

INE5602 – Introdução à Informática

Modelos abstratos e computabilidade
Aula 3: Máquinas de Turing

Prof. Laércio Lima Pilla
laercio.pilla@ufsc.br



Sumário

- Revisão
- Máquina de Turing
- Formalização
- Exemplos
- Considerações finais

REVISÃO

Revisão

- **Programa**
 - Conjunto estruturado de instruções
- **Máquina**
 - Dá significado aos identificadores das operações e testes

Revisão

- **Máquina de estados finitos**

- 6-upla $(\Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, \omega)$

- Σ : alfabeto de entrada
 - Γ : alfabeto de saída
 - S : conjunto de estados
 - s_0 : estado inicial ($s_0 \in S$)
 - δ : função de transição de estados $\delta: S \times \Sigma \rightarrow S$
 - ω : função de saída
 - Funções podem ser parciais
 - Pode não possuir alguns itens

Revisão

- **Máquina de Turing**
 - **Turing**, Alan
 - Modelo elementar que imita o comportamento de um computador
 - Fita com alfabeto finito
 - Leitura, escrita, e movimentos laterais
 - Número de estados finitos



Revisão

- **Hipótese de Church**

- “A capacidade de computação representada pela Máquina de Turing é o limite máximo que pode ser atingido por qualquer dispositivo de computação”
- Qualquer função computável pode ser processada por uma Máquina de Turing
- Ou seja, existe um algoritmo expresso na forma de Máquina de Turing capaz de processar a função

MÁQUINA DE TURING

Máquina de Turing

- **Máquina de Turing**

- Proposta em 1936 por Alan Turing
- Como uma **máquina de estados com memória**
 - Fita tão grande quanto necessário
 - Movimentos na fita para direita e esquerda
- Estado final
- Máquina universal

Máquina de Turing

- **Noção intuitiva**

- Ler um símbolo de um quadrado
- Alterar um símbolo em um quadrado
- Mover os olhos para outro quadrado

Máquina de Turing

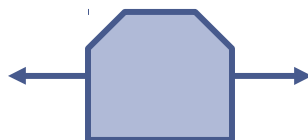
- **Noção como máquina**
 - **Fita:** usada como dispositivo de entrada, saída e de memória
 - **Unidade de controle:** reflete o estado corrente da máquina; possui uma unidade de leitura e gravação (cabeça da fita); acessa uma célula da fita de cada vez, movimentando-a para esquerda ou para a direita
 - **Programa** ou **função de transição:** função que define o estado da máquina e comanda as leituras, as gravações e o sentido de movimento da cabeça

Máquina de Turing

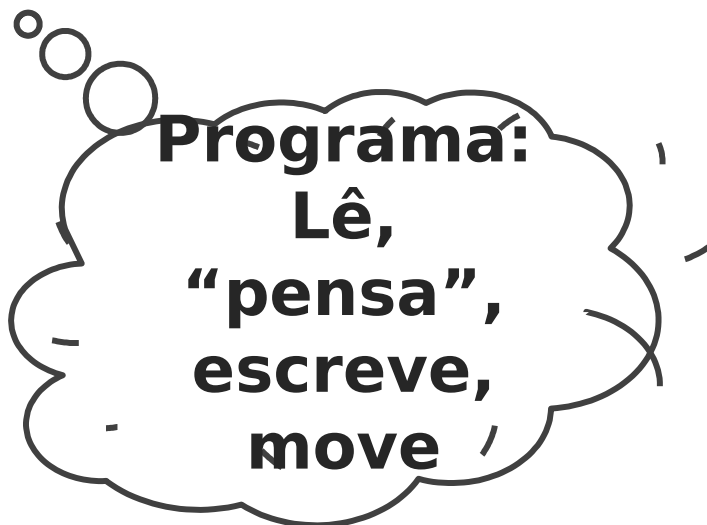
- **Máquina de Turing**

Fita

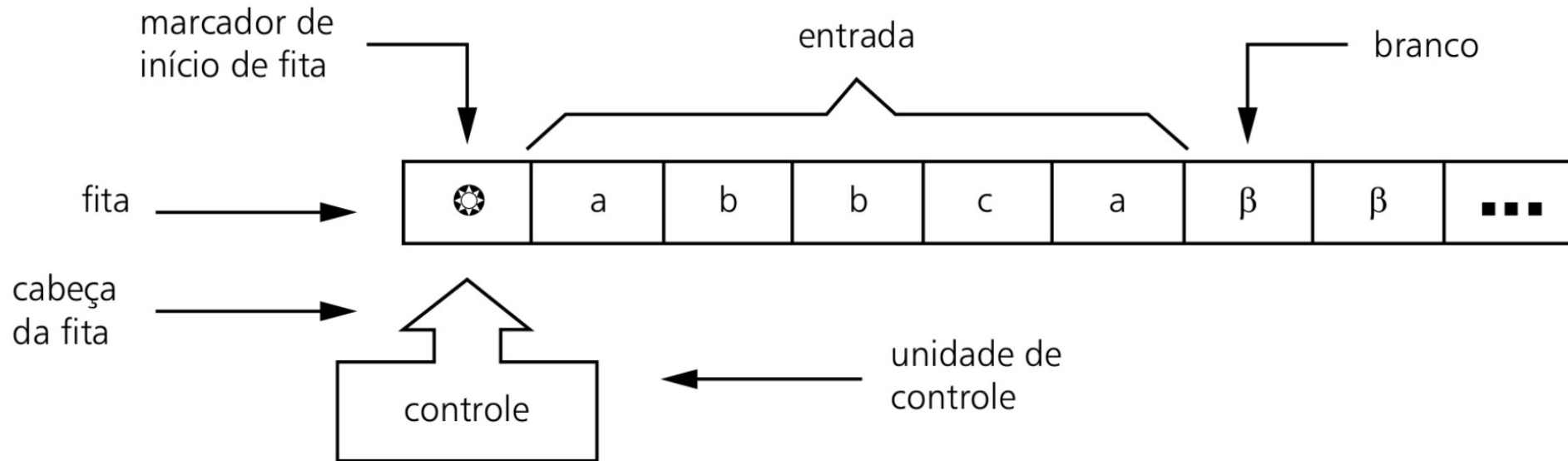
*	A	a	b	b	ß	ß	...
---	---	---	---	---	---	---	-----



