Introdução à Informática

Diferencial de uma função

O diferencial *dy* de uma função *y=f(x)* é igual ao produto da derivada *f'(x)* da função pelo diferencial *dx* da variável independente.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Introdução à Informática

Integral

Funções primitivas: inversa de uma derivada.

Considere uma função *f(x)=2x*. Podemos afirmar que esta função é a derivada de uma função de $F(x)=x^2$, uma vez que:

$$F'(x) = 2x$$

Integral

Funções primitivas: inversa de uma derivada.

Considere uma função $f(x)=2x$. Podemos afirmar que esta função é a derivada de uma função de $F(x)=x^2$, uma vez que:

$$F'(x) = 2x$$

Mas, as funções x^2+1, x^2+5, x^2-10 e outras que tenham x^2 somado a um valor numérico (positivo ou negativo) também é $2x$.

Integral

Funções primitivas: inversa de uma derivada.

Considere uma função $f(x)=2x$. Podemos afirmar que esta função é a derivada de uma função de $F(x)=x^2$, uma vez que:

$$F'(x) = 2x$$

Mas, as funções x^2+1, x^2+5, x^2-10 e outras que tenham x^2 somado a um valor numérico (positivo ou negativo) também é $2x$.

$$prim\, f(x) = F(x)+C$$

e C é chamada de constante de integração.

Introdução à Informática

Integral

Funções integrais são primitivas calculadas a partir do diferencial de uma função, ou seja, a função *F(x)+C* é a integral do diferencial de *f(x)*:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Introdução à Informática

Integral

Funções integrais são primitivas calculadas a partir do diferencial de uma função, ou seja, a função *F(x)+C* é a integral do diferencial de *f(x)*:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

O sinal $\int$ representa um *s* mais alongado e vem da palavra soma.

Introdução à Informática

Integral

Funções integrais são primitivas calculadas a partir do diferencial de uma função, ou seja, a função *F(x)+C* é a integral do diferencial de *f(x)*:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

O sinal $\int$ representa um *s* mais alongado e vem da palavra soma.

O significado da equação acima é que a primitiva *F(x)+C* é calculada pela soma dos diferenciais.

Introdução à Informática

Integral

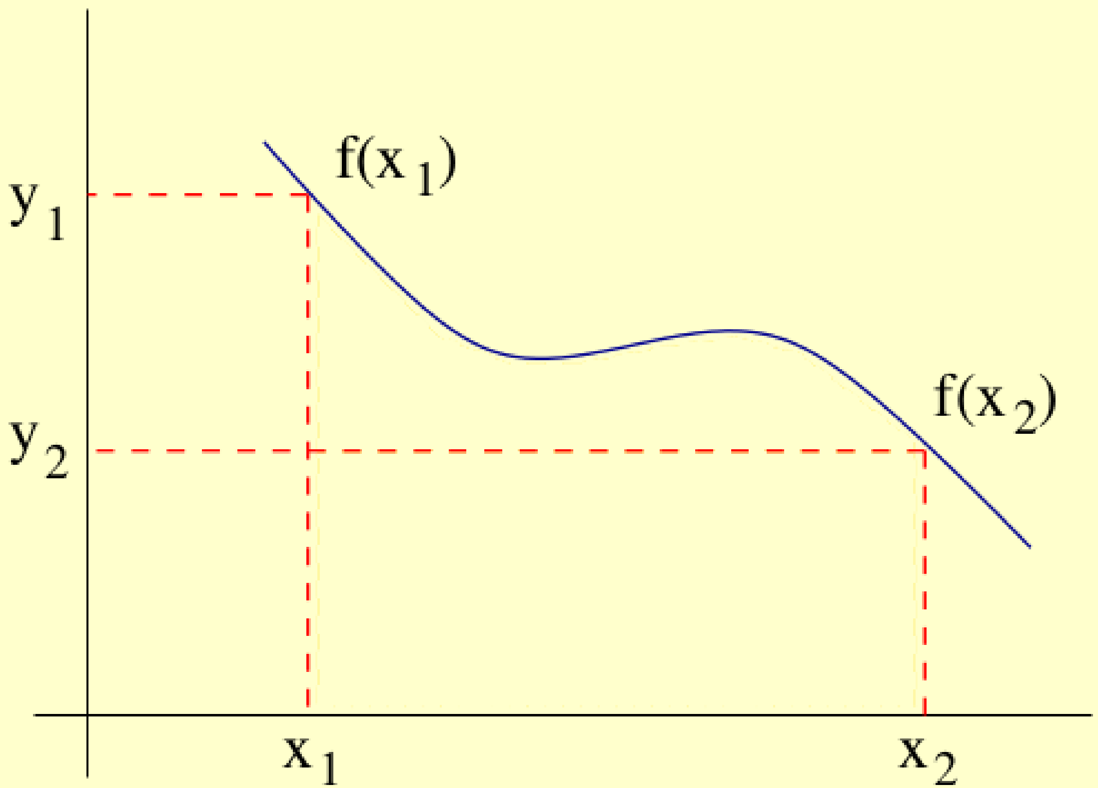
Como o diferencial é o produto da derivada pelo acréscimo da função. Então, se tomarmos todos os acréscimos de uma função, teremos a função toda, ou seja, a função integral.

