Limites

Seja uma variável x em um domínio $[a,b]$, contínuo, dizemos que, quando x tende a n, existem valores de x em qualquer entorno ε de n, por menor que seja ε. Neste caso, o valor absoluto da diferença entre x e n é menor que o entorno ε.

$$|x - n| < \epsilon$$

onde $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$, tão pequeno quanto se deseja e n é o ponto de acumulação deste conjunto (podendo ou não pertencer a ele).

Introdução à Informática

Limites de funções

Dada uma função $f(x)$ definida para todos os pontos de um intervalo, com excessão de um ponto onde $x=k$. Ou seja:

$$x \in [a,n] \quad | \quad x \neq k,\ k \in [a,n]$$

x é definido para todos os pontos do intervalo $[a,k)$ e $(k,n]$, exceto no ponto k. Isto significa que, para $x=k$, $f(k)$ não é definida ou não existe. Neste caso podemos ter uma idéia de $f(k)$ quando $x \rightarrow k$.

Introdução à Informática

Limites de funções

Dizemos que, se uma função tende a um determinado valor quando sua variável independente tende a outro valor, existe um ponto de acumulação da função que denominamos limite da função naquele ponto. P. ex., seja:

$$f(x) = x^2$$

então:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Introdução à Informática

UFSC

Limites de funções

Dizemos que, se uma função tende a um determinado valor quando sua variável independente tende a outro valor, existe um ponto de acumulação da função que denominamos limite da função naquele ponto. P. ex., seja:

$$f(x)=x^2$$

então:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

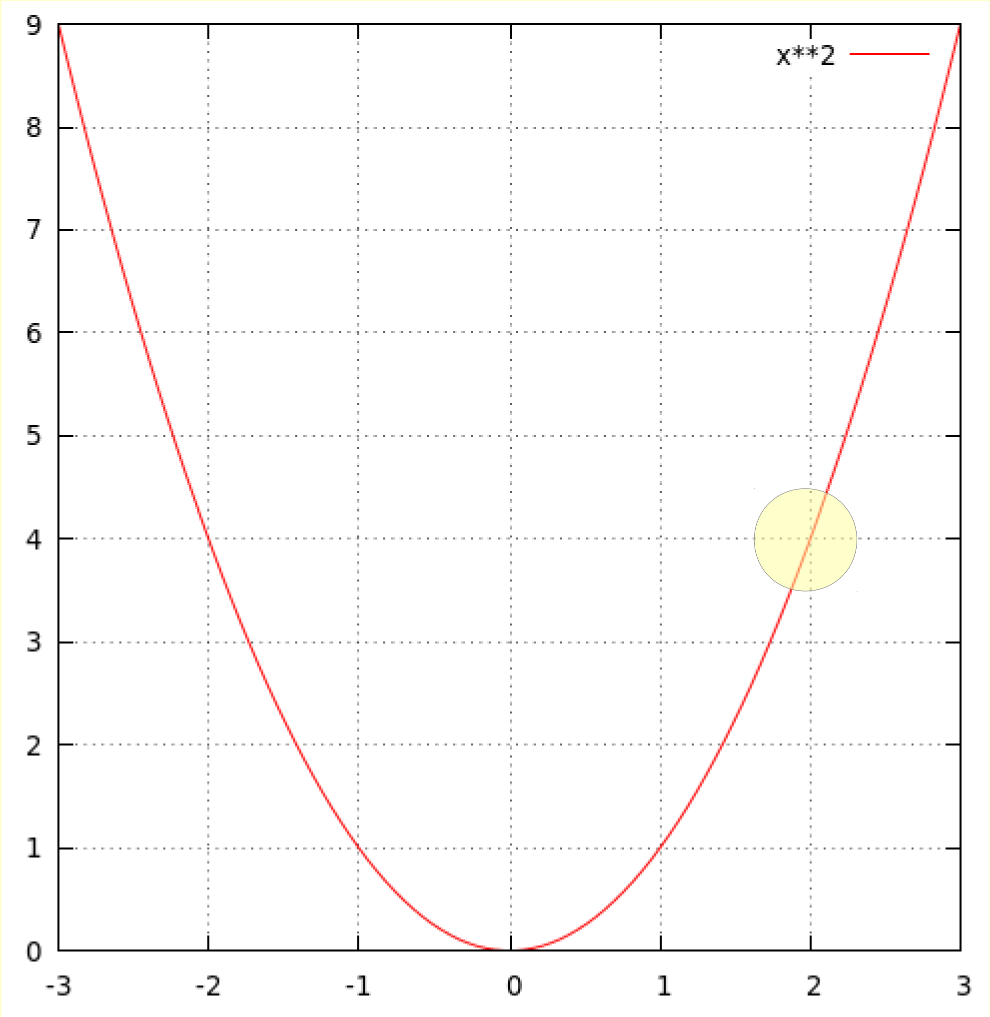
x	f(x)
1	1
1.5	2.25
1.8	3.24
1.95	3.80
1.98	3.92
1.99	3.96