Cabeça de leitura móvel



Máquina de Turing



Máquina de Turing

- Máquina de Turing como **reconhecedor de linguagens**
 - Três comportamentos para um programa
 - **Aceitar**
 - Máquina alcança o estado final e para
 - **Rejeitar**
 - Máquina alcança combinação de estado e entrada indefinida e para
 - **Loop**
 - Máquina fica processando indefinidamente

FORMALIZAÇÃO

Máquina de Turing

- Descrição formal
 - 8-upla $(\Sigma, Q, \Pi, q_0, F, V, \beta, *)$
 - Σ : alfabeto de entrada
 - Q : conjunto de estados finito
 - Π : programa ou função de transição
 - q_0 : estado inicial ($q_0 \in Q$)
 - F : conjunto de estados finais ($F \subseteq Q$)
 - V : alfabeto auxiliar
 - β : símbolo especial *branco*
 - $*$: símbolo especial de *marcador de início da fita*

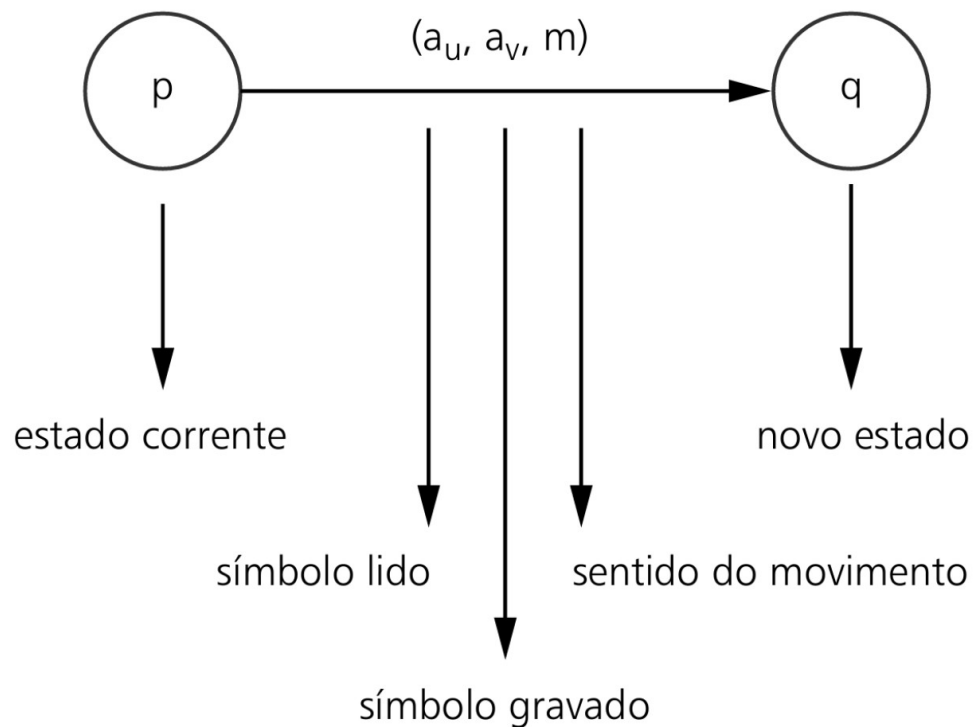
Máquina de Turing

- Descrição formal
 - 8-upla $(\Sigma, Q, \Pi, q_0, F, V, \beta, *)$
 - $\Pi: Q \times (\Sigma \cup V \cup \{\beta, *\}) \rightarrow Q \times (\Sigma \cup V \cup \{\beta, *\}) \times \{E, D\}$
 - Programa: estado e símbolo \rightarrow estado, símbolo e movimento
 - **E: movimento na fita para a esquerda**
 - **D: movimento na fita para a direita**

Máquina de Turing

- Representação em tabela
 - Estado atual x símbolo lido
 - Células: próximo estado, símbolo escrito, movimento
- Representação gráfica
 - Transição entre estados: símbolo lido, símbolo escrito, movimento