Por isto, o inverso do diferencial é denominado integração.

Introdução à Informática

Integral definida

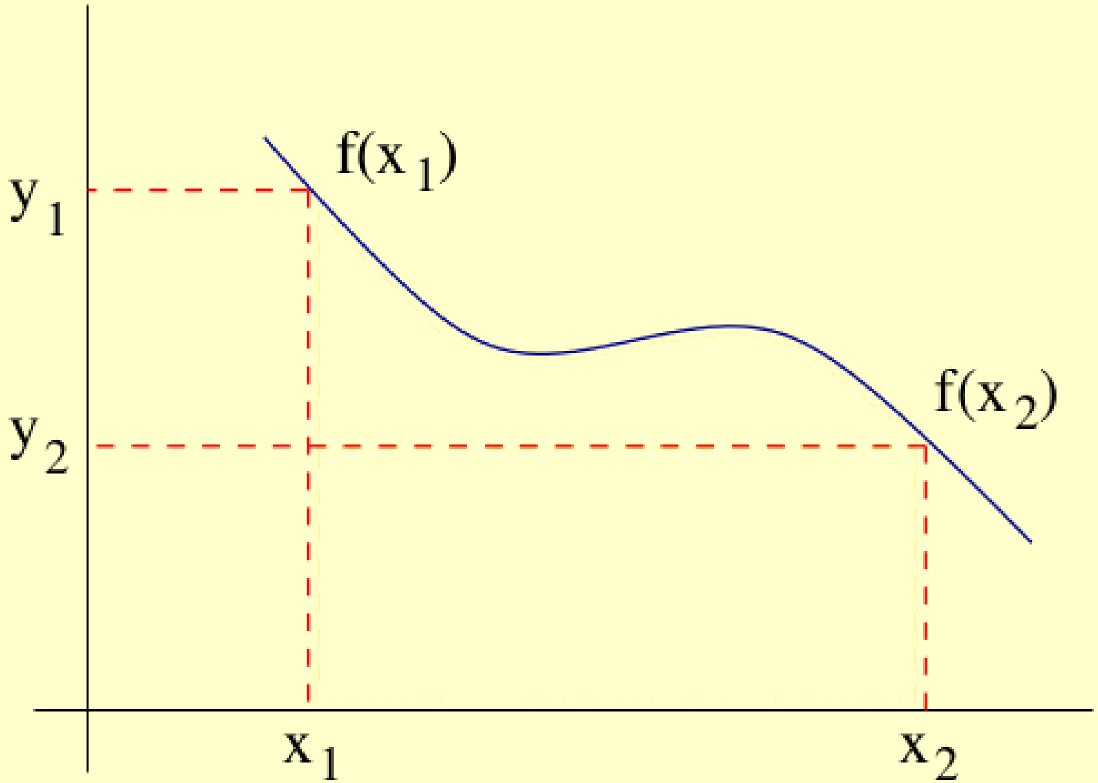
Considere uma função qualquer f(x) entre dois pontos $[x_1,x_2]$:



Introdução à Informática

Integral definida

Considere uma função qualquer f(x) entre dois pontos $[x_1,x_2]$:

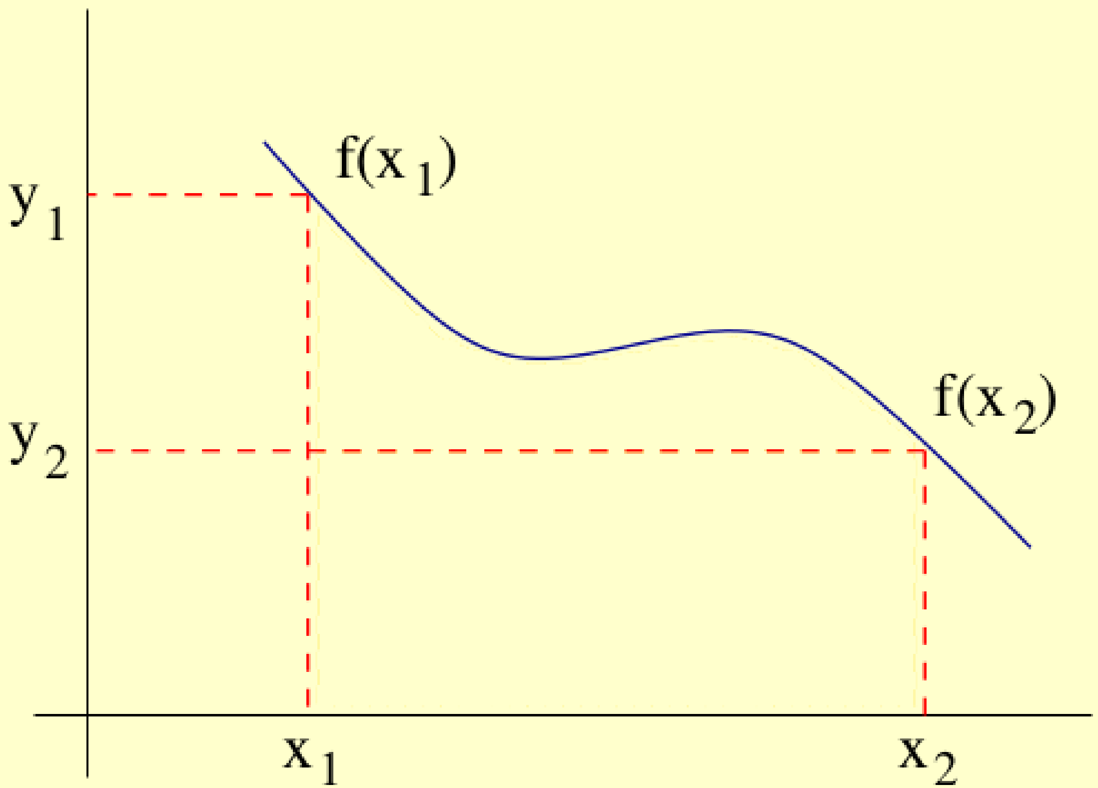


A soma de todos os diferenciais da função no intervalo $[x_1,x_2]$ equivale à área sob a curva definida por $[f(x_1),f(x_2)]$.

Introdução à Informática

Integral definida

Considere uma função qualquer f(x) entre dois pontos $[x_1,x_2]$:



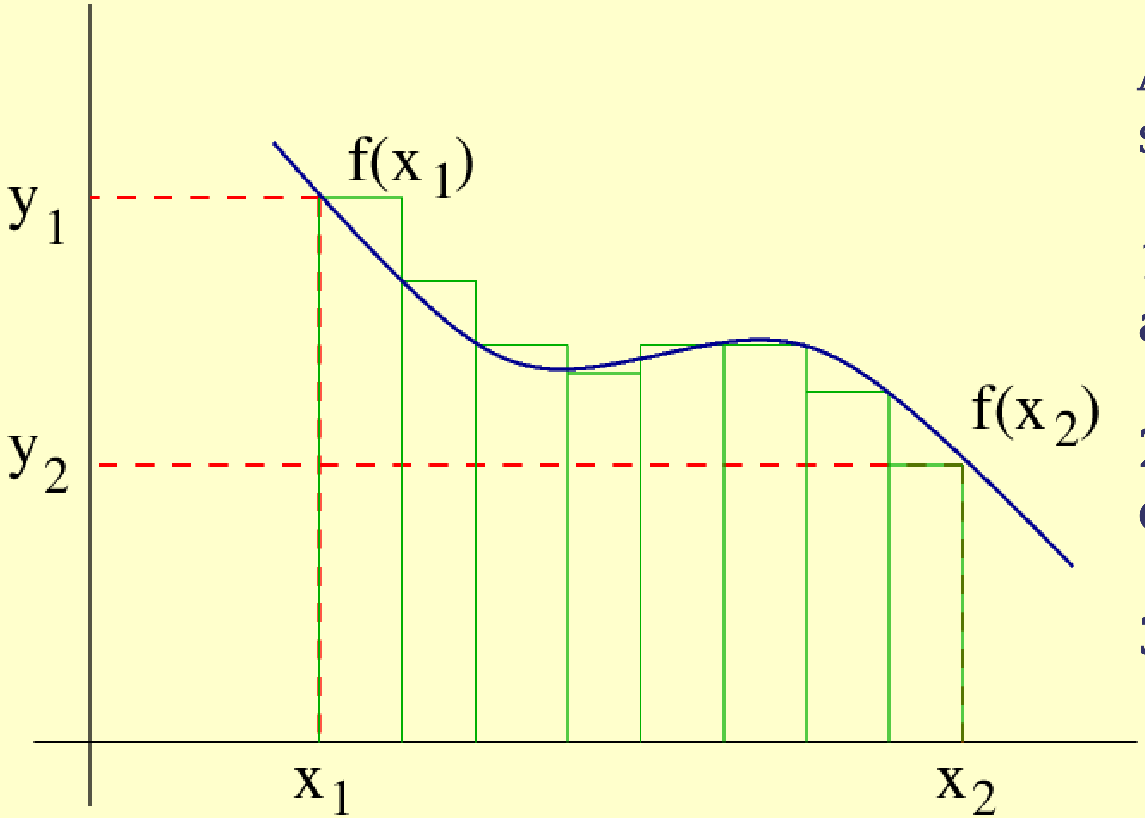
A soma de todos os diferenciais da função no intervalo $[x_1,x_2]$ equivale à área sob a curva definida por $[f(x_1),f(x_2)]$.
Esta soma se chama integral da função:

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)\, dx$$

Introdução à Informática

Integral definida

Considere uma função qualquer f(x) entre dois pontos $[x_1,x_2]$:



A área sob a curva pode ser estimada por:

1. Divisão em pequenas áreas entre os pontos.

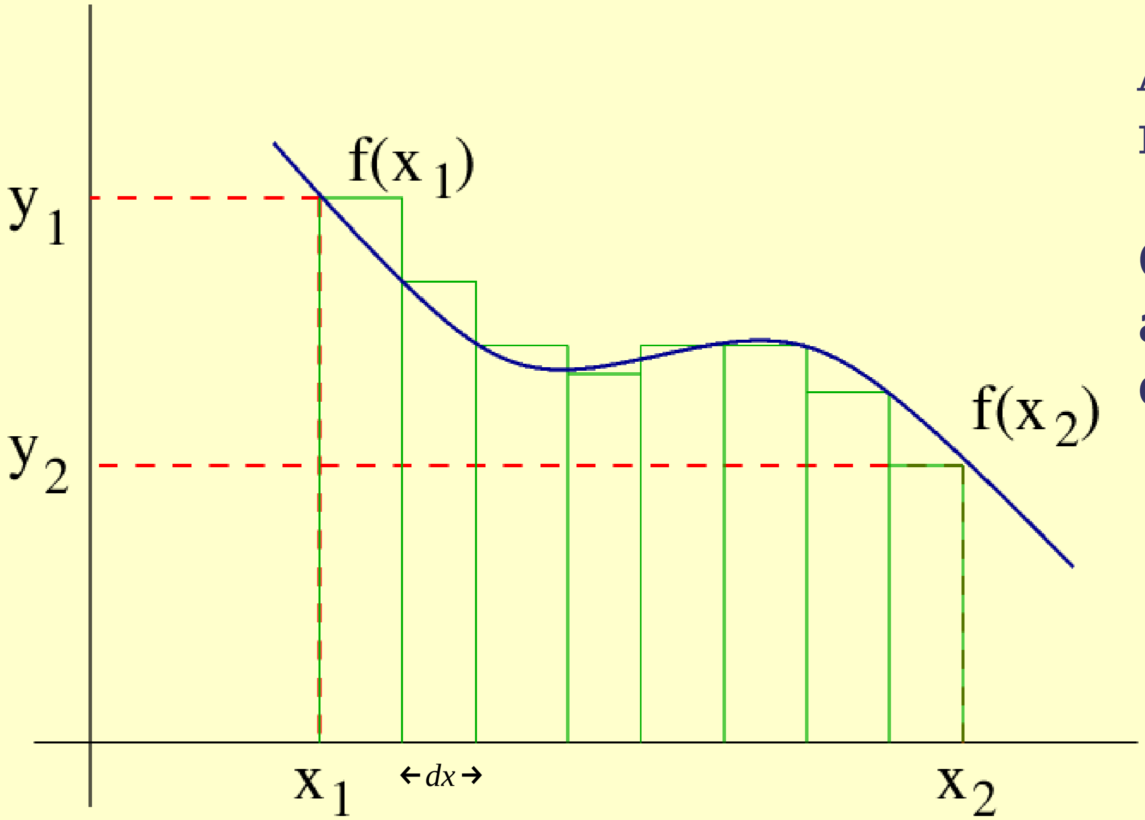
2. Cálculo da área de cada segmento.

