b) retornos das ações BBDC3 no período compreendido entre 02/01/2007 até 11/04/2018.....	74
Figura 5.10: Histograma da série de retornos BBDC3	75
Figura 5.11: (a) FAC e (b) FACP da série de retornos BBDC3	76
Figura 5.12: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos do modelo ARMA(0,3)	77
Figura 5.13: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(0,3)	78
Figura 5.14: Gráficos quantil-quantil (Q-Q) dos resíduos do modelo TGARCH(1,1), seguindo a (a)	

distribuição normal e a (b) <i>t</i> de <i>Student</i> , aplicado aos retornos da série BBDC3.....	82
Figura 5.15: (a) Previsão dinâmica e (b) estática da volatilidade pelo modelo GARCH(1,1) – <i>Student</i>	84
Figura 5.16: Curvas de impacto de informações dos modelos aplicados aos retornos da série BBDC3	85
Figura 5.17: (a) Série de preços e (b) retornos da série VALE3 no período compreendido entre 02/01/2007 até 11/04/2018.....	86
Figura 5.18: Histograma da série de retornos VALE3.....	87
Figura 5.19: (a) FAC e (b) FACP da série de retornos VALE3	88
Figura 5.20: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(6,5)	90
Figura 5.21: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(6,5)	90
Figura 5.22: Gráficos quantil-quantil (Q-Q) dos resíduos do modelo GJR-GARCH(1,1), seguindo a (a) distribuição normal e a (b) <i>t</i> de <i>Student</i> , aplicado aos retornos da série VALE3.....	94
Figura 5.23: (a) Previsão dinâmica e (b) estática da volatilidade pelo modelo EGARCH(1,1) – <i>Student</i>	96
Figura 5.24: Curvas de impacto de informações dos modelos aplicados aos retornos da série VALE3	97

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Expoente do desvio padrão na equação dos modelos PGARCH e TGARCH
A	Coeficiente de assimetria
ALM_h	Valor da estatística ARCH-LM
b	Parâmetro da regressão de Mincer-Zarnowitz
B	Operador de defasagem
c	Constante de um modelo
cov	Covariância
d	Ordem de diferenciação de um modelo ARIMA
d_t	Variável dummy no t -ésimo tempo
DF	Valor da estatística Dickey-Fuller
$E(.)$	Valor esperado
$f(.)$	Função
$g(.)$	Curva de impacto de informação
h_t	Desvio padrão condicional no t -ésimo tempo
$h(.)$	Função do desvio padrão condicional
H_0	Hipótese nula
H_1	Hipótese alternativa
JB	Valor da estatística do teste Ljung-Box
K	Coeficiente de curtose
$KPSS$	Valor da estatística do teste KPSS
L	Passos à frente da previsão com modelos GARCH
m	Número de defasagens dos retornos de um modelo GARCH
m_4	Quarto momento
M	Número de períodos no qual o dia é dividido para calcular os retornos intradiários

n	Número de defasagens das variâncias passadas de um modelo GARCH
n_Q	Número de defasagens do teste de Ljung-Box
p	Número de defasagens de um processo autorregressivo
P	Probabilidade associada a um espaço amostral
P_t	Preço no t -ésimo tempo
p_t	Logarítmo do preço P_t no t -ésimo tempo
q	Número de defasagens de um processo de médias móveis
Q	Valor da estatística Ljung-Box
r_t	Log-retorno ou retorno no t -ésimo tempo
\bar{r}_t	Resíduos padronizados
$r_{d,m}$	Retorno intradiário do dia d correspondente ao período m
R_t	Retorno líquido simples no t -ésimo tempo
R^2	Coeficiente de determinação
s	Possível sequência de um processo estocástico
S	Conjunto das possíveis sequências de um processo estocástico
S^2	Variância incondicional amostral
S_t	Soma parcial dos resíduos estimados da regressão do teste KPSS
t	Tempo
t_ν	Distribuição t de <i>Student</i> com ν graus de liberdade
T	Número de observações da série temporal
Var	Variância incondicional
VR_d	Variância realizada no dia d
$VOLR_d$	Volatilidade realizada no dia d
x_t	Sequência de observações que formam um passeio aleatório
y_t	Valor observado da série temporal no t -ésimo tempo
y'_t	Valor da série temporal diferenciada no t -ésimo tempo

\xrightarrow{p}	Convergência em probabilidade
\rightarrow	Convergência

Símbolos gregos

α_i	i -ésimo parâmetro de um modelo GARCH, correspondente a parcela referente aos retornos
α	Coefficiente da regressão do teste ADF
$\hat{\alpha}$	Estimativa do coeficiente α
$s(\hat{\alpha})$	Desvio padrão do coeficiente estimado $\hat{\alpha}$
β_j	j -ésimo parâmetro de um modelo GARCH, correspondente a parcela referente às variâncias passadas
ε_t	Choque aleatório ou resíduo no t -ésimo tempo
μ	Média incondicional
μ_t	Média condicional
$\mu(.)$	Função da média condicional
Ω	Espaço amostral
\mathcal{F}	Subconjuntos de um espaço amostral
\mathfrak{I}_{t-1}	Toda informação disponível de uma série temporal até o instante $t - 1$
ρ_j	j -ésima correlação
$\hat{\rho}_j$	j -ésima correlação amostral
γ_j	j -ésima autocovariância
$\hat{\gamma}_j$	j -ésima autocovariância amostral
σ^2	Variância incondicional
σ_l^2	Variância a longo prazo
ϕ_i	i -ésimo parâmetro de um processo autorregressivo
θ_j	j -ésimo parâmetro de um processo de médias móveis

v_t	Sequência de variáveis aleatórias com média zero, não correlacionadas e de variância não constante
\mathcal{L}_{max}	Valor da máxima verossimilhança
Ψ	Vetor de parâmetros populacionais da função de máxima verossimilhança
ψ_i	i -ésimo parâmetro de um modelo linear
ν	Graus de liberdade de uma distribuição t de <i>Student</i>
χ^2	Distribuição qui-quadrado
λ	Parâmetro que determina o grau de assimetria dos retornos nos modelos assimétricos
$\Gamma(.)$	Função gamma

LISTA DE ABREVIATURAS

ABEV3	Ações da empresa AmBev
AIC	Critério de informação de Akaike
AICc	Critério de informação de Akaike corrigido
ADF	Teste aumentado de Dickey-Fuller
ARFIMA	Modelo autorregressivo fracionário integrado de médias móveis
BIC	Critério de informação de Schwarz ou bayesiano
BBAS3	Ações do Banco do Brasil
BBDC3	Ações do banco Bradesco
AR	Modelo autorregressivo
ARCH	Modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional
ALM	Teste ARCH multiplicador de Lagrange
ARIMA	Modelo autorregressivo integrado de médias móveis
ARMA	Modelo Autorregressivo de Médias Móveis
DAF	Dados de alta de frequência
DF	Teste Dickey-Fuller
EGARCH	Modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizado exponencial
FIGARCH	Modelo autorregressivo fracionário integrado de heteroscedasticidade condicional generalizado
GARCH	Modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizado
GED	Distribuição de erro generalizada
HQIC	Critério de informação de Hannan-Quinn
IBOVESPA	Índice BOVESPA
IGARCH	Modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizado

integrado

FAC	Função de autocorrelação
FACP	Função de autocorrelação parcial
GJR-GARCH	Modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizado de Glosten, Jaganathan e Runkle
JB	Teste de Jarque-Bera
LB	Teste de Ljung-Box
KPSS	Teste de Kwiatkowski-Philips-Schmidt-Shin
MAE	Erro médio absoluto
MAPE	Erro médio percentual absoluto
MQO	Mínimos quadrados ordinários
PGARCH	Modelo potência autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizado
RB	Ruído branco
RMSE	Raiz do erro quadrático médio
TGARCH	Modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional com limiar
VALE3	Ações da empresa VALE

1. INTRODUÇÃO

Uma sequência de observações de uma variável aleatória ao longo do tempo é denominada série temporal, caracterizando-se como uma possível realização de um processo estocástico. Sua modelagem permite identificar padrões de comportamento para a variável aleatória, possibilitando a realização de previsões (Morettin e Toloí, 2006). Essa análise pode ser de grande valia para gestores atuantes em todas as áreas do conhecimento, visto que eles necessitam constantemente tomar decisões.

No estudo de séries temporais, a análise de séries financeiras vem ganhando maior destaque nos últimos anos, principalmente pela necessidade de se conhecer o risco associado aos investimentos. Nesse contexto, mensurar a volatilidade dos ativos financeiros é importante, visto que essa medida pode ser usada como uma estimativa do risco associado ao instrumento financeiro, além de auxiliar na precificação dos ativos e nas estratégias de investimento (Engle e Patton, 2001).

A volatilidade pode ser definida, segundo Morettin (2011), como o desvio padrão condicional de uma variável, geralmente preços no caso de séries financeiras. Como essa variação é instantânea e, em geral, temos apenas a observação correspondente ao fechamento do preço do ativo em determinado dia, a volatilidade é considerada uma variável latente, ou seja, não é diretamente observável. Outra característica comumente detectada é que a volatilidade se apresenta em aglomerados, assumindo valores altos em determinados períodos e reduzidos em outros. Além disso, a volatilidade pode não reagir de forma igual a choques negativos e positivos e, também, raramente diverge para o infinito. É importante, portanto, que o modelo escolhido seja capaz de captar essas características, levando a modelagens melhores e previsões mais precisas.

Como os modelos da classe de autorregressivos de médias móveis (ARMA), introduzidos por Box e Jenkins (1970), consideram a variância condicional constante e se limitam a modelagem do primeiro momento, eles se tornam inadequados para a modelagem de séries financeiras, visto que mesmo o rendimento (média) é difícil de ser explicado por essa metodologia, já que os preços, em geral, se apresentam como passeios aleatórios. Uma alternativa para modelar a volatilidade é o modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional (ARCH), introduzido por Engle (1982). Inicialmente projetado com a intenção de modelar a inflação, esse modelo é mais adequado para séries financeiras, já que, em oposição aos modelos ARMA, é capaz de captar a heteroscedasticidade, considerando a variância condicional como um parâmetro não constante e dependente ao longo do

tempo. Além disso, o modelo ARCH também leva em consideração as caudas pesadas e os aglomerados de volatilidade que frequentemente se verificam em séries financeiras. Bollerslev (1986) aperfeiçoou o modelo ARCH, criando o modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizado (GARCH), o qual possui as mesmas características do modelo de Engle, mas necessita de uma quantidade menor de parâmetros.

Uma das desvantagens do modelo GARCH, no entanto, é que ele não considera o efeito alavanca geralmente observado nas séries de retornos financeiros, o qual consiste no fato de choques negativos terem maior impacto na volatilidade. Com o objetivo de contornar essa limitação, diversas extensões do modelo GARCH foram criadas de forma a incorporar esse efeito assimétrico. Dentre elas se destacam os modelos GARCH exponencial (EGARCH) (Nelson, 1991), GARCH com limiar (TGARCH) (Zakoian, 1994), GARCH Glosten-Jaganathan -Rukle (GJR-GARCH) (Glosten et al., 1993) e potência GARCH (PGARCH) (Ding et al., 1993). Por serem capazes de captar uma propriedade da volatilidade que não é considerada na teoria dos modelos GARCH, os modelos assimétricos podem ser utilizados na modelagem de retornos financeiros, de forma a conduzir a resultados melhores.

Entretanto, existe grande incerteza em como avaliar o desempenho dos modelos GARCH em relação a previsão. Segundo Andersen e Bollerslev (1998), por exemplo, diversos estudos utilizaram os retornos diários ao quadrado ou absolutos para comparar com os valores de volatilidade obtidos, conduzindo a previsões imprecisas e colocando em dúvida o valor prático desses modelos. Isso se deve ao fato da volatilidade não ser diretamente observável, fazendo com que a abordagem clássica de comparar o ajuste de um modelo com as realizações do processo não seja imediatamente aplicável na avaliação da previsão nesse caso. Uma alternativa para construir um indicador de volatilidade mais adequado é utilizar dados de alta frequência (DAF), computando a chamada volatilidade realizada para cada dia por meio de retornos intradiários. Estudos como os de Andersen e Bollerslev (1998) e Drost e Nijman (1993) mostraram que o desempenho dos modelos GARCH em relação a previsão aumenta consideravelmente quando os resultados são comparados com a volatilidade realizada. Contudo, Morettin (2011) discorre sobre alguns problemas envolvendo os DAF, como a irregularidade nos tempos das negociações e a dificuldade de obtenção desses dados, os quais raramente estão disponíveis de forma gratuita e geralmente não se tem registros intradiários de longos períodos de tempo. Portanto, a vantagem dos modelos GARCH é que estes se destinam a estimar a volatilidade de forma indireta, a partir dos retornos diários, os quais são dados mais acessíveis e de maior disponibilidade.

Outra dificuldade geralmente encontrada no uso desses modelos é a de encontrar uma

distribuição de probabilidade adequada para os resíduos. Em geral, na modelagem de séries temporais, costuma-se estimar os parâmetros dos modelos por meio do método de máxima verossimilhança, considerando que os choques aleatórios seguem a distribuição normal. Entretanto, as séries de retornos possuem caudas pesadas, com excesso de curtose, tornando suas distribuições bem afastadas da distribuição normal padrão (Engle e Patton, 2001). É importante, portanto, que a especificação do modelo incorpore essa característica, de forma que a estimação pelo método de máxima verossimilhança seja consistente. Por esse motivo, uma alternativa muito utilizada é propor para os resíduos uma distribuição t de *Student* ou alguma outra distribuição para os modelos GARCH, como a distribuição de erro generalizada (GED) (Nelson, 1991) ou a distribuição t de *Student* assimétrica (Fernandez e Stell, 1998).

Dito isso, os modelos da família GARCH desempenham papel importante no mercado financeiro, pois são capazes de abranger características das séries financeiras que outros modelos clássicos de séries temporais não conseguem, sendo, portanto, mais aptos para a modelagem da volatilidade. Esta, por sua vez, pode ser usada como proxy do risco, fornecendo estimativas importantes sobre a garantia dos investimentos, além de auxiliar nos processos de precificação de ações e planejamento estratégico. Além disso, de acordo com Poon e Granger (2003), a volatilidade do mercado financeiro pode ter uma ampla repercussão na economia como um todo. Incidentes globais como escândalos de corrupção ou crises econômicas podem causar grandes turbulências nos mercados financeiros de diversos países e, conseqüentemente, impactando a economia global. Por esta razão, políticos e administradores muitas vezes se baseiam nas estimativas de volatilidade do mercado financeiro como um termômetro para a fragilidade da economia.

Dada a importância de se mensurar e prever a volatilidade, o objetivo geral deste estudo é avaliar o desempenho da aplicação conjunta dos modelos ARMA e GARCH, além das extensões assimétricas deste, na estimativa e previsão da volatilidade de ações do mercado financeiro nacional. Entende-se por ação aquele ativo financeiro que representa parte do capital de uma empresa, o qual pode ser adquirido por investidores, que se beneficiam dos lucros da empresa, ou, mais comumente, pelos chamados "traders" que negociam essas ações no mercado com o objetivo de potencializar seus ganhos. Optou-se por aplicar os modelos ARMA-GARCH em ações financeiras de empresas de diferentes ramos da economia: as ações da empresa de mineração Vale S.A. (VALE3), da produtora de bens de consumo AmBev (AMBEV3) e do banco Bradesco (BBDC3). O motivo da escolha dessas séries é que elas possuem elevada liquidez, sendo representativas do mercado financeiro nacional, e também verificou-se que todas as três séries possuem autocorrelação nos retornos, justificando o emprego preliminar do modelo ARMA.

Complementarmente, como objetivos específicos, busca-se identificar as principais propriedades dos modelos ARMA-GARCH e definir um protocolo de aplicação conjunta desses modelos. Objetiva-se, também, por meio do Software R (R CORE TEAM, 2018), implementar uma rotina para a aplicação desse protocolo. Por fim, é feita uma análise comparativa do desempenho dos modelos simétricos e assimétricos.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira. A Seção 2 discorre sobre o contexto em que o trabalho está inserido, explicando brevemente algumas definições acerca do mercado financeiro. Na Seção 3 é apresentada a fundamentação teórica deste estudo, em que são apresentados alguns conceitos básicos de séries temporais, bem como a teoria e aplicação dos modelos ARMA-GARCH e de alguns testes estatísticos necessários para o estudo. Na Seção 4 é exposta a metodologia deste estudo, por meio da explicação do protocolo de aplicação dos modelos ARMA-GARCH em séries financeiras. Por fim, a Seção 5 se destina a apresentar e discutir os resultados obtidos, enquanto na Seção 6 são apresentadas as considerações finais.

2. CONTEXTUALIZAÇÃO

Esta seção tem como objetivo discorrer brevemente sobre o contexto em que este estudo está inserido. Com este intuito, são apresentados alguns conceitos envolvendo a bolsa de valores, ações e risco de investimentos.

2.1. Bolsa de Valores

As bolsas de valores são instituições de caráter econômico que têm como objeto a negociação pública mercantil de títulos e valores mobiliários, ou seja, são locais onde se negociam ações financeiras (Marca e Antunes, 2017). No contexto nacional, a principal bolsa operante é a BM&FBOVESPA S. A., criada em 2008 por meio da unificação da Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F) e a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). O desempenho geral da bolsa é avaliado pelo índice bovespa (IBOVESPA), o qual serve como indicador do comportamento do mercado financeiro e, consequentemente, como termômetro da economia nacional. A metodologia deste índice, segundo Lucas et al. (2010), consiste em reunir as ações de maior liquidez da bolsa no período de 12 meses e computar a média do desempenho dessas ações. De acordo com Pinheiro (2014), os principais objetivos da bolsa de valores são:

- 1) facilitar a troca de fundos entre as entidades que precisam de financiamento e os investidores;
- 2) proporcionar liquidez aos investidores, possibilitando recuperar os investimentos;
- 3) fixar preços por meio da lei de oferta e demanda;
- 4) fornecer informações aos investidores sobre as empresas que negociam na bolsa;
- 5) proporcionar confiança aos investidores no que diz respeito as garantias jurídicas sobre os investimentos;
- 6) publicar os preços e as quantidades negociadas para a informação de todos os interessados.

Segundo Lucas et al. (2010), os principais elementos da bolsa de valores são as corretoras, os pregões e o *after market*, cujas definições são apresentadas a seguir.

1) **Corretoras.** Essas instituições financeiras tem como objetivo servir de intermédio entre o investidor e a bolsa de valores, além de fornecer orientações e estratégias de investimento para seus clientes. Algumas corretoras oferecem o serviço de *Home Broker*, que possibilita aos investidores negociar na bolsa de valores diretamente do seu computador pessoal (Filho e Pinter, 2015). Abrir uma conta em uma corretora é o primeiro passo para começar a negociar na bolsa de valores.

2) **Pregões.** Segundo Pinheiro (2014), os pregões são as seções diárias de negociações da

bolsa de valores. O pregão da BM&FBOVESPA S. A geralmente se inicia às 10h e termina às 17h.

3) **After Market.** O período *after market* é um tempo extra para que o investidor, com o uso do *Home Broker*, continue negociando na bolsa de valores mesmo depois do término do pregão. Segundo Lucas et al. (2010), o *after market* tem algumas regras específicas, como as ações não poderem variar mais que 2% do valor fechado no horário do pregão e o investidor não poder ultrapassar o limite de ordem de R\$100.000,00. Além disso, o IBOVESPA só contabiliza as operações *after market* no dia seguinte.

Outra opção para a negociação de ativos financeiros é o mercado de balcão. Nessa modalidade, não existem as mesmas garantias oferecidas pela bolsa de valores, mas pode ser uma opção interessante para empresas de menor porte (Filho e Pinter, 2015).

2.2. Ações

Ações são títulos negociáveis em mercados organizados, representando a menor parcela em que se divide o capital de uma empresa (Filho e Pinter, 2015). Logo, quando o investidor adquire uma ação de uma companhia ele se torna sócio da mesma, tendo a opção de compartilhar os lucros da empresa ou de vender a ação na bolsa de valores. No contexto do mercado financeiro, chama-se dividendo o lucro distribuído pela empresa entre os acionistas (Lucas et al., 2010).

Segundo Lima et al. (2006), as ações podem ser divididas em preferenciais (PN) ou ordinárias (ON). O primeiro tipo abrange as ações que têm preferência na distribuição de dividendos, fazendo com que os investidores que optem por esse tipo de ação recebam um percentual maior de renumeração. Já as ações ON, apesar de estarem associadas a dividendos menores, fornecem ao comprador o direito de participar e votar nas assembleias que discutem as diretrizes da empresa.

Quanto ao momento em que a ação é vendida, o mercado de ações é dividido em primário e secundário. O mercado primário é onde ocorrem as primeiras compras das ações da empresa, em que esta busca captar recursos por meio da subscrição de novas ações. Após a primeira compra, essas ações passam para o mercado secundário, onde participam majoritariamente os *traders*, os quais têm como objetivo comprar e vender ativos para potencializar seus ganhos.

O mercado de ações também possui algumas modalidades operacionais. De acordo com Filho e Pinter (2015), as ações podem ser negociadas à vista, a termo, por meio de opções ou de contratos futuros. As definições propostas pelos autores são apresentadas a seguir.

1) **Negociação à vista:** a liquidação da ação acontece no segundo dia útil após a realização da transação na Bolsa, e a liquidação financeira ocorre no terceiro dia útil posterior à negociação. Nessa modalidade, o preço da ação é resultado da lei de oferta e demanda, sendo observados principalmente

o desempenho da ação e as perspectivas futuras.

2) **Mercado a termo:** nessa modalidade, as operações possuem prazos de liquidação futura, variando de, no mínimo, 16 dias até, no máximo, 999 dias após o início da negociação.

3) **Mercado de opções:** opções são ativos que fornecem ao seu titular o direito de comprar ou vender as ações a um preço de exercício preestabelecido. As opções podem ser de compra ou de venda. No primeiro caso, o direito de compra pode ser exercido em qualquer data durante o período de negociação. Já nas opções de venda, o titular paga um prêmio (preço da opção) e pode exercer sua opção de compra da ação apenas na data de vencimento, ou pode revendê-la durante o período de validade da opção.

4) **Contratos futuros:** ao negociar um contrato futuro de ação, as partes acordam sua compra e venda a um determinado preço para liquidação em data futura combinada. A diferença para a negociação a termo é que, no caso de contratos futuros, existe um ajuste diário dos preços da ação, definido a partir dos valores fechados do ativo após o fim do pregão na bolsa de valores.

A Figura 3.1 apresenta um fluxograma resumindo o funcionamento do mercado e a compra de ações.

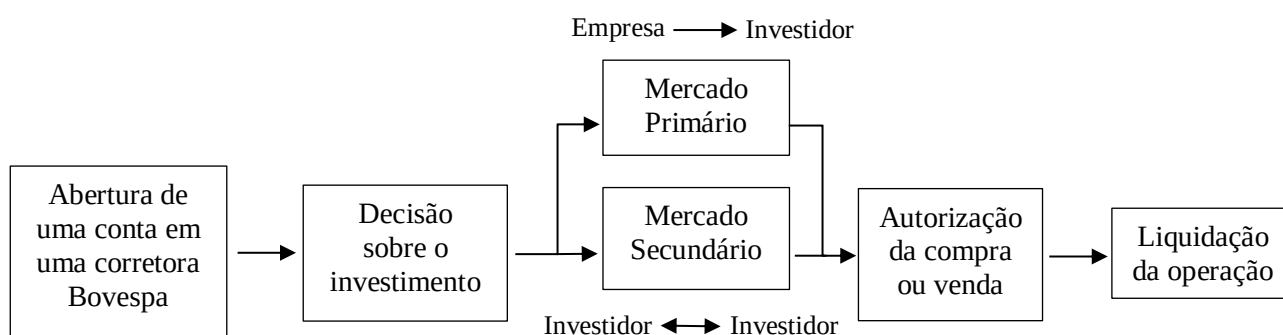


Figura 3.1 – Fluxograma do processo de compra de ações

2.3. Risco

Risco é a possibilidade de que um evento inesperado desfavorável ocorra, gerando um retorno inferior ao esperado ou até mesmo uma perda (Alexandrino et al., 2017). Segundo Oliveira e Rebelatto (2011), o risco de um investimento é formado por dois elementos: o risco sistemático ou não diversificável e o risco não sistemático ou diversificável. O primeiro tipo é aquele que influencia um grande número de ativos, sendo gerado por condições macroeconômicas, como taxas de juros e inflação. Já o risco não sistemático não está associado ao contexto global, mas sim a características inerentes a determinado ativo, como, por exemplo, disputas judiciais em que a empresa esteja

envolvida ou acidentes internos na companhia.

No contexto da econometria, o conceito de risco remete ao trabalho pioneiro de Markowitz (1952), que introduziu a chamada Teoria Moderna do Portfólio. Essa teoria estabelece que decisões envolvendo a escolha de investimentos devem ser tomadas com base na relação risco-retorno, reduzindo o conceito de risco à variância ou desvio padrão em relação a uma determinada média. Segundo Reis et al. (2013), a partir de então, a questão levantada foi como mensurar o grau de variabilidade associado aos ativos financeiros. Devido a essa necessidade, surgiu no contexto de finanças a chamada volatilidade, que pode ser entendida como a probabilidade do preço de um ativo cair ou subir em um determinado período de tempo. Apesar da volatilidade ser frequentemente usada para mensuração do risco, Poon e Granger (2003) ressaltam que volatilidade não é o mesmo que risco, visto que este último está geralmente associado a retornos negativos, enquanto que medidas de dispersão não fazem esta distinção.

Uma das primeiras aproximações para modelar a volatilidade foi o modelo de Black-Scholes (Black e Scholes, 1973), utilizado para a precificação de opções europeias. Esse modelo assume a volatilidade como uma componente constante ao longo do tempo. Entretanto, as crises econômicas e financeiras comprovaram que a hipótese de volatilidade constante é incompatível com a realidade (Reis et al., 2013). Atualmente os modelos mais utilizados para modelar a volatilidade são os modelos da família GARCH e os modelos de volatilidade estocástica (MVE). Este último tipo de modelo, segundo Morettin (2011), parte do princípio de que a volatilidade depende de seus valores passados, mas é independente dos retornos passados. Mais detalhes sobre a modelagem com MVE podem ser encontrados em Taylor (1980, 1982, 2008).

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção se destina a apresentar a fundamentação teórica deste trabalho. Primeiramente, são revisados alguns conceitos essenciais no estudo de séries temporais e, posteriormente, discorre-se sobre a teoria e aplicação dos modelos ARMA e GARCH. Em seguida, são apresentadas algumas extensões assimétricas do modelo GARCH: os modelos EGARCH, TGARCH, GJR-GARCH e PGARCH. Por fim, são analisados alguns estudos de outros autores que tenham utilizados modelos GARCH em séries financeiras.

3.1. Conceitos básicos

Existem alguns conceitos básicos necessários para o entendimento da teoria e aplicação dos modelos de séries temporais. Esta seção tem como objetivo revisar alguns desses conceitos.

3.1.1. Modelos lineares e não lineares

Segundo Tsay (2002), um modelo é dito linear se pode ser descrito da forma

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i},$$

em que μ é a média de y_t , $\psi_0 = 1$ e ε_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com média zero e distribuição de probabilidade bem definida (geralmente gaussiana ou t de *student*).

Já os modelos não lineares podem, segundo Morettin (2008), ser escritos como

$$y_t = \mu(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots),$$

em que $\mu(\cdot)$ e $h(\cdot)$ representam respectivamente as equações para a média condicional e para o desvio padrão condicional, a sequência ε_t segue, em geral, sendo assumida como i.i.d. Se $\mu(\cdot)$ for não linear, o modelo se diz não linear na média, ao passo que se a componente $h(\cdot)$ for não linear, diz-se que o modelo é não linear na variância. Os modelos da família GARCH, por exemplo, pertencem ao segundo caso.

3.1.2. Processos estocásticos

Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidades e \mathbb{Z} um conjunto de índices de números reais. Seja a função $y(.,.)$ definida por $y(.,.): S \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. A sequência de variáveis aleatórias $\{y(., t), t \in \mathbb{Z}\}$ é chamada de processo estocástico e as funções $\{y(s, .), s \in \Omega\}$ em \mathbb{Z} são realizações desse processo (Spanos, 1986 *apud* Bueno, 2008, p. 13).

Nessa definição, Ω representa o espaço amostral e \mathcal{F} uma σ -álgebra, isto é, os subconjuntos desse espaço, cuja probabilidade associada a cada um deles é dada por P . S é o conjunto que abrange todas as possíveis sequências que a série temporal pode gerar, portanto para cada $s \in S$, a sequência $y(s, .)$, representa a realização do processo estocástico, em que $y(s, t)$ é um número real.

De forma simplificada, um processo estocástico pode ser entendido como a evolução da variável aleatória ao longo do tempo, ou seja, todos os valores que a variável pode assumir dentro do espaço de tempo considerado.

3.1.3. Autocovariância e autocorrelação

Denota-se por γ_j a covariância de j -ésima defasagem de um processo estocástico y_t . No caso de um processo estacionário com média zero, Morettin (2011) afirma que a função de autocovariância $\gamma_j = E(y_t y_{t+j})$ satisfaz as seguintes propriedades: (a) $\gamma_0 > 0$, (b) $\gamma_{-j} = \gamma_j$, (c) $|\gamma_j| \leq \gamma_0$ e (d) γ_j é não negativa definida.

Para analisar a série temporal, bastaria estudar o comportamento das diversas autocovariâncias γ_j , o que nos revelaria informações importantes sobre a dependência entre os termos da série. No entanto, a função de autocovariância é uma medida absoluta o que dificulta a comparação entre séries temporais diferentes (Souza e Camargo, 1996). Com o objetivo de contornar esse problema utiliza-se a função de autocorrelação (FAC), definida por

$$\rho_j = \frac{cov(y_t, y_{t-j})}{\sqrt{var(y_t)var(y_{t-j})}} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}.$$

A partir do conceito de autocorrelação, é possível também construir a função de autocorrelação parcial (FACP), em que, nesse caso, a correlação implícita é eliminada (Gujarati e Porter, 2009). O procedimento consiste, segundo Bueno (2008), em regredir y_{t-1} e y_{t-2} , obtendo $\phi_{2,1}$ e $\phi_{2,2}$, em que apenas o último coeficiente importa. Esse processo é repetido para as demais observações e, dessa forma, filtra-se as correlações com o objetivo de manter apenas as correlações puras entre os dados.

3.1.4. Ruído branco

Um processo ε_t é chamado de ruído branco, cuja representação é $RB(0, \sigma^2)$, se: (a) $E(\varepsilon_t) = 0 \forall t$; (b) $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \forall t$ e (c) $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0 \forall j \neq 0$, isto é, se a média e a variância forem constantes e se não houver autocorrelação. Na prática, identifica-se um ruído branco quando a FAC for próxima de zero (Tsay, 2002).

3.1.5. Estacionariedade e ergodicidade

A estacionariedade é fundamental para a modelagem das séries temporais, pois, segundo Bueno (2008), sua verificação permite inferências estatísticas sobre os parâmetros estimados com base na realização de um processo estocástico.

O processo estocástico y_t é dito estritamente estacionário se os vetores $\{y_1, \dots, y_k\}$ e $\{y_{1+h}, \dots, y_{k+h}\}$ possuem a mesma função de distribuição para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $h \in \mathbb{Z}$ (Francq e Zakoian, 2010). Basicamente, a estacionariedade é estrita se a série temporal apresentar funções de distribuição iguais em quaisquer dois intervalos de tempo de mesma duração.

Já a estacionariedade fraca ou de segunda ordem se dá, segundo Bueno (2008), quando a série temporal apresenta (a) $E(y_t) = \mu \forall t \in \mathbb{Z}$; (b) $E|y_t|^2 < \infty$ e (c) $cov(y_t, y_{t-j}) = \gamma_j$. Essas condições afirmam, respectivamente, que o valor médio deve ser igual para todo o período de tempo considerado, a variância deve ser finita e que a covariância não depende do tempo, mas apenas da defasagem temporal entre as observações. A estacionariedade fraca implica que a série temporal possui valores evoluindo com variância constante ao redor de um valor médio.

Em geral, nos estudos de séries temporais, quando falamos apenas em estacionariedade estamos nos referindo a fraca ou de segunda ordem. Segundo Tsay (2002), é muito comum no estudo de finanças assumirmos que os retornos são estacionários, propriedade que pode ser verificada por testes estatísticos como o de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) (Dickey e Fuller, 1981) e o Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) (Kwiatkowski et al., 1992).

Outra propriedade fundamental para a estimação de séries temporais é a ergodicidade. Uma série temporal é dita ergódica se (a) $\mu \xrightarrow{p} E(y_t)$ e (b) $\hat{\gamma}_j \xrightarrow{p} \gamma_j$, o que significa, em suma, que os momentos amostrais devem convergir em probabilidade para os momentos populacionais. Outra definição é apresentada por Hamilton (1994), o qual afirma que a série é ergódica para o primeiro momento se a soma das covariâncias for finita, ou seja, $\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| < \infty$. De acordo com Bueno (2008), para existir ergodicidade a série deve ser necessariamente estacionária e, na prática, a estacionariedade e a ergodicidade têm os mesmos requerimentos.

3.1.6. Invertibilidade

Considere um modelo univariado de séries temporais escrito da forma

$$y_t = f(y_{t-i}, \varepsilon_{t-j}) + \varepsilon_t, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

em que $f(\cdot)$ é uma função e ε_t é um ruído branco de valores desconhecidos. Geralmente, para aplicação dos modelos, é necessário que seja possível estimar a sequência ε_t a partir dos valores observados de y_t , em que os valores iniciais de ε_t são definidos a priori para dar início a estimação. Por exemplo, assumindo que os valores de y_t são conhecidos, ε_1 pode ser estimado pela equação

$$\varepsilon_1 = y_1 - f(y_{1-i}, \varepsilon_{1-j}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

e, de forma análoga, ε_2 é estimado como

$$\varepsilon_2 = y_2 - f(y_{2-i}, \varepsilon_{2-j}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

e assim por diante. Portanto, usando os valores iniciais assumidos para início da iteração, é possível estimar todos os valores de ε_t com base nos valores de y_t e no modelo gerado. Nesse caso, diz-se que o modelo é invertível, pois é possível escrever os valores dos erros (ε_t) em função dos valores observados (y_t). A condição geral de invertibilidade, segundo Granger e Andersen (1978), é de que $E(\varepsilon_t^2) \rightarrow c$, conforme $t \rightarrow \infty$, em que $c < \infty$ é uma constante.

3.1.7. Passeio aleatório

Segundo (Tsay, 2002), um processo é chamado de passeio aleatório quando tem a forma

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{3.1}$$

em que $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Fazendo-se substituições sucessivas na equação (3.1) é possível escrever y_t como função do valor inicial y_0 e dos choques aleatórios ε_t .

$$y_t = y_0 + \sum_{j=0}^t \varepsilon_{t-j}.$$

Calculando o primeiro momento, tem-se

$$E(y_t) = y_0.$$

Portanto, o valor esperado em qualquer instante de tempo é igual ao valor inicial, o qual é constante. Já a variância de y_t é dada por

$$Var(y_t) = Var\left(\sum_{j=0}^t \varepsilon_{t-j}\right) = t\sigma^2,$$

logo, a variância em um passeio aleatório não é constante, pois depende do tempo. Séries de preços são exemplos clássicos de passeios aleatórios.