Representações – grafo



Representação da função programa como um grafo

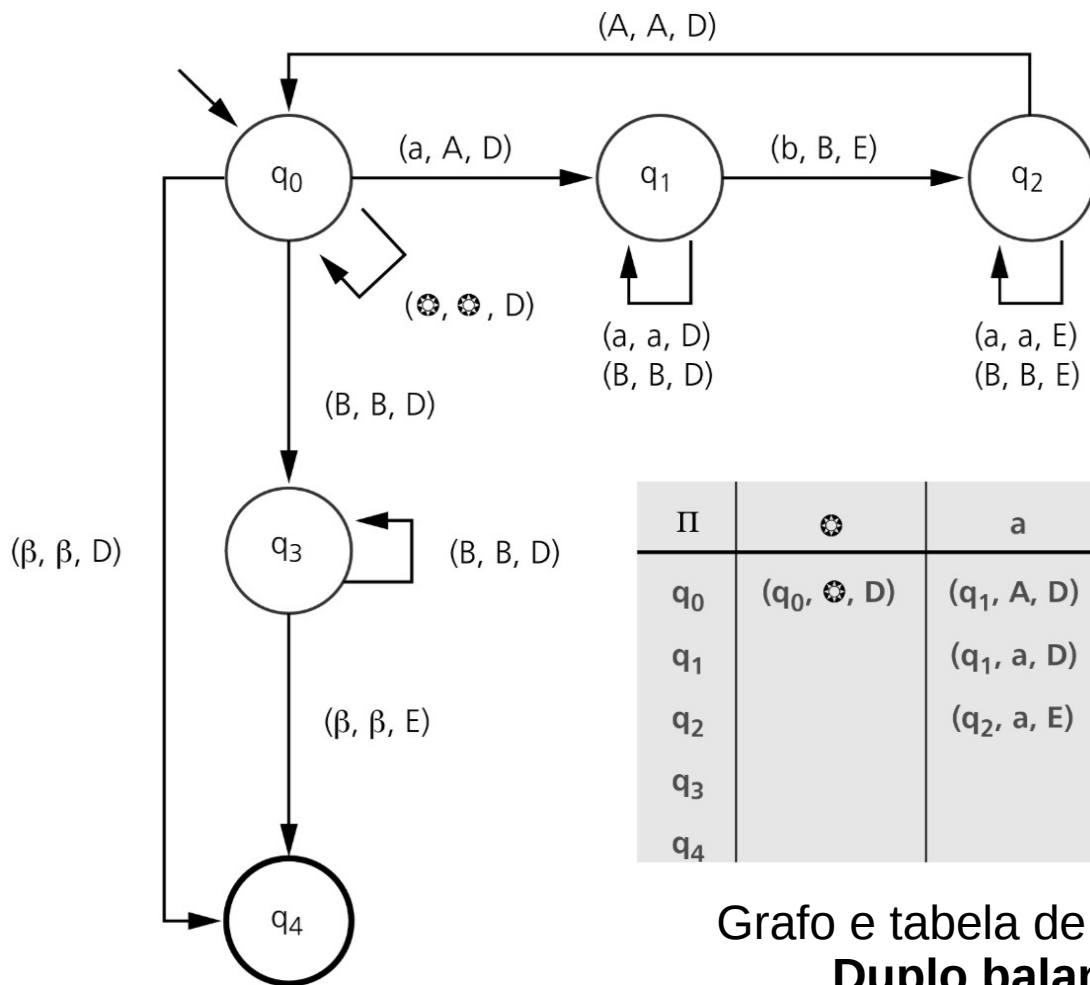


Representação – tabela

Π		...	a_u	...	a_v	...	β
p			(q, a_v , m)				
q							
...							

Representação da função programa como uma tabela
(ilustrada para o caso $\Pi(p, a_u) = (q, a_v, m)$)

Representações – exemplo



Π	\odot	a	b	A	B	β
q_0	(q_0, \odot, D)	(q_1, A, D)			(q_3, B, D)	(q_4, β, D)
q_1		(q_1, a, D)	(q_2, B, E)		(q_1, B, D)	
q_2		(q_2, a, E)		(q_0, A, D)	(q_2, B, E)	
q_3					(q_3, B, D)	(q_4, β, E)
q_4						

Grafo e tabela de transições da máquina de Turing

Duplo balanceamento: $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

$M = (\{a,b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Pi, q_0, \{q_4\}, \{A,B\}, \beta, *)$