Introdução à Informática

Limites de funções

$$f(x)=x^2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x)=4$$



x	f(x)
1	1
1.5	2.25
1.8	3.24
1.95	3.80
1.98	3.92
1.99	3.96

Introdução à Informática

Limites de funções

Limite finito em ponto finito:

$$f(x) = x - 1 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

Limite finito em ponto infinito:

$$\lim_{x \to \infty} \left. \frac{x}{x+k} \right|_{\forall k \in \Re^{+}} = 1$$

Limite infinito em ponto finito:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2}} = \infty$$

Limite infinito em ponto infinito:

$$\lim_{x \to \infty} x^{2} + 1 = \infty$$

Introdução à Informática

UFSC

Limites de funções

Propriedades dos limites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[\alpha f(x)] = \alpha \lim_{x\to a} f(x) \quad (\alpha \ \ escalar)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad (\lim_{x\to 0} g(x)\neq 0)$$

Introdução à Informática

Cálculo diferencial e Derivadas

Seja: $y = f(x)$

uma função real de uma variável x no entorno de um ponto (x). Chama-se derivada ou coeficiente diferencial de f(x) no ponto (x) de x, ao limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

também usamos as notações:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x) \equiv y'$$

Introdução à Informática

Cálculo diferencial e Derivadas

A função:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é a medida da taxa de variação de y em relação a x em cada ponto (x) onde existe o limite. Ou seja:

$$f'(x) \equiv \frac{dy}{dx}$$

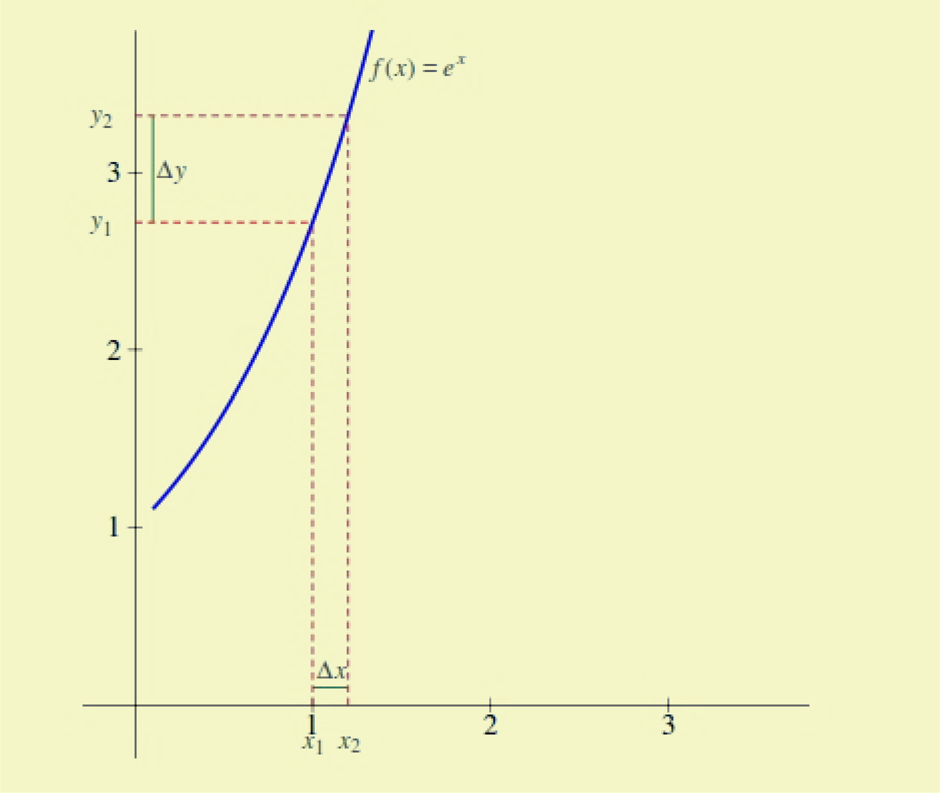
é a proprção de quanto y varia quando se varia x!