3.1.8. Retornos

O principal objetivo na modelagem da volatilidade é o de mensurar o risco associado a uma carteira de ativos. Como geralmente os investidores estão mais interessados nos ganhos e nas perdas devido a um investimento do que no preço do ativo financeiro em si, é comum na modelagem de séries financeiras utilizar a variação dos preços dos ativos.

Denotando o preço de um ativo como P_t , podemos escrever a variação de preços entre os instantes t e $t - 1$ como $\Delta P = P_t - P_{t-1}$. Define-se, então, o retorno líquido simples como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P}{P_{t-1}},$$

em que R_t é chamado de taxa de retorno e é geralmente expresso em porcentagem. Se aplicarmos a transformação logarítmica na série de preços, denotando $p_t = \ln(P_t)$, define-se o log-retorno ou simplesmente retorno como

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}. \quad (3.2)$$

Segundo Campbell et al. (1997), é preferível trabalhar com retornos, pois são livres de escala

e possuem propriedades estatísticas mais vantajosas para a modelagem, como estacionariedade e ergodicidade. Além disso, os retornos raramente apresentam tendência ou sazonalidade, com exceção dos retornos intradiários e séries de taxas de câmbio ou taxa de juros (Morettin, 2011).

A Figura 3.1 apresenta os gráficos da série de preços diários das ações da IBOVESPA e dos respectivos retornos diários. Os dados foram obtidos a partir da base de dados do InfoMoney (InfoMoney, 2018). É possível observar que os preços se comportam como um passeio aleatório, ao passo que os retornos aparentam ser estacionários.

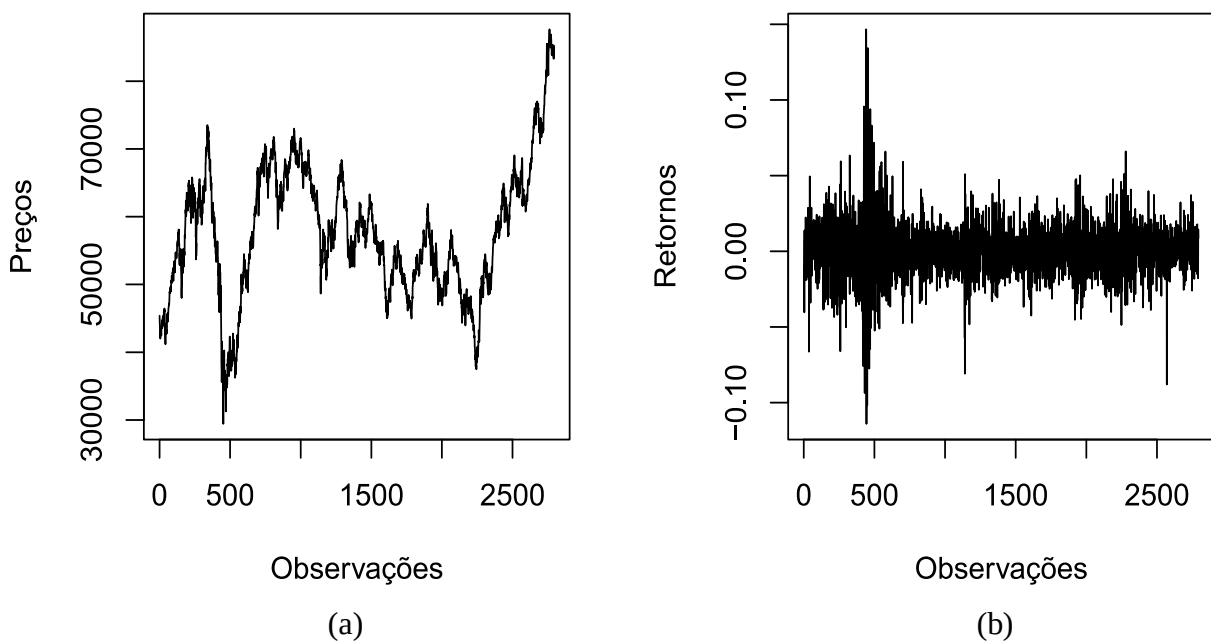


Figura 3.1: (a) Preços e (b) retornos diários da série IBOVESPA no período entre 02/01/2007 e 11/04/2018

As séries financeiras apresentam algumas propriedades importantes e que devem ser conhecidas para a aplicação e entendimento adequado dos modelos de séries temporais. Francq e Zakoian (2010) citam algumas propriedades amplamente documentadas na literatura:

1) **não estacionariedade da série de preços** - usualmente, as séries de preços são não estacionárias e se apresentam como passeios aleatórios, ao passo que as séries de retorno possuem quase sempre estacionariedade;

2) **ausência de autocorrelação nos retornos** - os retornos geralmente apresentam pouca ou nenhuma autocorrelação;

3) **os retornos ao quadrado são autocorrelacionados** - os retornos ao quadrado (r_t^2) e os retornos absolutos ($|r_t|$) apresentam em geral forte autocorrelação, invalidando a suposição de que a série é um ruído branco;

4) **aglomerados de volatilidade** - retornos tendem a aparecer em aglomerados, ou seja, choques elevados são seguidos por choques elevados, ao passo que choques de menor intensidade são seguidos por choques menores;

5) **distribuições com caudas pesadas** - em geral, a distribuição incondicional dos retornos possui caudas mais pesadas do que a distribuição normal. Essa não-normalidade tende a diminuir, conforme o intervalo de tempo entre os retornos aumenta, portanto é provável que os retornos mensais se assemelhem mais a distribuição normal do que os retornos diários;

6) **efeito de alavancagem** - retornos negativos tendem a causar mais impacto na volatilidade do que retornos positivos. Esse efeito ocorre pelo fato de que más notícias (choques negativos) tendem a reduzir o preço das ações, aumentando a alavancagem e causando maior volatilidade na ação (Black, 1986, *apud* Solda, 2008, p. 67).

3.2. Estrutura básica dos modelos ARMA-GARCH

Sendo r_t uma série de retornos definida pela equação (3.2), a média condicional e a variância condicional do processo são, respectivamente

$$\begin{aligned} u_t &= E(r_t | \mathfrak{I}_{t-1}) \\ &\text{e} \\ h_t &= \text{Var}(r_t | \mathfrak{I}_{t-1}), \end{aligned}$$

em que \mathfrak{I}_{t-1} representa toda a informação disponível até o instante $t - 1$. A ideia geral dos modelos GARCH é de que r_t possui nenhuma ou pouca autocorrelação serial, podendo, dessa forma, se considerar $u_t = 0$. Portanto, pode-se aproximar a variância condicional como

$$h_t = E(r_t^2 | \mathfrak{I}_{t-1}). \quad (3.3)$$

Entretanto, em caso de presença de autocorrelação, a aproximação da equação (3.3) torna-se incoerente, visto que a modelagem da série de retornos requer uma equação para a média. Quando o interesse é modelar apenas a volatilidade, uma alternativa muito utilizada é aplicar inicialmente um modelo ARMA para remover a dependência serial, e então aplicar o modelo GARCH nos resíduos, de maneira a estimar a volatilidade de forma mais consistente (Morettin, 2011).

3.2.1. Equação para a média: modelos ARMA

A metodologia Box-Jenkins, representada pela classe de modelos ARMA, se baseia essencialmente em tentar explicar uma variável pelos próprios valores passados da variável e pelos choques aleatórios passados (Sartoris, 2013). Essa classe é constituída pelos modelos autorregressivos (AR), de médias móveis (MA) e autorregressivo de médias móveis (ARMA). Ainda, em caso de séries não estacionárias, pode-se recorrer ao modelo autorregressivo integrado de médias móveis (ARIMA).

Modelos autorregressivos (AR)

A equação geral do modelo Autorregressivo de ordem p - $AR(p)$ - é dada por

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (3.4)$$

em que c é uma constante, $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ e p é a ordem de defasagem do processo. O nome autorregressivo vem pelo fato do modelo procurar explicar a variável y_t por meio dos seus próprios valores passados. Por exemplo, um modelo $AR(1)$ pode ser escrito como

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Hyndman e Athanasopoulos (2013) apontam que, dependendo dos valores do coeficiente ϕ_1 , o modelo $AR(1)$ pode resultar em diferentes padrões de processos estocásticos:

- (a) Quando $\phi_1 = 0$ o processo é um ruído branco;
- (b) Quando $\phi_1 = 1$ e $c = 0$ o processo é equivalente a um passeio aleatório;
- (c) Quando $\phi_1 = 1$ e $c \neq 0$ o processo é equivalente a um passeio aleatório com *drift* (constante);
- (d) Quando $\phi_1 < 0$, y_t tende a oscilar entre valores negativos e positivos.

É possível reescrever a equação (3.4) utilizando o operador de defasagem (B). Denotando $B^i y_t = y_{t-i}$, tem-se

$$\phi(B)y_t = \mu + \varepsilon_t, \quad (3.5)$$

em que $\mu = c/[1 - (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p)]$ e $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$. A equação

(3.5) consiste em um $AR(p)$ na forma de um modelo de médias móveis de ordem infinita $MA(\infty)$. Diz-se, nesse caso, que o modelo está escrito na forma inversa. Para que o modelo AR seja estacionário, ergódico e invertível é necessário que as raízes da equação característica $\phi(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário, o que implica na prática em $|\phi_1 + \dots + \phi_p| < 1$ (Soldá, 2008).

Modelos de médias móveis (MA)

A fórmula geral de um modelo de médias móveis de ordem q - $MA(q)$ - é dada por

$$y_t = c + \sum_{j=0}^q \varepsilon_{t-j} \theta_j, \quad \theta_0 = 1, \quad (3.6)$$

em que c é uma constante e $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$. É possível também reescrever a fórmula do modelo $MA(q)$ utilizando o operador de defasagem B . Nesse caso, denota-se $B^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}$. Portanto, a equação (3.6) fica como

$$y_t - \mu = \theta(B) \varepsilon_t$$

em que $\mu = c$ e $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$. Para que o processo seja invertível, as raízes do polinômio $\theta(B)$ devem estar fora do círculo unitário, enquanto que para a estacionariedade e ergodicidade é necessário apenas que os coeficientes $\theta_1, \dots, \theta_p$ sejam finitos (Soldá, 2008).

Modelos autorregressivos de médias móveis (ARMA)

O modelo autorregressivo de médias móveis $ARMA(p, q)$ consiste na combinação dos modelo $AR(p)$ e $MA(q)$. A equação geral do modelo é dada por

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (3.7)$$

Reescrevendo a equação (3.7) com utilização do operador de defasagem (B), tem-se que

$$\phi(B)(y_t - \mu) = \theta(B) \varepsilon_t,$$

em que a média do processo é dada por $\mu = c / (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i)$. Para que o processo $ARMA$ seja

estacionário e ergódico as condições são as mesmas de um $AR(p)$, enquanto que as condições de invertibilidade são as mesmas de um $MA(q)$ (Morettin e Toloi, 2006).

Segundo Souza e Camargo (1996), dentro de certas restrições o modelo $ARMA(p, q)$ é equivalente a um modelo AR com um conjunto infinito de parâmetros. Portanto, o modelo ARMA inclui os modelos AR e MA puros, possuindo a grande vantagem de economia de parâmetros.

Modelos autorregressivos integrados de médias móveis (ARIMA)

Para que os modelos apresentados anteriormente sejam aplicados, é necessário que a série temporal seja estacionária, o que acontece na maioria das séries de retornos financeiros (Francq e Zakoian, 2010). Entretanto, no caso de não estacionariedade, pode-se recorrer ao processo conhecido como diferenciação, em que se computa a diferença entre observações consecutivas até que a estacionariedade seja atingida (Hyndman e Athanasopoulos, 2013). A combinação do processo Autorregressivo (AR), de Médias Móveis (MA) e da diferenciação origina o modelo conhecido como Autorregressivo Integrado de Médias Móveis - $ARIMA(p, d, q)$ - em que d indica a ordem de diferenciação. O termo integrado se dá pelo fato do modelo estimar a série em nível, a partir da diferenciação.

A equação geral de um modelo $ARIMA(p, d, q)$ é semelhante a do modelo $ARMA(p, q)$. No entanto denota-se a diferença como $y'_t = \Delta^d y_t$, logo

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y'_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (3.7)$$

O modelo ARIMA supõe que a d -ésima diferença da série pode ser representada por um modelo ARMA, portanto as condições de estacionariedade, ergodicidade e invertibilidade são as mesmas nos dois modelos.

3.2.2. Equação para a variância: modelos GARCH

Os modelos ARMA, apesar de serem úteis na remoção da autocorrelação, são ineficientes na modelagem de preços de ativos financeiros, pois estes se caracterizam como passeios aleatórios, sendo de difícil previsão. Entretanto, os retornos, apesar de, em geral, possuírem pouca ou nenhuma autocorrelação, possuem variâncias dependentes e que tendem a oscilar mais suavemente. O interesse voltou-se, então, para a chamada volatilidade, definida como desvio padrão condicional (Morettin, 2011), a qual pode ser modelada por meio dos modelos da família GARCH.

Modelos autorregressivos de heteroscedasticidade condicional (ARCH)

A ideia central para modelar a volatilidade é de que a série de retornos não possui autocorrelação significativa, mas os retornos ao quadrado são dependentes. A Figura 3.2, por exemplo, apresenta a FAC dos retornos e dos retornos ao quadrado diários do IBOVESPA no período compreendido entre 02/01/2007 e 11/04/2018. É possível observar que a FAC para os retornos apresenta apenas alguns resquícios de autocorrelação, sem nenhum padrão de comportamento aparente. Em contrapartida, a FAC dos retornos ao quadrado evidencia forte dependência e, além disso a autocorrelação persiste até defasagens elevadas.

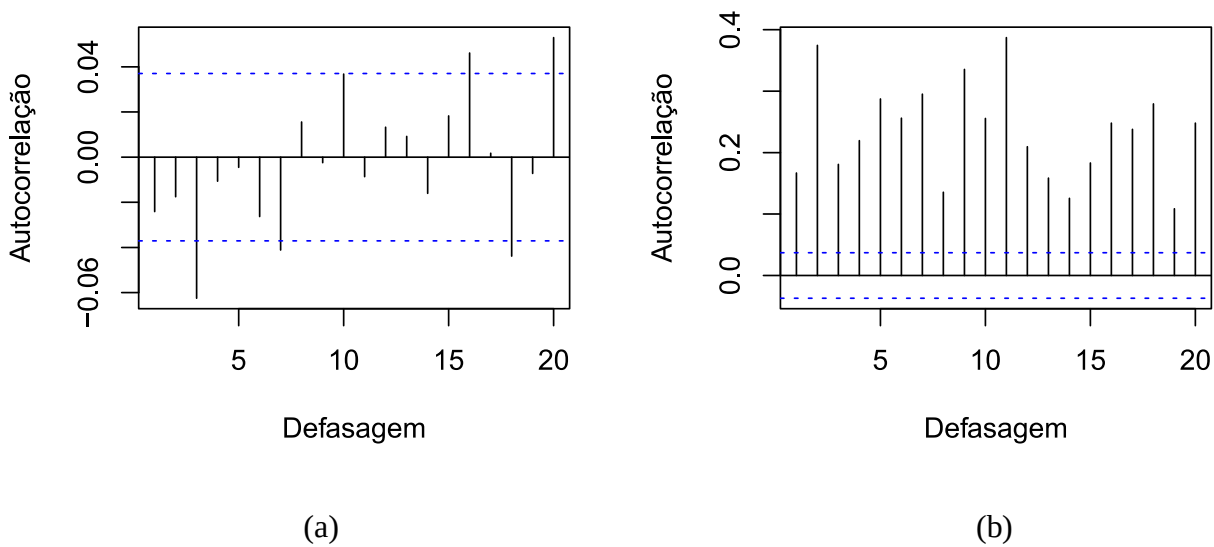


Figura 3.2: (a) FAC da série de retornos e (b) de retornos ao quadrado do IBOVESPA no período entre 02/01/2007 e 11/04/2018

Dito isso, Engle (1982), inspirado pelos modelos AR, observou que a volatilidade pode ser escrita como uma função quadrática dos retornos ao quadrado. Dessa forma, um modelo ARCH(m) para uma série de retornos r_t pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 r_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\
 h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que $\varepsilon_t \sim RB(0, 1)$, geralmente especificado com distribuição gaussiana ou de t de *student*, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ e $\alpha_m > 0$. Essas restrições aos coeficientes são necessárias para assegurar que a variância seja finita e positiva. Já a condição para estacionariedade é de que $\sum_{i=1}^m \alpha_i < 1$. É possível notar que a

própria estrutura do modelo leva em conta os aglomerados de volatilidade, visto que valores grandes de $\{r_{t-1}^2, r_{t-2}^2, \dots, r_{t-m}^2\}$ implicam em valores elevados da variância condicional h_t (Tsay, 2002).

Os modelos ARCH possuem algumas restrições, as quais podem ser melhor observadas se supormos, por exemplo, um modelo ARCH(1)

$$\begin{aligned} r_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

com $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1 > 0$. Se calcularmos a variância incondicional na equação (3.9) chegamos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_t) &= E(r_t^2), \\ \text{Var}(r_t) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) E(\varepsilon_t^2), \\ \text{Var}(r_t) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2), \\ \text{Var}(r_t) &= \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2), \end{aligned}$$

considerando o processo r_t como estacionário, pode-se dizer que $\text{Var}(r_t) = E(r_{t-1}^2)$, portanto

$$\text{Var}(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1},$$

em que $0 < \alpha_1 < 1$ para assegurar que a variância seja finita e positiva.

Considerando que ε_t segue a distribuição normal, pode-se calcular o quarto momento como

$$E(r_t^4 | \mathfrak{F}_{t-1}) = E(h_t^2 \varepsilon_t^4 | \mathfrak{F}_{t-1}) = E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2 E(\varepsilon_t^4), \quad (3.10)$$

em que $E(\varepsilon_t^4) = 3$. Desenvolvendo a equação (3.10), tem-se que

$$E(r_t^4) = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2 = 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_1^2 r_{t-1}^4). \quad (3.11)$$

Como o processo é estacionário, pode-se denotar o quarto momento como $m_4 = E(r_t^4)$, então a equação (3.11) pode ser reescrita

$$m_4 = 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \text{Var}(r_t) + \alpha_1^2 m_4).$$

Fazendo as simplificações, chega-se na equação

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}. \quad (3.12)$$

É possível observar na equação (3.12) que, para que o quarto momento seja positivo e finito, o coeficiente α_1 deve ficar restrito à condição $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$. Portanto, os coeficientes do modelo ARCH(m) terão mais restrições a medida que aumentamos as restrições ao processo de retornos (Morettin, 2011).

A curtose de r_t , no caso de um modelo ARCH(1), será

$$K = \frac{m_4}{Var(r_t)^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}. \quad (3.13)$$

Pela equação (3.13), é possível notar que $K > 3$. Logo, o modelo ARCH(m) leva em consideração o excesso de curtose geralmente presente nas séries financeiras.

Ainda, é possível escrever um modelo ARCH(m) na forma de um AR(m) para r_t^2 . Se denotarmos $v_t = r_t^2 - h_t$ e substituirmos esse valor na equação (3.8), chega-se na expressão

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2 + v_t,$$

em que v_t é uma sequência de variáveis aleatórias com média zero, não correlacionadas, mas com variância não constante.

Modelos autorregressivos de heteroscedasticidade condicional generalizados (GARCH)

Apesar de sua simplicidade, os modelos ARCH necessitam de muitos parâmetros para fornecerem um bom ajuste. Com a finalidade de criar um modelo mais parcimonioso, Bollerslev (1986) generalizou o modelo ARCH, incluindo, além dos retornos ao quadrado, os valores passados da própria volatilidade.

A equação geral do modelo GARCH(m, n) é dada por

$$\begin{aligned}
r_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\
h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j h_{t-j},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

em que novamente ε_t é i.i.d com média zero e variância unitária especificado, geralmente, com distribuição normal ou t de *student*. Para os coeficientes: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\alpha_m > 0$ e $\beta_n > 0$ são condições para garantir que a variância seja finita e positiva. A estacionariedade requer que $\sum_{i=1}^{\max(m,n)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$.

Considerando $v_t = r_t^2 - h_t$, é possível reescrever a equação (3.14) como

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,n)} (\alpha_i + \beta_i) r_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^n \beta_j v_{t-j} \tag{3.15}$$

A equação (3.15) se assemelha à equação de um modelo ARMA $[\max(m,n), n]$, o que sugere que a identificação dos modelos GARCH pode seguir a mesma metodologia utilizada nos modelos ARMA (Bueno, 2008). O modelo GARCH possui as mesmas vantagens que modelo ARCH, sendo capaz de captar a maioria das características das séries financeiras, como aglomerados de volatilidade e caudas pesadas. No entanto, ambos modelos têm a desvantagem de considerar os choques devido a retornos positivos e negativos como simétricos.

Existem situações em que na aplicação do modelo GARCH obtemos $\sum_{i=1}^{\max(m,n)} (\alpha_i + \beta_i)$ muito próximo de um. Nesse caso, existe a possibilidade de haver presença de raiz unitária na volatilidade, o que nos leva ao caso especial do modelo GARCH quando $\sum_{i=1}^{\max(m,n)} (\alpha_i + \beta_i) = 1$, o chamado GARCH integrado ou simplesmente IGARCH. A equação, no caso de um IGARCH(1,1), por exemplo, é dada por

$$\begin{aligned}
r_t &= \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\
h_t &= \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + (1 - \beta_1) r_{t-1}^2,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

em que $0 < \beta_1 < 1$. É possível notar que a equação (3.16) se assemelha a um alisamento exponencial. A principal característica desse modelo é a alta persistência da volatilidade.

Apesar do modelo IGARCH captar a característica de elevada persistência da volatilidade, geralmente presente em séries financeiras, Hansen e Lunde (2005) mostraram, por meio de

simulações, que esse modelo pode conduzir a resultados insatisfatórios de previsão.

3.3. Identificação dos modelos ARMA-GARCH

A identificação dos modelos ARMA-GARCH consiste em determinar as ordens de defasagem p, q, m e n , apresentadas anteriormente. Para isso, pode-se recorrer aos gráficos da FAC e FACP e aos critérios de informação.

3.3.1. Função de autocorrelação (FAC) e Função de autocorrelação Parcial (FACP)

Os gráficos da FAC e da FACP podem ser usados para a determinação das ordens de defasagem dos modelos ARMA e GARCH. Essa análise visual funciona bem com os modelos $AR(p)$, $MA(q)$ e $ARCH(m)$ puros. No entanto, pode ser difícil de ser realizada quando o modelo é um $ARMA(p, q)$ ou $GARCH(m, n)$, pois a função de autocorrelação se torna mais complexa.

A função de autocorrelação geral de um processo $AR(p)$ é dada por

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \cdots + \phi_p \rho_{j-p}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

A FAC de um $AR(p)$ decai exponencialmente, o que na prática significa que a autocorrelação tende a desaparecer com o tempo, o que é lógico de se pensar, visto que, em geral, quanto maior a distância temporal entre dois eventos, menor será a relação entre eles.

Para um modelo $MA(q)$ a função de autocorrelação é definida como

$$\rho_j = \frac{\theta_p + \theta_{j+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-j}}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

$$\rho_j = 0, \quad j > q$$

logo, ρ_j chega a zero no momento que $j > q$, diz-se portanto que a FAC de um modelo MA puro é truncada na ordem q , o que é importante para se definir a ordem do processo.

Já a FACP de um modelo $AR(p)$ é truncada na ordem p , enquanto que é exponencialmente declinante no caso de um modelo $MA(q)$. Portanto, em teoria, é possível identificar a ordem p de um processo $AR(p)$ puro pela FACP, enquanto que a ordem q de um processo $MA(q)$ é dada pela FAC. Para exemplificar, as Figuras 3.3 e 3.4 apresentam, respectivamente, as funções de autocorrelação de um processo $AR(1)$ e $MA(1)$. É possível observar que para o modelo $AR(1)$ a FAC é declinante, ao passo que a FACP é truncada na ordem 1. Já para o modelo MA, as funções de autocorrelação

possuem comportamento inverso em relação ao modelo anterior, com a FAC estando truncada na ordem 1 e a FACP decaindo exponencialmente.

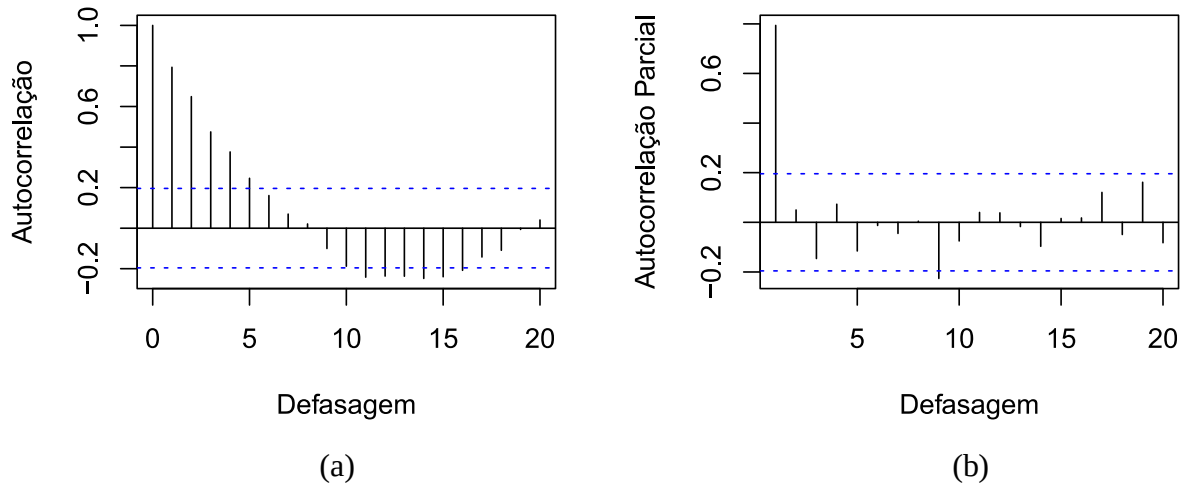


Figura 3.3 – (a) FAC e (b) FACP de um modelo AR(1)

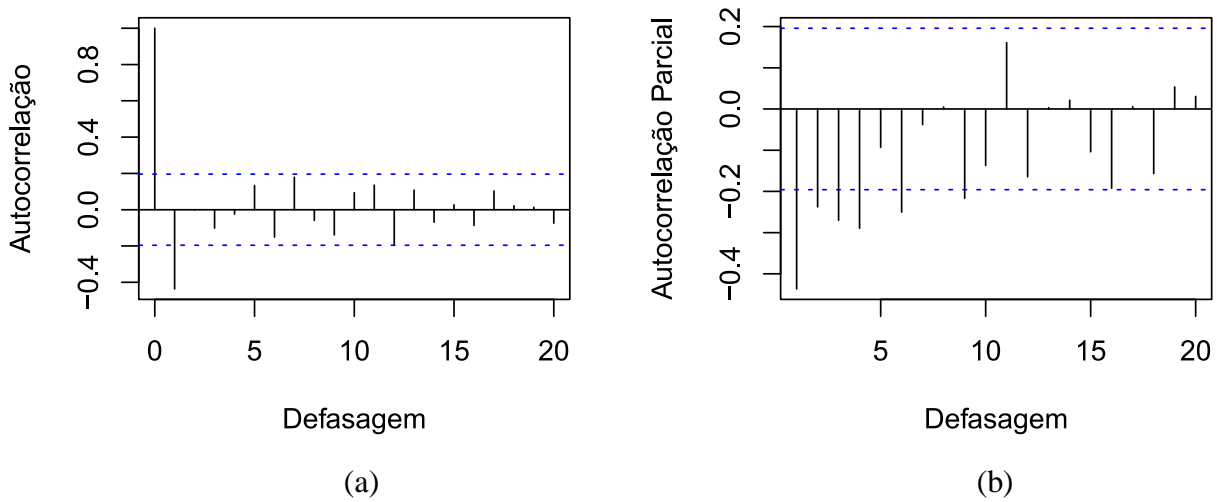


Figura 3.4 – (a) FAC e (b) FACP de um modelo MA(1)

No caso de um modelo ARCH(m), como a volatilidade é modelada a partir de r_t^2 , um estimador não viesado de h_t , o valor atual do quadrado do retorno depende de retornos passados, comportamento similar a de um modelo autorregressivo (Morettin, 2011). Portanto, a função de autocorrelação parcial de r_t^2 pode ser usada para encontrar a ordem m de um modelo ARCH(m). A Figura 3.5, por exemplo, apresenta os gráficos da FAC e FACP de um modelo ARCH(1). Repare que o comportamento é semelhante ao apresentado na Figura 3.3.

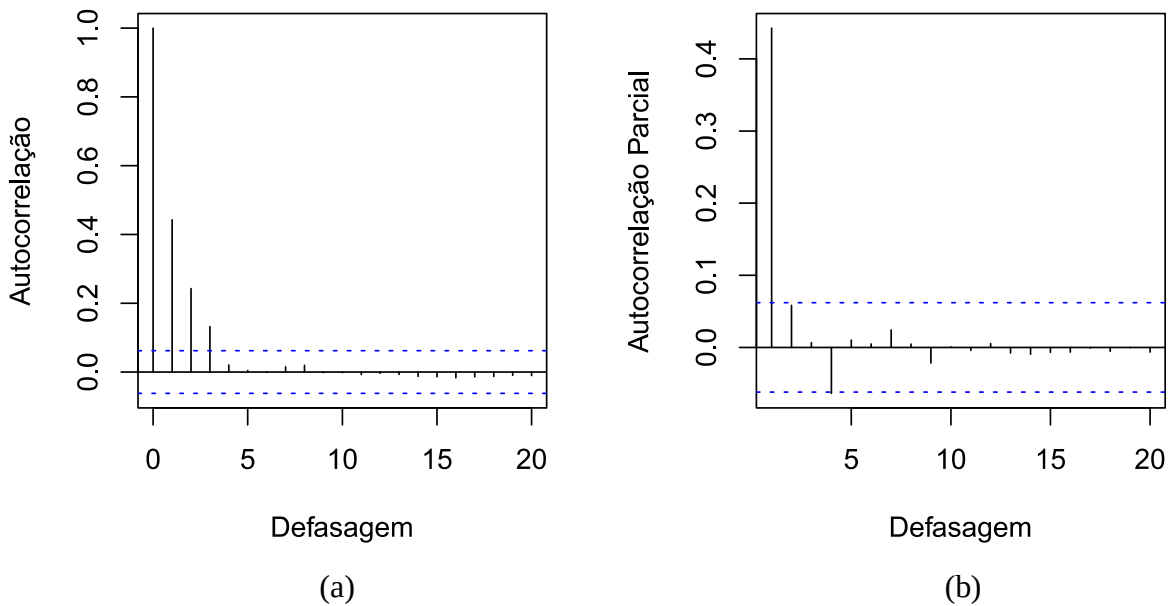


Figura 3.5 – (a) FAC e (b) FACP de um modelo ARCH(1)

Já os modelos $ARMA(p, q)$ e $GARCH(m, n)$ possuem funções de autocorrelação mais complexas, o que torna as ordens de defasagem mais difíceis de serem definidas por esses gráficos. Na prática, devido ao poder computacional atual dos softwares estatísticos e/ou econométrico, dificilmente se confia inteiramente nas funções de autocorrelação para se definir as ordens dos modelos. O que se faz é testar diferentes ordens até obter o modelo que cumpra os requisitos de modelagem e que consiga extrair a maior informação possível dos dados. Morettin (2011) recomenda que as ordens dos modelos sejam definidas pelos critérios de informação.

3.3.2. Critérios de informação

Os critérios de informação são comumente utilizados com o objetivo de se escolher o modelo menos complexo e que leva a menor variância residual (Yip et al., 2013). A cada regressor adicional incluído no modelo é associada uma penalidade, se esta for menor que a diminuição da soma dos resíduos, o regressor deve ser incorporado ao modelo. Se a penalidade for maior que a redução na soma, então isso significa que a adição do regressor não é justificável. Em outras palavras, os critérios de informação são utilizados para definir qual dos modelos candidatos é mais parcimonioso e que, portanto, deverá levar a modelagens mais razoáveis. Usualmente, os critérios mais utilizados são o de Akaike, Schwarz e Hannan-Quinn.

O critério de informação de Akaike (AIC) (Akaike, 1973) é descrito pela equação

$$AIC(p, q) = -2 \ln(\hat{\mathcal{L}}_{max}) + 2(p + q), \quad (3.17)$$

em que $\hat{\mathcal{L}}_{max}$ é o valor da máxima verossimilhança ajustada. Note que a primeira parcela da equação (3.17) se refere a adequação do processo, enquanto que a segunda diz respeito a penalização devido ao aumento do número de parâmetros. Os parâmetros p e q podem ser substituídos por m e n quando estivermos considerando um modelo GARCH(m, n)

Hurvitch e Tsai (1991) observaram que, para amostras pequenas, existe a probabilidade do AIC selecionar um modelo com muitos parâmetros. Portanto, os autores propuseram o critério de informação de Akaike corrigido (AICc), o qual pode ser escrito como

$$AICc(p, q) = AIC(p, q) + \frac{2(p + q)(p + q + 1)}{T - (p + q) - 1}.$$

Já o critério de informação de Schwarz (SBC) ou Bayesiano (BIC) (Schwarz, 1978) é dado por

$$BIC(p, q) = -2\ln(\hat{\mathcal{L}}_{max}) + (p + q)\ln T.$$

E, finalmente, o critério de informação de Hannan-Quinn (HQIC) (Hannan e Quinn, 1979) pode ser descrito como

$$HQIC(p, q) = -2\ln(\hat{\mathcal{L}}_{max}) + 2(p + q)\ln \ln T.$$

O objetivo, portanto, é definir as ordens de defasagem que minimizem os critérios de informação, o que nos levará ao modelo mais parcimonioso. No entanto, o modelo com os menores critérios de informação não necessariamente será o melhor. Existe, ainda, a etapa do diagnóstico dos resíduos.

3.4. Estimação dos parâmetros dos modelos ARMA-GARCH

A estimação de modelos de séries temporais consiste em definir os valores dos parâmetros das equações dos modelos. Geralmente na estimação de modelos ARMA-GARCH se recorre ao método da máxima verossimilhança. A ideia central desse método é estimar um vetor de parâmetros populacionais que maximiza a probabilidade da amostra pertencer a uma determinada distribuição

especificada.

3.4.1. Função de máxima verossimilhança para os modelos ARMA

Em geral, na estimação por máxima verossimilhança dos modelos ARMA, assume-se distribuição normal. No entanto, mesmo que os dados não sejam normais, a estimação por máxima verossimilhança ainda conduz a resultados consistentes (Bueno, 2008).