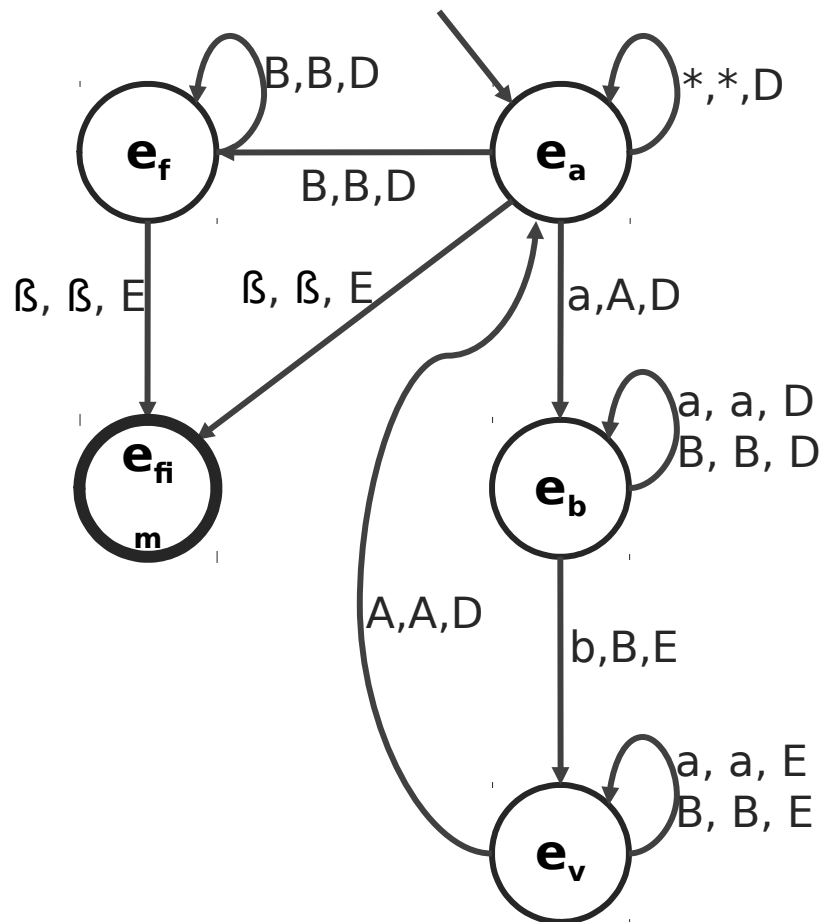
EXEMPLOS

Exemplos

- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$

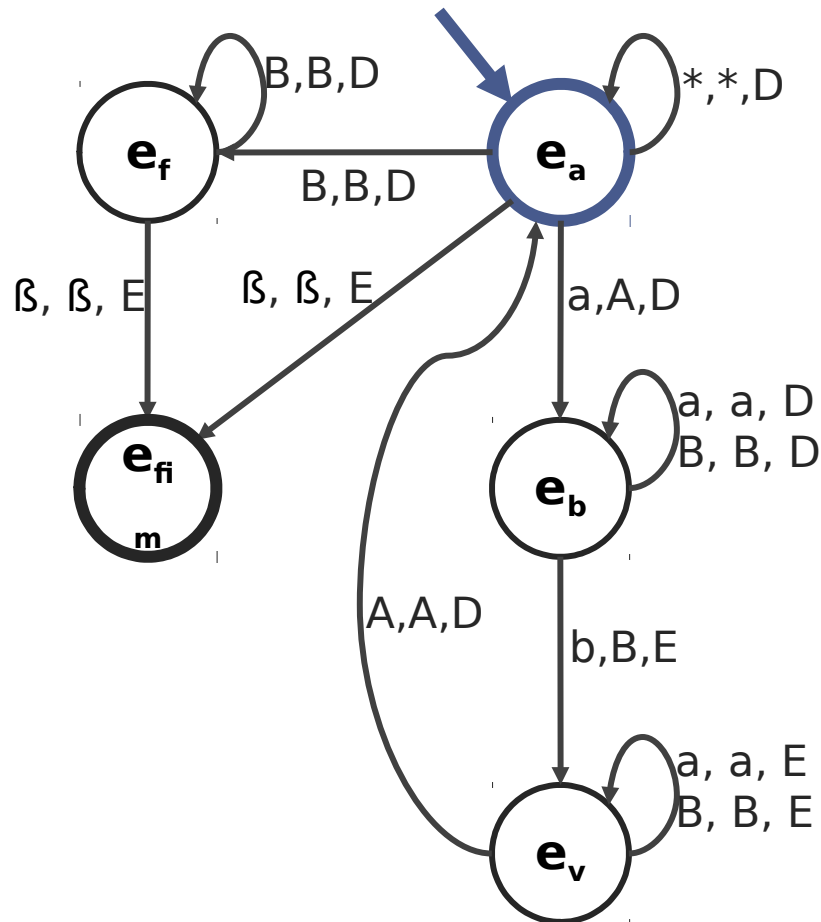
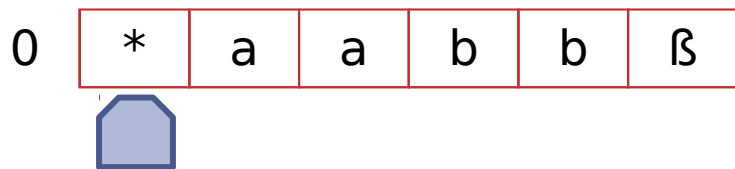
- $(\Sigma, Q, \Pi, q_0, F, V, \beta, *)$