3. Somatória das áreas.

Introdução à Informática

Integral definida

Considere uma função qualquer f(x) entre dois pontos $[x_1,x_2]$:



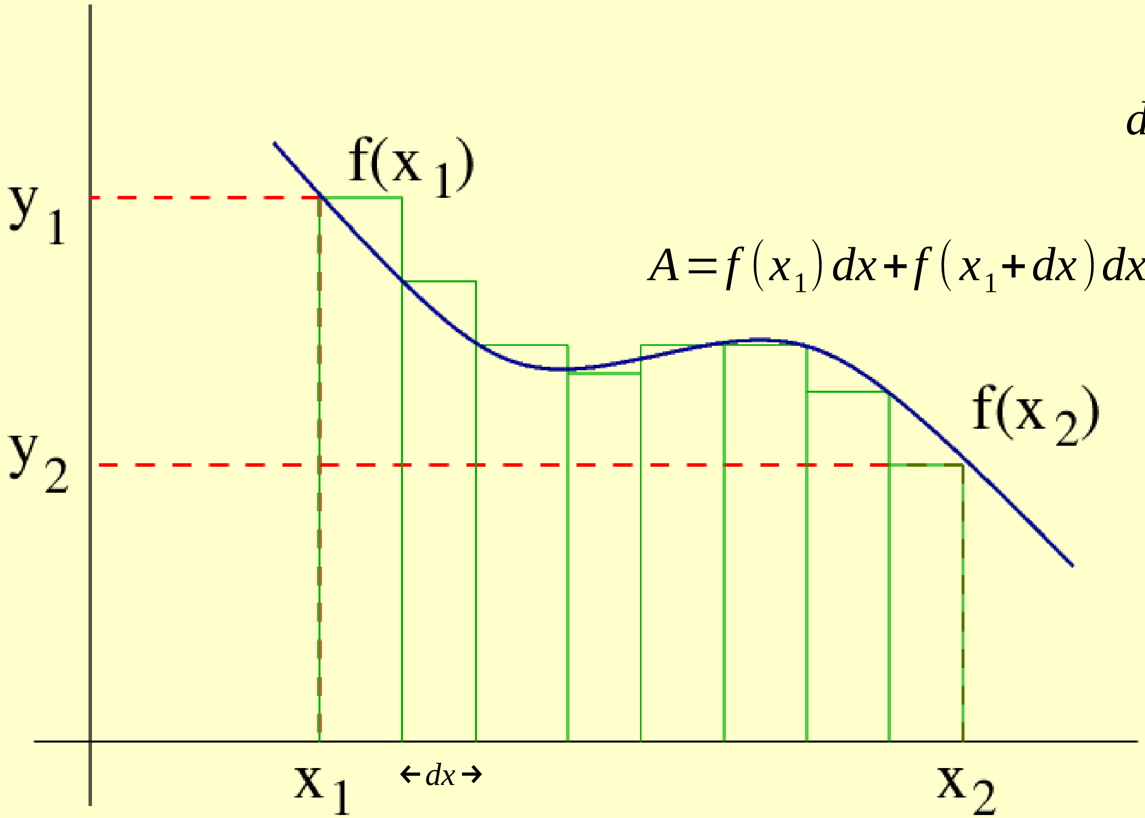
A largura de cada retângulo é *dx*.