A função de verossimilhança pode ser condicionada ou exata, dependendo da escolha dos valores iniciais para a estimação. O logaritmo da função de verossimilhança condicional para um modelo $AR(p)$ é dado por

$$\ln f(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; \Psi) = -\frac{T-p}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \sum_{t=p+1}^T \frac{(y_t - c - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i})^2}{2\sigma^2},$$

em que Ψ é o vetor de parâmetros populacionais que maximiza a probabilidade da amostra pertencer a distribuição especificada. As p primeiras observações são utilizadas para maximizar a função de verossimilhança. Já no caso do modelo $MA(q)$ fixa-se o valor inicial do erro como sendo igual a zero, conforme mostrado na equação

$$\ln f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1 | \varepsilon_0 = 0; \Psi) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}. \quad (3.18)$$

Para o modelo $ARMA(p, q)$ assume-se que o erro inicial e os anteriores sejam nulos, ou seja, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \dots = \varepsilon_{-q+1} = 0$. Para a componente autorregressiva, Bueno (2008) propõe duas formas de condicionamento. A primeira delas consiste em fixar $y_0 = y_{-1} = \dots = y_{-p+1} = \mu$. Em outras palavras, fixa-se os valores iniciais como a média temporal da variável e, então, calcula-se os resíduos

$$\varepsilon_t = y_t - c - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

Com os resíduos determinados, maximiza-se a função apresentada na equação (3.18). A segunda possibilidade é assumir os valores autoregressivos iniciais como os próprios valores observados, iniciando a estimação propriamente dita em $t = p + 1$. Dessa forma, maximiza-se a função

$$\begin{aligned} \ln f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1 | y_p, y_{p-1}, y_1, \varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \dots = \varepsilon_{p-q+1} = 0; \Psi) \\ = -\frac{T-p}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \sum_{t=p+1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

No caso da máxima verossimilhança exata ou incondicional, ao invés de definirmos valores iniciais que pareçam razoáveis, esses valores são estimados por meio de um processo de previsão reversa, conhecido como *backforecasting* (Morettin e Toloi, 2006). A matemática e a formulação da função de máxima verossimilhança exata de cada modelo são complexas, mais detalhes podem ser encontrados em Hamilton (1994). Em geral, ambos métodos são consistentes para amostras grandes que apresentem estacionariedade e ergodicidade, no entanto o método de máxima verossimilhança condicional é mais fácil de ser utilizado. Apesar disso, devido ao poder computacional atual dos softwares estatísticos e econométricos, o método de máxima verossimilhança exata também pode ser facilmente implementado.

3.4.2. Função de máxima verossimilhança para os modelos GARCH

Em geral, os parâmetros do modelo GARCH são estimados por meio do método de máxima verossimilhança condicional, em que a série ε_t normalmente segue a função de distribuição gaussiana ou t de *student*. Considerando uma amostra T grande e supondo normalidade de ε_t , o logarítmo da função de verossimilhança para um modelo ARCH(m) é dado por

$$\ln f(r_{m+1}, \dots, r_T | \alpha_1, \dots, \alpha_m, r_1, \dots, r_m) = \sum_{t=m+1}^T -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(h_t) - \frac{1}{2} \frac{r_t^2}{h_t}.$$

Sob as mesmas condições, o logarítmo da função de verossimilhança para um modelo GARCH(m, n) condicionada às primeiras m observações, é dada por

$$\ln f(r_{m+1}, \dots, r_T | \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n; r_1, \dots, r_m) = -\frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \frac{r_t^2}{h_t}.$$

Em alguns casos, no entanto, é mais apropriado assumir as inovações ε_t como seguindo a distribuição t de *Student*, com o objetivo de modelar melhor as caudas pesadas das séries financeiras

(Tsay, 2002). Considerando t_ν como uma distribuição t de *Student* com ν graus de liberdade e que $\varepsilon_t \sim t_\nu$, o logarítmo da função de verossimilhança para um modelo ARCH(m) é definida como

$$\begin{aligned} \ln f(r_{m+1}, \dots, r_T | \alpha_1, \dots, \alpha_m; \nu; r_1, \dots, r_m) \\ = (T - m) \left[\ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \right) - \ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \ln((\nu - 2)\pi) \right] \\ - \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{\nu + 1}{2} \ln \left(1 + \frac{r_t^2}{(\nu - 2)h_t} \right) + \frac{1}{2} \ln(h_t) \right], \end{aligned}$$

em que $\Gamma(x)$ é a usual função Gamma, definida como $\Gamma(x) = (x - 1)!$, e $\nu > 2$. O valor dos graus de liberdade ν pode ser definido a priori, geralmente entre 3 e 6, ou estimados conjuntamente com a função de verossimilhança (Tsay, 2002). Da mesma forma, para um modelo GARCH(m, n) o logarítmo da função de verossimilhança com $\varepsilon_t \sim t_\nu$, é dado por

$$\begin{aligned} \ln f(r_{m+1}, \dots, r_T | \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n; \nu; r_1, \dots, r_m) \\ = T \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{\nu + 1}{2})}{\sqrt{\pi(\nu - 2)\Gamma(\frac{\nu}{2})}} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{\nu + 1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left[1 + \frac{r_t^2}{h_t(\nu - 2)} \right]. \end{aligned}$$

3.5. Testes de estacionariedade

Para a aplicação conjunta dos modelos ARMA-GARCH um dos requisitos essenciais para a série de retornos é que ela seja estacionária. Dentre a enorme variedade de testes de estacionariedade, destacam-se o teste de raiz unitária Dickey-Fuller Aumentado (ADF) e o Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS).

O teste de Dickey-Fuller (DF) foi introduzido pelos autores Dickey e Fuller (1979) e testa a estacionariedade sob a hipótese nula de que a série temporal possui raiz unitária. Considerando um modelo sem constante, tem-se

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

em que $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ e $\alpha = \phi - 1$. Estimando a regressão pelo método dos mínimos quadrados ordinários (MQO), pode-se calcular o coeficiente estimado $\hat{\alpha}$ como

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} - 1$$

em que se testa a hipótese $H_0 : \alpha = 0$. Para calcular a estatística do teste, deve-se primeiramente calcular a variância amostral S^2 e o desvio-padrão do coeficiente estimado $s(\hat{\alpha})$, calculados, respectivamente, como

$$S^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\Delta y_t - \hat{\alpha} y_{t-1})^2,$$

$$s(\hat{\alpha}) = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^T y_{t-1}^2}}.$$

Logo, a estatística do teste pode ser calculada como

$$DF = \frac{\hat{\alpha}}{s(\hat{\alpha})}.$$

A distribuição do teste, segundo Bueno (2008) se assemelha à distribuição t , no entanto como y_t não é estacionário, a distribuição não é convencional. Por esse motivo, os autores recalcularam os valores da estatística t , os quais podem ser encontrados em Dickey e Fuller (1979).

A desvantagem do teste DF é que ele considera o erro ε_t como um ruído branco, no entanto existem casos em que os erros podem ser autocorrelacionados. De forma a contornar esse problema, Dickey e Fuller (1981) desenvolveram um teste melhorado conhecido como teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF). Nesse caso o teste é aplicado estimando-se a regressão

$$\Delta y_t = c + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \left[\left(- \sum_{j=1}^p \phi_{j+1} \right) \Delta y_{t-i} \right] + \varepsilon_t,$$

em que

$$\alpha = - \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \right),$$

Nesse caso, ε_t também é considerado um ruído branco. A ideia central do teste é o de introduzir o número necessário de variáveis autorregressivas de forma que o erro possa ser considerado não autocorrelacionado (Gujarati e Porter, 2009). Essa modificação não altera os valores críticos da estatística t recalculada, portanto pode-se utilizar os mesmos valores já definidos por Dickey e Fuller (1979).

Uma das desvantagens do teste ADF é o seu baixo poder (Bueno, 2008), por esse motivo diversas alternativas vêm sendo desenvolvidas. Uma delas é o teste KPSS, introduzido por Kwiatkowski et al. (1992), o qual serve como complemento aos testes de raiz unitária. Seja um processo estocástico da forma

$$y_t = x_t + \mu_t,$$

em que $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ e μ_t um processo estacionário. Segundo Bueno (2008), a ideia é testar a variância do passeio aleatório x_t . Se esta for nula o processo é estacionário. Portanto, as hipóteses do teste são $H_0: \sigma^2 = 0$ e $H_1: \sigma^2 > 0$. É importante ressaltar que as hipóteses são invertidas em relação ao teste ADF, em que a hipótese nula é a de não estacionariedade.

O cálculo da estatística KPSS é dado por

$$KPSS = \sum_{t=1}^T \frac{S_t^2}{T^2 \sigma_l^2},$$

em que S_t é a soma parcial dos resíduos estimados da regressão e σ_l^2 é a chamada variância de longo prazo. Esse último termo abrange todas as autocovariâncias do processo μ_t . Mais detalhes como estimá-lo podem ser encontrados em Bueno (2008).

3.6. Diagnóstico dos resíduos dos modelos ARMA-GARCH

Para que a estimação dos modelos ARMA-GARCH apresentada anteriormente seja consistente, os resíduos obtidos após a aplicação dos dois modelos devem apresentar certas características, as quais podem ser observadas por meio de gráficos e corroboradas por testes estatísticos. Essas características são: normalidade (ou a distribuição especificada na função de verossimilhança), ausência de autocorrelação e homoscedasticidade.

Um dos testes de normalidade mais utilizados em análise de séries temporais é o de Jarque-

Bera (Jarque e Bera, 1987), o qual testa se os momentos da série de resíduos estimados são iguais aos da distribuição normal. Testa-se, portanto a hipótese nula $H_0: A = 0$ e $K = 3$, em que A e K representam, respectivamente, os coeficientes de assimetria e a curtose da série de resíduos. A estatística do teste é dada por

$$JB = T \left[\frac{A^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right],$$

a qual converge para uma distribuição χ^2 com dois graus de liberdade. Como complemento ao teste de normalidade, podem ser utilizados gráficos estatísticos como o gráfico Q-Q, Boxplot e o gráfico de probabilidade normal.

Para verificar a autocorrelação pode ser utilizada a estatística de Ljung-Box (Ljung e Box, 1978), a qual testa a hipótese nula de que os resíduos não são autocorrelacionados, por meio da estatística

$$Q = T(T + 2) \sum_{j=1}^{n_Q} \frac{\hat{\rho}_j^2}{T - j},$$

a qual converge para uma distribuição χ^2 com $T - p - q$ graus de liberdade. n_Q representa o número de defasagens selecionado para a execução do teste.

Se for confirmada autocorrelação significativa nos resíduos, pode ser um sinal de que há informação disponível dentre os dados que o modelo não está sendo capaz de captar. Nesse caso, deve-se investigar a causa do problema ou aumentar as ordens dos modelos para que eles sejam capazes de eliminar a autocorrelação.

Outro requisito dos resíduos do modelo ARMA-GARCH é de que eles sejam homoscedásticos, ou seja, devem possuir variância constante. O teste ARCH-LM (ARCH multiplicador de Lagrange), proposto por Engle (1982) serve para identificar sinais de heteroscedasticidade condicional (também chamada de efeito ARCH) nos resíduos, estimando a regressão

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \beta_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \cdots + \beta_h \hat{\varepsilon}_{t-h}^2 + \mu_t$$

e testando a hipótese nula de ausência de efeito ARCH $H_0: \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_h = 0$. Testa-se, portanto, se existe autocorrelação nos resíduos ao quadrado. A estatística do teste é dada por

$$ALM_h = T \times R^2,$$

em que R^2 é o coeficiente de determinação. A estatística ALM_h converge a distribuição χ^2 com T graus de liberdade. Se for identificada heteroscedasticidade nos resíduos, isso significa que há informação não captada pelo modelo no que diz respeito a dependência entre as variâncias.

3.7. Previsão com modelos GARCH

As previsões com modelos GARCH(m, n) são obtidas de forma recursiva. Assim, supondo um modelo GARCH(1,1), a previsão para um período à frente, assumindo a origem da previsão em L , é dada por

$$h_L(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_L^2 + \beta_1 h_L,$$

em que r_L e h_L são conhecidos no tempo L . A previsão para múltiplos passos à frente, quando $L > 1$, é definida como

$$h_L(L) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)h_L(L - 1).$$

Em modelos clássicos de séries temporais, como é o caso dos modelos ARMA, costuma-se calcular os resíduos a partir dos valores observados da amostra de validação e então computar os erros de previsão. Entretanto, a volatilidade é uma medida latente, tornando esta abordagem não aplicável de forma direta, pois é necessário primeiramente escolher um *proxy* para a volatilidade (Andersen & Bollerslev, 1998). Uma abordagem intuitiva consiste em utilizar os retornos absolutos ou ao quadrado para avaliar a previsão, visto que os modelos GARCH estimam a variância condicional a partir dos retornos.

No entanto, embora o quadrado dos retornos forneça uma estimativa não viesada para a volatilidade, é possível que ele venha a produzir medições com ruídos elevados, devido ao erro ε_t (Reis et al., 2013). De fato, conforme mencionado por Andersen e Bollerslev (1998), esse componente apresenta elevado grau de variação de observação para observação em relação à volatilidade (h_t), tornando grande parte da variação do retorno ao quadrado atribuível aos choques aleatórios (ε_t). Em

virtude disso, os modelos GARCH podem apresentar desempenho pobre quando julgados pelos critérios mencionados.

É imprescindível, portanto, que seja escolhido um *proxy* adequado para representar a volatilidade real. Uma alternativa para quando apenas dados diários estão disponíveis, é calcular a volatilidade diária pelo estimador de Garman-Klass (Garman e Klass, 1980). Uma abordagem mais adequada, segundo Andersen e Bollerslev (1998), é calcular a volatilidade realizada a partir de retornos intradiários, que fornecem uma medida mais robusta da volatilidade. Os retornos intradiários podem ser calculados como

$$r_{d,m} = p_{d,m} - p_{d,m-1}, \quad m = 2, \dots, M, \quad d = 1, \dots, D,$$

em que os índices d e m se referem, respectivamente, ao dia e ao número de observações. A chamada variância realizada no dia d é dada pela equação

$$VR_d = r_{d,1}^2 + \sum_{m=2}^M r_{d,m}^2, \quad d = 1, \dots, D,$$

em que $r_{d,1} = p_t - p_{t-1}$ é o chamado retorno *overnight*. Finalmente, a volatilidade realizada é dada por

$$VOLR_d = \sqrt{VR_d}. \quad (3.19)$$

Para avaliar a previsão não existe um critério único na literatura. Uma forma é utilizar o R^2 da regressão de Mincer-Zarnowitz (Mincer e Zarnowitz, 1969), como feito no trabalho de Paitore e Chatpatanasiri (2017). A regressão é definida por

$$VOLR_d = c + bh_L(1) + \mu_t,$$

em que c e b são os parâmetros da regressão. Uma previsão não viesada deverá satisfazer as condições $c = 0$ e $b = 1$, com um R^2 próximo de 1. A regressão de Mincer-Zarnowitz, no entanto, é muito sensível para valores extremos de $VOLR_d$. Com o objetivo de contornar esse problema, Engle e Patton (2001) propuseram a utilização da regressão logarítmica

$$\ln(VOLR_d) = c + b\ln[h_L(1)] + \mu_t,$$

a qual é menos sensível a *outliers*. A desvantagem desse método é que a regressão não penaliza a previsão quando $c \neq 0$ e $b \neq 1$. Portanto, o critério do R^2 pode levar a previsões insatisfatórias se as condições impostas sobre os parâmetros a e b não se confirmarem.

Uma abordagem mais usual para avaliar o desempenho na previsão é por meio de medidas de erro, chamadas também de funções de perda, como utilizado no estudo conduzido por Reis et al. (2013). Três medidas muito utilizadas são o erro médio absoluto (MAE), a raiz do erro quadrático médio (RMSE) e o erro médio percentual absoluto (MAPE), representadas, respectivamente pelas equações

$$MAE = L^{-1} \sum_{t=1}^L |VOLR_t - h_t|, \quad (3.20)$$

$$RMSE = L^{-1} \sqrt{\sum_{t=1}^L (VOLR_t - h_t)^2}, \quad (3.21)$$

$$MAPE = L^{-1} \sum_{t=1}^L \frac{(VOLR_t - h_t)}{h_t} \times 100. \quad (3.22)$$

3.8. Extensões assimétricas do modelo GARCH

Uma desvantagem dos modelos GARCH é que eles tratam os retornos positivos e negativos de forma similar, no entanto sabe-se que, em geral, retornos negativos têm maior impacto na volatilidade. Além disso, pelo fato de o modelo considerar os retornos ao quadrado, alguns retornos grandes e isolados podem conduzir a superestimacões (Morettin, 2011). Devido a isso, muitas extensões dos modelos GARCH vêm sendo criadas, com o objetivo de superar essas limitações. Esta seção se destina a apresentar quatro dessas extensões: os modelos GARCH exponencial (EGARCH), GARCH com limiar (TGARCH), GARCH Glosten-Jaganathan-Rukle (GJR-GARCH) e potência GARCH (PGARCH).

3.8.1. GARCH Exponencial (EGARCH)

Nelson (1991) introduziu o modelo assimétrico conhecido como GARCH Exponencial - EGARCH (m, n). Para considerar a assimetria, o autor propôs a ponderação das inovações (ε_t) da forma

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \lambda [|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)],$$

em que θ e λ são constantes, ε_t e $[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)]$ são ambos i.i.d com média zero. Considera-se, portanto, $E(|g(\varepsilon_t)|) = 0$, e a assimetria de $g(\varepsilon_t)$ pode ser reescrita como

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \lambda)\varepsilon_t - \lambda E(|\varepsilon_t|), & \text{se } \varepsilon_t \geq 0, \\ (\theta - \lambda)\varepsilon_t - \lambda E(|\varepsilon_t|), & \text{se } \varepsilon_t < 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

Com o efeito de assimetria definido, o modelo EGARCH(m, n) pode ser escrito como

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\ \ln(h_t) = \alpha_0 + \frac{1 + \sum_{i=1}^n \beta_i B^i}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j B^j} g(\varepsilon_{t-1}),$$

em que B é o operador de defasagem, $1 + \sum_{i=1}^n \beta_i B^i$ e $1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j B^j$ são polinômios com raízes fora do círculo unitário e sem fatores em comum e, $g(\cdot)$ é a chamada curva de impacto de informação. O coeficiente λ é o que define a assimetria dos efeitos, sendo esperado que $\lambda < 0$ para que os choques negativos tenham mais impacto na volatilidade do que os choques positivos. Outra vantagem do modelo EGARCH é que ele garante que a variância condicional h_t seja positiva, independente dos valores dos coeficientes, visto que se modela o logaritmo de h_t (Soldá, 2008).

3.8.2. GARCH com limiar (TGARCH) e GARCH Glosten-Jaganathan-Rukle (GJR-GARCH)

Outro modelo criado com o objetivo de captar o efeito alavanca dos retornos financeiros é o modelo GARCH com limiar (*Threshold*) - TGARCH (m, n) - proposto por Zakoian (1994). A fórmula geral do modelo é

$$\sigma_t^a = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^a + \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j}^a + \sum_{i=1}^m \lambda_i d_{t-i} |r_{t-i}|^a$$

em que σ_t é o desvio padrão e a variável *dummy* d_t pode assumir os valores

$$d_t = \begin{cases} 1, & \text{se } \varepsilon_t < 0 \\ 0, & \text{se } \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

Para Zakoian (1994), o coeficiente a é igual 1. Entretanto para Glosten et al. (1993) o valor é igual a 2. Neste último caso, tem-se uma variação do modelo TGARCH, o chamado Glosten-Jaganathan-Runkle GARCH, ou simplesmente GJR-GARCH, o qual tem a fórmula geral

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^m \gamma_i d_{t-i} r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j h_{t-j}$$

Nesse caso, quando ε_t é positivo, o efeito é dado por $\alpha_i r_{t-i}^2$, enquanto que, se r_t for negativo, o impacto é definido pela parcela $(\alpha_i + \lambda_i) r_{t-i}^2$. Espera-se que λ_i seja positivo para que os retornos negativos tenham mais impacto.

3.8.3. Potência GARCH (PGARCH)

Ding et al. (1993) combinaram as ideias dos outros modelos e introduziram o modelo potência GARCH – PGARCH(m, n) cuja fórmula geral é

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t ,$$

$$\sigma_t^a = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i (|r_{t-i}| + \lambda_i r_{t-i})^a + \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j}^a$$

em que a é positivo e o efeito alavanca é definido por λ_i . Bueno (2008) recomenda que o valor de a seja estimado conjuntamente com os demais coeficientes, de maneira a tornar o modelo mais flexível.

3.8.4. Curva de impacto de informação

Uma forma de avaliar o impacto dos retornos positivos e negativos na volatilidade é por meio da curva de impacto de informação. De acordo com Engle e Ng (1993), essa curva consiste na relação da variância condicional no t -ésimo tempo (h_t) com o termo de erro no tempo $t - 1$ (ε_{t-1}), mantendo-se constante as observações do tempo $t - 2$ ou anterior, e com todas as variâncias

condicionais passadas.

A Figura 3.6 apresenta as curvas de impacto de informação dos modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1), TGARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) e PGARCH(1,1) aplicados a série de retornos diários das ações do Bando do Brasil (BBAS3), no período compreendido entre 02/01/2007 e 11/04/2018.

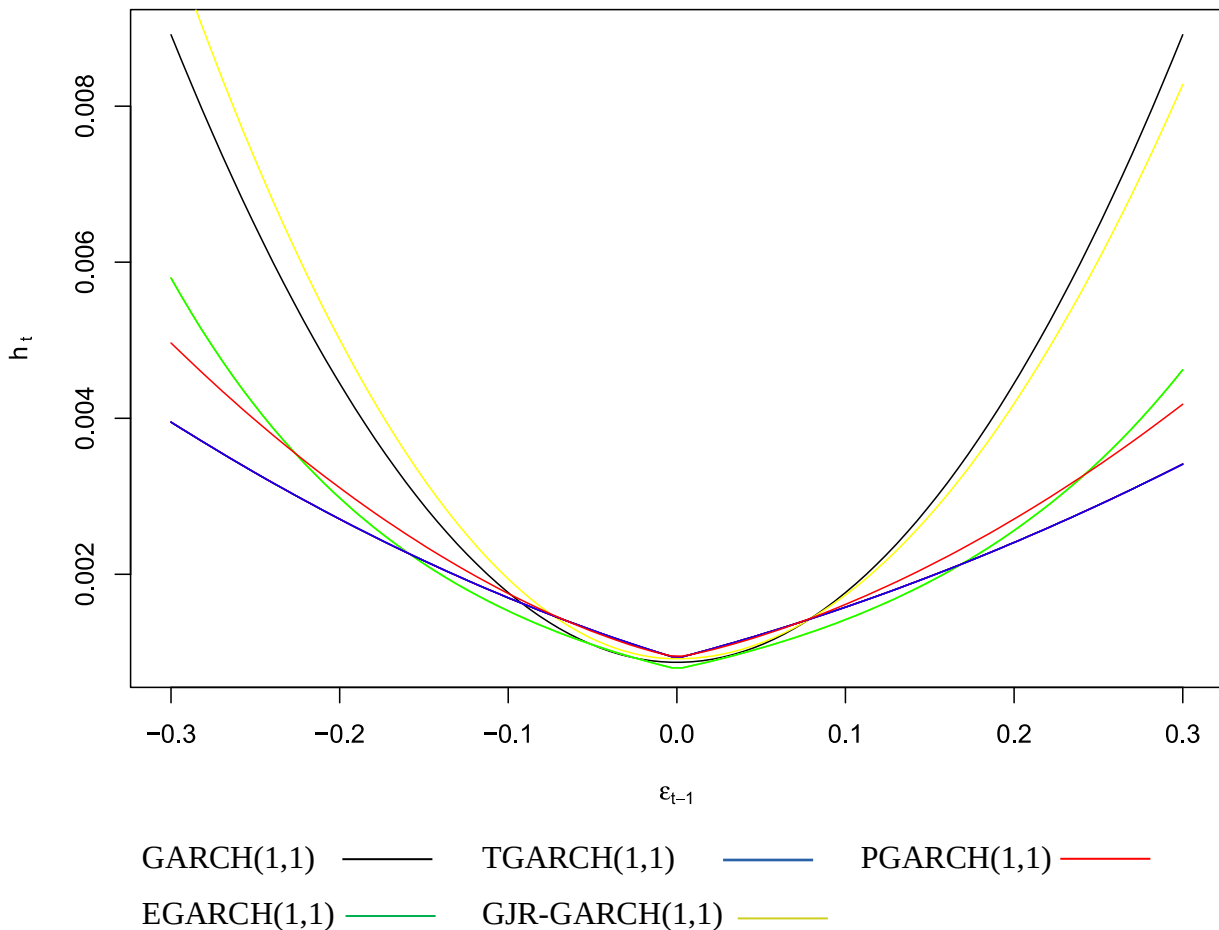


Figura 3.6: Curva de impacto de informação do modelo GARCH e suas extensões assimétricas aplicados a série de retornos BBSA3

Nota-se pela Figura 3.6 que o modelo GARCH(1,1) considera, como esperado, os retornos de forma simétrica e também os associa a valores elevados de volatilidade. Dentre os modelos assimétricos, o modelo GJR-GARCH(1,1) é o que considera o maior impacto, tanto para os retornos negativos como para os retornos positivos. Considerando os demais modelos, o modelo EGARCH(1,1) considera o maior impacto na volatilidade para os retornos negativos conforme os valores vão se aproximando de $\varepsilon_t = -0,3$, seguido do modelo PGARCH(1,1) que, por sua vez, sugere impactos maiores dos choques na volatilidade do que o modelo TGARCH(1,1). Em relação aos

retornos positivos, o modelo PGARCH(1,1) é o que considera maiores impactos na volatilidade durante a maior parte do intervalo $0,0 \leq \varepsilon_t \leq 0,3$. No intervalo $0,2 \leq \varepsilon_t \leq 0,3$, o modelo EGARCH(1,1) apresenta o maior impacto na volatilidade que o modelo TGARCH(1,1), no entanto é superado por este na maior parte do intervalo $0,0 \leq \varepsilon_t \leq 0,2$.

Outra maneira de se verificar a assimetria do impacto dos retornos na volatilidade é por meio do teste conhecido como *Sign Bias Test*. Detalhes sobre esse teste podem ser encontrados em Engle e Ng (1993).

3.9. Estudos relacionados

Diversos estudos já foram conduzidos com a utilização de modelos GARCH. Esta seção se destina a comentar alguns desses estudos.

Santos e Ziegelmann (2012) avaliaram o desempenho de modelos GARCH e modelos aditivos semi-paramétricos na estimação e previsão da volatilidade em períodos de crise, por meio de simulações de Monte Carlo e com diferentes períodos de tempo da série de retornos do IBOVESPA. As simulações foram realizadas considerando dois processos geradores de dados, um baseando-se nos quadrados dos resíduos e outro nos resíduos absolutos. Os modelos GARCH apresentaram performance superior no primeiro caso. No entanto, foram superados pelos modelos aditivos semi-paramétricos quando o processo gerador dos dados se baseou nos resíduos absolutos. Quanto à aplicação no IBOVESPA, ambos modelos apresentaram performance similar pelo teste de Diebold-Mariano.

Simões, Pinto, & Levrini (2012) avaliaram e compararam o desempenho dos modelos GARCH, GARCH fracionário integrado (FIGARCH) e ARIMA fracionário integrado (ARFIMA), no ajuste e previsão de uma série de preços de soja com dados de alta frequência. Foi observado que o modelo GARCH(1,1) e ARFIMA obtiveram os melhores resultados. Como conclusão, os autores afirmam que, no presente estudo, o modelo GARCH(1,1) apresenta um surpreendente poder de previsão quando aplicado em dados intradiários.

Em outro estudo, Reis et al. (2013) aplicaram modelos da família GARCH e modelos ARIMA na previsão da volatilidade das ações da Petrobrás. A ideia principal do estudo foi de comparar os resultados obtidos pela volatilidade implícita e explícita e então compará-los com a volatilidade realizada calculada com retornos intradiários. Com esse objetivo, primeiramente foram ajustados modelos GARCH com os retornos diários e a volatilidade prevista foi comparada com a volatilidade realizada. Em um segundo momento, com dados intradiários de três anos, foi ajustado um modelo ARIMA diretamente na volatilidade realizada e, assim, foram computados os erros de previsão da

forma tradicional. Como conclusão, os modelos ARIMA tiveram performance superior, pois modelaram a volatilidade de forma direta. No entanto, esse tipo de abordagem nem sempre é possível, devido à dificuldade em se obter dados intradiários.

Em estudo desenvolvido na Malásia, Lim e Sek (2013) aplicaram modelos GARCH, EGARCH e TGARCH no mercado financeiro. Como houve uma crise econômica no país no ano de 1997, o conjunto de dados foi dividido em três partes: antes da crise econômica, durante a crise e após a crise. Os resultados evidenciaram diferentes performances dos modelos dependendo do período, com os modelos GARCH simétricos tendo performance superior nos períodos de economia estável, enquanto que os modelos assimétricos obtiveram melhor desempenho durante a crise econômica. Ressalta-se, no entanto, que os autores utilizaram retornos absolutos para avaliar a previsão.

Na Árabia Saudita, Mhmoud e Dawalbait (2015) aplicaram modelos GARCH, EGARCH e GJR-GARCH com a finalidade de estimar volatilidade do índice de preços do mercado financeiro do país. Os modelos foram especificados seguindo três distribuições: Normal, *t* de *Student* e GED. De forma similar aos outros estudos, os autores chegaram a conclusão de que os modelos assimétricos apresentaram melhor performance, sendo o modelo GJR-GARCH(1,1) o que obteve os melhores resultados.

Em outro estudo envolvendo modelos GARCH e EGARCH, Lama et al. (2015) compararam o desempenho dos dois modelos na estimação e previsão um passo à frente da volatilidade de preços internacionais de óleo. Ao final do estudo, o modelo AR(2)-EGARCH(1,1) foi o que apresentou os melhores resultados de previsão, quando avaliado pelas medidas de erro RMSE e MAPE.

Em um estudo mais abrangente, Narsoo (2015) analisou a volatilidade da taxa de câmbio entre o dólar e a rupia mauriciana (moeda da Maurícia), com o uso de modelos GARCH, EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH. Os resultados indicaram que a volatilidade da taxa de câmbio apresenta elevada persistência, aglomerados de volatilidade e efeito alavanca. Além disso, o modelo EGARCH foi o que apresentou os melhores resultados no ajuste, enquanto que o modelo GJR-GARCH obteve ligeira superioridade na previsão.

Angélico e Oliveira (2016) conduziram um estudo com o objetivo de modelar a volatilidade estatística do Índice Bovespa (IBOVESPA) e do Índice Dow Jones, por meio de modelos ARMA-GARCH. Como complemento, os autores também buscaram averiguar a existência de equilíbrio de longo prazo e procedência temporal entre os índices, com o uso de testes de co-integração e de causalidade. Os resultados evidenciaram que o índice brasileiro possui maior volatilidade e há ausência de equilíbrio de longo prazo entre as duas variáveis.

Luo et al. (2017) utilizaram modelos GARCH simétricos e assimétricos com inovações

normais e seguindo a distribuição t de *Student* com o objetivo de prever a volatilidade o índice do mercado de ações da bolsa de Xangai. Para verificar o desempenho na previsão foi utilizada a regressão de Mincer-Zarnowitz, que evidenciou que os modelos seguindo a distribuição t de *Student* foram capazes de prever melhor a volatilidade do que os modelos seguindo a distribuição normal.

Com o objetivo de investigar a persistência na variância e presença de quebras estruturais, Oliveira e Araújo (2018) aplicaram o modelo GARCH(1,1) e o modelo de variância puro Markov Switching (MS) na série de preços da manga e uva exportadas da Bahia. Como resultado, os autores apontam que as séries analisadas não apresentam variância persistente nem quebras estruturais. Além disso, o modelo GARCH(1,1) foi capaz de modelar melhor a heteroscedasticidade na série da uva, ao passo que o modelo MS obteve melhores resultados na série da manga.

Em estudos mais recentes, Liu et al. (2018) derivaram uma fórmula de precificação a partir dos modelos da família GARCH; Lai (2018) avaliou a performance de diversos modelos GARCH multivariados em diversos índices financeiros, enquanto Gajda et al. (2018) utilizaram modelos ARFIMA-GARCH para a previsão do uso de água quente em áreas residenciais. Atualmente, existem versões mais complexas dos modelos GARCH que têm sido implementadas e avaliadas, como é realizado nos trabalhos de Narayan e Liu (2018), Ismail et al. (2018), Sahamkhadam et al. (2018), Ardía et al. (2018) e Blazsek et al. (2018).

4. METODOLOGIA

As séries de preço das ações da AmBev (ABEV3), Bradesco (BBDC3) e da Vale (VALE3) foram obtidas a partir da base de dados do InfoMoney (Infomoney, 2018) e são compostas de preços diários datando de 02/01/2007 até 11/04/2018, totalizando 2.795 observações para o ajuste de cada série. O período compreendido entre 12/04/2018 e 12/05/2018 é utilizado para a previsão, totalizando 21 observações para a amostra de validação. Para esse último período foram computados retornos intradiários a cada 15 minutos para calcular a volatilidade realizada em cada dia e, então, comparar os valores com os obtidos pelo modelo GARCH.

A metodologia deste estudo segue as seguintes etapas:

1) **Cálculo dos retornos e análise exploratória:** calcula-se os retornos a partir da série de preços, por meio da equação (3.2). Em seguida realiza-se a análise exploratória dos dados;

2) **Verificação da estacionariedade e autocorrelação:** para verificar se as séries de retorno são estacionárias e se possuem autocorrelação, são construídos os gráficos da função de autocorrelação (FAC) e função de autocorrelação parcial (FACP). As conclusões obtidas são então

corroboradas por meio de testes estatísticos, em que os testes ADF e KPSS são utilizados para analisar a estacionariedade e o teste de Ljung-Box para verificar a presença de autocorrelação significativa. Este último teste é executado para as 20 primeiras defasagens, visto que, segundo Morettin (2011) é um número suficiente para verificar a autocorrelação. Entretanto, para o teste ADF, é necessário um rigor maior sobre a escolha da ordem de defasagem para sua execução (Ng & Perron, 2001). Neste estudo, inicia-se com a fixação de um valor máximo pelo critério proposto em Schwert (1989), que utiliza a função

$$p_{max} = \text{int } 12 \left[\left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right],$$

em que T é o número total de observações da série temporal. A partir deste p_{max} executa-se o teste ADF verificando-se a significância do último coeficiente estimado na regressão. Se este coeficiente for significativo, o resultado do teste é levado em consideração, caso contrário, o teste é executado para o número de defasagens p_{max-1} . Este processo é realizado de forma iterativa até que o último coeficiente do modelo de regressão seja significativo.

Com o número de defasagens definido, é adotado o procedimento proposto por Schmidt e Lima (2004), que sugerem que o teste seja realizado considerando tendência e constante. Quando a primeira for significativa, ambas são consideradas no modelo; se a tendência não for significativa, apenas a constante é considerada, sendo o teste realizado novamente; se esta for significativa, ela é considerada, se não, é retirada.