- $\Sigma: \{a, b\}$
- $Q: \{e_a, e_b, e_v, e_f, e_{fim}\}$
- $\Pi: \dots$
- $q_0: e_a$
- $F: \{e_{fim}\}$
- $V: \{A, B\}$



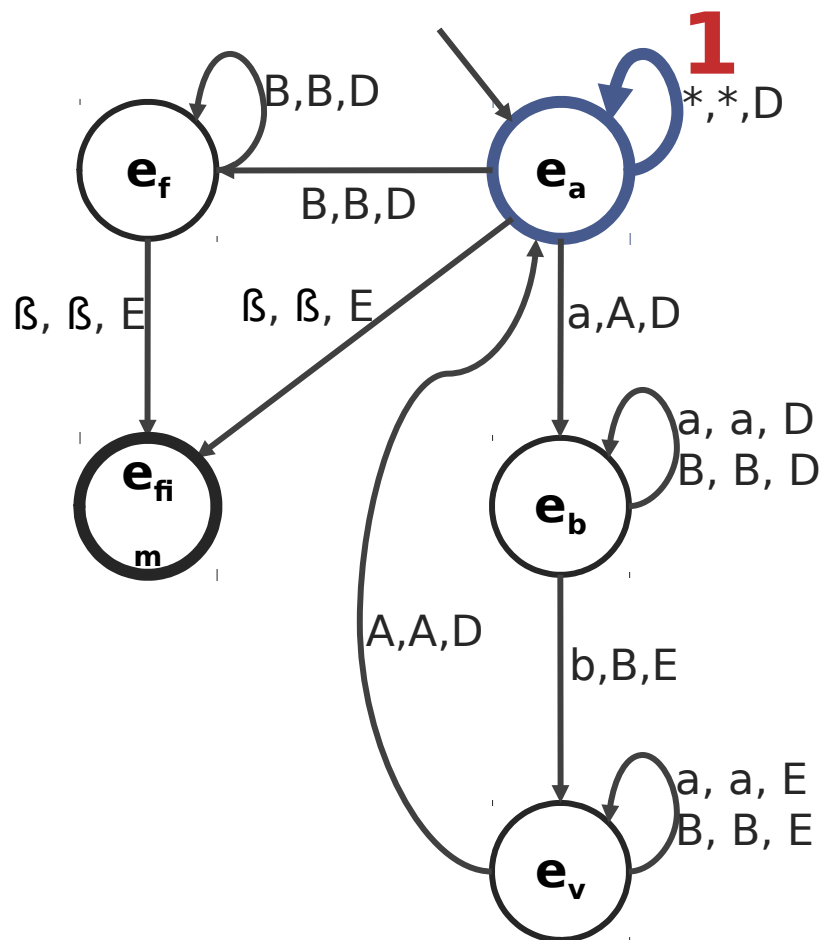
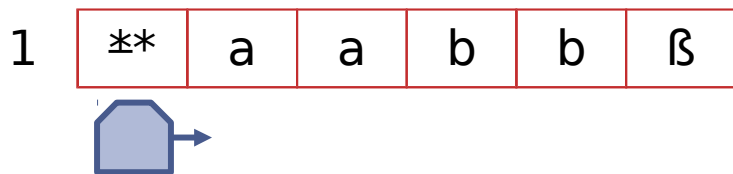
Exemplos

- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$



Exemplos

- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$



Exemplos

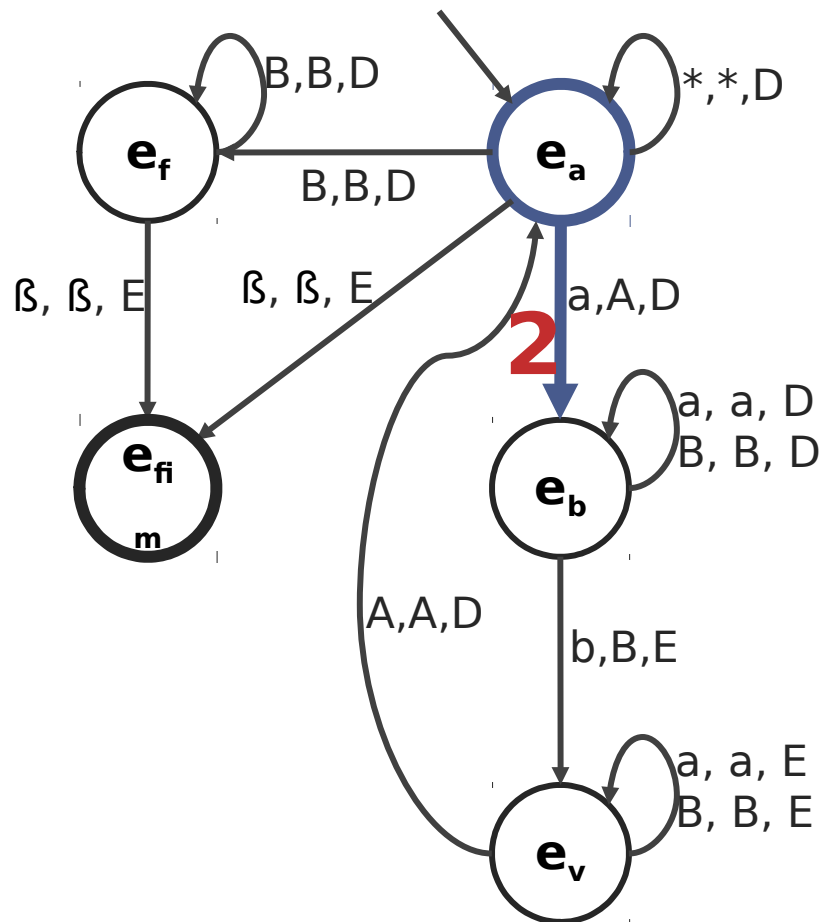
- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$