Introdução à Informática

Derivadas

Por exemplo, seja: $f(x) = e^x$

Um gráfico desta função no intervalo [*0.1,2.0*] mostra dois pontos $x1=1.0$ e $x2=1.2$, correspondendo a $y1=2.72$ e $y2=3.32$.

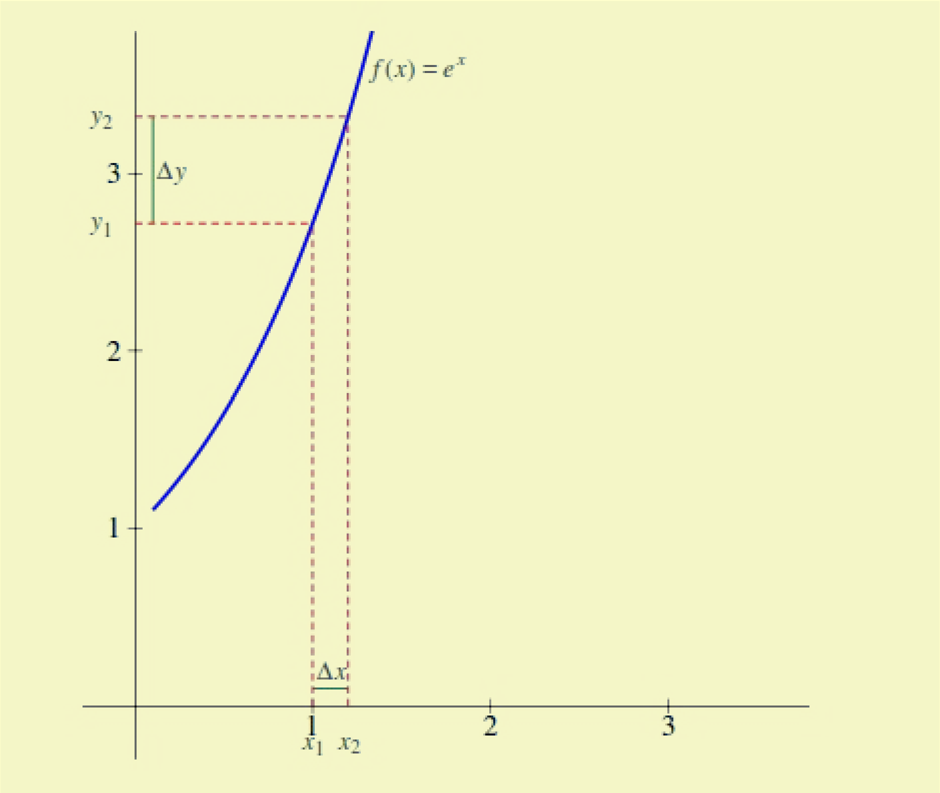


Introdução à Informática

Derivadas

Seja: $f(x) = e^x$

Um gráfico desta função no intervalo [$0.1, 2.0$] mostra dois pontos $x1=1.0$ e $x2=1.2$, correspondendo a $y1=2.72$ e $y2=3.32$.



Neste intervalo, enquanto x variou de 0.2, y variou de 0.6. Se fixarmos o ponto $x1$ e variarmos $x2$, ou seja, variarmos Δx, também Δy vai variar, mas não na mesma proporção.

A derivada de $f(x)$ é a taxa de variação de y em relação a x, ou seja, a que razão Δy varia em relação a Δx.

Derivadas

A relação é definida como:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

O limite, quando $x_2 \rightarrow x_1$, chama-se derivada da função no ponto x_1 e nota-se por $f'(x)$.