Para a aplicação do teste KPSS, se utiliza as mesmas condições de inclusão de constante e tendência estabelecidas no teste ADF, enquanto que na escolha do número de defasagens recorre-se a equação proposta por Pfaff (2011)

$$p = \text{int } 4 \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{4}};$$

3) Determinação das ordens do modelo ARMA – se houver presença de autocorrelação, é aplicado um modelo ARMA(p,q) com o objetivo de removê-la. Para a determinação das ordens p e q , são testadas todas as combinações possíveis de modelos ARMA até as ordens (6,6) e, então, é escolhido como candidato o modelo que apresenta os menores critérios de informação de Akaike corrigido (AICc), Schwarz (BIC) e Hannan-Quinn (HQIC). A estimação do modelo ARMA é

realizada por meio do método de máxima verossimilhança exata, com a suposição de que os erros seguem a distribuição normal, e é maximizada pelo algoritmo proposto em Gardner et al (1980). Os modelos são estimados primeiramente com constante e, então, é avaliada a significância dessa componente. Se a constante for significativa ela é mantida, caso contrário é retirada. Com o modelo definido, aplica-se o teste de Ljung-Box e checka-se a FAC e FACP dos resíduos para verificar se não há mais autocorrelação, se esta permanecer deve-se aumentar as ordens p e q ;

4) **Verificação da heteroscedasticidade condicional** – verifica-se se os retornos ou os resíduos do modelo ARMA apresentam variâncias dependentes (efeito ARCH), de modo a justificar o emprego de um modelo GARCH. Com este intuito, são verificadas a FAC e FACP dos resíduos do modelo ARMA ao quadrado. A análise visual é corroborada pela aplicação dos testes estatísticos ARCH-LM e Ljung-Box nos retornos ao quadrado, os quais são aplicados para 12 defasagens, valor utilizado por Morettin (2011);

5) **Determinação das ordens do modelo GARCH e extensões** – as ordens do modelo GARCH e de suas extensões (EGARCH, TGARCH, GJR-GARCH e PGARCH) também são determinadas de forma iterativa, buscando-se as ordens m e n que minimizem os critérios de informação AICc, BIC e HQIC. Se for verificado que o somatório dos parâmetros α e β do modelo GARCH resulta em um valor próximo a um, o modelo IGARCH também é aplicado. Em geral, os modelos da família GARCH possuem ordens baixas, como (1,1),(1,2),(2,1) ou (2,2) (Bueno, 2008), por esse motivo testa-se modelos GARCH com essas ordens de defasagem. Na estimação dos parâmetros é utilizado o método de máxima verossimilhança condicional, supondo, a fim de comparação, erros gaussianos e erros seguindo a distribuição t de *Student*. As funções de verossimilhança são maximizadas utilizando métodos de otimização de lagrange, o qual determina valores iniciais viáveis para a estimação. Mais detalhes sobre esses métodos podem ser encontrados em Ye (1987);

6) **Diagnóstico dos resíduos do modelo GARCH** – como a volatilidade não é diretamente observável, não se pode computar os resíduos de um modelo GARCH a partir dos valores observados, como comumente é feito na modelagem com os modelos ARMA. Uma solução é utilizar os chamados resíduos padronizados (\tilde{r}_t), dados por

$$\tilde{r}_t = \frac{r_t}{\sqrt{h_t}}.$$

Checka-se se os resíduos padronizados apresentam ausência de autocorrelação e se não

possuem heteroscedasticidade condicional com os testes já mencionados anteriormente. No caso de presença de heteroscedasticidade condicional, aumenta-se as ordens de defasagem m e n . Para verificar se os resíduos seguem a distribuição de probabilidade especificada utiliza-se o gráfico quantil-quantil (Q-Q). Na verificação da normalidade ainda é aplicado o teste de Jarque-Bera;

7) **Previsão** – Para avaliar a previsão é utilizada a volatilidade realizada, computada a partir de retornos intradiários a cada 15 minutos, por meio da equação (3.18). Compara-se o desempenho dos modelos na previsão por meio do erro médio absoluto (MAE), da raiz do erro quadrático médio (RMSE) e do erro médio percentual absoluto (MAPE), representados, respectivamente pelas equações 3.21, 3.22 e 3.23. Os modelos são executados para a previsão dinâmica e estática da volatilidade das séries. Na previsão dinâmica, as previsões são geradas a partir de um ponto fixo no tempo (fim da amostra de ajuste). Já na previsão estática, o modelo projeta os valores futuros sempre um passo à frente, sendo que a cada previsão o valor real, pertencente a amostra de validação, é incorporado ao modelo para executar a previsão do próximo período.

Toda a análise realizada neste estudo é feita com o software R, (R CORE TEAM, 2018) com o uso, principalmente, do pacote de funções *rugarch*. Além deste, são utilizados os pacotes *tseries*, *Atsa*, *FinTS* e *urca*, entre outros. Uma breve explicação sobre o código utilizado é apresentada no Apêndice A.1.

A Figura 4.1 apresenta um fluxograma que resume a metodologia utilizada.

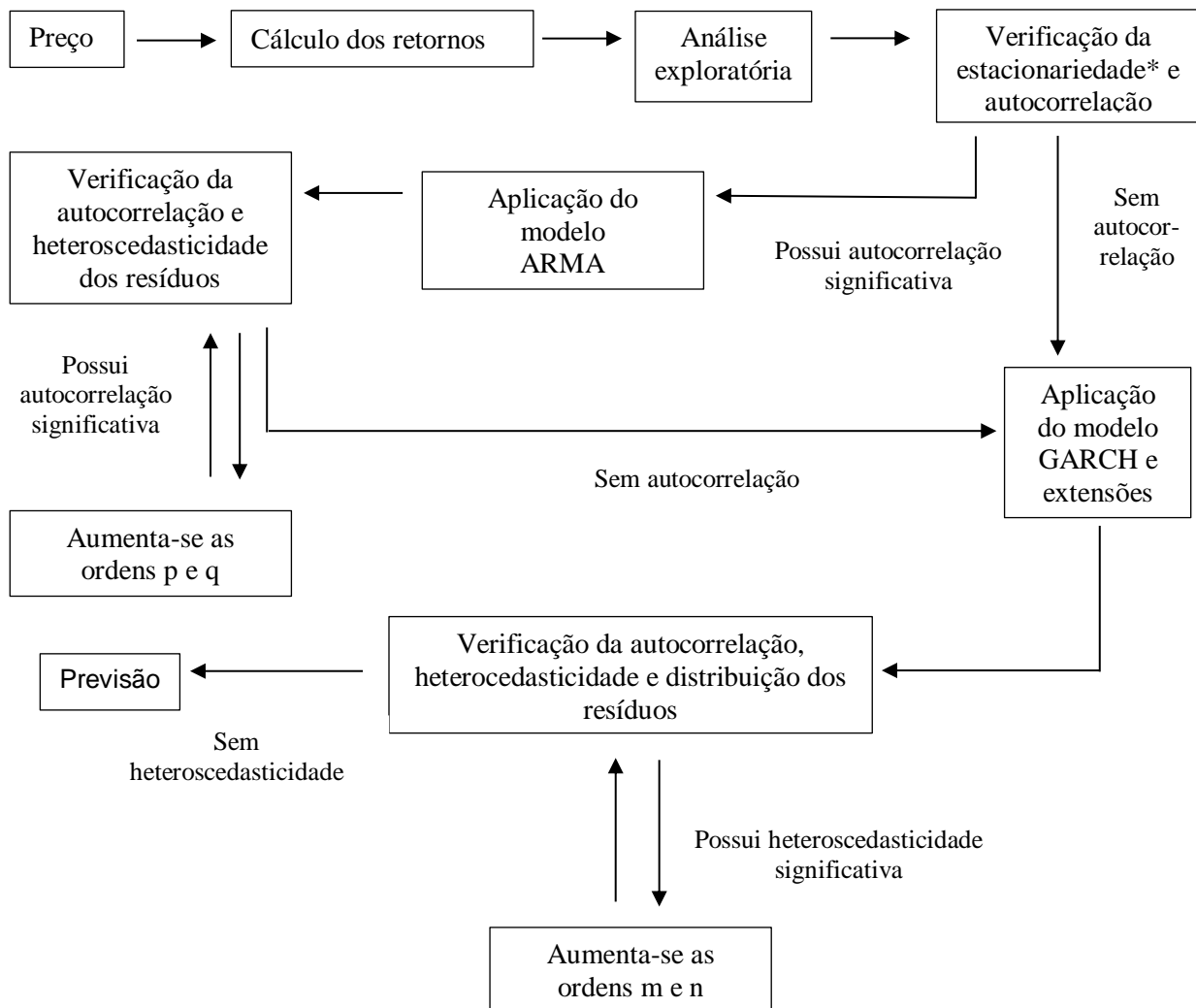


Figura 4.1: Fluxograma da metodologia utilizada no estudo

OBS: *Em caso de não estacionariedade, deve-se tirar a primeira diferença dos retornos e executar um modelo ARIMA. No entanto, essa situação é incomum, visto que retornos financeiros são quase sempre estacionários. Por esse motivo, a aplicação de um modelo ARIMA não está contemplada pela metodologia deste estudo.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção se destina a apresentar e discutir os resultados da aplicação dos modelos ARMA-GARCH nos retornos das séries ABEV3, BBDC3 e VALE3, por meio da metodologia apresentada anteriormente.

5.1. Ações da empresa AmBev (ABEV3)

5.1.1. Análise exploratória

A Figura 5.1 apresenta os gráficos em linha da série de preços ABEV3 e de seus respectivos retornos. Nota-se que os preços aparentam ser não estacionários, com variância tendendo ao infinito, ao passo que na série de retornos a variância se encontra estabilizada e há indícios de que os retornos são estacionários com média zero.

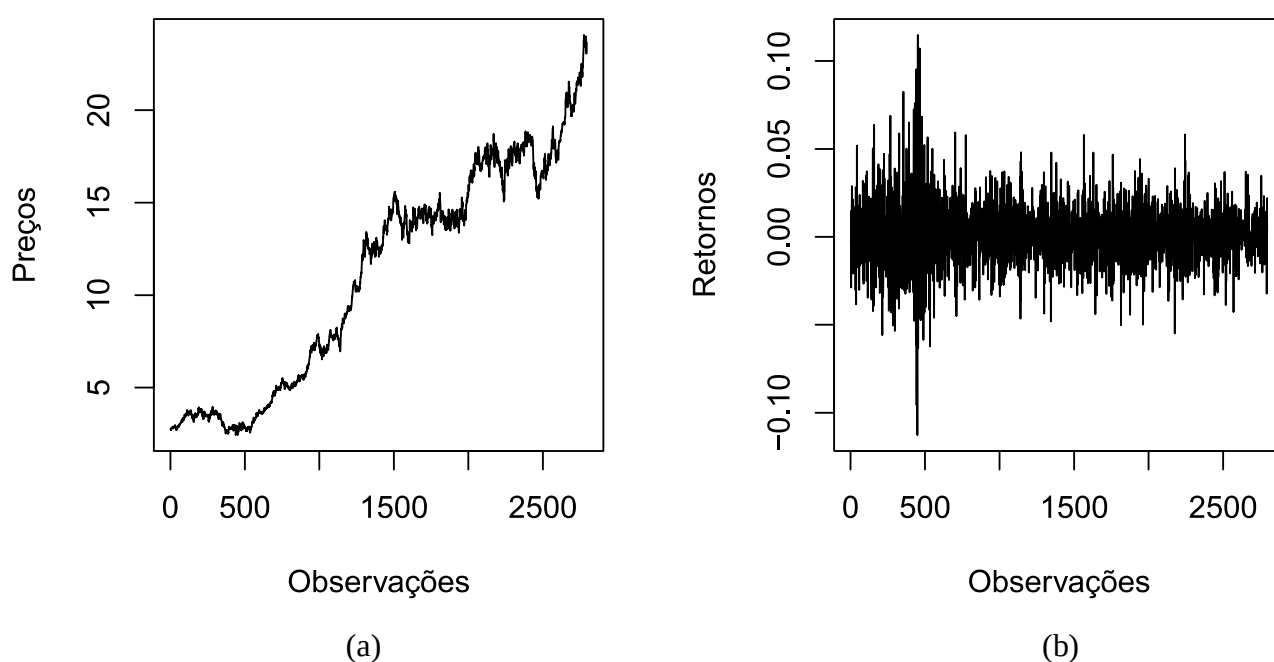


Figura 5.1: (a) Série de preços e de (b) retornos das ações ABEV3 no período compreendido entre 02/01/2007 até 11/04/2018

Na Figura 5.2 é apresentado o histograma da série de retornos da ABEV3, sendo possível observar que a série aparenta ser leptocúrtica com distribuição aproximadamente simétrica. Essa análise visual é confirmada pelos resultados da Tabela 5.1, que apresenta algumas estatísticas descritivas da série.

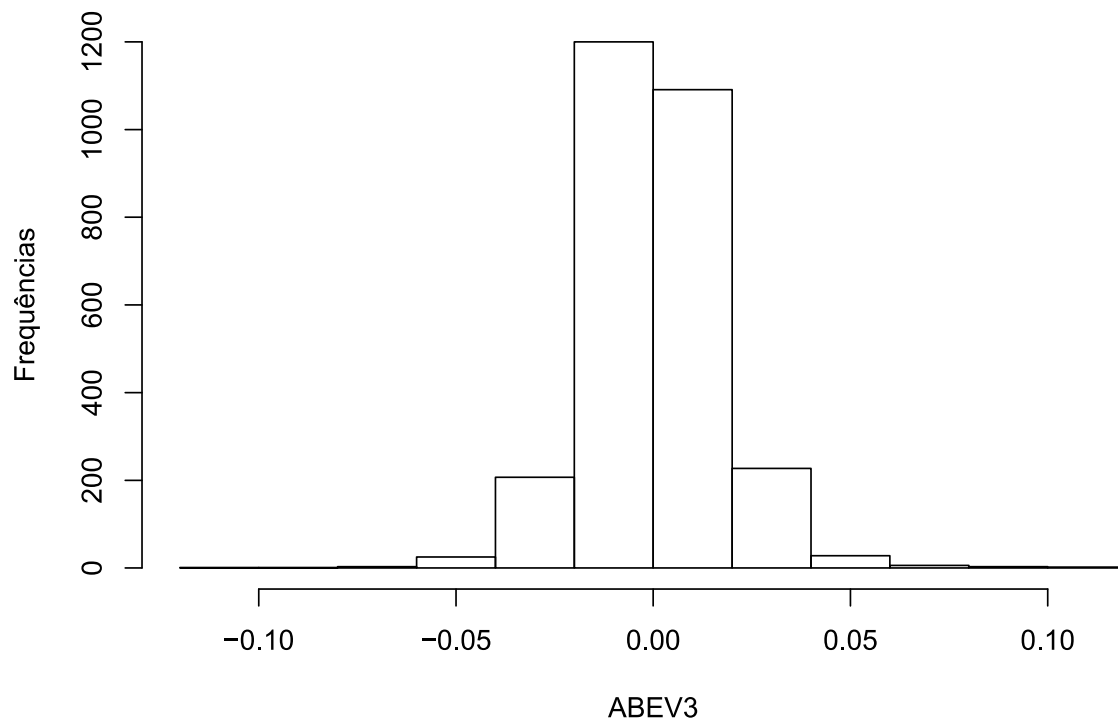


Figura 5.2: Histograma da série de retornos ABEV3

Tabela 5.1: Estatísticas descritivas dos retornos da série ABEV3

Média	Desvio Padrão	Curtose	Assimetria
0,0008	0,0166	7,2219	0,1140

5.1.2. Verificação da estacionariedade e autocorrelação

A Figura 5.3 apresenta a FAC e a FACP dos retornos da série ABEV3 para as 20 primeiras defasagens. Nota-se que, em ambas funções, as três primeiras autocorrelações são significativas, indicando que talvez seja necessário a aplicação prévia de um modelo ARMA para remover a autocorrelação serial. Entretanto, como essa autocorrelação significativa não é persistente, pode-se inferir pelos gráficos que a série é possivelmente estacionária.

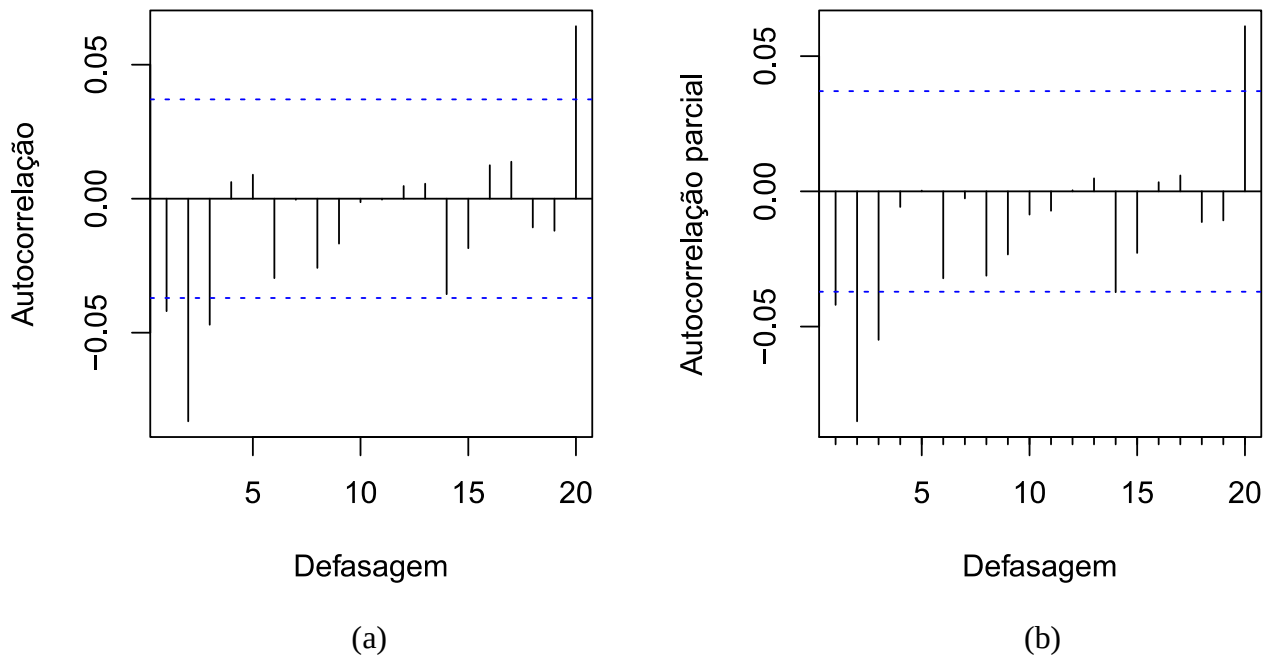


Figura 5.3: (a) FAC e (b) FACP da série de retornos ABEV3

De forma a confirmar os achados indicados na Figura 5.3, foram executados os testes de estacionariedade ADF e KPSS, ambos com constante e sem tendência, para, respectivamente, 24 e nove defasagens. O teste ADF apresentou valor $p < 0,0001$, enquanto o teste KPSS resultou em valor $p \geq 0,1$, permitindo inferir que a série de retornos apresenta estacionariedade. De forma a confirmar a presença de autocorrelação nos retornos, o teste de Ljung-Box foi aplicado, resultando em valor $p < 0,0001$, evidenciando que existe autocorrelação significativa na série. Os resultados indicam, portanto, que é necessária a aplicação prévia de um modelo ARMA, antes do modelo GARCH.

5.1.3. Aplicação do modelo ARMA e diagnóstico dos resíduos

Os critérios de informação e diagnóstico dos resíduos dos cinco melhores modelos ARMA, dentre os 48 modelos ARMA testados para a série ABEV3, aplicados aos retornos da série ABEV3, estão apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Modelos ARMA aplicados aos retornos da série ABEV3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM
ARMA(2,2)	-13.985,72	-13.950,14	-13.981,46	0,2160	<0,0001	<0,0001
ARMA(0,4)	-14986,35	-14950,77	-14981,81	0,2316	<0,0001	<0,0001
ARMA(1,1)	-13.986,36	-13.962,64	-13.986,09	0,0966	<0,0001	<0,0001
ARMA(2,1)	-13.987,80	-13.958,14	-13.985,53	0,2089	<0,0001	<0,0001
ARMA(1,2)	-13.987,92	-13.958,26	-13.985,65	0,2169	<0,0001	<0,0001

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM.

É possível observar na Tabela 5.2 que o modelo ARMA(1,2) apresenta o menor AICc, entretanto possui BIC e HQIC maiores que o modelo ARMA(1,1). Como este último minimiza dois dos três critérios utilizados, optou-se por selecionar o modelo ARMA(1,1) para remover a autocorrelação significativa da série de retornos ABEV3. De acordo com os resultados do teste de Ljung-Box (LB), o modelo selecionado é capaz de remover a autocorrelação significativa na série.

Na verificação da heteroscedasticidade, os testes de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado (LB(r²)) e ARCH-LM (LM), apresentados na Tabela 5.2, indicam que existe presença de heteroscedasticidade significativa nos resíduos do modelo ARMA.

O diagnóstico dos resíduos do modelo ARMA(1,1) é corroborado pelas Figuras 5.4 e 5.5, as quais mostram, respectivamente, os gráficos da FAC e FACP para os resíduos e seus respectivos quadrados.

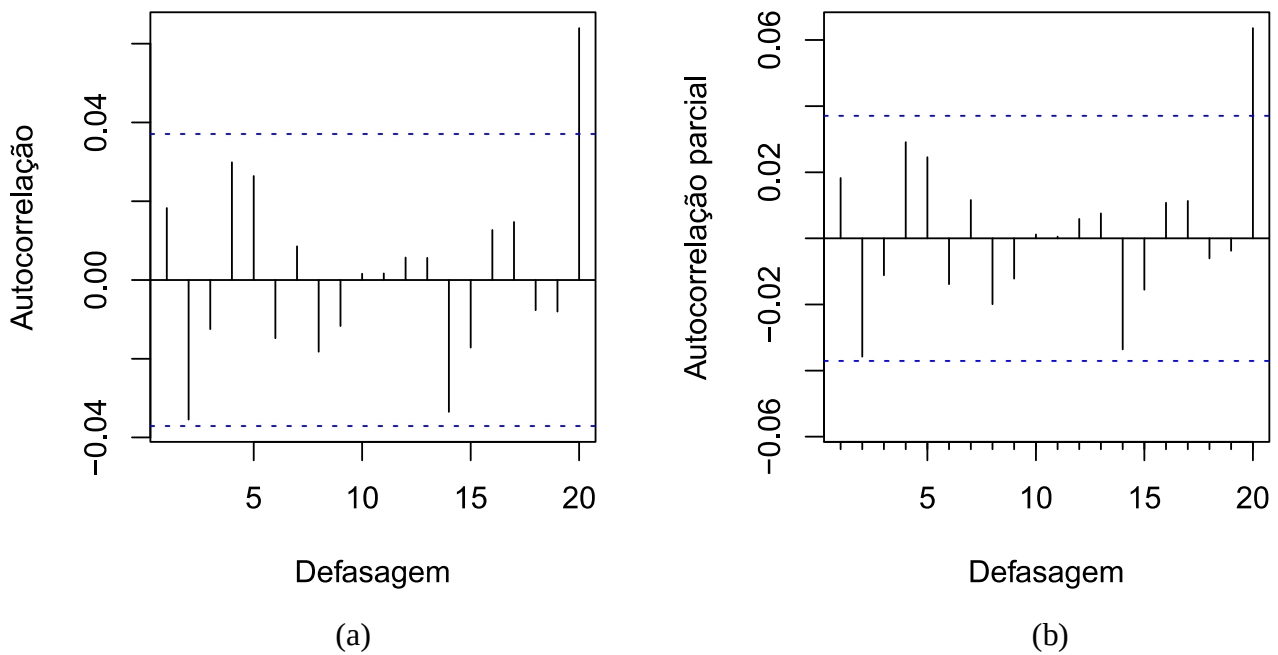


Figura 5.4: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos do modelo ARMA(1,1)

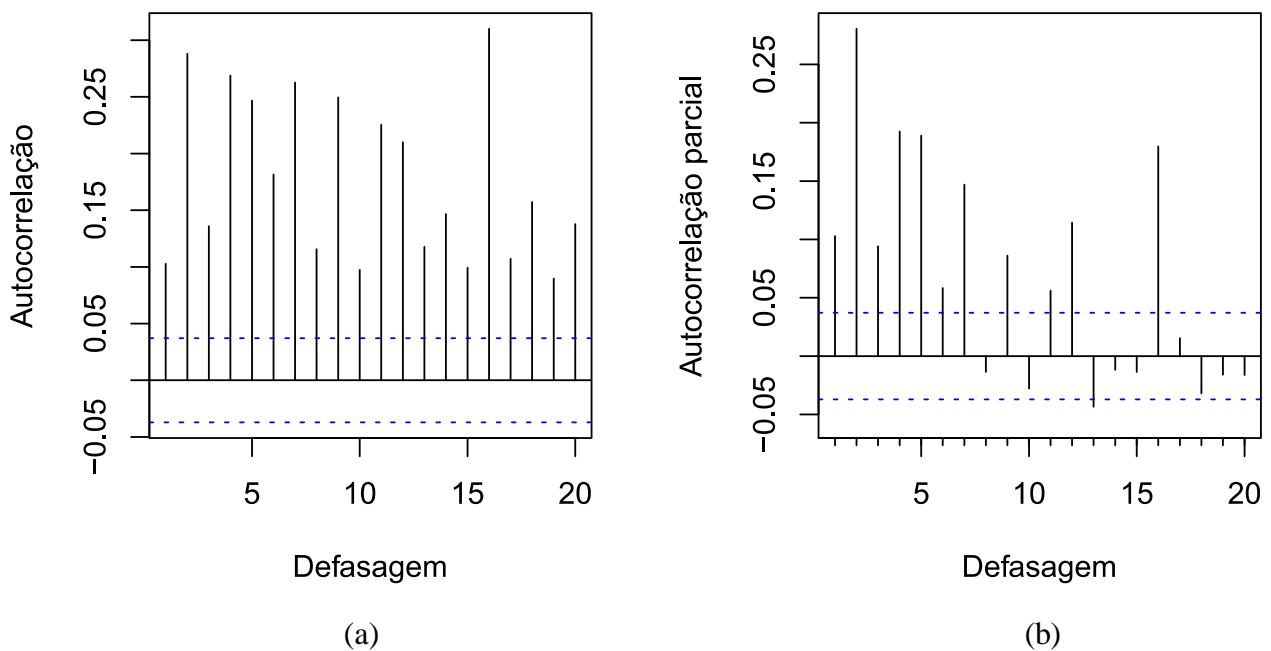


Figura 5.5: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(1,1)

As Figuras 5.4 e 5.5 evidenciam que a autocorrelação nos resíduos foi eliminada, com apenas um pico de autocorrelação na vigésima defasagem. Já nos resíduos ao quadrado, nota-se que existe presença de heteroscedasticidade condicional, sendo que esta permanece até defasagens elevadas, o que indica alta persistência na volatilidade.

5.1.4. Aplicação dos modelo GARCH e diagnóstico dos resíduos

Os valores dos coeficientes do modelo GARCH(1,1) aplicado aos retornos da série ABEV3 são $\alpha_1=0,0615$ e $\beta_1=0,9214$, o que indica, pelo fato do somatório dos coeficientes ser próximo de 1, que a volatilidade é persistente, concordando com as funções de autocorrelação observadas na Figura 5.4. Por esse motivo, o modelo IGARCH também é aplicado, visto que supostamente esse modelo é mais adequado para modelar a elevada persistência na volatilidade. Além do modelo GARCH e IGARCH, também são aplicadas as extensões assimétricas EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH. Todos os modelos são executados supondo-se duas distribuições de probabilidade para os resíduos, normal e *t* de Student, com o objetivo de se verificar o desempenho dos modelos com essas duas suposições.

As Tabelas 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 apresentam os resultados da aplicação dos modelos GARCH, IGARCH, EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH, respectivamente.

Tabela 5.3: Modelos GARCH aplicados aos retornos da série ABEV3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r ²)	ALM	JB
GARCH(1,1) - Normal	-5,5554	-5,5427	-5,5508	0,6842	0,6870	0,7061	<0,0001
GARCH(2,1) - Normal	-5,5548	-5,5548	-5,5494	0,6709	0,7212	0,7420	<0,0001
GARCH(1,2) - Normal	-5,5547	-5,5398	-5,5493	0,6842	0,6870	0,7061	<0,0001
GARCH(2,2) - Normal	-5,5545	-5,5375	-5,5484	0,6837	0,6876	0,7066	<0,0001
GARCH(1,1) - Student	-5,5836	-5,5687	-5,5782	0,7565	0,7140	0,8071	-
GARCH(2,1) - Student	-5,5829	-5,5659	-5,5767	0,7629	0,7148	0,8065	-
GARCH(1,2) - Student	-5,5829	-5,5659	-5,5767	0,7556	0,7152	0,8073	-
GARCH(2,2) - Student	-5,5822	-5,5631	-5,5753	0,7629	0,7585	0,8488	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor *p* do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor *p* do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor *p* do teste ARCH-LM; JB: valor *p* do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.4: Modelos IGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
IGARCH(1,1) - Normal	-5,5504	-5,5398	-5,5465	0,6919	0,7422	0,7593	<0,0001
IGARCH(1,2) - Normal	-5,5496	-5,5369	-5,5450	0,6901	0,7464	0,7614	<0,0001
IGARCH(2,1) - Normal	-5,5496	-5,5369	-5,5450	0,6886	0,7515	0,7642	<0,0001
IGARCH(2,2) - Normal	-5,5493	-5,5344	-5,5439	0,6914	0,7940	0,7940	<0,0001
IGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,5834	-5,5707	-5,5788	0,7627	0,7177	0,7329	-
IGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,5827	-5,5678	-5,5773	0,7619	0,7153	0,7309	-
IGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,5827	-5,5678	-5,5773	0,7617	0,7188	0,7327	-
IGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,5820	-5,5651	-5,5759	0,7686	0,7500	0,7547	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.5: Modelos EGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
EGARCH(1,1) - Normal	-5,5628	-5,5479	-5,5574	0,7295	0,4499	0,4815	<0,0001
EGARCH(2,1) - Normal	-5,5621	-5,5451	-5,5559	0,7287	0,4403	0,4745	<0,0001
EGARCH(1,2) - Normal	-5,5621	-5,5429	-5,5552	0,7256	0,4846	0,5130	<0,0001
EGARCH(2,2) - Normal	-5,5614	-5,5401	-5,5537	0,7256	0,4846	0,5130	<0,0001
EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,5897	-5,5727	-5,5836	0,7256	0,4846	0,5130	-
EGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,5888	-5,5676	-5,5812	0,7389	0,5274	0,5379	-
EGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,5890	-5,5699	-5,5821	0,7389	0,5274	0,5379	-
EGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,5881	-5,5648	-5,5797	0,7389	0,5274	0,5379	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.6: Modelos TGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
TGARCH(1,1) - Normal	-5,5665	-5,5517	-5,5612	0,7522	0,5156	0,5747	<0,0001
TGARCH(2,1) - Normal	-5,5659	-5,5489	-5,5597	0,7520	0,5067	0,5686	<0,0001
TGARCH(1,2) - Normal	-5,5651	-5,5460	-5,5582	0,7517	0,517	0,5753	<0,0001
TGARCH(2,2) - Normal	-5,5650	-5,5438	-5,5574	0,7611	0,5503	0,6047	<0,0001
TGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,5911	-5,5741	-5,5850	0,7611	0,5503	0,7080	-
TGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,5905	-5,5713	-5,5836	0,7577	0,4945	0,7024	-
TGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,5897	-5,5685	-5,5820	0,7577	0,4945	0,7024	-
TGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,5890	-5,5657	-5,5806	0,7577	0,4944	0,7024	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM. JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.7: Modelos PGARCH aplicados aos retornos da série ABEV3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
PGARCH(1,1) - Normal	-5,5671	-5,5501	-5,5610	0,7722	0,4803	0,6615	<0,0001
PGARCH(2,1) - Normal	-5,5653	-5,5462	-5,5584	0,7546	0,5167	0,6873	<0,0001
PGARCH(1,2) - Normal	-5,5661	-5,5449	-5,5584	0,7713	0,5102	0,6889	<0,0001
PGARCH(2,2) - Normal	-5,5654	-5,5421	-5,5570	0,7721	0,5016	0,6793	<0,0001
PGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,5911	-5,5720	-5,5842	0,7746	0,4907	0,5346	-
PGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,5904	-5,5692	-5,5827	0,7717	0,4762	0,5259	-
PGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,5891	-5,5657	-5,5806	0,7600	0,5159	0,5527	-
PGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,5894	-5,5639	-5,5802	0,7805	0,5067	0,5503	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.8: Modelos GJR-GARCH aplicados aos retornos da série ABEV3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
GJR-GARCH(1,1) - Normal	-5,5613	-5,5466	-5,5560	0,6899	0,5725	0,6291	<0,0001
GJR-GARCH(2,1) - Normal	-5,5607	-5,5417	-5,5538	0,6816	0,6146	0,6591	<0,0001
GJR-GARCH(1,2) - Normal	-5,5606	-5,5437	-5,5545	0,6887	0,5725	0,6286	<0,0001
GJR-GARCH(2,2) - Normal	-5,5599	-5,5388	-5,5523	0,6815	0,6149	0,6595	<0,0001
GJR-GARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,5887	-5,5718	-5,5826	0,7402	0,6122	0,6541	-
GJR-GARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,5878	-5,5667	-5,5802	0,7426	0,6181	0,6601	-
GJR-GARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,5880	-5,5690	-5,5812	0,7391	0,6083	0,6508	-
GJR-GARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,5871	-5,5639	-5,5787	0,7427	0,6179	0,6599	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Nota-se nas Tabelas 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 que, pelo resultado do teste de Jarque-Bera (JB), nenhum modelo seguindo a distribuição normal foi capaz de produzir resíduos seguindo essa distribuição. Além disso, os modelos seguindo a distribuição t de *Student* apresentaram critérios de informação menores que os modelos seguindo a distribuição normal, demonstrando que se ajustam melhor aos dados. Os modelos GARCH(1,1), IGARCH(1,1), EGARCH(1,1), TGARCH(1,1), PGARCH(1,1) e GJR-GARCH(1,1), todos com resíduos seguindo a distribuição t de *Student*, apresentaram os menores critérios de informação dentre os modelos de mesmo tipo e, portanto, são modelos aptos para a previsão. Entretanto, com o objetivo de comparar os modelos de diferentes distribuições, os melhores modelos seguindo a distribuição normal também foram escolhidos para a previsão. Considerando todos os modelos, o modelo TGARCH(1,1) seguindo a distribuição t de *Student* foi o que apresentou os menores critérios de informação, seguido do modelo PGARCH(1,1), EGARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1), IGARCH(1,1) e, por último, o modelo GARCH(1,1) simétrico, todos seguindo a mesma distribuição. Ressalta-se que o modelo IGARCH(1,1) supera o modelo GARCH(1,1) nos critérios BIC e HQIC, indicando um melhor ajuste por parte do modelo que considera a volatilidade persistente.

Dando continuidade ao diagnóstico dos resíduos, a Figura 5.6 apresenta os gráficos quantil-quantil com envelope simulado de 95% do modelo TGARCH(1,1) seguindo a distribuição normal e t de *Student* com sete graus de liberdade.

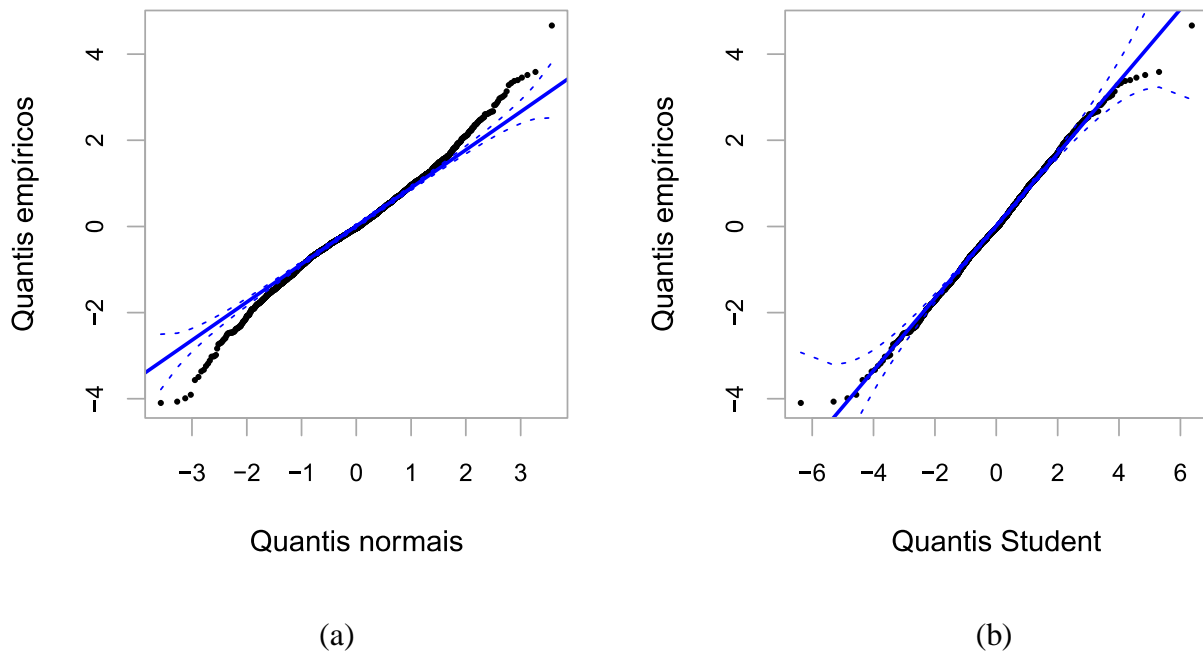


Figura 5.6: Gráficos quantil-quantil (Q-Q) dos resíduos do modelo TGARCH(1,1), seguindo a (a) distribuição normal e a (b) t de *Student*, aplicado à série de retornos ABEV3.