1

**	a	a	b	b	β
----	---	---	---	---	---

2

*	aA	a	b	b	β
---	----	---	---	---	---



Exemplos

- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$

1

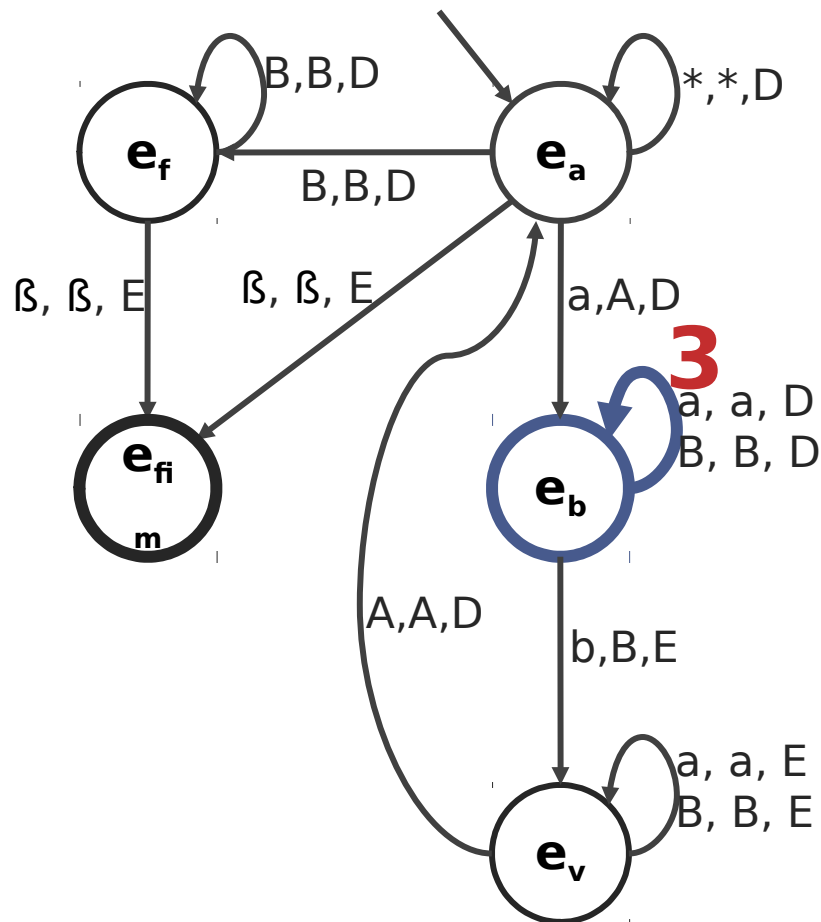
**	a	a	b	b	β
----	---	---	---	---	---

2

*	aA	a	b	b	β
---	----	---	---	---	---

3

*	A	aa	b	b	β
---	---	----	---	---	---



Exemplos

- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$

1

**	a	a	b	b	β
----	---	---	---	---	---

2

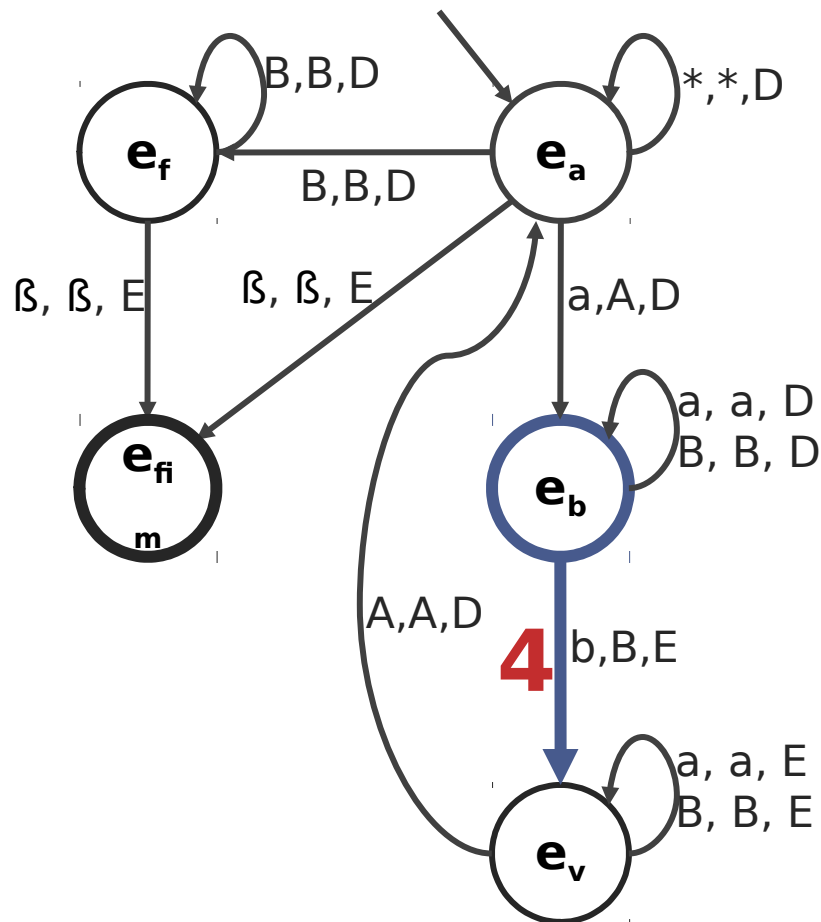
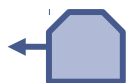
*	aA	a	b	b	β
---	----	---	---	---	---