Quanto menor *dx*, maior a precisão do cálculo da área sob a curva

Introdução à Informática

Integral definida

Considere uma função qualquer f(x) entre dois pontos $[x_1, x_2]$:



$$dx = \frac{x_2 - x_1}{n}$$

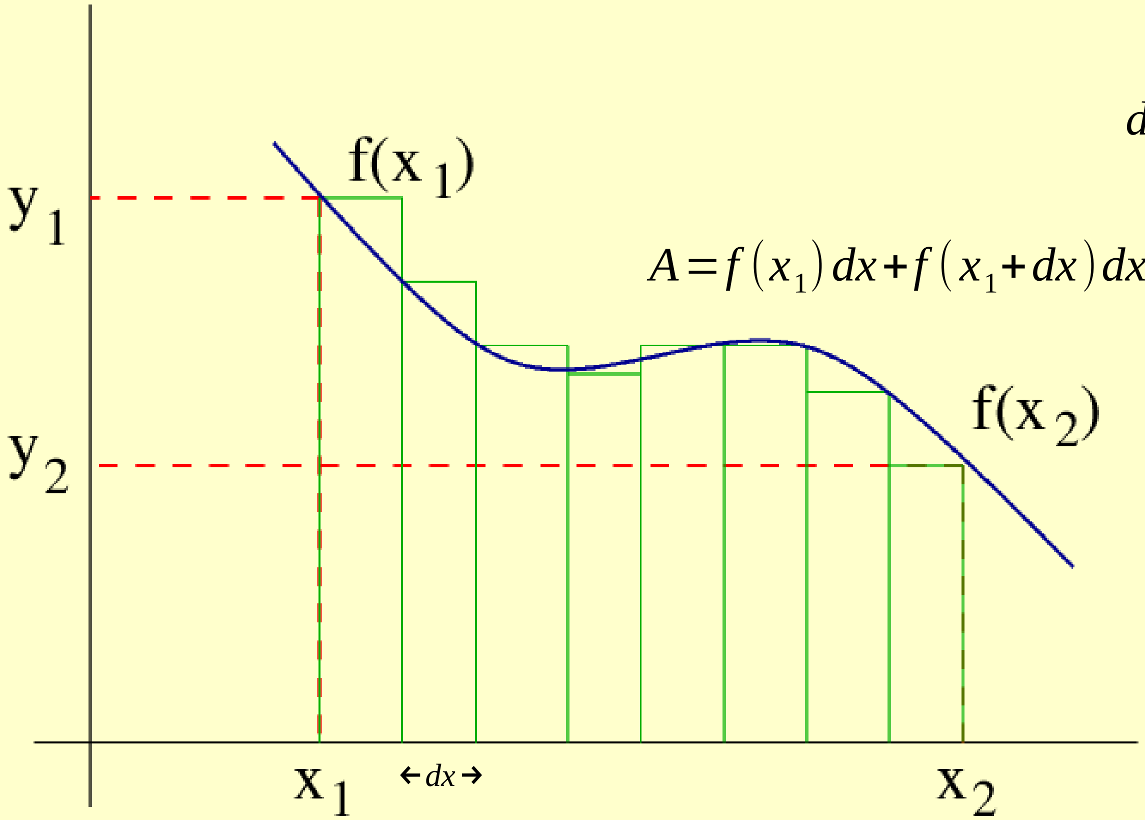
$$A = f(x_1)\,dx + f(x_1 + dx)\,dx + f(x1 + 2\mathrm{dx})\,dx + \cdots + f(x_1 + ndx)\,dx$$