Pela análise da Figura 5.6, percebe-se que os resíduos do modelo seguindo a distribuição normal aparentam se afastar consideravelmente da distribuição especificada nas extremidades, ficando fora do envelope simulado. Já o modelo seguindo a distribuição t de *Student* apresenta resíduos mais adequados a distribuição especificada, com a maior parte dos pontos se encontrando em cima da reta e até mesmo os pontos nas caudas da distribuição continuam dentro do envelope simulado de 95%. O mesmo acontece para os modelos GARCH(1,1), IGARCH(1,1), EGARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) e PGARCH(1,1). No entanto, os gráficos desses modelos não estão apresentados, pois possuem comportamento praticamente idêntico ao do modelo TGARCH(1,1).

5.1.5. Previsão e avaliação dos modelos selecionados

A Tabela 5.9 apresenta os resultados das medidas de erro de previsão dos modelos selecionados pelos critérios de informação.

Tabela 5.9: Resultados dos modelos na previsão da volatilidade dos retornos da série ABEV3

Modelo	Previsão dinâmica			Previsão estática		
	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	MAPE
GARCH(1,1) - Normal	0,001542	0,001917	13,5245	0,000988	0,001347	8,4358
IGARCH(1,1) - Normal	0,001585	0,001975	13,9111	0,000978	0,001343	8,3232
EGARCH(1,1) - Normal	0,001390	0,001761	12,15004	0,001176	0,001568	10,1759
TGARCH(1,1) - Normal	0,001470	0,001863	12,8808	0,001222	0,001516	10,4759
PGARCH(1,1) - Normal	0,001297	0,001671	11,2460	0,001217	0,001515	9,8982
GJR-GARCH(1,1) - Normal	0,001740	0,002141	15,2714	0,001424	0,001718	12,1855
GARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,001551	0,001929	13,6016	0,000955	0,001322	8,0703
IGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,001645	0,002044	14,4592	0,000980	0,001342	8,2682
EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,001185	0,001537	10,2433	0,001122	0,001508	9,6615
TGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,001249	0,001598	10,8354	0,001144	0,001527	9,8322
PGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,001145	0,001478	9,7290	0,001111	0,001479	9,5418
GJR-GARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,001735	0,002138	15,2314	0,001325	0,001632	11,3138

MAE: Erro médio absoluto; RMSE: Raiz quadrada do erro médio; MAPE: Erro percentual absoluto médio.

A tabela 5.9 evidencia que, em relação a previsão dinâmica (21 passos à frente), o modelo que apresenta os menores erros de previsão é o PGARCH(1,1) com distribuição t de *Student*, seguido do modelo EGARCH(1,1) de mesma distribuição. Considerando a previsão estática (um passo à frente), o modelo GARCH(1,1) de resíduos especificados com distribuição t de *Student* apresenta os melhores resultados. De forma geral, os modelos seguindo a distribuição t de *Student* apresentaram os menores erros de previsão, com exceção do modelo GARCH(1,1) de distribuição normal, que obteve resultados melhores na previsão dinâmica em comparação ao mesmo modelo especificado com distribuição t de *Student*. Além disso, o modelo IGARCH(1,1), apesar de considerar a persistência da volatilidade, não apresentou resultados diferentes dos apresentados pelo modelo GARCH(1,1), sendo inclusive superado por este quando a distribuição escolhida para ambos os modelos foi a t de *Student*.

Por fim, a Figura 5.7 apresenta os gráficos da volatilidade prevista pelo modelos PGARCH(1,1) – *Student* e GARCH(1,1) – *Student* aplicados, respectivamente, para previsão dinâmica e estática da volatilidade da série de retornos ABEV3.

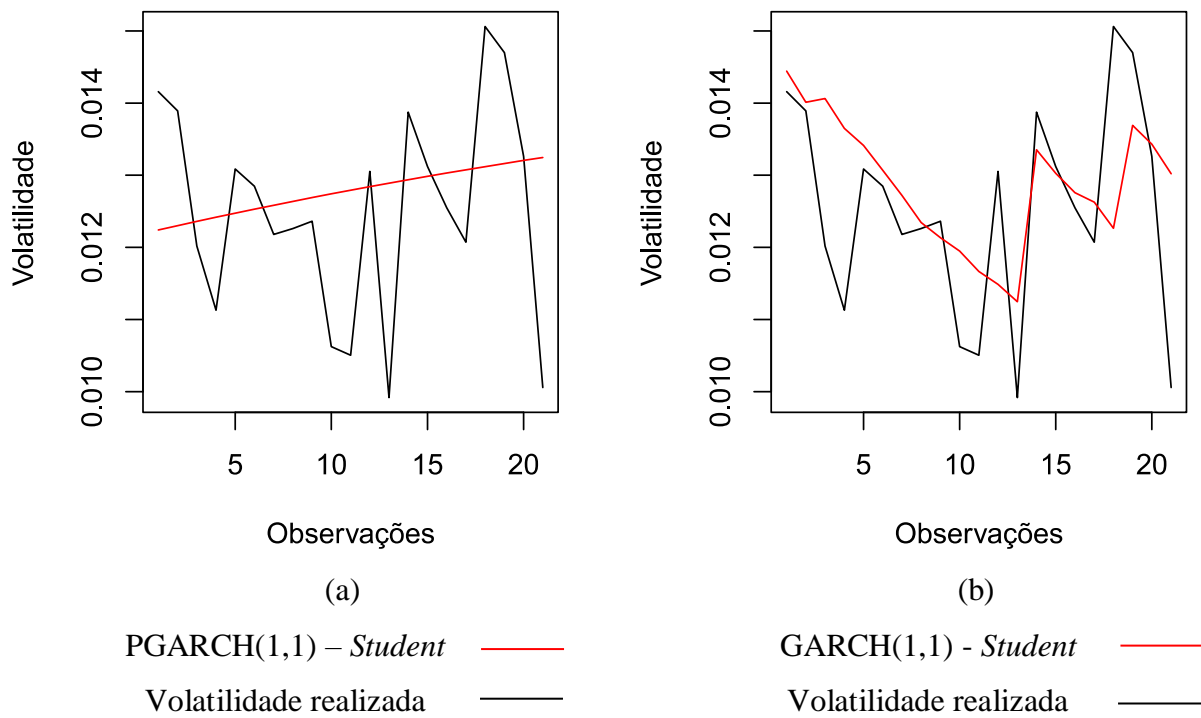


Figura 5.7: (a) Previsão dinâmica da volatilidade pelo modelo PGARCH(1,1) - *Student* e (b) previsão estática da volatilidade pelo modelo GARCH(1,1) – *Student*

Observa-se, na Figura 5.7, que o modelo PGARCH(1,1) consegue captar adequadamente a tendência central da volatilidade na amostra de validação, enquanto que, na previsão estática, o modelo GARCH(1,1) se torna mais susceptível aos choques ao longo do tempo, adequando-se melhor ao padrão da série nas defasagens mais distantes da origem da previsão.

5.1.6. Curva de impacto de informações

A Figura 5.8 apresenta as curvas de impacto de informações dos modelos especificados com distribuição *t* de *Student* aplicados aos retornos da série ABEV3.

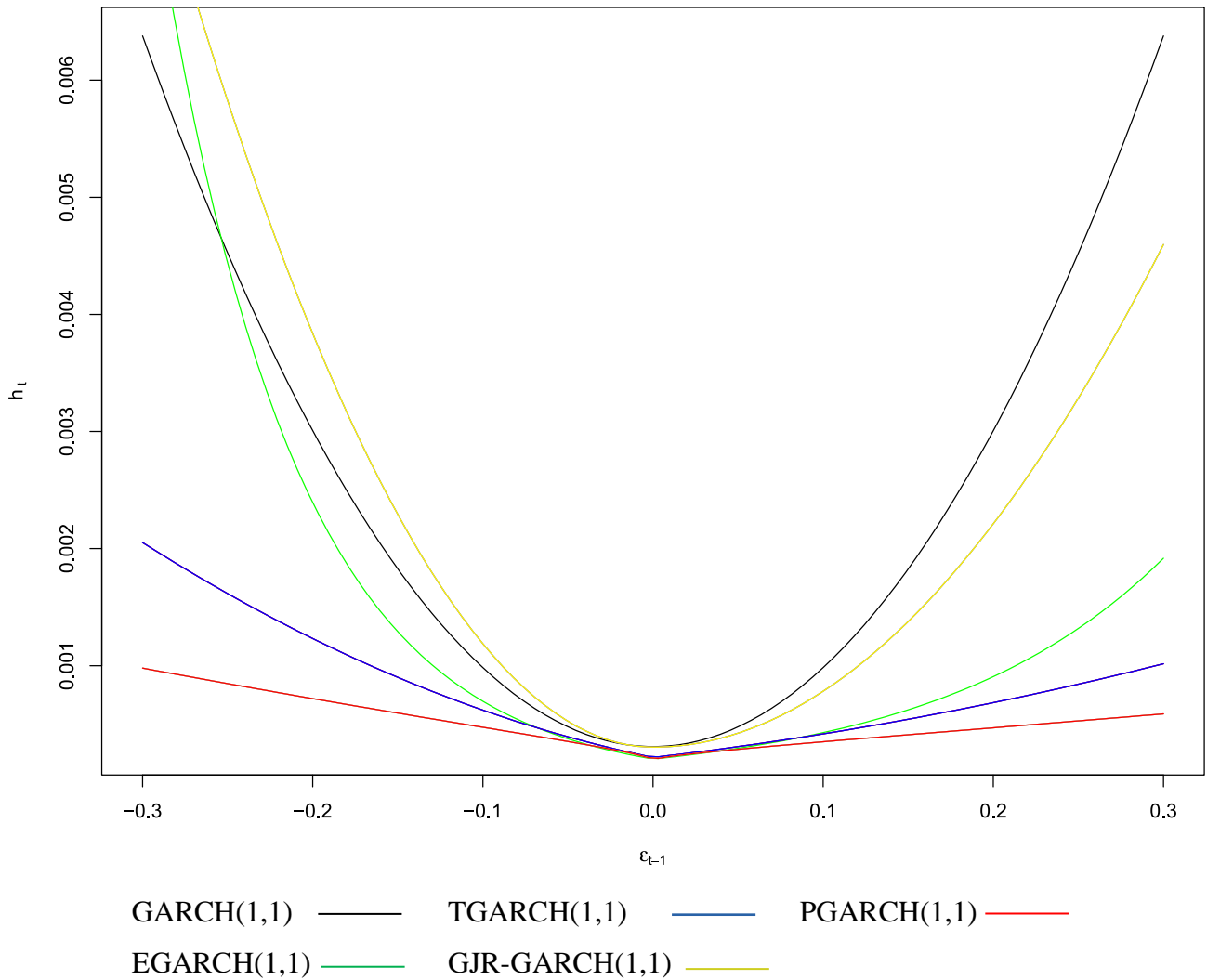


Figura 5.8: Curva de impacto de informação dos modelos especificados com distribuição t de *Student* aplicados aos retornos da série ABEV3

Observa-se nas curvas de impacto de informação, apresentadas na Figura 5.8, que, em relação aos retornos negativos, o modelo GJR-GARCH(1,1) é o que considera o maior impacto na volatilidade, seguido do modelo GARCH(1,1) simétrico. Este, entretanto, começa a ser superado pelo modelo EGARCH(1,1) conforme os retornos se aproximam do valor $\varepsilon_t = -0,3$. Os modelos TGARCH(1,1) e PGARCH(1,1) são os que dão menor importância aos retornos negativos, sendo que o modelo PGARCH aparentemente é o que possui menor assimetria, dentre os modelos assimétricos. No que diz respeito aos retornos positivos, o modelo GARCH(1,1) é o que considera um maior impacto dos retornos na volatilidade, seguido pelos modelos GJR-GARCH(1,1), EGARCH(1,1), TGARCH(1,1) e PGARCH(1,1).

5.2. Ações do banco Bradesco (BBDC3)

5.2.1. Análise exploratória

A Figura 5.9 apresenta os gráficos em linha da série de preços BBDC3 e de seus respectivos retornos. Assim como na série ABEV3, os preços aparentam ser não estacionários, enquanto o gráfico dos retornos indica que estes possuem média zero e estacionariedade. É possível observar que a série de preços BBDC3 possui aparentemente maior volatilidade que a série ABEV3, visto que existem maiores perturbações ao longo do período analisado. Esse comportamento mais volátil também é observado nos retornos, em que parece haver uma quantidade maior de *outliers* que na série de retornos das ações ABEV3.

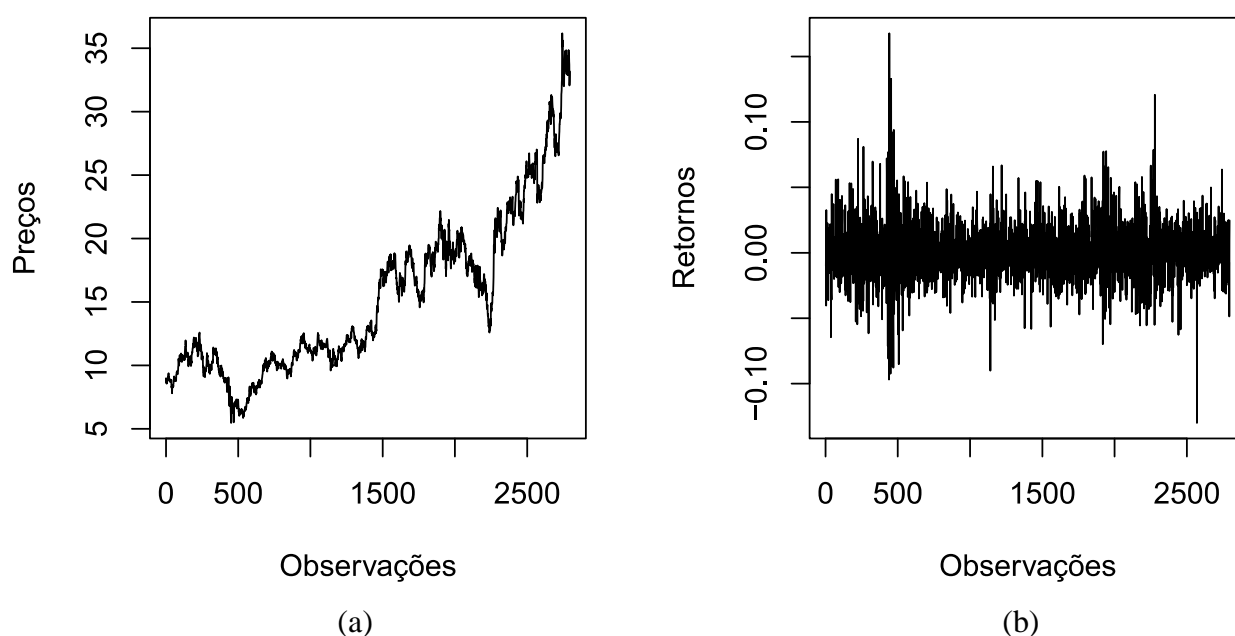


Figura 5.9: (a) Série de preços e (b) retornos das ações BBDC3 no período compreendido entre 02/01/2007 até 11/04/2018

Na Figura 5.10 é apresentado o histograma dos retornos da série BBDC3, o qual tem comportamento muito semelhante aos retornos dos preços ABEV3. As estatísticas descritivas, apresentadas na Tabela 5.10, corroboram os indícios do histograma de que a série de retornos BBDC3 apresenta excesso de curtose e comportamento aparentemente simétrico. Além disso, o desvio padrão é maior em comparação aos retornos da série ABEV3, indicando que a série BBDC3 possui maior volatilidade.

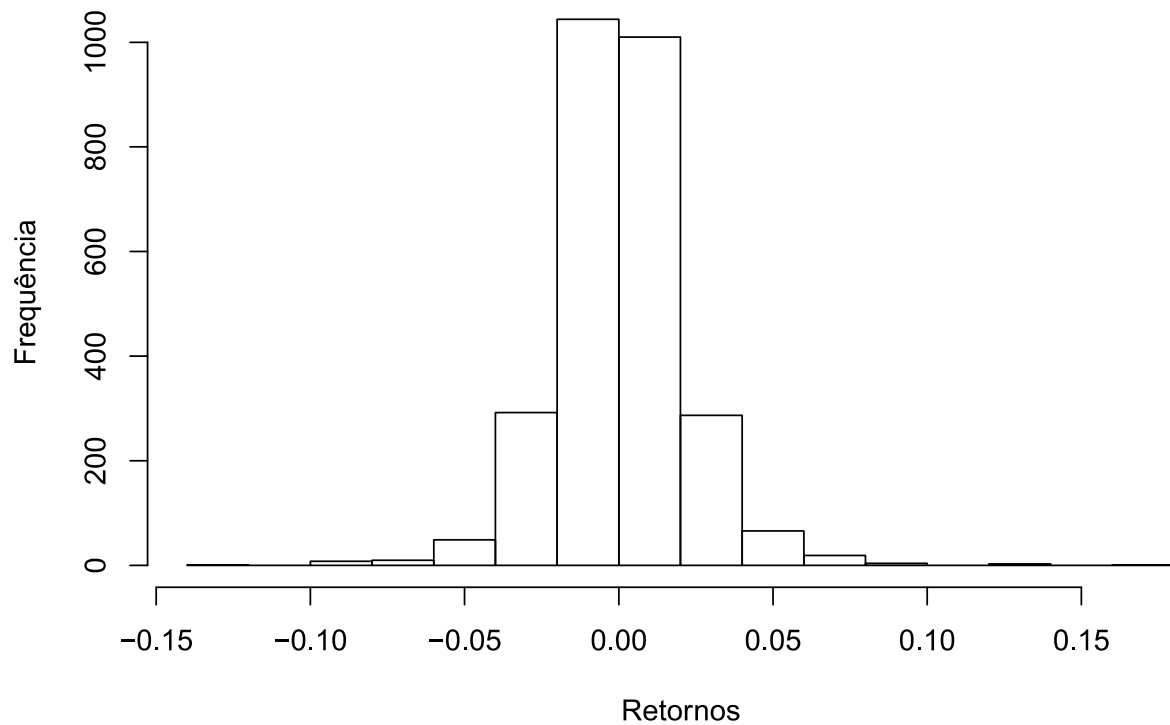


Figura 5.10: Histograma da série de retornos BBDC3

Tabela 5.10: Estatísticas descritivas dos retornos da série BBDC3

Média	Desvio Padrão	Curtose	Assimetria
0,0007	0,0212	7,7259	0,3480

5.2.2. Verificação da autocorrelação e estacionariedade

Os gráficos da FAC e FACP para os retornos da série de preços BBDC3 são apresentados na Figura 5.11. É possível observar que os gráficos das funções indicam que a série de retornos é estacionária e que existem algumas defasagens com autocorrelação significativa, com destaque para um pico de autocorrelação na terceira defasagem.

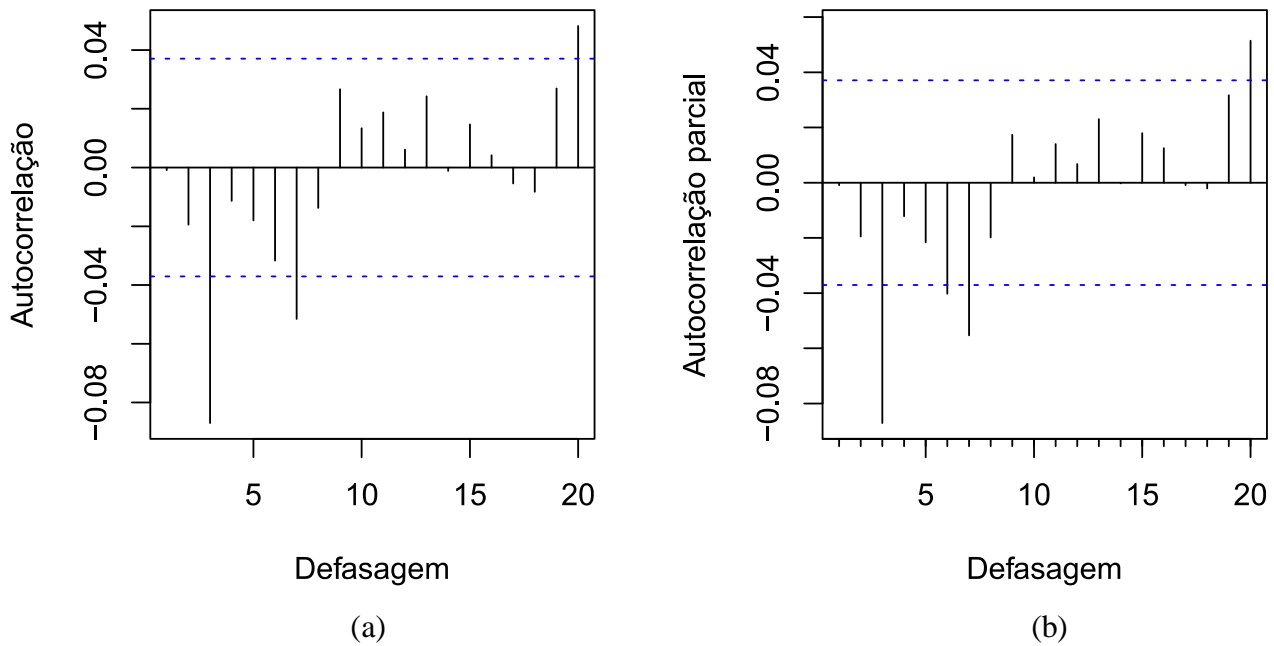


Figura 5.11: (a) FAC e (b) FACP da série de retornos BBDC3

Corroborando com os indícios da Figura 5.11, os testes ADF e KPSS para a estacionariedade apresentam, respectivamente, valor $p < 0,0001$ e valor $p \geq 0,1$, indicando que a série de retornos é estacionária. Os testes ADF e KPSS foram executados sem a presença de constante e tendência, para, respectivamente, 19 e nove defasagens. Na verificação da autocorrelação, o teste de Ljung-Box obteve valor $p = 0,0002$, permitindo rejeitar a hipótese nula de que a série não possui autocorrelação significativa. Portanto, é necessário que seja previamente definida uma equação para a média condicional, antes da aplicação do modelo heteroscedástico.

5.2.3. Aplicação do modelo ARMA e diagnóstico dos resíduos

A Tabela 5.11 apresenta os critérios de informação e diagnóstico dos resíduos dos cinco melhores modelos ARMA, dentre os 48 testados, aplicados na remoção da autocorrelação da série de retornos BBDC3.

Tabela 5.11: Modelos ARMA aplicados aos retornos da série BBDC3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r^2)	ALM
ARMA(0,3)	-13619,21	-13589,56	-13616,80	0,1354	<0,0001	<0,0001
ARMA(2,2)	-13.619,44	-13.583,86	-13.614,90	0,1396	<0,0001	<0,0001
ARMA(3,2)	-13.619,70	-13.578,19	-13.613,03	0,3215	<0,0001	<0,0001
ARMA(2,3)	-13.620,03	-13.578,52	-13.613,35	0,3464	<0,0001	<0,0001
ARMA(1,3)	-13620,37	-13584,78	-13615,83	0,2555	<0,0001	<0,0001

Pelos resultados da Tabela 5.11, o modelo selecionado é o ARMA(0,3), ou simplesmente

MA(3), pois é o que minimiza os critérios de informação e, pelo teste de Ljung-Box, é capaz de eliminar a autocorrelação nos resíduos ao nível de significância de 5%.

Na verificação da heteroscedasticidade, os resultados do teste de Ljung-Box aplicado aos resíduos ao quadrado ($LB(r^2)$) e o teste ARCH-LM (LM), apresentados na Tabela 5.11, indicam, como esperado, que os resíduos do modelo ARMA(0,3) não são homoscedásticos.

Com o objetivo de confirmar os resultados dos testes estatísticos, as Figuras 5.12 e 5.13 apresentam as FAC e FACP, respectivamente, dos resíduos e resíduos ao quadrado do modelo ARMA(0,3).

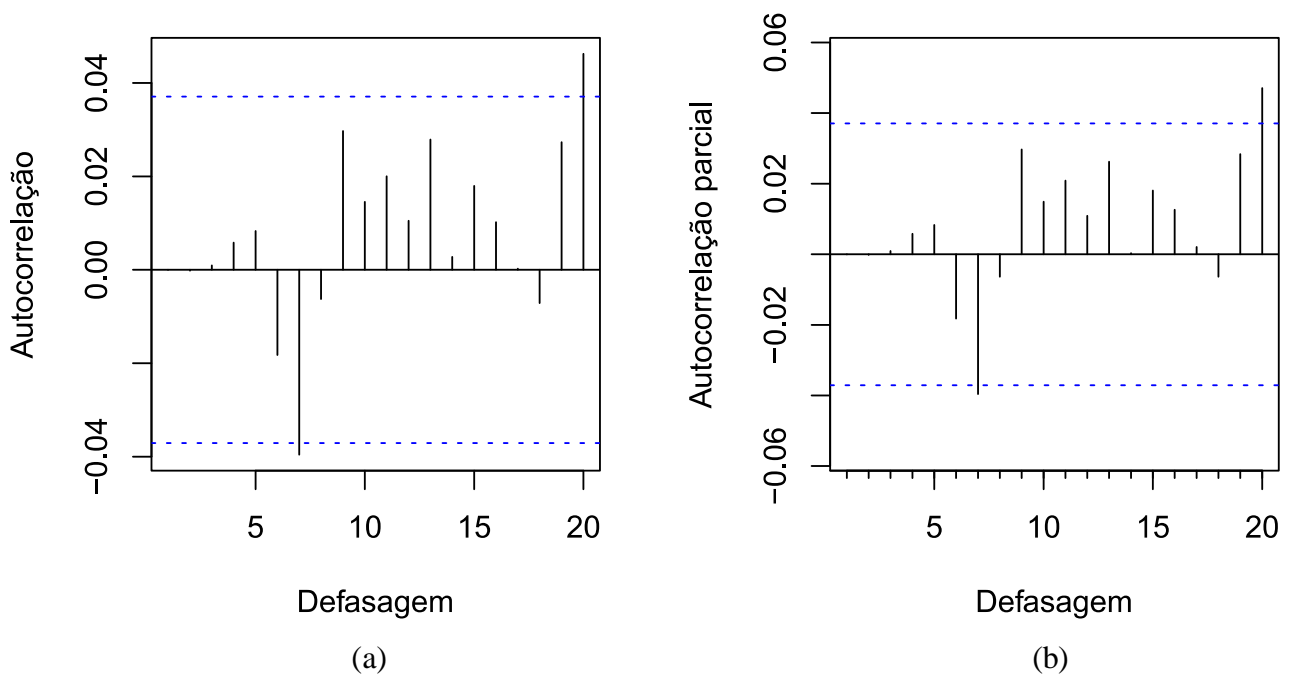


Figura 5.12: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos do modelo ARMA(0,3)

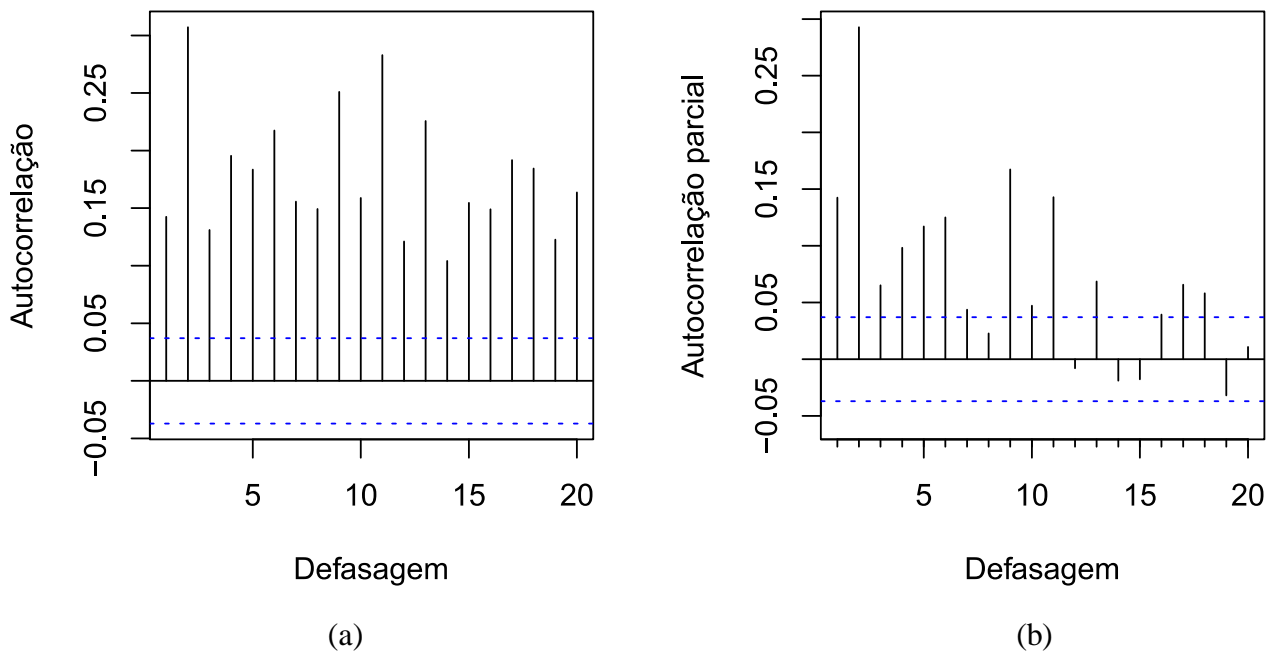


Figura 5.13: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(0,3)

As Figuras 5.12 e 5.13 evidenciam que a autocorrelação significativa foi eliminada, com apenas dois picos não muito elevados na sétima e vigésima defasagens, e que existe heteroscedasticidade persistente nos resíduos ao quadrado, indicando a necessidade de aplicação de um modelo GARCH.

5.2.4. Aplicação dos modelos GARCH e diagnóstico dos resíduos

A verificação da presença de heteroscedasticidade persistente observada na Figura 5.13 é corroborada pelos valores dos coeficientes α_1 e β_1 do modelo GARCH(1,1), com valores, respectivamente, iguais a 0,9039 e 0,0602. Portanto, o modelo IGARCH(1,1) também é aplicado, juntamente com as extensões assimétricas EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH. Mais uma vez, todos os modelos são aplicados considerando as distribuições de probabilidade normal e *t* de Student, a fim de se comparar os desempenhos dos modelos especificados com essas duas distribuições.

Os critérios de informação e diagnóstico dos resíduos dos modelos GARCH, IGARCH, EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH aplicados aos retornos da série BBDC3 estão apresentados, respectivamente, nas Tabelas 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 e 5.16.

Tabela 5.12: Modelos GARCH aplicados aos retornos da série BBDC3

MODELO	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r ²)	ALM	JB
GARCH(1,1) - Normal	-5,0194	-5,0045	-5,0140	0,7018	0,9968	0,9830	<0,0001
GARCH(1,2) - Normal	-5,0188	-5,0018	-5,0127	0,7061	0,9971	0,9854	<0,0001
GARCH(2,1) - Normal	-5,0187	-5,0017	-5,0125	0,7017	0,9968	0,9830	<0,0001
GARCH(2,2) - Normal	-5,0181	-4,999	-5,0112	0,7062	0,9971	0,9854	<0,0001
GARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,0681	-5,0511	-5,0619	0,7278	0,9975	0,9975	-
GARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,0674	-5,0482	-5,0605	0,7290	0,9977	0,9976	-
GARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,0674	-5,0482	-5,0605	0,7278	0,9975	0,9975	-
GARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,0666	-5,0454	-5,059	0,7282	0,9976	0,9975	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.13: Modelos IGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3

MODELO	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r ²)	ALM	JB
IGARCH(1,1) - Normal	-5,0106	-4,9979	-5,0060	0,6929	0,9984	0,9982	<0,0001
IGARCH(1,2) - Normal	-5,0102	-4,9954	-5,0048	0,6992	0,9988	0,9987	<0,0001
IGARCH(2,1) - Normal	-5,0098	-4,9951	-5,0045	0,6930	0,9984	0,9983	<0,0001
IGARCH(2,2) - Normal	-5,0095	-4,9926	-5,0034	0,6992	0,9988	0,9987	<0,0001
IGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,0649	-5,0501	-5,0595	0,7167	0,9993	0,9993	-
IGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,0642	-5,0473	-5,0581	0,7191	0,9994	0,9994	-
IGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,0642	-5,0473	-5,0581	0,7162	0,9993	0,9993	-
IGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,0644	-5,0454	-5,0575	0,6889	0,9988	0,9989	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.14: Modelos EGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
EGARCH(1,1) - Normal	-5,0215	-5,0045	-5,0154	0,7515	0,9755	0,9752	<0,0001
EGARCH(1,2) - Normal	-5,0213	-5,0022	-5,0144	0,7612	0,9753	0,9753	<0,0001
EGARCH(2,1) - Normal	-5,0213	-5,0001	-5,0137	0,7750	0,9671	0,9683	<0,0001
EGARCH(2,2) - Normal	-5,0219	-4,9985	-5,0134	0,6805	0,9726	0,9751	<0,0001
EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,0696	-5,0505	-5,0627	0,7602	0,9706	0,9700	-
EGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,0690	-5,0477	-5,0613	0,7640	0,9721	0,9716	-
EGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,0683	-5,0449	-5,0599	0,7641	0,9659	0,9654	-
EGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,0686	-5,0432	-5,0594	0,7158	0,9505	0,9529	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.15: Modelos TGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
TGARCH(1,1) - Normal	-5,0232	-5,0063	-5,0171	0,7346	0,9671	0,9667	<0,0001
TGARCH(1,2) - Normal	-5,0230	-5,0039	-5,0161	0,7413	0,9690	0,9682	<0,0001
TGARCH(2,1) - Normal	-5,0218	-5,0006	-5,0141	0,7413	0,9690	0,9682	<0,0001
TGARCH(2,2) - Normal	-5,0217	-4,9983	-5,0133	0,7413	0,969	0,9682	<0,0001
TGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,0707	-5,0515	-5,0638	0,7358	0,9639	0,9631	-
TGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,0699	-5,0487	-5,0623	0,7377	0,9658	0,9647	-
TGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,0701	-5,0467	-5,0617	0,7172	0,8893	0,8917	-
TGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,0696	-5,0441	-5,0604	0,7208	0,925	0,9256	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.16: Modelos PGARCH aplicados aos retornos da série BBDC3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
PGARCH(1,1) - Normal	-5,0239	-5,0048	-5,0170	0,7266	0,9843	0,9844	<0,0001
PGARCH(1,2) - Normal	-5,0236	-5,0023	-5,0159	0,7321	0,9854	0,9855	<0,0001
PGARCH(2,1) - Normal	-5,0217	-4,9983	-5,0132	0,7321	0,9854	0,9855	<0,0001
PGARCH(2,2) - Normal	-5,0216	-4,9961	-5,0124	0,7273	0,9915	0,9916	<0,0001
PGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,0704	-5,0492	-5,0627	0,7424	0,9849	0,9845	-
PGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,0697	-5,0463	-5,0613	0,7442	0,9860	0,9856	-
PGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,0690	-5,0435	-5,0598	0,7424	0,9849	0,9845	-
PGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,0683	-5,0407	-5,0583	0,7418	0,9825	0,9821	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.17: Modelos GJR-GARCH aplicados aos retornos da série BBDC3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB(r²)	ALM	JB
GJR-GARCH(1,1) - Normal	-5,0244	-5,0075	-5,0183	0,6922	0,9936	0,9937	<0,0001
GJR-GARCH(1,2) - Normal	-5,0239	-5,0049	-5,0171	0,6961	0,9944	0,9945	<0,0001
GJR-GARCH(2,1) - Normal	-5,0235	-5,0023	-5,0158	0,6951	0,9932	0,9934	<0,0001
GJR-GARCH(2,2) - Normal	-5,0227	-4,9995	-5,0144	0,6952	0,9933	0,9934	<0,0001
GJR-GARCH(1,1) - <i>Student</i>	-5,0706	-5,0516	-5,0637	0,7191	0,9970	0,9970	-
GJR-GARCH(1,2) - <i>Student</i>	-5,0699	-5,0488	-5,0623	0,7209	0,9973	0,9973	-
GJR-GARCH(2,1) - <i>Student</i>	-5,0692	-5,0460	-5,0608	0,7229	0,9971	0,9970	-
GJR-GARCH(2,2) - <i>Student</i>	-5,0685	-5,0432	-5,0594	0,7230	0,9971	0,9971	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

É possível observar nas Tabelas 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 que, de forma idêntica a série anterior, todos os modelos com resíduos especificados como normais rejeitam a hipótese nula de normalidade pelo teste de Jarque-Bera (JB). Além disso, mais uma vez os modelos com resíduos seguindo a distribuição t de *Student* apresentaram os menores critérios de informação e, de acordo com esses critérios, as ordens de defasagem não passam de (1,1). Na comparação entre modelos de diferentes tipos, o modelo TGARCH(1,1) – *Student* foi o que obteve os menores critérios de informação, seguido do modelo GJR-GARCH(1,1), PGARCH(1,1), EGARCH(1,1), GARCH(1,1) e, por fim, o modelo IGARCH(1,1), todos especificados com a mesma distribuição. Nesse caso, nota-

se que o modelo IGARCH(1,1) não apresentou critérios de informação menores que o modelo GARCH(1,1), apesar de considerar a heteroscedasticidade persistente.