3

*	A	aa	b	b	β
---	---	----	---	---	---

4

*	A	a	bB	b	β
---	---	---	----	---	---



Exemplos

- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$

1

**	a	a	b	b	β
----	---	---	---	---	---

2

*	aA	a	b	b	β
---	----	---	---	---	---

3

*	A	aa	b	b	β
---	---	----	---	---	---

4

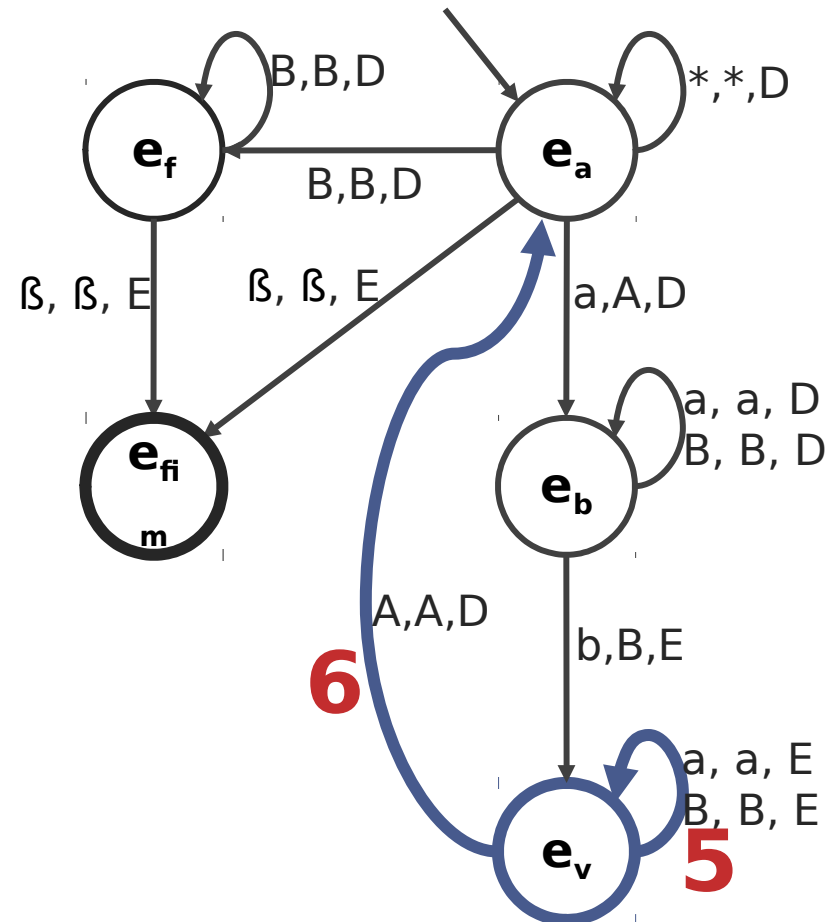
*	A	a	bB	b	β
---	---	---	----	---	---

5

*	A	aa	B	b	β
---	---	----	---	---	---

6

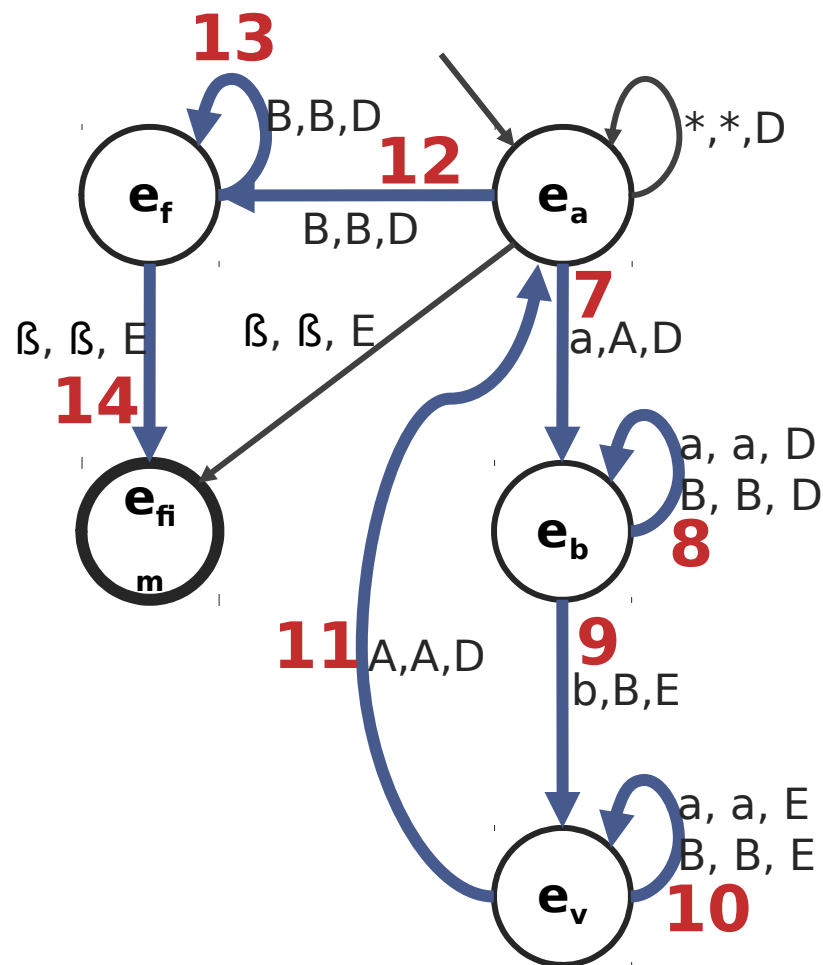
*	AA	a	B	b	β
---	----	---	---	---	---



Exemplos

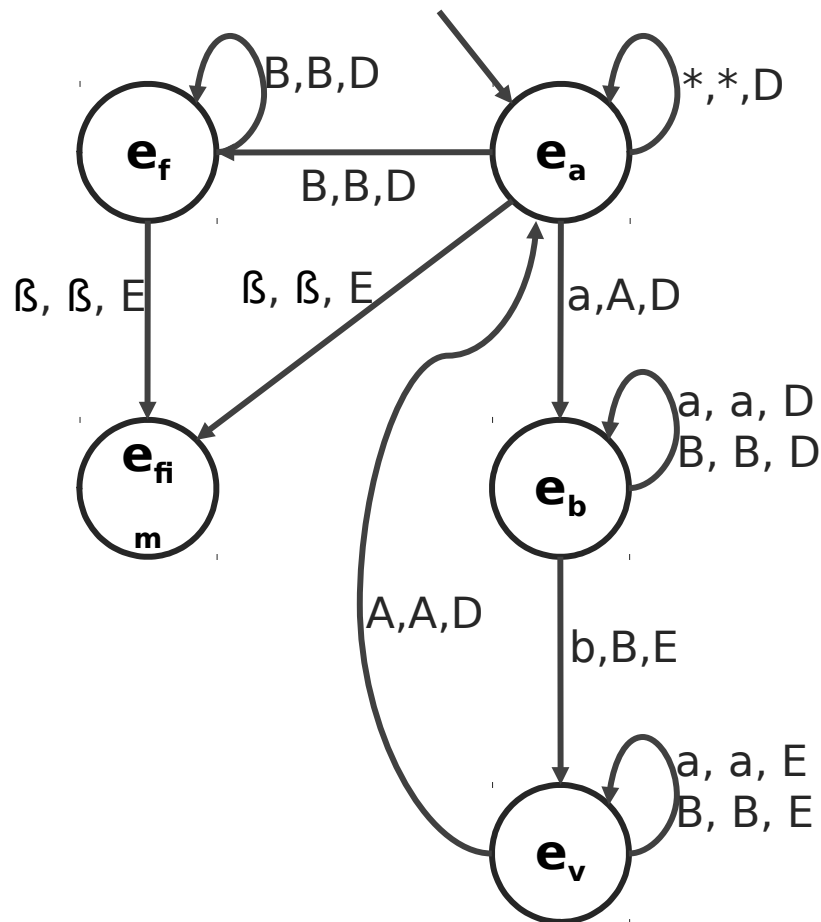
- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$

7	*	A	aA	B	b	β
8	*	A	A	BB	b	β
9	*	A	A	B	bB	β
10	*	A	A	BB	B	β
11	*	A	AA	B	B	β
12	*	A	A	BB	B	β
13	*	A	A	B	BB	β
14	*	A	A	B	B	ββ



Exemplos

- Reconhecedor da sequência $a^n b^n$
 - Outras entradas
 - $*abb\beta\beta$
 - $*bbaa\beta\beta$
 - $*aaabb\beta\beta$



Exemplos

- a^n
- $(ab)^n$
- Reconhece pares de $()$
- Troca a por b e vice versa

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerações finais

- Máquina de Turing
 - Fita, estados e troca de símbolos
 - **Representa tudo que pode ser computado**

INE5602 – Introdução à Informática

Modelos abstratos e computabilidade
Aula 3: Máquinas de Turing

Prof. Laércio Lima Pilla
laercio.pilla@ufsc.br