$$A = \sum_{n=0}^{n-1} f(x_1 + ndx) . dx$$

Introdução à Informática

Integral definida

Considere uma função qualquer f(x) entre dois pontos $[x_1,x_2]$:



$$dx=\frac{x_2-x_1}{n}$$

$$A=f(x_1)dx+f(x_1+dx)dx+f(x1+2\mathrm{dx})dx+\cdots+f(x_1+ndx)dx$$

$$A=\sum_{n=0}^{n-1} f(x_1+ndx).dx$$

$$Se\quad dx<\varepsilon\quad então\quad n\rightarrow\infty$$

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Introdução à Informática

Integral definida

Melhores aproximações:

1. método do ponto médio
2. método do trapezóide
3. método de Simpson

Introdução à Informática

Integral definida

Melhores aproximações:

1. método do ponto médio

2. método do trapezóide

3. método de Simpson

Nota: existem vários métodos de cálculo da integral, inclusive algébricos. Mas isto é assunto da disciplina de cálculo numérico.

Introdução à Informática

Integral definida

1. método do ponto médio

Como no exemplo anterior, só que no lugar de:

$$A = f(x_1 + ndx).dx$$

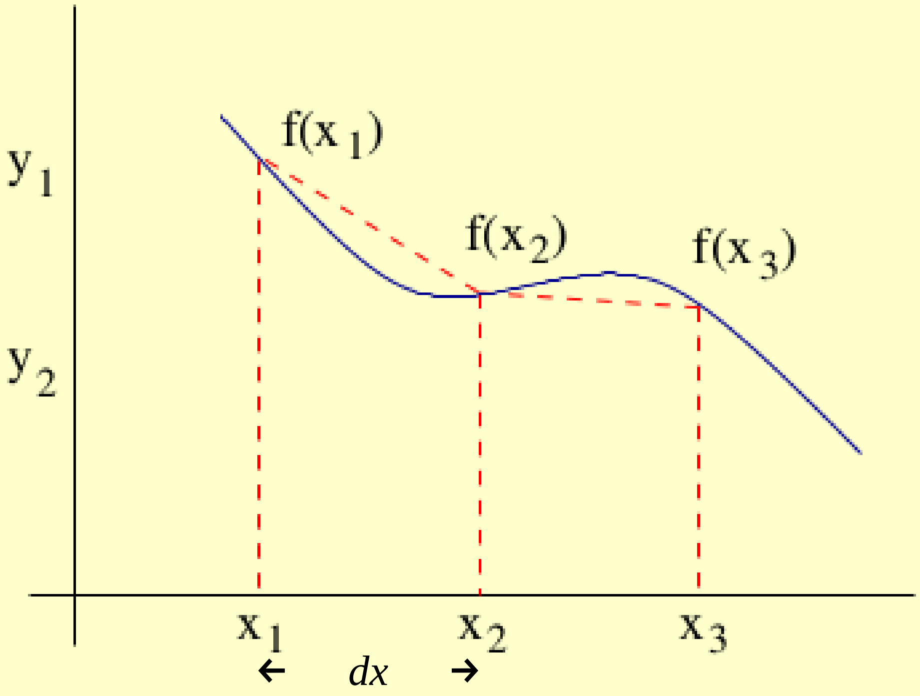
toma-se o ponto médio do paralelogramo:

$$A = f(x_1 + ndx/2).dx$$

Introdução à Informática

Integral definida

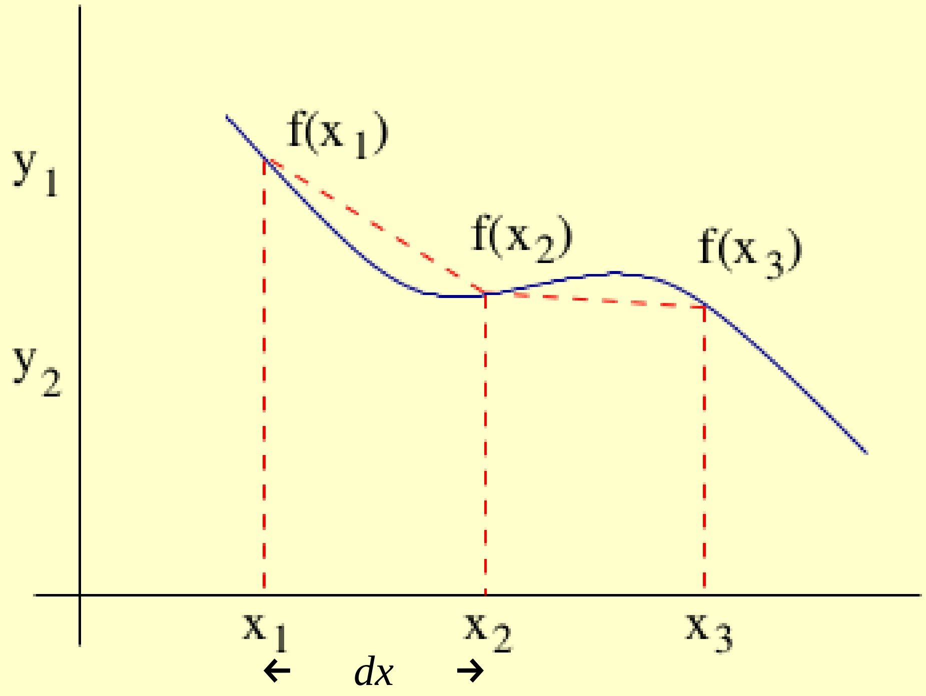
2. método do trapezóide:



$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx$$

Integral definida

2. método do trapezóide:



$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx$$

$$\int_{x_1}^{x_1+dx} f(x)\,dx = \frac{dx}{2}\left(f(x) + f(x+dx)\right)$$

Integral definida

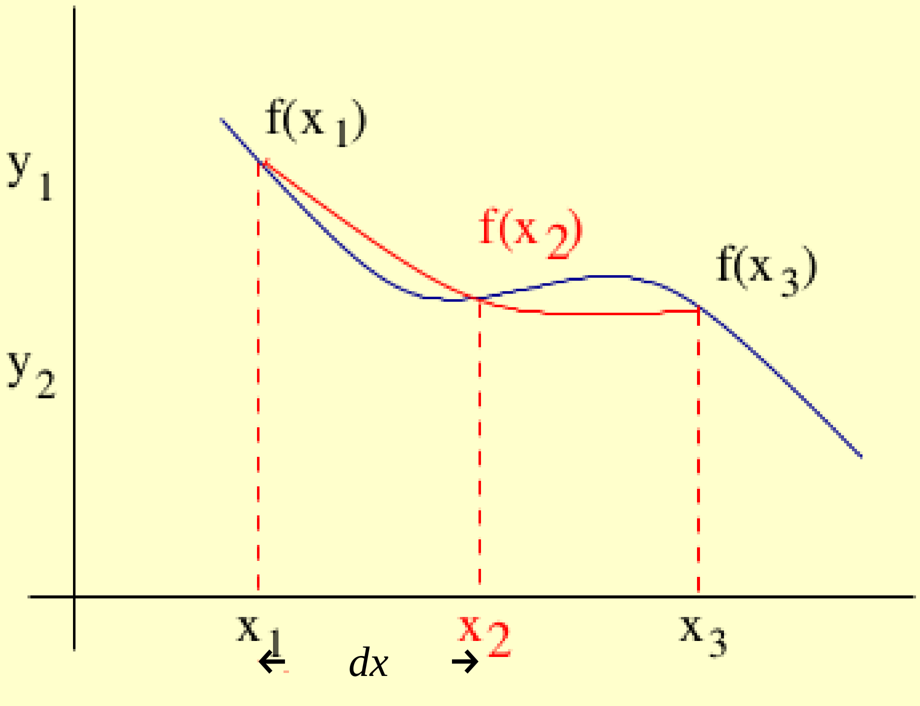
3. método do Simpson (Newton-Cotes):

Usa polinomios quadráticos para interpolar, criando arcos parabólicos mais próximos da função do que as linhas retas do método do trapezóide.

Introdução à Informática

Integral definida

2. método de Simpson (Newton-Cotes):



$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_1+2\mathrm{dx}} f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{dx}{3}\left(f(x_1) + 4\mathrm{f}(x_2) + f(x_3)\right)$$