De forma a comparar a distribuição normal e t de *Student* dos resíduos dos modelos, a Figura 5.14 apresenta os gráficos quantil-quantil com envelope simulado de 95% do modelo TGARCH(1,1), seguindo a distribuição normal e t de *Student* com seis graus de liberdade. Como os gráficos dos outros modelos são muito semelhantes, eles não estão apresentados.

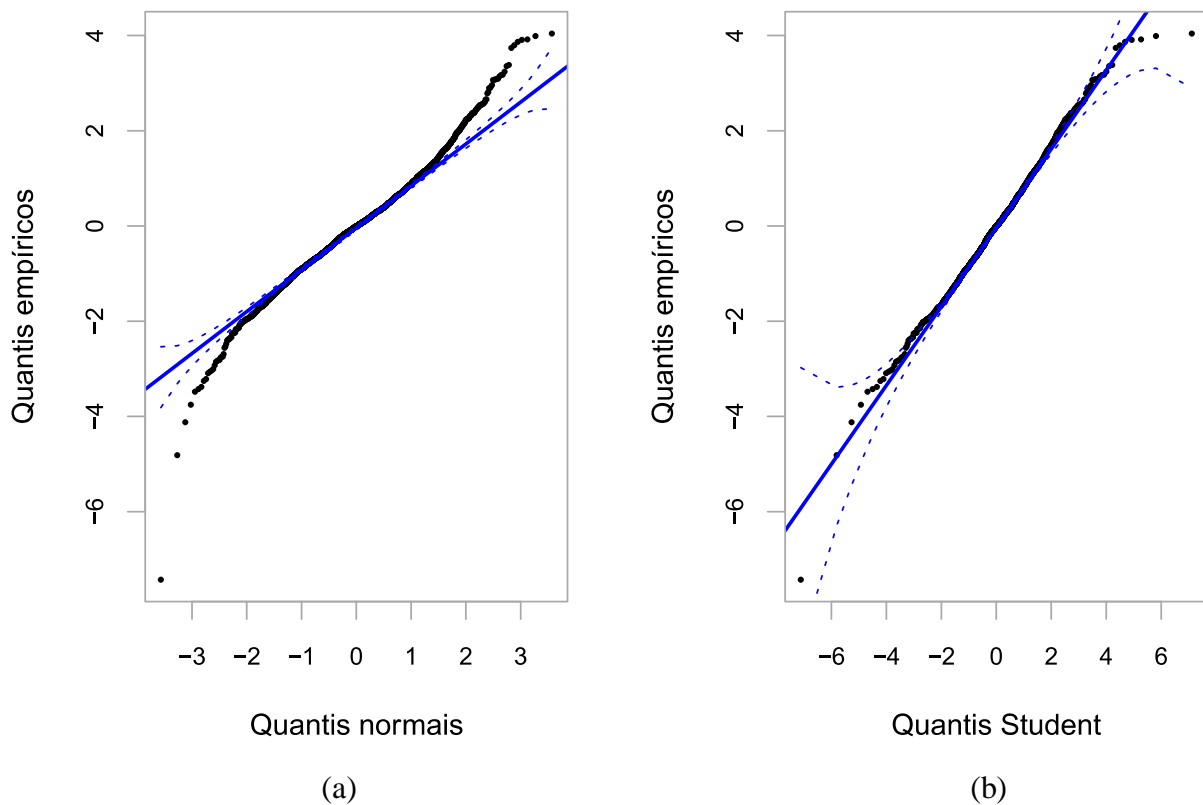


Figura 5.14: Gráficos quantil-quantil (Q-Q) dos resíduos do modelo TGARCH(1,1), seguindo a (a) distribuição normal e a (b) t de *Student*, aplicado aos retornos da série BBDC3

Observa-se na Figura 5.14 que, novamente, os resíduos especificados como normais se afastam consideravelmente da reta nas extremidades, saindo do envelope simulado de 95%, ao passo que os resíduos especificados com distribuição t de *Student* se adequam mais a distribuição escolhida. Entretanto, os resíduos de distribuição t de *Student* se afastam levemente da reta e do envelope simulado entre os quantis empíricos -4 e -2 e entre os quantis 2 e 3.

5.2.5. Resultados e avaliação da previsão dos modelos GARCH

A tabela 5.18 apresenta os resultados das medidas de erro de previsão dos modelos selecionados para a previsão dos retornos da série BBDC3.

Tabela 5.18: Resultados dos modelos na previsão da volatilidade dos retornos da série BBDC3

Modelo	Previsão dinâmica			Previsão estática		
	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	MAPE
GARCH(1,1) - Normal	0,003841	0,004444	25,0702	0,003585	0,004077	22,2865
IGARCH(1,1) - Normal	0,004667	0,005458	30,6734	0,004016	0,004553	25,2947
EGARCH(1,1) - Normal	0,004744	0,005467	31,0569	0,004627	0,005275	29,1940
TGARCH(1,1) - Normal	0,004831	0,005572	31,6328	0,004633	0,005311	29,0661
PGARCH(1,1) - Normal	0,004696	0,005399	30,7129	0,004469	0,005077	27,9954
GJR-GARCH(1,1) - Normal	0,004580	0,005246	29,8991	0,004197	0,004730	26,2093
GARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,003724	0,004321	24,3053	0,003514	0,004009	21,9731
IGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,004785	0,005599	31,4494	0,004098	0,004627	25,9369
EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,004375	0,005021	28,5704	0,004659	0,005297	29,1756
TGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,004430	0,005084	28,9366	0,004673	0,005326	29,5983
PGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,004389	0,005040	28,6705	0,004521	0,005118	28,5818
GJR-GARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,004333	0,004988	28,3319	0,004560	0,004560	25,4361

MAE: Erro médio absoluto; RMSE: Raiz quadrada do erro médio; MAPE: Erro percentual absoluto médio.

Observa-se na Tabela 5.18 que o modelo GARCH(1,1) seguindo a distribuição t de *Student* apresentou os menores erros, tanto na previsão estática como na dinâmica. Esses resultados podem indicar de que os retornos da série BBDC3 não afetam a volatilidade de forma assimétrica no intervalo de validação, dado que os modelos EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH não geraram previsões melhores, apesar de terem apresentado critérios de informação menores no ajuste. O modelo IGARCH(1,1), tanto especificado como normal como t de *Student*, apresentou desvios bem mais elevados que o modelo GARCH(1,1) nas previsões, indicando que, para a série BBDC3, o fato do modelo levar em consideração a elevada persistência da volatilidade não gerou melhores resultados, tanto na previsão como no ajuste.

A Figura 5.15 apresenta os gráficos da volatilidade prevista pelo modelo GARCH(1,1) – *Student* aplicado na previsão dinâmica e estática da volatilidade dos retornos da série BBDC3.

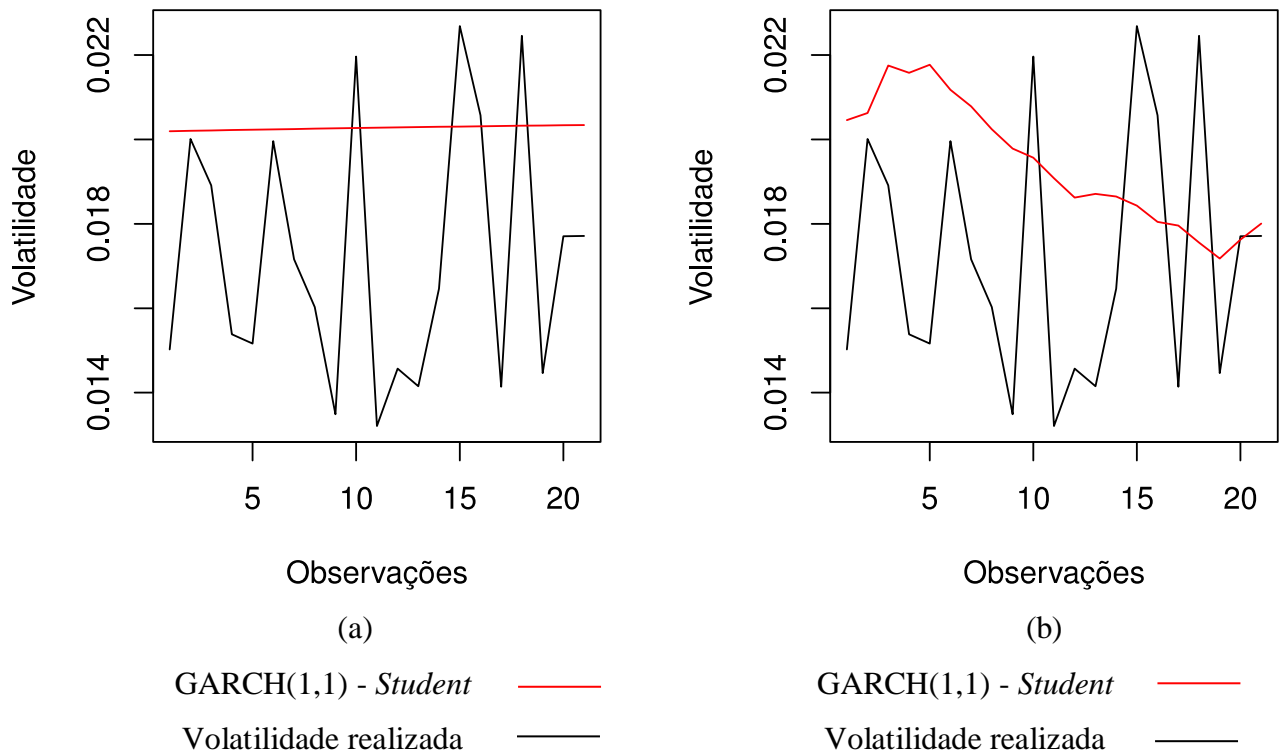


Figura 5.15: (a) Previsão dinâmica e (b) estática da volatilidade pelo modelo GARCH(1,1) – *Student*

É possível observar na Figura 5.15 que o modelo GARCH(1,1) – *Student* superestima os retornos na previsão, se encontrando acima da tendência central na previsão dinâmica. Já na previsão estática, o modelo vai se aproximando mais da média dos retornos do intervalo de previsão ao longo do tempo. No entanto, a previsão da volatilidade é pouco susceptível aos choques, durante todo o intervalo considerado.

5.2.6. Curva de impacto de informações

A Figura 5.16 apresenta as curvas de impacto de informações dos modelos especificados com distribuição t de *Student* aplicados aos retornos da série BBDC3.

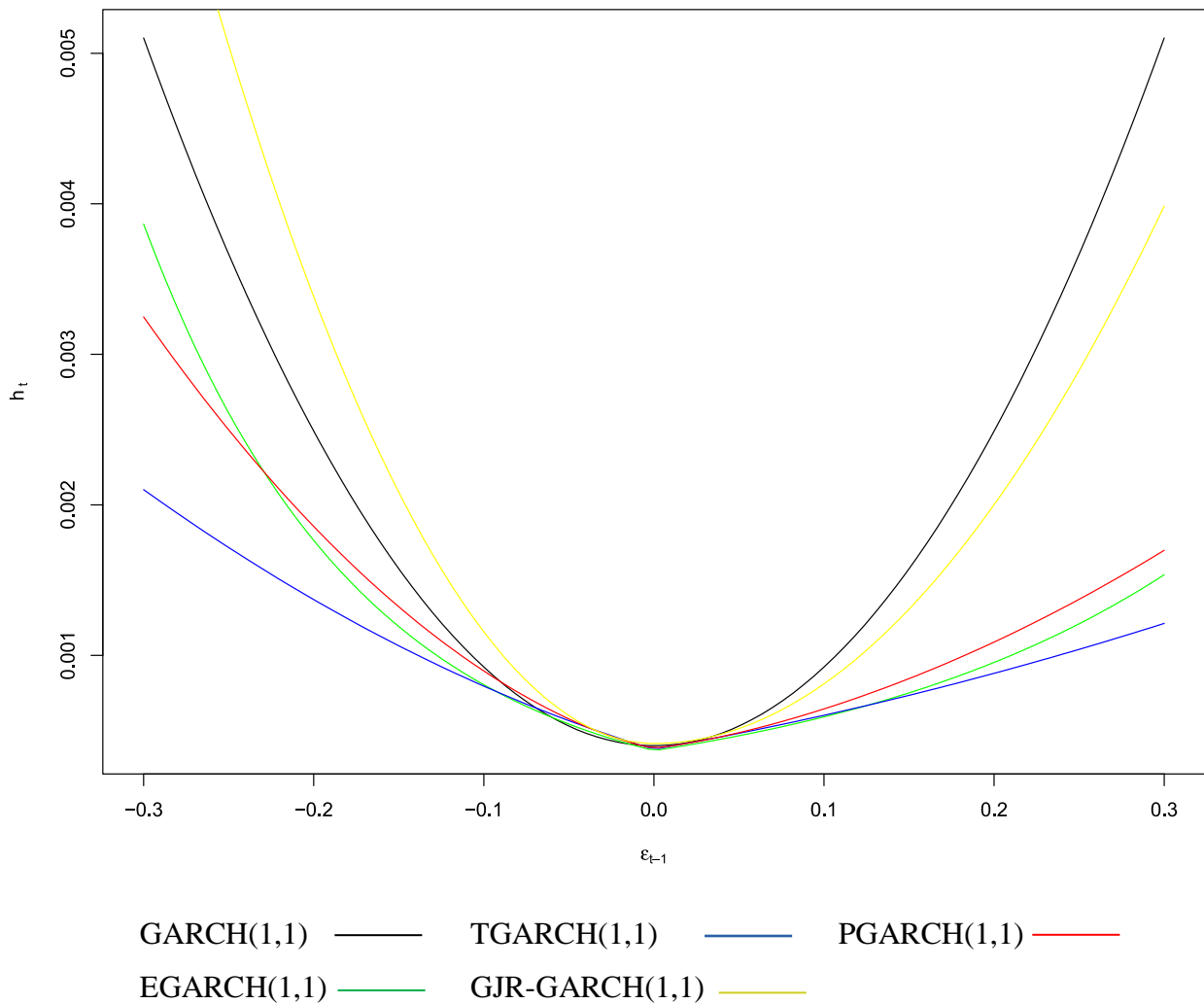


Figura 5.16: Curvas de impacto de informações dos modelos aplicados aos retornos da série BBDC3

O comportamento das curvas, apresentado na Figura 5.15, é semelhante ao observado na análise dos retornos da série AMBEV3. No entanto, neste caso, o modelo $\text{PGARCH}(1,1)$, em comparação aos modelos $\text{TGARCH}(1,1)$ e $\text{EGARCH}(1,1)$, considera um maior impacto na volatilidade por parte dos retornos pertencentes a maior parte do intervalo $0 \leq \varepsilon_t \leq -0,3$, sendo superado, nesse quesito, pelo modelo $\text{EGARCH}(1,1)$ conforme o valor dos retornos se aproxima de $-0,3$. Essa mudança de comportamento ocorre pelo fato do modelo PGARCH ser mais flexível em relação a escolha de seus parâmetros, fazendo com que a magnitude com que ele considera os retornos negativos varie mais conforme a série analisada.

5.3. Ações da empresa Vale (VALE3)

5.3.1. Análise exploratória

A série de preços VALE3 e seus respectivos retornos são apresentados na Figura 5.16. O gráfico dos preços é inconclusivo em relação a estacionariedade da série, em contrapartida os retornos aparentam ser estacionários. Nota-se pelos gráficos que a série VALE3 é a mais volátil neste estudo, visto que a série de preços possui muitos choques, sem uma tendência bem definida, e os retornos possuem valores mais elevados que das outras séries.

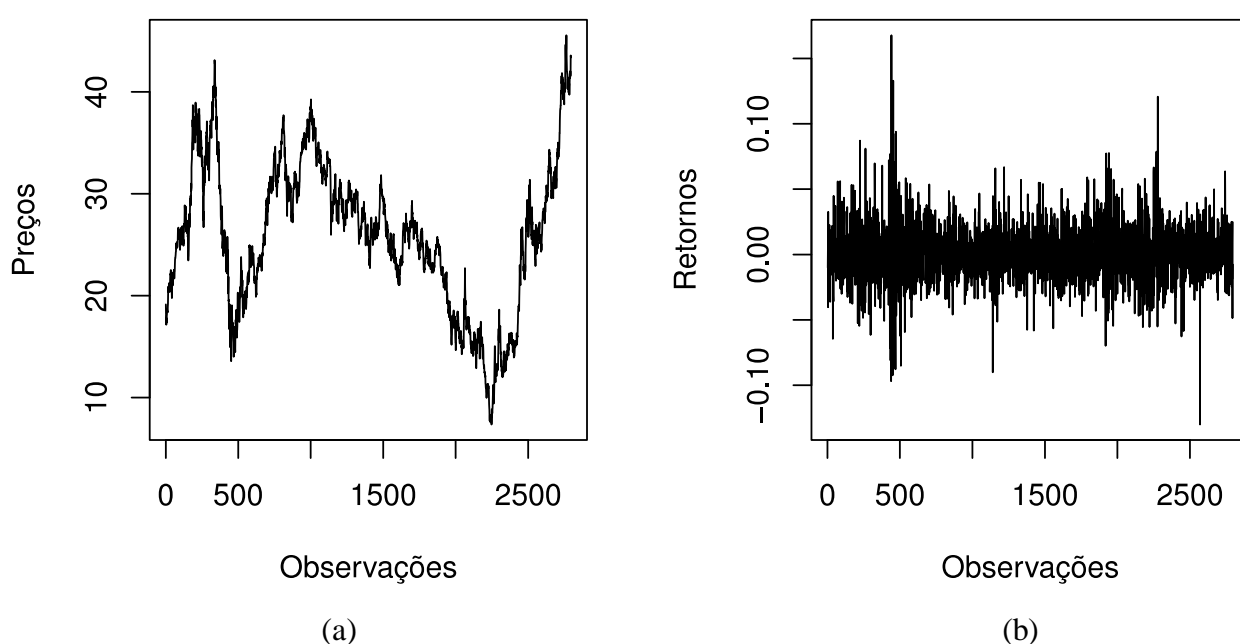


Figura 5.17: (a) Série de preços e (b) retornos da série VALE3 no período compreendido entre 02/01/2007 até 11/04/2018

A análise do histograma dos retornos da série VALE3, apresentado na Figura 5.18 revela que os dados se encontram melhor distribuídos na região central e, mais uma vez, a distribuição dos dados possui um valor elevado de curtose. Em relação a assimetria, esta é leve, se encaixando nas características comumente observadas em retornos financeiros. Esses indícios observados no histograma são confirmados pelas características descritivas dos retornos, apresentadas na Tabela 5.19. O valor do desvio padrão é o maior das três séries, corroborando com a análise gráfica de que a série VALE3 possui a maior volatilidade dentre as séries neste estudo.

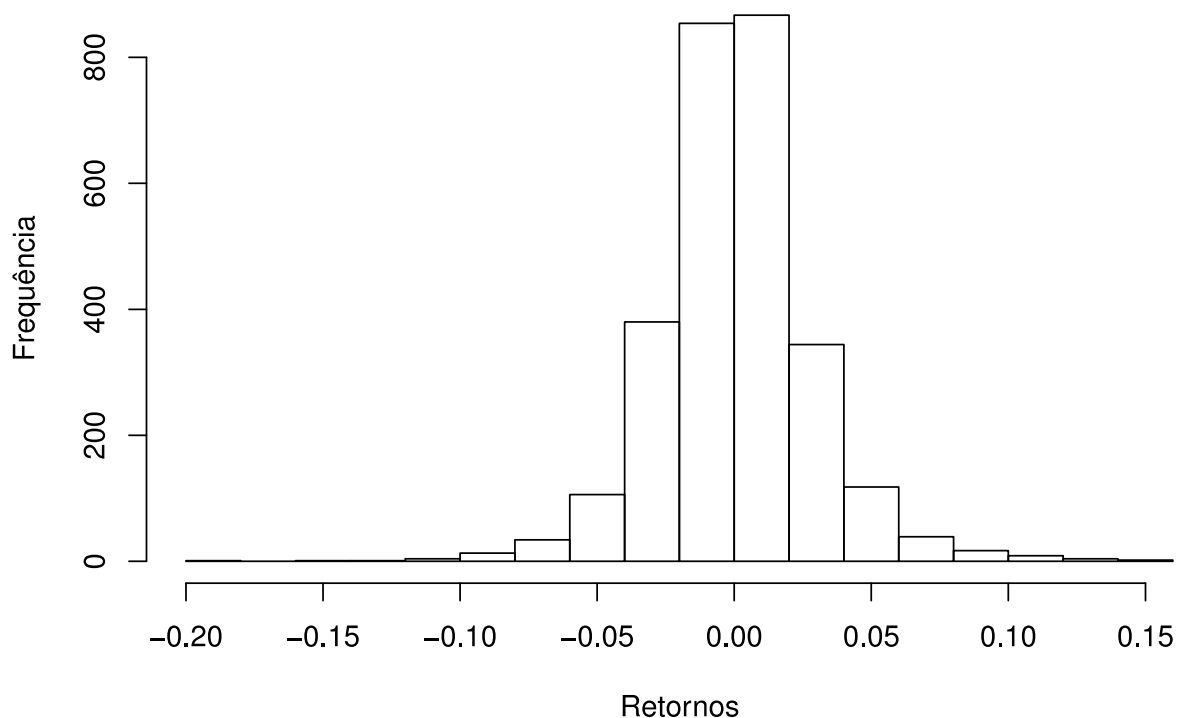


Figura 5.18: Histograma da série de retornos VALE3

Tabela 5.19: Estatísticas descritivas dos retornos da série BBDC3

Média	Desvio Padrão	Curtose	Assimetria
0,0007	0,0282	7,3344	0,1855

5.3.2. Verificação da autocorrelação e estacionariedade

Os gráficos da FAC e FACP dos retornos da série VALE3, apresentados na Figura 5.19, mostram indícios de que a série é estacionária e que existe autocorrelação significativa, visto que existem diversos picos nas vinte primeiras defasagens. Ressalta-se, também, que as funções de autocorrelação demonstram que, dentre as três séries deste estudo, os retornos da VALE3 são os que apresentam maior presença de autocorrelação significativa nas vinte primeiras defasagens.

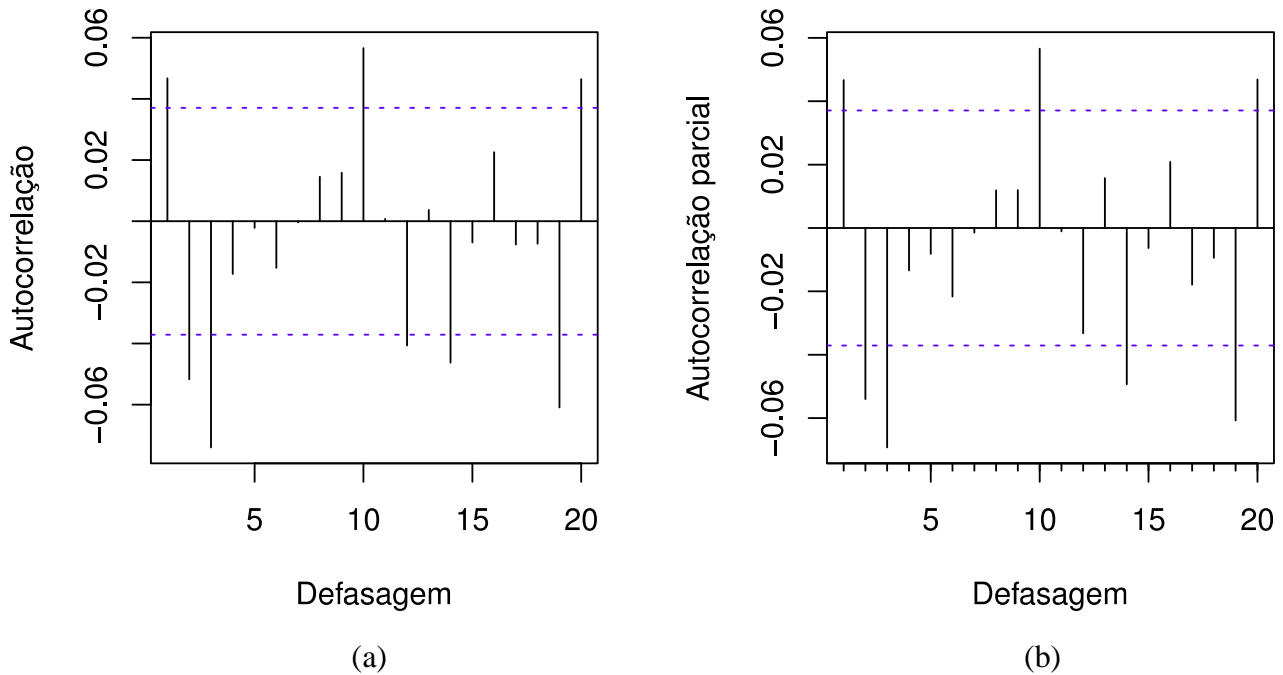


Figura 5.19: (a) FAC e (b) FACP da série de retornos VALE3

Os resultados dos testes ADF e KPSS para os retornos da série VALE3 são, respectivamente, valor $p < 0,0001$ e valor $p \geq 0,1$, o que permite não rejeitar as hipóteses de estacionariedade de cada teste. Os testes de estacionariedade foram executados sem considerar constante ou tendência, ambos aplicados para as nove primeiras defasagens. Em relação ao teste de Ljung-Box, o valor $p < 0,0001$ indica que existe autocorrelação significativa nos retornos, justificando, portanto, a aplicação prévia do modelo ARMA.

5.3.3. Aplicação do modelo ARMA e diagnóstico dos resíduos

A Tabela 5.20 apresenta, os cinco melhores modelos ARMA, dentre os 48 modelos testados, selecionados de acordo com a minimização dos critérios de informação.

Tabela 5.20: Modelos ARMA aplicados aos retornos da série VALE3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r²)	ALM
ARMA(0,3)	-12.039,20	-12.009,55	-12.036,79	0,002451	<0,0001	<0,0001
ARMA(6,5)	-12.039,81	-11.962,79	-12.020,37	0,05682	<0,0001	<0,0001
ARMA(5,3)	-12.040,22	-11.980,95	-12.027,16	0,04367	<0,0001	<0,0001
ARMA(4,5)	-12.041,44	-11.976,24	-12.026,25	0,00473	<0,0001	<0,0001
ARMA(5,4)	-12.041,56	-11.976,37	-12.026,37	0,03484	<0,0001	<0,0001

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Nota-se, pela Tabela 5.20, que o melhor modelo pelos critérios BIC e HQIC seria o ARMA(0,3), no entanto ele não é capaz de remover a autocorrelação significativa da série, contrariando os requisitos para que o modelo seja válido. Portanto, apesar de resultar em critérios de informação maiores, o modelo escolhido é o ARMA(6,5), pelo fato deste validar os pressupostos teóricos do estudo, visto que remove a autocorrelação de acordo com o teste de Ljung-Box a nível de significância de 5%.

A aplicação posterior do modelo GARCH é justificada pela verificação da heteroscedasticidade no resíduos, por meio dos resultados do teste de Ljung-Box nos resíduos ao quadrado (LB(r²)) e teste ARCH-LM (ALM), apresentados na Tabela 5.20, os quais indicam que os resíduos do modelo ARMA(6,5) são heteroscedásticos.

O diagnóstico dos resíduos é reforçado pelos gráficos da FAC e FACP para os resíduos e resíduos ao quadrado do modelo ARMA(6,5), apresentados nas Figuras 5.20 e 5.21.

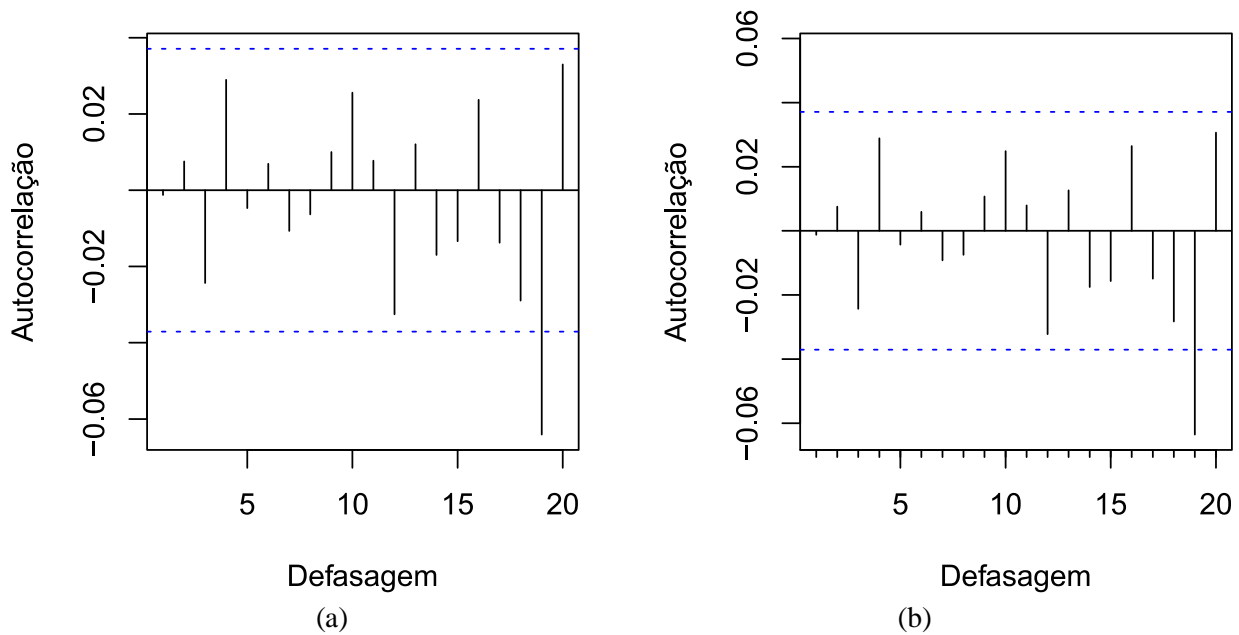


Figura 5.20: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(6,5)

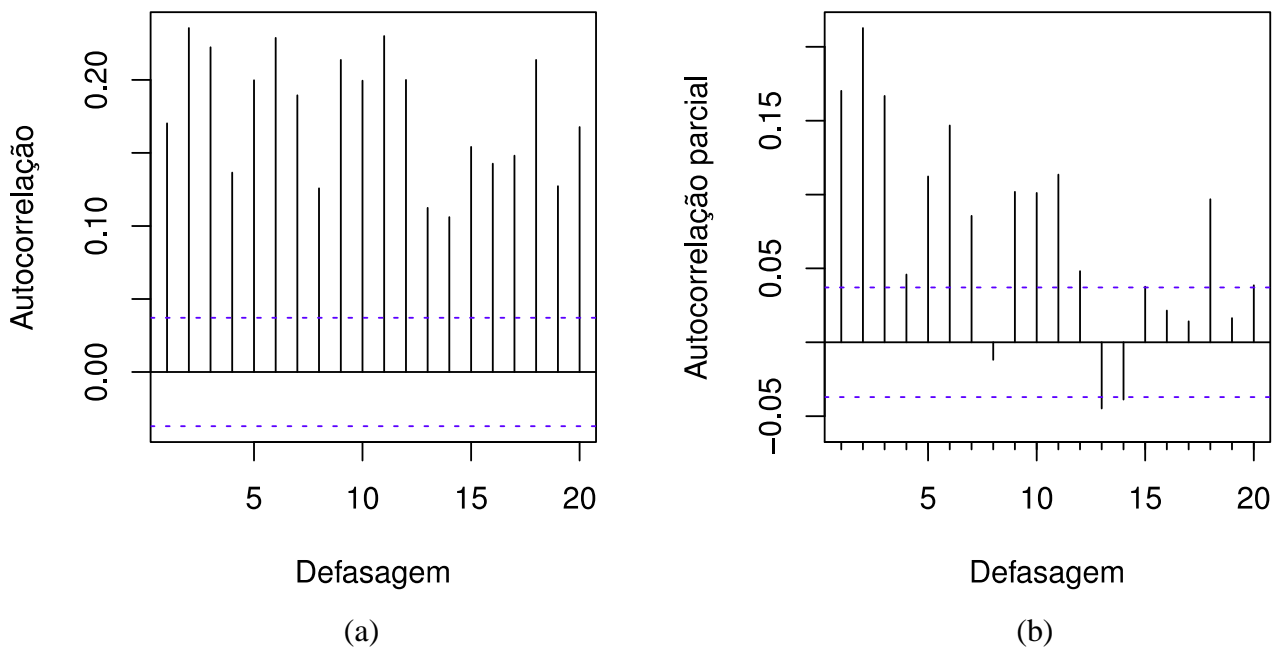


Figura 5.21: (a) FAC e (b) FACP dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA(6,5)

Na análise das Figuras 5.20 e 5.21, observa-se que a autocorrelação significativa foi removida dos retornos, restando apenas um pico de autocorrelação nas vinte primeiras defasagens. Além disso, é evidente a presença de heteroscedasticidade persistente nos retornos ao quadrado.

5.3.4. Aplicação dos modelos GARCH e diagnóstico dos resíduos

De forma semelhante as outras séries apresentadas neste estudo, os coeficientes do modelo GARCH(1,1), de valores $\alpha_1 = 0,0530$ e $\beta_1 = 0,9403$, indicam que os retornos da série VALE3 possuem heteroscedasticidade persistente. Com o objetivo de modelar essa elevada persistência, o modelo IGARCH também é aplicado. Juntamente com o modelo GARCH e IGARCH, são aplicadas as extensões assimétricas do modelo GARCH, os modelos EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH, todos especificados com distribuição normal e *t* de Student.

Os valores dos critérios de informação e resultados do diagnóstico dos resíduos dos modelos GARCH, IGARCH, EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH aplicados aos retornos da série VALE3 estão apresentados nas Tabelas 5.21, 5.22 5.23, 5.24, 5.25 e 5.25.

Tabela 5.21: Modelos GARCH aplicados aos retornos da série VALE3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r ²)	ALM	JB
GARCH(1,1) - Normal	-4,4681	-4,5362	-4,5566	0,8792	0,3721	0,3569	<0,0001
GARCH(2,1) - Normal	-4,4674	-4,5334	-4,5551	0,7001	0,9837	0,9837	<0,0001
GARCH(1,2) - Normal	-4,5674	-4,5334	-4,5551	0,7001	0,9837	0,9837	<0,0001
GARCH(2,2) - Normal	-4,5670	-4,5309	-4,5540	0,8821	0,4237	0,4375	<0,0001
GARCH(1,1) - Student	-4,5845	-4,5505	-4,5722	0,8791	0,3734	0,3581	-
GARCH(2,1) - Student	-4,5837	-4,5476	-4,5707	0,8747	0,3233	0,3190	-
GARCH(1,2) - Student	-4,5837	-4,5476	-4,5707	0,8743	0,3234	0,3190	-
GARCH(2,2) - Student	-4,5831	-4,5449	-5,5693	0,8733	0,3655	0,3790	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor *p* do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor *p* do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor *p* do teste ARCH-LM; JB: valor *p* do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.22: Modelos IGARCH aplicados aos retornos da série VALE3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r ²)	ALM	JB
IGARCH(1,1) - Normal	-4,5717	-5,5421	-5,5610	0,7204	0,3084	0,3323	<0,0001
IGARCH(2,1) - Normal	-4,5709	-4,5393	-5,5595	0,7204	0,3080	0,3320	<0,0001
IGARCH(1,2) - Normal	-4,5710	-4,5393	-4,5595	0,7201	0,3135	0,3332	<0,0001
IGARCH(2,2) - Normal	-4,5704	-4,5366	-4,5582	0,7234	0,3383	0,3841	<0,0001
IGARCH(1,1) - Student	-4,5900	-4,5584	-5,5786	0,7326	0,2467	0,2693	-
IGARCH(2,1) - Student	-4,5893	-4,5555	-4,5771	0,7327	0,2467	0,2693	-
IGARCH(1,2) - Student	-4,5893	-4,5556	-4,5771	0,7336	0,2546	0,2721	-
IGARCH(2,2) - Student	-4,5886	-4,5527	-4,5757	0,7320	0,2597	0,2891	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor *p* do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor *p* do teste

de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.23: Modelos EGARCH aplicados aos retornos da série VALE3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r²)	ALM	JB
EGARCH(1,1) - Normal	-4,5729	-4,5389	-4,5606	0,7264	0,09442	0,1441	<0,0001
EGARCH(2,1) - Normal	-4,7770	-5,5395	-4,5639	0,1573	0,1732	0,2093	<0,0001
EGARCH(1,2) - Normal	-4,5721	-4,5360	-4,5591	0,7265	0,0938	0,1436	<0,0001
EGARCH(2,2) - Normal	-4,5718	-4,5719	-4,5573	0,7498	0,1265	0,2074	<0,0001
EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-4,5886	-4,5525	-4,5756	0,7685	0,04553	0,0787	-
EGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-4,5874	-4,5470	-4,5728	0,7843	0,5056	0,0836	-
EGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-4,5879	-4,5497	-4,5741	0,7702	0,0450	0,0781	-
EGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-4,5870	-4,5445	-4,5716	0,7872	0,04669	0,0856	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.24: Modelos TGARCH aplicados aos retornos da série VALE3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r²)	ALM	JB
TGARCH(1,1) - Normal	-4,5703	-4,5363	-4,5580	0,7055	0,2134	0,3556	<0,0001
TGARCH(2,1) - Normal	4,5708	-4,5325	-4,5570	0,4859	0,2278	0,3461	<0,0001
TGARCH(1,2) - Normal	-4,5701	-4,5340	-5,5571	0,7411	0,2447	0,3861	<0,0001
TGARCH(2,2) - Normal	-4,5706	-4,5303	-4,5561	0,4832	0,317	0,4301	<0,0001
TGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-4,5877	-4,5515	-4,5746	0,4899	0,0873	0,1723	-
TGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-4,5856	-4,5452	-4,5710	0,7761	0,1105	0,2205	-
TGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-4,5858	-4,5475	-4,5720	0,7530	0,0959	0,2027	-
TGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-4,5852	-4,5427	-4,5699	0,4832	0,317	0,4301	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.25: Modelos PGARCH aplicados aos retornos da série VALE3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r²)	ALM	JB
PGARCH(1,1) - Normal	-4,5748	-4,5387	-4,5618	0,8651	0,5908	0,5834	<0,0001
PGARCH(2,1) - Normal	-4,5736	-4,5332	-4,5590	0,7761	0,1105	0,2205	<0,0001
PGARCH(1,2) - Normal	-4,5858	-4,5475	-4,5720	0,7530	0,0959	0,2027	<0,0001
PGARCH(2,2) - Normal	-4,5738	-4,5313	-4,5584	0,8647	0,6423	0,6708	<0,0001
PGARCH(1,1) - <i>Student</i>	-4,5868	-4,5485	-4,5730	0,5806	0,4735	0,5265	-
PGARCH(2,1) - <i>Student</i>	-4,5882	-4,5457	-4,5728	0,7291	0,3744	0,4314	-
PGARCH(1,2) - <i>Student</i>	-4,5876	-4,5472	-4,5730	0,7731	0,5350	0,5966	-
PGARCH(2,2) - <i>Student</i>	-4,5867	-4,5421	-4,5706	0,7767	0,5712	0,6458	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Tabela 5.26: Modelos GJR-GARCH aplicados aos retornos da série VALE3

Modelo	AICc	BIC	HQIC	LB	LB (r²)	ALM	JB
GJR-GARCH(1,1) - Normal	-4,5823	-4,5486	-4,5701	0,8539	0,6030	0,6032	<0,0001
GJR-GARCH(2,1) - Normal	-4,5811	-4,5431	-4,5674	0,8542	0,5943	0,6111	<0,0001
GJR-GARCH(1,2) - Normal	-4,5816	-4,5457	-4,4687	0,8539	0,6032	0,6034	<0,0001
GJR-GARCH(2,2) - Normal	-4,5813	-4,5412	-4,5668	0,8539	0,6718	0,6898	<0,0001
GJR-GARCH(1,1) - <i>Student</i>	-4,5952	-4,5594	-4,5823	0,6895	0,5738	0,5946	-
GJR-GARCH(2,1) - <i>Student</i>	-4,5919	-4,5518	-4,5774	0,2628	0,4681	0,5069	-
GJR-GARCH(1,2) - <i>Student</i>	-4,5953	-4,5573	-4,5816	0,8506	0,5696	0,5788	-
GJR-GARCH(2,2) - <i>Student</i>	-4,5936	-4,5514	-4,5784	0,7033	0,6255	0,6524	-

AICc: critério de informação de Akaike corrigido; BIC: critério de informação de Schwarz; HQIC: critério de informação de Hannan-Quinn; LB: valor p do teste de Ljung-Box; LB(r²): valor p do teste de Ljung-Box aplicado nos resíduos ao quadrado; ALM: valor p do teste ARCH-LM; JB: valor p do teste de Jarque-Bera.

Nota-se na análise das Tabelas 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25 e 5.26 que, assim como nas séries ABEV3 e BBDC3, os modelos aplicados aos retornos da série VALE3 apresentaram critérios de informação menores quando especificados com distribuição t de *Student* e, na maioria dos modelos, as defasagens (1,1) foram suficientes para minimizar os critérios de informação. Entretanto, como os modelos PGARCH(1,1) – *Student* e PGARCH(1,2) – *Student* minimizam, respectivamente, o critério BIC e o critério AIC e possuem mesmo valor de critério HQIC, ambos modelos são selecionados para a previsão. No diagnóstico dos resíduos, todos os modelos apresentaram resíduos sem autocorrelação e heteroscedasticidade significativa. No entanto, de acordo com o teste de Jarque-Bera, nenhum

modelo especificado com distribuição normal obteve resíduos seguindo essa distribuição. Pelos critérios de informação, o modelo GJR-GARCH(1,1) – *Student* é o melhor no ajuste, seguido dos modelos IGARCH(1,1), TGARCH(1,1), PGARCH(1,1) e PGARCH(1,2) empatados e, por fim, o modelo GARCH(1,1), todos com resíduos especificados com a distribuição *t* de *Student*. O modelo IGARCH(1,1), nesse caso, apresentou um bom ajuste superando, não apenas o modelo GARCH(1,1) simétrico, como também a maioria dos modelos assimétricos, indicando que a consideração da heteroscedasticidade persistente resultou em um melhor ajuste para a volatilidade da série VALE3.

Com o objetivo de se comparar o ajuste dos modelos especificados com as duas distribuições, a Figura 5.22 apresenta os gráficos quantil-quantil (Q-Q) com envelope simulado de 95% dos resíduos do modelo GJR-GARCH(1,1) – Normal e GJR-GARCH(1,1) – *Student*.

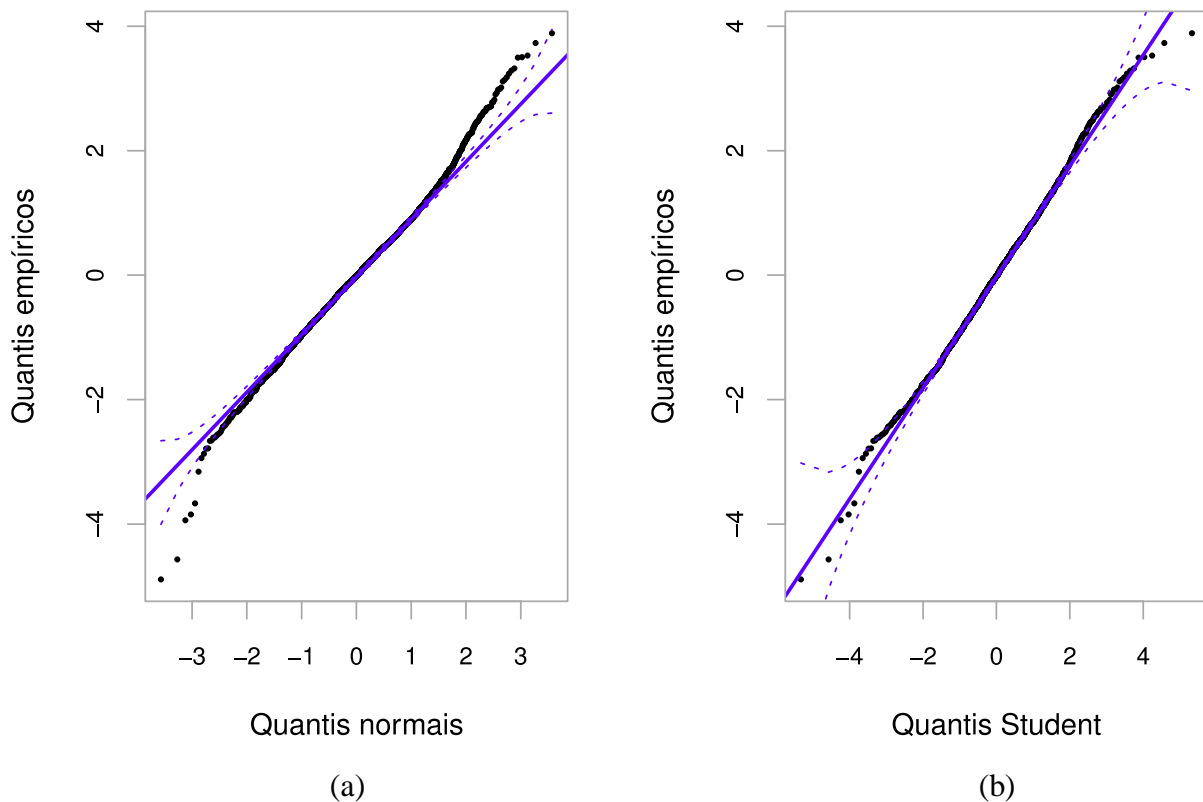


Figura 5.22: Gráficos quantil-quantil (Q-Q) dos resíduos do modelo GJR-GARCH(1,1), seguindo a (a) distribuição normal e a (b) *t* de *Student*, aplicado aos retornos da série VALE3

A Figura 5.22 indica que os resíduos normais se afastam consideravelmente da reta, principalmente nas extremidades, enquanto que os resíduos seguindo a distribuição *t* de *Student* se mantêm em sua maioria ao longo da reta. Em relação as extremidades, os resíduos especificados com distribuição *t* de *Student* também se afastam da curva, porém se mantêm dentro do envelope simulado

de 95%. Além disso, existe um leve afastamento desses resíduos em relação a reta entre os quantis empíricos -4 e -2 e 2 e 4, de maneira semelhante ao comportamento observado na análise realizada com a série BBDC3.

5.3.5. Resultados e avaliação da previsão dos modelos GARCH

As medidas de erro de previsão para os modelos selecionados são apresentadas na Tabela 5.26.

Tabela 5.27: Resultados dos modelos na previsão da volatilidade dos retornos da série VALE3

Modelo	Previsão dinâmica			Previsão estática		
	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	MAPE
GARCH(1,1) - Normal	0,007381	0,007842	62,2064	0,005697	0,006011	47,3040
IGARCH(1,1) - Normal	0,007557	0,008042	63,7671	0,005668	0,005986	47,0234
EGARCH(1,1) - Normal	0,006602	0,007030	55,4258	0,004324	0,004720	34,8355
TGARCH(1,1) - Normal	0,006895	0,007353	58,0253	0,004299	0,004698	34,6354
PGARCH(1,1) - Normal	0,006700	0,007137	56,3005	0,004628	0,004975	37,5642
PGARCH(1,2) - Normal	0,006701	0,007138	56,3050	0,004619	0,004972	37,5012
GJR-GARCH(1,1) - Normal	0,006717	0,007153	56,4386	0,004349	0,004985	37,6186
GARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,007302	0,007754	61,5095	0,005687	0,006001	47,2187
IGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,007445	0,007914	62,7725	0,005690	0,00601	47,2225
EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,006240	0,006641	52,2204	0,004286	0,004679	34,5036
TGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,006283	0,006697	52,6270	0,004366	0,004740	35,2755
PGARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,006604	0,007029	55,4369	0,004353	0,004733	35,0803
PGARCH(1,2) - <i>Student</i>	0,006533	0,006958	54,8224	0,004438	0,004810	35,8473
GJR-GARCH(1,1) - <i>Student</i>	0,006661	0,007093	55,9506	0,004587	0,004937	37,1737

MAE: Erro médio absoluto; RMSE: Raiz quadrada do erro médio; MAPE: Erro percentual absoluto médio.

É possível observar pela Tabela 5.27 que os modelos especificados com distribuição t de *Student* apresentam os menores erros, tanto na previsão estática como na previsão dinâmica. Nos dois tipos de previsão, o modelo que se sobressai aos demais é o EGARCH(1,1) – *Student*. Mais uma vez, o modelo IGARCH(1,1), apesar de considerar a heteroscedasticidade persistente e obter um bom ajuste, não resultou em valores satisfatórios de previsão, sendo o pior modelo neste quesito para a volatilidade da série VALE3.

A Figura 5.23 apresenta os gráficos da volatilidade prevista pelo modelo EGARCH(1,1) – *Student* aplicado na previsão dinâmica e estática da volatilidade dos retornos da série VALE3.

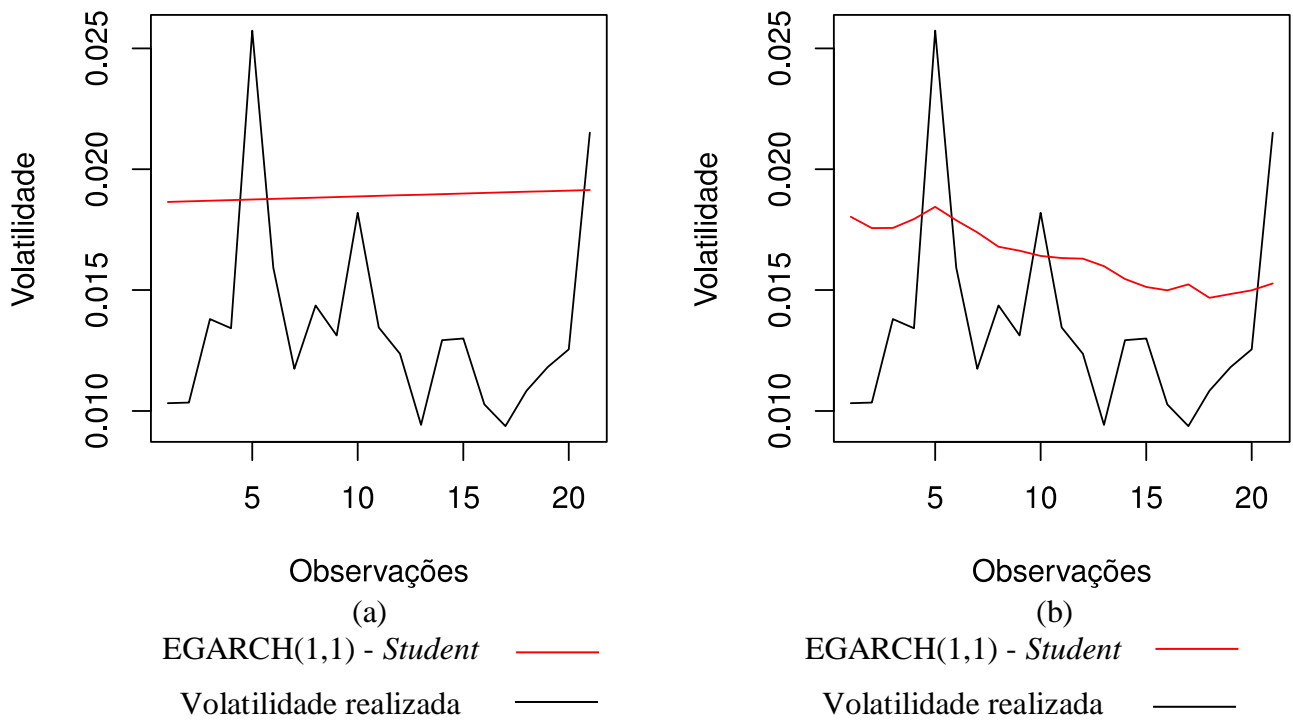


Figura 5.23: (a) Previsão dinâmica e (b) estática da volatilidade pelo modelo EGARCH(1,1) – *Student*

A Figura 5.23 evidencia que o comportamento na previsão é semelhante ao observado na série BBDC3, em que o modelo selecionado acaba por superestimar a volatilidade. Da mesma forma, na previsão estática, o modelo vai se aproximando da tendência central da volatilidade conforme o distanciamento da origem da previsão e é pouco susceptível aos choques. Nesse caso, o uso da previsão estática resulta em um ganho considerável na qualidade da previsão, podendo ser uma melhor opção para a previsão da volatilidade da série VALE3.

5.3.6. Curva de impacto de informações

As curvas de impacto de informações dos modelos especificados com distribuição t de *Student* aplicados aos retornos da série VALE3 estão apresentadas na Figura 5.23.

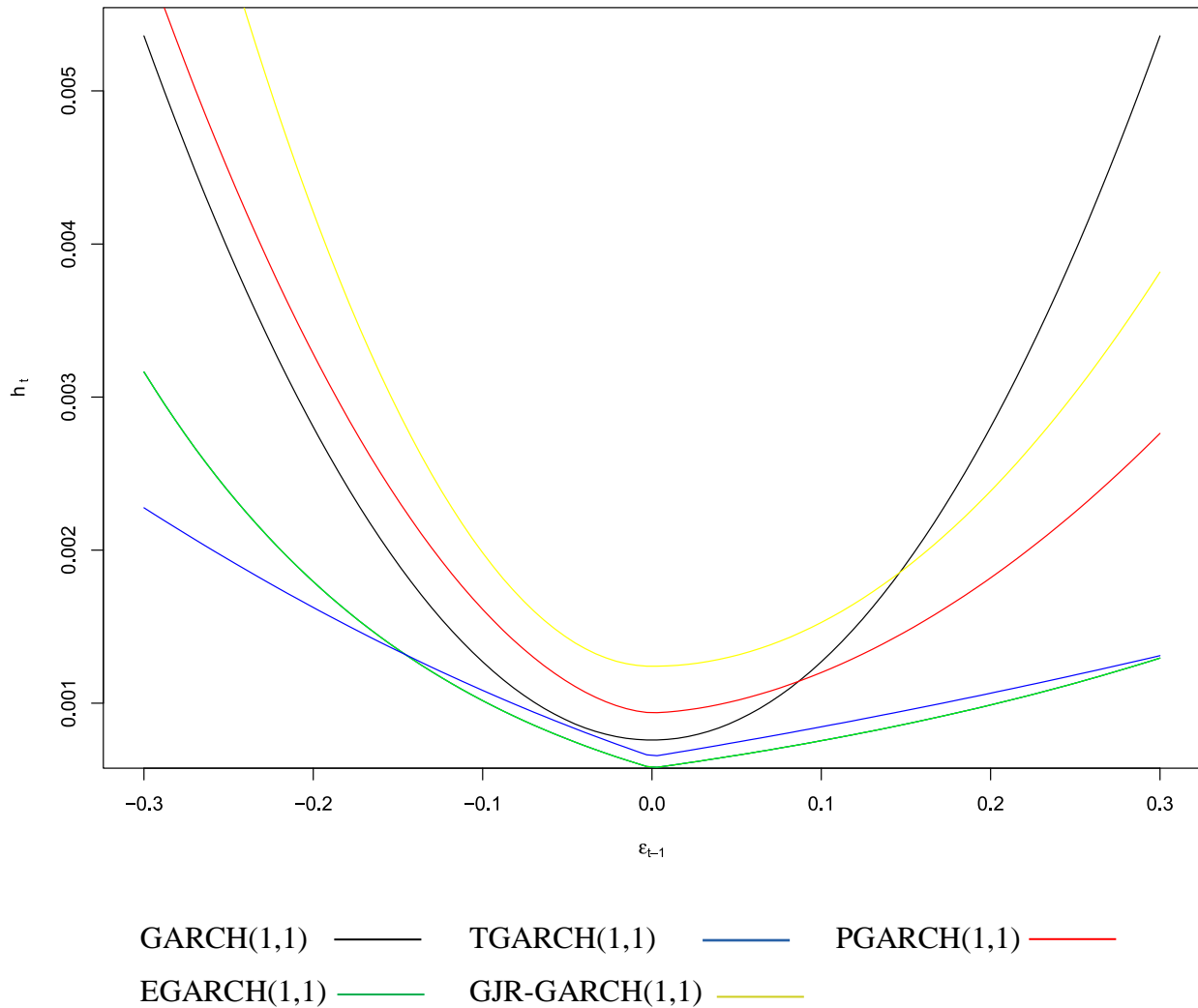


Figura 5.24: Curvas de impacto de informações dos modelos aplicados aos retornos da série VALE3

Pela Figura 5.24, é possível observar que mais uma vez o modelo PGARCH(1,1) apresenta um comportamento diferente das outras séries, sendo, depois do modelo GJR-GARCH(1,1), o que considera o maior impacto por parte dos retornos negativos na volatilidade. Além disso, as curvas dos modelos EGARCH(1,1) e TGARCH(1,1) também têm comportamento diferente do apresentado nas outras séries. Nesse caso, o modelo TGARCH(1,1) considera um maior impacto dos retornos negativos na volatilidade que o modelo EGARCH(1,1) no intervalo entre $-0,15 \leq \varepsilon_t \leq 0$, enquanto que, levando em consideração os retornos positivos, a mesma situação ocorre para todo o intervalo $0 \leq \varepsilon_t \leq 0,30$.

5.4. Análise comparativa dos resultados

A Tabela 5.28 apresenta um resumo dos resultados obtidos para as três séries analisadas, com a finalidade de se comparar os achados obtidos.

Tabela 5.28: Resumo dos resultados obtidos na modelagem das séries ABEV3, BBDC3 e VALE3

Série	Medidas descritivas		Ordens do modelo ARMA	Modelo GARCH para previsão		MAPE da previsão (%)	
	Desvio padrão	Curtose		Dinâmica	Estática	Dinâmica	Estática
ABEV3	0,0166	7,2219	(1,1)	PGARCH(1,1) - <i>Student</i>	GARCH(1,1) - <i>Student</i>	9,73	8,07
BBDC3	0,0212	7,7259	(0,3)	GARCH(1,1) - <i>Student</i>	GARCH(1,1) - <i>Student</i>	24,30	21,97
VALE3	0,0282	7,3344	(6,5)	EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	EGARCH(1,1) - <i>Student</i>	52,22	34,50

A Tabela 5.28 evidencia que os resultados de previsão da volatilidade se tornaram piores, à medida que o desvio padrão incondicional das séries aumentou. A modelagem da série de menor volatilidade, ABEV3, resultou nos melhores erros de previsão com MAPE's, tanto para a previsão estática como dinâmica, menores que 10%. Enquanto que, para a série VALE3, de maior desvio padrão, os erros de previsão pioraram consideravelmente, chegando a mais de 50% para a previsão dinâmica. Percebe-se também que, nas séries de maior volatilidade, foram necessárias maiores defasagens do modelo ARMA para a remoção da autocorrelação. A modelagem da série da VALE3, por exemplo, resultou no modelo para a média ARMA(6,5).

Em relação as estatística descritivas, percebe-se que todas as três séries possuem considerável excesso de curtose, o que é um indicativo das caudas pesadas, geralmente presentes nas séries financeiras. Isso justifica, portanto, o emprego dos modelos GARCH seguindo a distribuição *t* de *Student*, de forma a modelar melhor esse tipo de série. A Tabela 5.28 evidencia que, de fato, os modelos seguindo a distribuição *t* de *Student* apresentaram os melhores resultados para as três séries.

Na consideração do efeito avalança, os modelos assimétricos apresentaram os melhores resultados de previsão dinâmica para a maior parte da séries. A exceção é a série BBDC3, em que o modelo GARCH(1,1) – *Student* obteve os menores erros para os dois tipos de previsão. Isso indica que, para o intervalo de previsão considerado, o efeito alavanca pode não estar presente.

Por fim, na comparação dos tipos de previsão, apenas a série VALE3 apresentou diferenças consideráveis entre a previsão dinâmica e estática. Portanto, é indicado que, para essa série, a previsão da volatilidade seja de curto prazo, visto que os erros da previsão dinâmica foram consideravelmente

maiores que os da estática, ultrapassando 50%. Para as demais séries, é recomendável que a previsão escolhida seja a dinâmica, pois não houve diferenças grandes entre os erros dos dois tipos de previsão.

6. Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo avaliar o desempenho da aplicação conjunta dos modelos ARMA-GARCH na estimativa e previsão da volatilidade de ações financeiras. Com este intuito, aplicou-se o modelo ARMA juntamente com os modelos GARCH e suas extensões assimétricas, EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH, nos retornos das ações das empresas Ambev (ABEV3), do banco Bradesco (BBDC3) e da empresa Vale (VALE3).

A volatilidade é fundamental na área de finanças, pois pode ser utilizada como *proxy* para o risco, sendo de interesse para os investidores, que necessitam avaliar a probabilidade de um investimento fornecer o retorno esperado. Além disso, a volatilidade também pode ser usada como um termômetro da situação macroeconômica do país, visto que funciona como um indicador da situação financeira das empresas do mercado e da movimentação dos investimentos. Logo, é essencial que os modelos heteroscedásticos sejam bem especificados para que modelem a volatilidade de forma mais consistente e gerem resultados mais condizentes com a realidade.

Entretanto, existem algumas dificuldades na aplicação dos modelos GARCH no que diz respeito a especificar uma distribuição de probabilidade adequada para os resíduos desses modelos. De forma a abordar esse aspecto, este estudo se propôs a aplicar os modelos GARCH especificando duas distribuições: normal e *t* de Student. Outra dificuldade encontrada é como avaliar os resultados da previsão desses modelos, visto que os retornos absolutos e ao quadrado, apesar de consistirem em medidas não viesadas, possuem elevado ruído e, portanto, não são indicados para a avaliação da previsão. Esta segunda dificuldade foi contornada, neste estudo, por meio da utilização da volatilidade realizada, que foi computada a partir de retornos intradiários a cada 15 minutos no intervalo de validação.

Em relação a análise exploratória das séries, foi constatado de que todas possuem preços não estacionários e retornos estacionários e de média aproximadamente zero, conforme previsto pela literatura. Além disso, todas as séries de retorno analisadas apresentaram excesso de curtose e distribuição aproximadamente simétrica. Somado a isso, as medidas de desvio padrão indicaram que a série ABEV3 é a que possui a menor volatilidade no período considerado, enquanto que a série VALE3 é a mais volátil dentre as séries analisadas.

Esse grau de volatilidade das séries parece estar associado com a magnitude da autocorrelação nos retornos, visto que as séries de retorno de maior volatilidade apresentaram FAC e FACP com maior quantidade de picos de autocorrelação. Além disso, os retornos da série mais volátil, VALE3, resultaram em um modelo para a média ARMA(6,5), mostrando que foi necessário considerar defasagens elevadas para remoção da autocorrelação significativa. Em contrapartida, na série de retornos das ações VALE3 um simples modelo ARMA(1,1) foi suficiente para a remoção da autocorrelação, enquanto que os retornos da série BBDC3, de volatilidade moderada em comparação as demais, resultaram em um modelo ARMA(0,3) para a média condicional. Esses resultados podem indicar uma ineficiência do mercado financeiro em eliminar a dependência temporal em ações de maior volatilidade e, portanto, de menor liquidez.

Na aplicação dos modelos, os resultados do ajuste se alinham com outros estudos já realizados, visto que, de acordo com os critérios de informação, os modelos assimétricos com distribuição *t* de *Student* foram superiores aos demais modelos. Além disso, nenhum modelo seguindo a distribuição normal foi capaz de obter resíduos seguindo essa distribuição de acordo com a análise gráfica e o teste de Jarque-Bera. Em contrapartida, todos os modelos especificados com distribuição *t* de *Student* resultaram em resíduos mais adequados a distribuição selecionada, de acordo com o gráfico quantil-quantil. Observou-se, entretanto, um leve afastamento dos resíduos da distribuição *t* de *Student* nas séries BBDC3 e VALE3, possivelmente causado por serem séries de maior volatilidade e, portanto, possuem mais *outliers*.

Na análise da previsão, os modelos aplicados aos retornos da série ABEV3 apresentaram os melhores resultados, enquanto que a série VALE3 resultou nas previsões com maiores medidas de erro. Esses resultados concordam com o que é documentado na literatura, em que valores maiores de volatilidade geralmente levam a uma superestimação dos retornos por parte dos modelos, gerando previsões com valores maiores de volatilidade do que os valores reais. Além disso, os modelos especificados com distribuição *t* de *Student* apresentaram, em geral, os melhores resultados na previsão, tanto na dinâmica como na estática, o que mostra que a especificação adequada dos modelos é importante, não só para reforçar a base teórica dos modelos, mas também para a viabilidade prática dos mesmos. Em relação ao desempenho dos modelos assimétricos, de maneira geral eles se mostraram superiores aos simétricos, com exceção da série BBDC3. Nesta série, o melhor modelo foi o GARCH(1,1) – *Student*, o que pode indicar que os retornos não impactam a volatilidade de forma assimétrica no período considerado para essa série.

Com relação a previsão estática, observou-se que os modelos demoraram alguns períodos para se adequarem a tendência da volatilidade no intervalo de previsão e, também, se mostraram pouco

susceptíveis aos choques nas séries de maior volatilidade, BBDC3 e VALE3. Na modelagem das séries ABEV3 e BBDC3, a diferença dos resultados entre a previsão dinâmica e estática não foi tão significativa, indicando que, para essas séries, a previsão dinâmica é a melhor opção. Entretanto, para a série de volatilidade mais elevada, VALE3, os resultados indicam que a previsão um passo à frente talvez seja uma melhor alternativa, já que a previsão dinâmica resultou em medidas de erro muito elevadas para a volatilidade dessa série.

Ressalta-se, também, que a análise gráfica e dos coeficientes dos modelos GARCH para as três séries indicaram a presença de heteroscedasticidade persistente e, por esse motivo, o modelo IGARCH foi aplicado juntamente com os demais modelos. Em comparação com o modelo GARCH comum, o modelo IGARCH apresentou menores critérios de informação nas séries ABEV3 e VALE3, mas não resultou em erros significativamente menores de previsão em nenhuma das três séries, sendo, inclusive, considerado o pior dentre todos os modelos na previsão para a volatilidade da série VALE3.

Em suma, a aplicação conjunta dos modelos ARMA-GARCH se mostrou mais apropriada às séries de menor volatilidade deste estudo, gerando resultados melhores de previsão. Além disso, os modelos assimétricos com distribuição *t* de *Student* apresentaram, de maneira geral, os menores critérios de informação e menores erros de previsão. Portanto, é essencial que o “efeito alavanca” presente nos retornos financeiros e a escolha de uma distribuição de probabilidade diferente da normal sejam considerados, pois podem levar a resultados mais precisos da volatilidade e, conseqüentemente, do risco para os investimentos.

A partir deste estudo, trabalhos futuros podem ser conduzidos. Uma possibilidade seria a aplicação de diversos modelos da família GARCH em séries simuladas de ações financeiras, com o objetivo de identificar quais e em que situações os modelos se sobressaem aos demais. Outra vertente seria, também por meio de simulações, verificar quais *proxies* de volatilidade que utilizam dados diários se aproximam mais da volatilidade realizada, computada a partir de dados intradiários, o que facilitaria a avaliação da previsão por parte de pesquisadores e investidores. Uma terceira alternativa é realizar o estudo da estimativa e previsão da volatilidade utilizando outros modelos além dos das famílias ARMA e GARCH, como os modelos fracionários de memória longa e os modelos de volatilidade estocástica.

REFERÊNCIAS

Alexandrino, F.Q.L; Santos dos, R.A.B; Angulo-Meza, L.; Bordeaux-Rego, R. Utilização da análise envoltória de dados (DEA) na composição de carteira de investimento diversificada e eficiente. **Revista Produção Online**, 17(2):507-532, 2016.

Andersen, T.G.; Bollerslev, T. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. **International Economic Review**, 39:885-905, 1998.

Angélico, D.G., & Oliveira de, S.C. Modelo ARMA-GARCH e precedência temporal entre índices acionários. GEPROS. **Gestão da Produção, Operações e Sistemas**, 11(1): 97-112, 2015.

Akaike, H. Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. 2nd International Symposium on Information Theory, Budapeste, 267-281, 1973.

Ardia, D.; Bluteau, K.; Boudt, K.; Catania, L. Forecasting risk with Markov-switching GARCH models: a large scale performance study. **International Journal of Forecasting**. 34(4):733-746.

Black, F., & Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, 81:635-654, 1973.

Blazsek, S.; Carrizo, D.; Eskildsen, R.; Gonzalez, H. Forecasting rate of return after extreme values when using AR- t -GARCH and QAR-Beta- t -EGARCH. **Finance Research Letters**. 24:193-198, 2018.

Bollerslev, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, 31:307-327, 1985.

Box, G.E.P; Jenkins, G. **Time Series Analysis, Forecasting and Control**. Holden-Day, San Francisco, 1970.

Bueno, R.L.S. **Econometria de Séries Temporais**. Cengage Learning, São Paulo, 2008.

- Campbell, J. Y.; Lo, A. W.; MacKinlay, A.C. **The Econometrics of Financial Markets**. Princeton University Press, New Jersey, 1996.
- Dickey, D. A.; Fuller, W. A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. **Journal of the American Statistical Association**, 74:427-431, 1979.
- Dickey, D. A.; Fuller, W. A. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. **Econometrica**, 49:1057-1073, 1981.
- Diebold, F.X.; Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. **Journal of Business and Economic Statistics**, 13: 253-263, 1994.
- Ding, Z.; Granger, W.K; Engle, R.F. A long memory property of stock market returns and a new model. **Journal of Empirical Finance**, 1:83-106, 1993.
- Drost, F.C.; Nijman, T.E. Temporal Aggregation of GARCH Processes. **Econometrica**, 61:909-927, 1993.
- Engle, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations. **Econometrica**, 50:987-1007, 1982.
- Engle, R.F., Patton, J.A. What good is a volatility model? **Quantitative Finance**, 1:237-245, 2001.
- Engle, R. F.; Ng, V. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. **Journal of Finance**, 48(5), 1749-1778, 1993
- Filho, E. T.; Pinter, C. A. Z. **Mercado de capitais e bolsa de valores**. 2 ed., UnisulVirtual, 2014.
- Fernandez, C.; Stell, M. On Bayesian modelling of fat tails and skewness. **Journal of the American Statistical Association**, 93:359-371, 1998.
- Franqc, C.; Zakoian, J. M. **GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications**. Wiley, Chichester, 2010.

Gardner, G.; Harvey, A. C.; Phillips, G. D. A. Algorithm AS 154: An algorithm for exact maximum likelihood estimation of autoregressive-moving average models by means of Kalman filtering.

Applied Statistics, 29: 311–322, 1980.

Gajda, J.; Bartnicki, G.; Burnecki, K. Modelling of water usage by means of ARIMA-GARCH processes. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**. 15:644-657, 2018.

Garman, M.B.; Klass, M.J. (1980). On the estimation of security price volatility from historical data. **Journal of Business**. 53:67-78, 1980.

Glosten, L. R.; Jaganathan, R.; Runkle, D. On the relation between the expected value and the volatility of the normal excess return on stocks. **Journal of Finance**, 48:1779-1801, 1993.

Granger, C.W.J.; Andersen, A. On the invertibility of time series models. **Stochastic Processes and their Applications**, 8:87-92, 1978.

Gujarati, D. N.; Porter, D. C. **Basic Econometrics**. 4. ed. McGraw-Hill Irwin, Nova York, 2009.

Hamilton, J. D. **Time series analysis**. Princeton, Princeton, 1993.

Hannan, E. J.; Quinn, B. G. The determination of the Order of an Autoregression. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, 41(2):190-195, 1979.

Hansen, P.R.; Lunde, A. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)? **Journal of Applied Econometrics**, 20:873-889, 2004.

Hurvitch, C.M.; Tsai, C. Bias of the corrected aic criterion for underfitted regression and time series models. **Biometrika**, 78(3):449-509, 1991.

Hyndman, R. J.; Athanasopoulos, G. **Forecasting: principles and practice**. OText, Melbourne, 2013. Disponível em: <http://otexts.org/fpp/>.

Ismail, M. T.; Audu, B.; Tumala, M. M. Comparison of forecasting performance between MODWT-GARCH(1,1) and MODWT-EGARCH(1,1) models: evidence from African stock markets. **The Journal of Finance and Data Science**, 2(4):254-264, 2015.

Kim, S.; Shepard, N.; Chib, S. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. **Review of Economic Studies**, 85:361-393.

Lai, Y. Evaluating the hedging performance of multivariate GARCH models. **Asian Pacific Management Review**. 1-10, 2018.

Lama, A. et al. Modelling and Forecasting of Price Volatility: An Application of GARCH and EGARCH models. **Agricultural Economics Research Review**. 28(1):73-82, 2014.

Ljung, G. M.; Box, G. E. P. On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. **Biometrika**, 65(2):297-303, 1978.

Lucas, D. R.; Lucas, D. S.; Santos, J. G.; Júnior, V. U. Mercado de capitais: técnicas para avaliação de carteira de ações para pessoa física. VII Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia, 2010.

Lima, I. S.; Galardi, N.; Neubauer, I. **Mercados de Investimentos Financeiros**. 2. ed. Atlas S.A., São Paulo, 2005.

Lim, C. M.; Sek, S. K. Comparing the performances of GARCH-type models in capturing the stock market volatility in Malaysia. **International Conference of Applied Economics (ICOAE)**, 2013.

Liu, H.; Li, R.; Yuan, J. Deposit insurance pricing under GARCH. **Finance Research Letters**. 26:242-249, 2018.

Luo, L.; Pairote, S.; Chatpatanasiri, R. Garch-type forecasting models for volatility of stock market and MCS test. **Communications in Statistics – Simulation and Computation**, 46(7): 5303-5312, 2016.

Jarque, C. M.; Bera, A. K. A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. **International Statistical Review**, 55(2):163-172, 1986.

Marca, C. E.; Antunes, A. G. Mercado de ações e a análise técnica como principal ferramenta dos investidores. **Unoesc & Ciência**, 8(2):59-66, 2016.

Markowitz, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, 5:77-91, 1952.

Mhmoud, A. S.; Dawalbait, F. M. Estimating and forecasting stock market volatility using GARCH Models: Empirical Evidence from Saudi Arabia. **International Journal of Engineering Research & Technology**. 4(2):464-471

Mincer, J.; Zarnowitz, V. The Evaluation of Economic Forecasts. **Economic Forecasts and Expectations**, Nova Iorque: National Bureau of Economic Research, 1969.

Morettin, P. A. **Econometria Financeira**: Um curso em séries temporais financeiras. 2. ed. Blucher, São Paulo, 2011.

Morettin, P. A.; Toloi, C. M C. **Análise de Séries Temporais**. 2. ed. Blucher, São Paulo, 2005.

Narayan, P. K.; Liu, R. A new GARCH model with higher moments for stock return predictability. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money**, 56:93-103, 2018.

Narsoo, J. Forecasting USD/MUR Exchange Rate Dynamics: An Application of Assymetric Volatility Models. **International Journal of Statistics and Applications**. 5(5):247-256, 2014.

Nelson, D. B. Conditional Heteroscedasticity in asset returns. **Econometrica**, 59(2):347-370, 1991.

Ng, S.; Perron, P. Lag Length selection and the construction of unit root tests with good size and power. **Econometrica**: Journal of the Econometric Society, 6:1519-1554, 2001.

Oliveira, A. M. B. de; Araújo, A. M. Investigação sobre persistência na variância e quebras estruturais nas series de preços da manga e uva exportadas da Bahia, Brasil. **Exacta-EP**, 16(1): 33-42, 2018.

Oliveira, M.H.F.; Rebelatto, D.A.N. Os fundos de investimentos em ações no mercado financeiro brasileiro: os gestores e administradores são capazes de superar o índice BOVESPA?. **Revista Produção Online**, 11(1):76-95, 2011.

Pfaff, B. **Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R**. 2. ed. Springer, Nova York, 2011.

Philips, P.; Perron, P. Testing for a unit root in time series regression. **Biometrika**, 75(2):335-346, 1988.

Pinheiro, J. L. **Mercado de Capitais: fundamentos e técnicas**. 6. ed. Atlas, São Paulo, 2013.

Poon, S.; Granger, C. W. J. Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. **Journal of Economic Literature**, 41:478-539.

Reis, D. L. P. E.; Mattos dos, R.S.; Perobelli, F.F.C; Correa, W.R. Options pricing for Petrobrás share: A comparison between realized volatility and conditional heteroskedastic estimations. First International Workshop in Financial Econometrics, Natal, Brazil, 2013.

Sartoris, A. **Estatística e Introdução à Econometria**. 2. ed. Editora Saraiva, São Paulo, 2013.

Santos, D. G. dos.; Ziegelmann, F. A. Estimação e previsão de volatilidade em períodos de crise: um estudo comparando modelos GARCH e modelos aditivos semi-paramétricos. **Revista Brasileira de Finanças**, 10(1):49-70, 2012.

Sahamkhadam, M.; Stephan, A.; Ostermark, R. Portfolio optimization based on GARCH-EVT-Copula forecasting models. **International Journal of Forecasting**. 34(3):497-506, 2018.

Schwarz, G. Estimating the dimension of a model. **The Annals of Statistics**, 6(2):461-464, 1978.

Schwert, G. W. Tests for unit roots: a Monte Carlo investigation. **Journal of Bussiness & Economic Statistic**, 07:147-159, 1989.

Schmidt, C. A. J.; Lima, M. A. M. A demanda por energia elétrica no brasil. **Revista Brasileira de Economia**, 58:67-98, 2003.

Soldá, G. Y. **Modelos de memória longa, GARCH e GARCH com memória longa para séries financeiras**. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2008.

Souza, R.C.; Camargo, M.E. Análise e Previsão de Séries Temporais: Os Modelos ARIMA. SEDIGRAF, Ijuí, 1995.

Simões, M. D., Klotzle, M. C., Pinto, A. C. F., & Levrini, G. Uma avaliação da volatilidade dos preços da soja no Mercado internacional com dados de alta frequência. **Gestão & Produção**, 19(1): 219-231, 2012.

Tsay, R. S. **Analysis of Financial Time Series: Financial Econometrics**. Wiley, Nova York, 2002.

Taylor, S.J. Conjectured models for trend in financial prices testes as forecasts. **Journal of the Royal Statistical Society: series B**, 42:338-362, 1980.

Taylor, S. J. Financial returns modelled by the product of two stochastic processes: a study of daily sugar prices 1961-79. **Time Series Analysis: theory and practice**, 1:203-226, 1982.

Taylor, S. J. Modeling Financial Time Series. 2 ed. Wiley, Nova York, 2008.

Ye, Y. **Interior algorithms for linear, quadratic, and linearly constrained non linear programming**. 1986. Tese PhD - Department of EES, Stanford University, Stanford, CA.

Yip, H.; Fan, H.; Chaing, Y. Predicting the maintenance cost of construction equipment: Comparison between general regression neural network and Box-Jenkins time series models. **Automation in Construction**, 38:30-38, 2013.

Zakoian, J. M. Threshold heteroskedastic models. **Journal of Economic Dynamic and Control**,

18:931-944, 1993.

APÊNDICE 1 – Rotina utilizada para a aplicação dos modelos ARMA-GARCH no software R

Este apêndice se destina a apresentar uma rotina para a aplicação dos modelos ARMA-GARCH no software R. Os textos precedidos por “#” indicam a explicação do código e não são comandos. Como as rotinas para todas as séries são praticamente idênticas, com mínimas adequações, será apresentada apenas a rotina referente à série ABEV3.

A primeira parte do código se destina a apresentar algumas etapas preliminares, como carregamento dos pacotes e entrada dos dados da série temporal.

####CARREGANDO PACOTES####

```
library(tseries)
library(forecast)
library(aTSA)
library(rugarch)
library(forecast)
library(urca)
packageurl <- https://cran.r-project.org/src/contrib/Archive/FinTS/FinTS\_0.4-4.tar.gz
install.packages(packageurl, repos=NULL, type="source") #Instalação do pacote FinTS
library(FinTS)
library(PerformanceAnalytics)
library(lmtest)
```

####ENTRADA DOS DADOS####

```
setwd("C:\\Users\\paulo\\ ABEV3") #Definição da área de trabalho do R
ABEV3P <- read.table("ABEV3P.txt") #Leitura da série de preços ABEV3P
ABEV3VR <- read.table("ABEV3VR.txt") #Leitura a volatilidade realizada ABEV3VR
ABEV3P <- ts(ABEV3P, start = 1, frequency = 1) #Transformação da variável ABEV3P em série temporal
ABEV3VR <- ts(ABEV3VR, start = 1, frequency = 1) #Transformação da variável ABEV3VR em serie temporal
ABEV3 <- CalculateReturns(ABEV3P) #Calculo dos retornos ABEV3
ABEV3 <- na.omit(ABEV3) #Remoção dos valores N.A (não aplicáveis)
```

Após essa etapa inicial, parte-se para a execução dos itens apresentados na Seção 4.

####ANÁLISE EXPLORATÓRIA####

```
par(mfrow=1:2) #Permite que dois gráficos fiquem na mesma janela, lado a lado
plot(ABEV3P, ylab = "Preços", xlab = "Observações") #Gráfico de linhas da série de preços ABEV3P
```

```

plot(ABEV3, ylab = "Retornos", xlab = "Observações") #Gráfico de linhas da série de retornos ABEV3
par(mfrow=c(1,1)) #Retorna a janela de gráficos para a configuração padrão
hist(ABEV3, xlab = "Retornos", ylab = "Frequências", main = "") #Gráfico do histograma dos retornos ABEV3
mean(ABEV3) #Calculo da média da série de retornos ABEV3
sd(ABEV3) #Calculo do desvio padrão da série de retornos ABEV3
kurtosis(ABEV3) #Calculo do coeficiente de curtose da série de retornos ABEV3
skewness(ABEV3) #Calculo do coeficiente de assimetria da série de retornos ABEV3

####VERIFICAÇÃO DA AUTOCORRELAÇÃO E ESTACIONARIEDADE####
par(mfrow=1:2)
Acf(ABEV3, lag.max = 20, ylab = "Autocorrelação", xlab = "Defasagem", main = "Retornos") #Gráfico da FAC dos
retornos ABEV3 para 20 defasagens
Pacf(ABEV3, lag.max = 20, ylab = "Autocorrelação parcial", xlab = "Defasagem", main = "Retornos") #Gráfico da FACP
dos retornos ABEV3 para 20 defasagens
Box.test(ABEV3, lag = 20, type = c("Ljung-Box")) #Teste de Ljung-Box para os retornos ABEV3, considerando 20
defasagens

```

Para a verificação da estacionariedade por meio do teste ADF deve-se ter maior rigor sobre a escolha do número de defasagens. Partindo-se de um $p_{max} = 24$, o teste é executado com o comando *ur.df*

```

ADF <- ur.df(ABEV3, type = c("trend"),lags = 24, selectlags = "Fixed")
summary(ADF)

```

O subcomando *type* permite considerar diferentes componentes para a equação do teste. No caso acima, *type = c("trend")* resultará no teste com constante e tendência. Se no lugar de “trend” o usuário selecionar “drift”, o teste é realizado considerando apenas a constante. Para não considerar nenhuma das duas componentes, basta selecionar *type = c("none")*. O comando *summary(ADF)* mostra os resultados do teste, os quais estão apresentados a seguir

```

#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

```

Test regression trend

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.109393	-0.008809	-0.000164	0.009211	0.101879

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	1.655e-03	5.546e-04	2.528	0.01153 *
z.lag.1	-1.352e+00	1.226e-01	-11.028	< 2e-16 ***
tt	-3.145e-07	3.942e-07	-0.798	0.42500
z.diff.lag1	3.016e-01	1.202e-01	2.508	0.01220 *
z.diff.lag2	2.133e-01	1.177e-01	1.812	0.07011 .
z.diff.lag3	1.544e-01	1.150e-01	1.343	0.17949
z.diff.lag4	1.430e-01	1.122e-01	1.275	0.20256
z.diff.lag5	1.439e-01	1.093e-01	1.316	0.18833
z.diff.lag6	1.071e-01	1.061e-01	1.010	0.31279
z.diff.lag7	9.841e-02	1.027e-01	0.958	0.33814
z.diff.lag8	5.371e-02	9.930e-02	0.642	0.52119
z.diff.lag9	3.992e-02	9.569e-02	0.417	0.67660
z.diff.lag10	3.075e-02	9.193e-02	0.334	0.73806
z.diff.lag11	2.225e-02	8.815e-02	0.252	0.80078
z.diff.lag12	1.894e-02	8.440e-02	0.224	0.82249
z.diff.lag13	2.026e-02	8.048e-02	0.252	0.80123
z.diff.lag14	-1.555e-02	6.636e-02	-0.204	0.83867
z.diff.lag15	-3.893e-02	6.207e-02	-0.540	0.58912
z.diff.lag16	-3.638e-02	5.758e-02	-0.538	0.59037
z.diff.lag17	-2.963e-02	5.294e-02	-0.471	0.63783
z.diff.lag18	-3.557e-02	4.822e-02	-0.611	0.54123
z.diff.lag19	-3.449e-02	4.316e-02	-0.837	0.40272
z.diff.lag20	1.784e-02	3.790e-02	0.373	0.70954
z.diff.lag21	2.036e-02	3.198e-02	0.485	0.62773
z.diff.lag22	2.354e-02	3.520e-02	0.669	0.50368
z.diff.lag23	3.127e-02	2.768e-02	1.130	0.25870
z.diff.lag24	4.227e-02	1.907e-02	2.742	0.00615 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01654 on 2742 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5315, Adjusted R-squared: 0.5271

F-statistic: 119.7 on 26 and 2742 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -11.0279 40.5385 60.8071

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau3	-3.96	-3.41	-3.12
phi2	5.09	3.68	3.03
phi3	8.27	5.25	4.34

Os símbolos “***”, “**” e “*” ao lado dos coeficientes indicam que eles são significativos, respectivamente, aos níveis de significância de 0,1%, 1% e 5%. Portanto, o último coeficiente da regressão do teste é significativo e, por isso, define-se que o teste será executado para 24 defasagens. Em caso contrário, o teste seria executado novamente para $p_{max} - 1$ até que o último coeficiente da regressão fosse significativo. A tendência (representada por tt), no entanto, não é significativa e, por isso, é retirada. Sendo assim, executa-se o teste ADF novamente considerando apenas constante, por

meio dos comandos

```
ADF <- ur.df(ABEV3, type = c("drift"),lags = 24, selectlags = "Fixed")
summary(ADF)
```

Nesse caso, o comando *summary(ADF)* resulta nos dados de saída apresentados a seguir.

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

Test regression drift

Call:

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.109100	-0.008694	-0.000380	0.009103	0.102224

Coefficients:

	Estimate	Std.Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.0012052	0.0003331	3.618	0.000302 ***
z.lag.1	-1.3448457	0.1222619	-11.000	< 2e-16 ***
z.diff.lag1	0.2946383	0.1199244	2.457	0.014077 *
z.diff.lag2	0.2065652	0.1174025	1.759	0.078611 .
z.diff.lag3	0.1479773	0.1147241	1.290	0.197210
z.diff.lag4	0.1368402	0.1119382	1.222	0.221638
z.diff.lag5	0.1379341	0.1090638	1.265	0.206083
z.diff.lag6	0.1014404	0.1058207	0.959	0.337841
z.diff.lag7	0.0930758	0.1024982	0.908	0.363920
z.diff.lag8	0.0586606	0.0990880	0.592	0.553896
z.diff.lag9	0.0351705	0.0955031	0.368	0.712704
z.diff.lag10	0.0263068	0.0917591	0.287	0.774368
z.diff.lag11	0.0181038	0.0879883	0.206	0.837000
z.diff.lag12	0.0151005	0.0842576	0.179	0.857779
z.diff.lag13	0.0167243	0.0803483	0.208	0.835129
z.diff.lag14	-0.0187876	0.0762467	-0.246	0.805387
z.diff.lag15	-0.0418568	0.0719700	-0.582	0.560893
z.diff.lag16	-0.0389972	0.0674940	-0.578	0.563454
z.diff.lag17	-0.0319407	0.0628713	-0.508	0.611471
z.diff.lag18	-0.0375754	0.0581613	-0.646	0.518297
z.diff.lag19	-0.0461876	0.0531162	-0.870	0.384618
z.diff.lag20	0.0164565	0.0478633	0.344	0.731005
z.diff.lag21	0.0192629	0.0419547	0.459	0.646173
z.diff.lag22	0.0227510	0.0351823	0.647	0.517905
z.diff.lag23	0.0307551	0.0276677	1.112	0.266412
z.diff.lag24	0.0520212	0.0190619	2.729	0.006392 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01653 on 2743 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5314, Adjusted R-squared: 0.5271

F-statistic: 123.4 on 25 and 2743 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -10.9997 60.4975

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.43	-2.86	-2.57
phi1	5.43	3.59	3.78

Nota-se, pelos resultados, que a constante é significativa e por isso é mantida no modelo. Portanto, o teste ADF é executado com constante e sem tendência, para 24 defasagens.

Já para a realização do teste KPSS, é utilizado ao comando *kpss.test* que automaticamente fornece o resultado do teste para o número de defasagens $p = \text{int } 4(T/100)^{1/4}$, considerando três versões: sem constante, com constante, com constante e tendência.

```
KPSS <- kpss.test(ABEV3)
summary(KPSS)
```

Dando continuidade ao código, o próximo passo é a aplicação dos modelos ARMA.

####APLICAÇÃO DOS MODELOS ARMA####

```
arma <- Arima(ABEV3, order = c(1,0,1), include.constant = TRUE) #Aplicação do modelo ARMA(1,1) na série de
retornos ABEV3
summary(arma) #Apresenta resultados do modelo ARMA(1,1)
```

Nesse caso, o subcomando *include.constant = TRUE*, inclui no modelo uma constante. Os dados de saída da linha de comando *summary(arma)* são apresentados a seguir.

```
Series: ABEV3
ARIMA(1,0,1) with non-zero mean
```

Coefficients:

	ar1	ma1	mean
	0.7382	-0.8086	9e-04
s.e.	0.0707	0.0618	2e-04

```
sigma^2 estimated as 0.0002737: log likelihood=7496.19
AIC=-14985.38 AICc=-14985.36 BIC=-14962.64
```

Training set error measures:

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
Training set	-3.998626e-06	0.01653524	0.0119531	NaN	Inf	0.6815938
ACF1						
Training set	0.01826375					

Repare que foi incluída no modelo uma constante igual a média (*mean*), configuração que também poderia ser obtida caso fosse utilizado o subcomando *include.mean = TRUE*. A partir dessa saída é possível computar os critérios de informação AICc e BIC. Repare, no entanto, que o comando *Arima* não fornece a significância dos coeficientes, o que é relevante para decidir se a constante deve ser incluída no modelo. Isso pode ser feito pelo comando *coeftest*.

```
coeftest(arma)
```

Esse comando gera a seguinte saída de dados:

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ar1	0.73817565	0.07068986	10.4425	< 2.2e-16 ***
ma1	-0.80864870	0.06175695	-13.0941	< 2.2e-16 ***
intercept	0.00090811	0.00022952	3.9566	6.603e-05 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

É possível observar que todos os coeficientes são significativos, inclusive a constante (*intercept*) e, portanto, ela é mantida no modelo.

```
arma <- Arima(ABEV3, order = c(1,0,1), include.constant = FALSE)
```

Como a função *Arima* calcula apenas os critérios AICc e BIC, o valor da função de verossimilhança do modelo *arma* deve ser extraído por meio da função *logLik(arma)*, e, então, critério HQIC é calculado pelo comando:

```
HQIC <- -2*logLik(arma)+(2*10*log(log(2795))) #Calculo do critério de informação de Hannan-Quinn
```

Continuando, parte-se para o diagnóstico dos resíduos do modelo ARMA.

```
residuos <- resid(arma) #Extrai residuos do modelo ARMA(1,1)
Box.test(residuos, lag = 20, type = c("Ljung-Box"), fitdf = 2) #Teste de Ljung-Box aos resíduos do modelo ARMA para 20 defasagens.
```

Repare que neste caso é incluído no comando *Box.test* o subcomando *fitdf = 2*, o qual

representa o número de graus de liberdade a serem descontados no teste Ljung-Box. Esse subcomando será, portanto, sempre definido como $fitdf = p+q$, sendo p e q as ordens de um modelo ARMA ou GARCH.

```
par(mfrow=1:2)
Acf(resid(arma), lag.max = 20, xlab = "Defasagem", ylab = "Autocorrelação", main = "") #Gráfico da FAC para os
resíduos do modelo ARMA, considerando 20 defasagens
Pacf(resid(arma), lag.max = 20, xlab = "Defasagem", ylab = "Autocorrelação parcial", main = "") #Gráfico da FACP para
os resíduos do modelo ARMA, considerando 20 defasagens
```

####VERIFICAÇÃO DA HETEROSCEDASTICIDADE CONDCIONAL####

```
ArchTest(residuos, lags = 12) #Teste ARCH-LM para 12 defasagens
Box.test(residuos^2, lag = 12, type = c("Ljung-Box"), fitdf = 2) #Teste Ljung-Box aos resíduos ao quadrado do modelo
ARMA
Acf((resid(arma)^2), lag.max = 20, xlab = "Defasagem", ylab = "Autocorrelação", main = "") #FAC dos resíduos ao
quadrado do modelo ARMA
Pacf((resid(arma)^2), lag.max = 20, xlab = "Defasagem", ylab = "Autocorrelação parcial", main = "") #FACP dos
resíduos ao quadrado do modelo ARMA
```

####APLICAÇÃO DOS MODELOS GARCH####

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder
= c(1,1)), distribution.model = "norm") #Modelo GARCH com resíduos especificados com a distribuição normal
```

Para a especificação do modelo GARCH, é utilizado o comando *ugarchspec*. O subcomando *variance.model* determina o tipo e as ordens de defasagem do modelo GARCH, enquanto que o comando *mean.model* inclui o modelo ARMA selecionado anteriormente. Ainda, pode-se selecionar a distribuição de probabilidade a ser considerada para os resíduos, por meio do subcomando *distribution.model*, sendo “*norm*” para a distribuição normal e “*std*” para a distribuição *t* de Student. A seguir são apresentados os comandos para os modelos GARCH, IGARCH, EGARCH, TGARCH, PGARCH e GJR-GARCH, considerando os resíduos desses modelos especificados com distribuição normal e *t* de Student.

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder
= c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "std") #Modelo GARCH com resíduos especificados com a
distribuição t de Student
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "iGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "norm") #Modelo IGARCH com resíduos especificados com a distribuição normal
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "iGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "std") #Modelo IGARCH com resíduos especificados com a distribuição t de Student
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "norm") #Modelo EGARCH com resíduos especificados com a distribuição normal
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "std") #Modelo EGARCH com resíduos especificados com a distribuição t de Student
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "gjrGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "norm") #Modelo GJR-GARCH com resíduos especificados com a distribuição normal
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "gjrGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "std") #Modelo GJR-GARCH com resíduos especificados com a distribuição t de Student
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "fgARCH", submodel = "TGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "norm") #Modelo TGARCH com resíduos especificados com a distribuição normal
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "fgARCH", submodel = "TGARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "std") #Modelo TGARCH com resíduos especificado com distribuição t de Student
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "fgARCH", submodel = "APARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "norm") #Modelo PGARCH com resíduos especificados com a distribuição normal
```

```
garchesp <- ugarchspec(variance.model = list(model = "fgARCH", submodel = "APARCH", garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), distribution.model = "std") #Modelo PGARCH com resíduos especificados com a distribuição t de Student
```

Com o modelo especificado, ainda é necessário ajustá-lo a série temporal pelo comando *ugarchfit*.

```
garchajuste <- ugarchfit(garchesp, VALE3, solver = "hybrid") #Ajuste do modelo
show(garchajuste) #Apresenta resultado do ajuste
```

O subcomando *solver="hybrid"* é recomendado para que não ocorra erros de convergência no método utilizado para estimação dos modelos. A função *show(garchajuste)* mostra os resultados da estimação. Por exemplo, para um modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) seguindo a distribuição normal, tem-se os dados de saída, apresentados a seguir, em que podem ser observados os critérios de informação calculados para o modelo selecionado.

```
*-----*
*      GARCH Model Fit      *
*-----*
```

Conditional Variance Dynamics

```
-----
GARCH Model      : sGARCH(1,1)
Mean Model       : ARFIMA(1,0,1)
Distribution      : norm
```

Optimal Parameters

```
-----
      Estimate   Std.Error t value Pr(>|t|)
ar1   0.744384   0.115069  5.4690 0.00000
ma1  -0.783004   0.106832 -6.3293 0.00000
omega 0.000004   0.000003  1.6098 0.10744
alpha1 0.058684  0.009109  5.4425 0.00000
beta1  0.925069  0.013507 68.4883 0.00000
```

Robust Standard Errors:

```
      Estimate   Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1   0.744384   0.096702  6.69773 0.000000
ma1  -0.783004   0.091956 -8.51501 0.000000
omega 0.000004   0.000012  0.35698 0.721105
alpha1 0.058684  0.019847  2.95686 0.003108
beta1  0.925069  0.047619 19.42658 0.000000
```

LogLikelihood : 7753.2

Information Criteria

```
-----
Akaike      -4.5470
Bayes       -4.5364
Shibata     -4.5470
Hannan-Quinn -4.5432
```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

```

-----
              statistic p-value
Lag[1]          0.02065 0.8857
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5] 0.83475 1.0000
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9] 1.62679 0.9952
d.o.f=2
H0 : No serial correlation

```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

```

-----
              statistic p-value
Lag[1]          0.2277 0.6332
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5] 1.5129 0.7367
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9] 3.7101 0.6383
d.o.f=2

```

Weighted ARCH LM Tests

```

-----
Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[3] 0.2418 0.500 2.000 0.6229
ARCH Lag[5] 1.6872 1.440 1.667 0.5445
ARCH Lag[7] 2.9757 2.315 1.543 0.5182

```

Nyblom stability test

```

-----
Joint Statistic: 3.6684
Individual Statistics:
ar1 0.1576
ma1 0.1564
omega 0.1039
alpha1 0.9160
beta1 0.7036

```

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)

```

Joint Statistic: 1.28 1.47 1.88
Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75

```

Sign Bias Test

```

-----
t-value prob sig
Sign Bias 1.3486 0.17757
Negative Sign Bias 0.5556 0.57854
Positive Sign Bias 0.1325 0.89458
Joint Effect 5.3794 0.09454 *

```

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:

```

-----
group statistic p-value(g-1)
1 20 75.18 8.394e-09
2 30 91.88 1.862e-08
3 40 109.16 1.452e-08
4 50 124.22 1.342e-08

```

Elapsed time : 0.3587668

####DIAGNÓSTICO DOS RESÍDUOS DOS MODELOS GARCH####

```
garStandResid <- residuals(garchajuste, standardize=TRUE) #Cálculo dos resíduos padronizados
Box.test(garStandResid, lag = 20, type = c("Ljung-Box"), fitdf = 2) #Ljung-Box aplicado aos resíduos padronizados do
modelo GARCH, considerando 20 defasagens
ArchTest(garStandResid, lag = 12) #ARCH-LM aplicado aos resíduos padronizados do modelo GARCH
Box.test(garStandResid^2, lag = 20, type = c("Ljung-Box"), fitdf = 2) #Ljung-Box aplicado aos resíduos padronizados
ao quadrado do modelo GARCH
jarque.bera.test(garStandResid) #Jarque-Bera aplicado aos resíduos padronizados do modelo GARCH
par(mfrow=1:2)
```

Para gerar os gráficos quantil-quantil dos resíduos padronizados, recorre-se a função *chart.QQPlot*, em que deve-se especificar a distribuição de probabilidade, sendo usado o subcomando *distribution = "norm"* para distribuição normal e *distribution = "t"* para a distribuição *t* de *Student*. No segundo caso, deve ser especificado o número dos graus de liberdade da distribuição, por meio do subcomando *"df"*. Para a criação do envelope simulado de 95% é utilizado o subcomando *"envelope=0.95"*.

```
chart.QQPlot(garStandResid, distribution = "norm", envelope = 0.95, ylab = "Quantis empíricos", xlab = "Quantis
normais", main = "") #Gráfico quantil-quantil (Q-Q) da distribuição normal com envelope simulado de 95%
chart.QQPlot(garStandResid, distribution = "t", df = 7, envelope = 0.95, main = "", xlab = "Quantis Student", ylab =
"Quantis empíricos") #Gráfico quantil-quantil (Q-Q) da distribuição t de Student com 7 graus de liberdade e envelope
simulado de 95%
```

Com os modelos definidos e o diagnóstico dos resíduos realizados, parte-se para a etapa da previsão. A previsão dinâmica pode ser executada pelo comando *ugarchforecast*, em que *n.ahead* representa os passos à frente da previsão.

####PREVISÃO####

```
previsão <- ugarchforecast(garchajuste, n.ahead = 21) #Previsão dinâmica
```

No caso da previsão estática deve-se, primeiramente, fixar os coeficientes do modelo para que eles não se alterem a cada estimação um passo à frente. Isso é feito pelos comandos:

```
spec <- getspec(garchajuste) #Extrai os coeficientes do modelo GARCH
setfixed(spec) <- as.list(coef(garchajuste)) #Fixa os coeficientes do modelo GARCH
```

Por fim executa-se o comando *ugarchforecast* novamente, em que *n.ahead* = 1 para a previsão um passo à frente. O subcomando *n.roll* é o número de vezes que a previsão será executada novamente. No componente *data* são especificados os dados que deseja-se prever e *out.sample* representa o intervalo de validação da previsão.

```
previsao <- ugarchforecast(spec, n.ahead = 1, n.roll = 20, data = ABEV3, out.sample = 21) #Previsão estática
```

Dando continuidade, são gerados os gráficos e os erros de previsão. O comando *sigma(previsao)* permite extrair os resultados de desvio padrão previstos pelo modelo.

```
par(mfrow=c(1,1))
plot(ABEV3VR) #Gráfico de linhas da volatilidade realizada
lines(sigma(previsao), col = "red") #Adiciona gráfico de linhas dos resultados da previsão do modelo
erro <- ABEV3VR-previsao #Cálculo dos erros de previsao
erro.quad <- erro^2 #Cálculo dos erros ao quadrado
erro.perc <- abs(erro)/ABEV3VR #Cálculo dos erros percentuais
MAE <- mean(unlist(erro.abs)) #Cálculo do MAE
RMSE <- sqrt(mean(unlist(erro.quad))) #Cálculo do RMSE
MAPE <- (sum(unlist(erro.perc))/21)*100 #Cálculo do MAPE
```

```
####CURVAS DE IMPACTO DE INFORMAÇÕES####
```

```
par(mfrow=c(1,1))
nigarch <- newsimpact(garchajuste) #Curva de Impacto de Informação
plot(nigarch$zx, nigarch$zy, ylab=expression("h"[" t"]), xlab=nigarch$xexpr, type="l", main = "") #Gráfico da curva de
impacto de informação
lines(nigarch$zx, nigarch$zy, col = "red")
lines(nigarch$zx, nigarch$zy, col = "orange")
lines(nigarch$zx, nigarch$zy, col = "blue")
lines(nigarch$zx, nigarch$zy, col = "green")
```