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_1)$$

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=x_1}$$

Introdução à Informática

Função derivada

Generalizando para qualquer ponto da função:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x = x_1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Introdução à Informática

Função derivada

Por exemplo, calculando a derivada de:

$$f(x) = x^2 \quad \therefore \quad f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$f'(x) = 2x$$

Introdução à Informática

Função derivada

calcule a derivada de: $f(x) = x^2 + 2x$

Introdução à Informática

Função derivada

Solução:

Se:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

logo:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)$$

Introdução à Informática

Função derivada

Solução:

Se:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

logo:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - (x^2 + 2x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = 2x + 2$$

Introdução à Informática

Função derivada

A regra geral para derivar as funções é:

$$f(x) = x^n$$

logo:

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

Introdução à Informática

Função derivada

Calcule a derivada das funções:

a. $f(x) = \sqrt{(x)}$

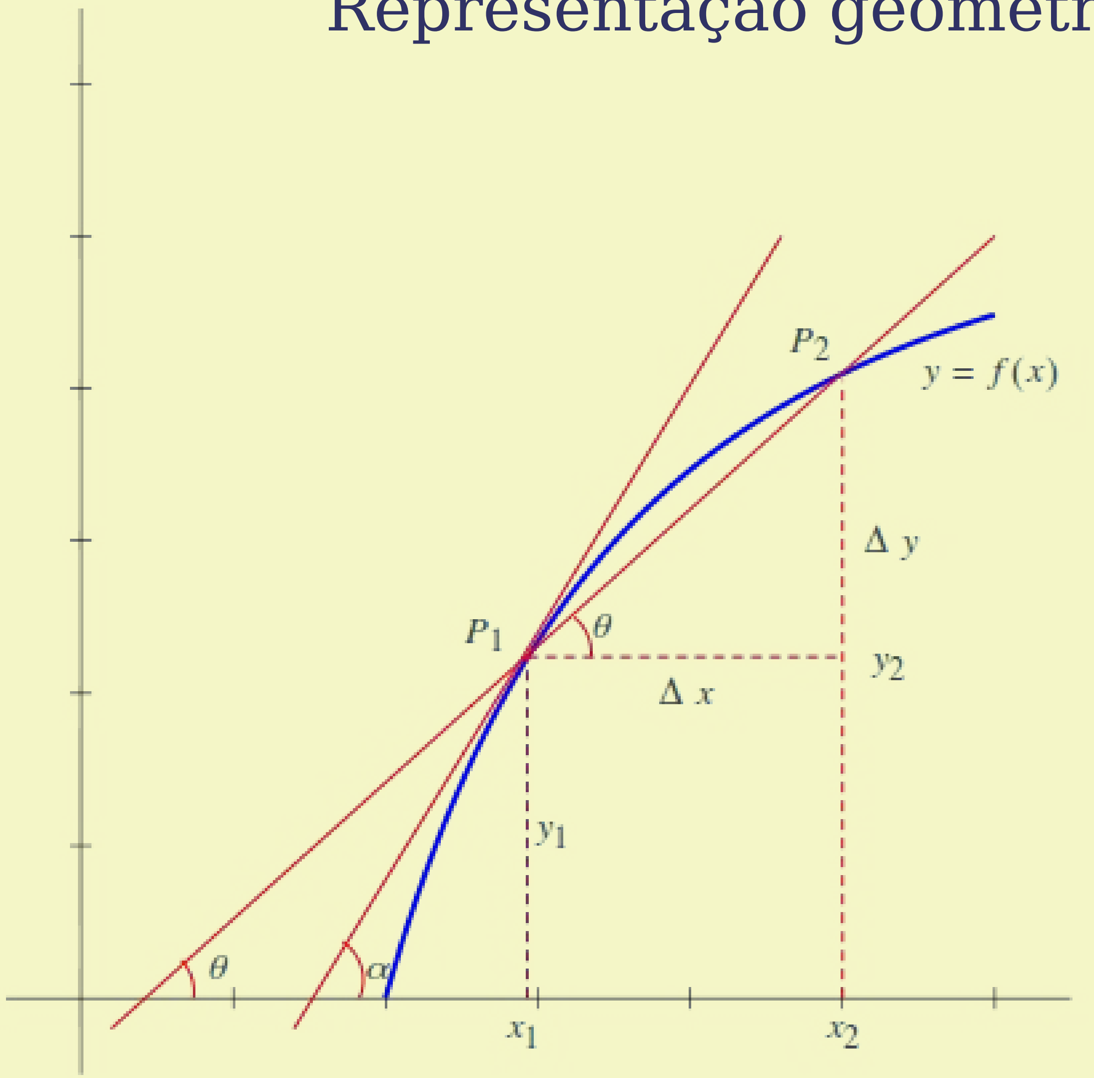
b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

c. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Introdução à Informática

Função derivada

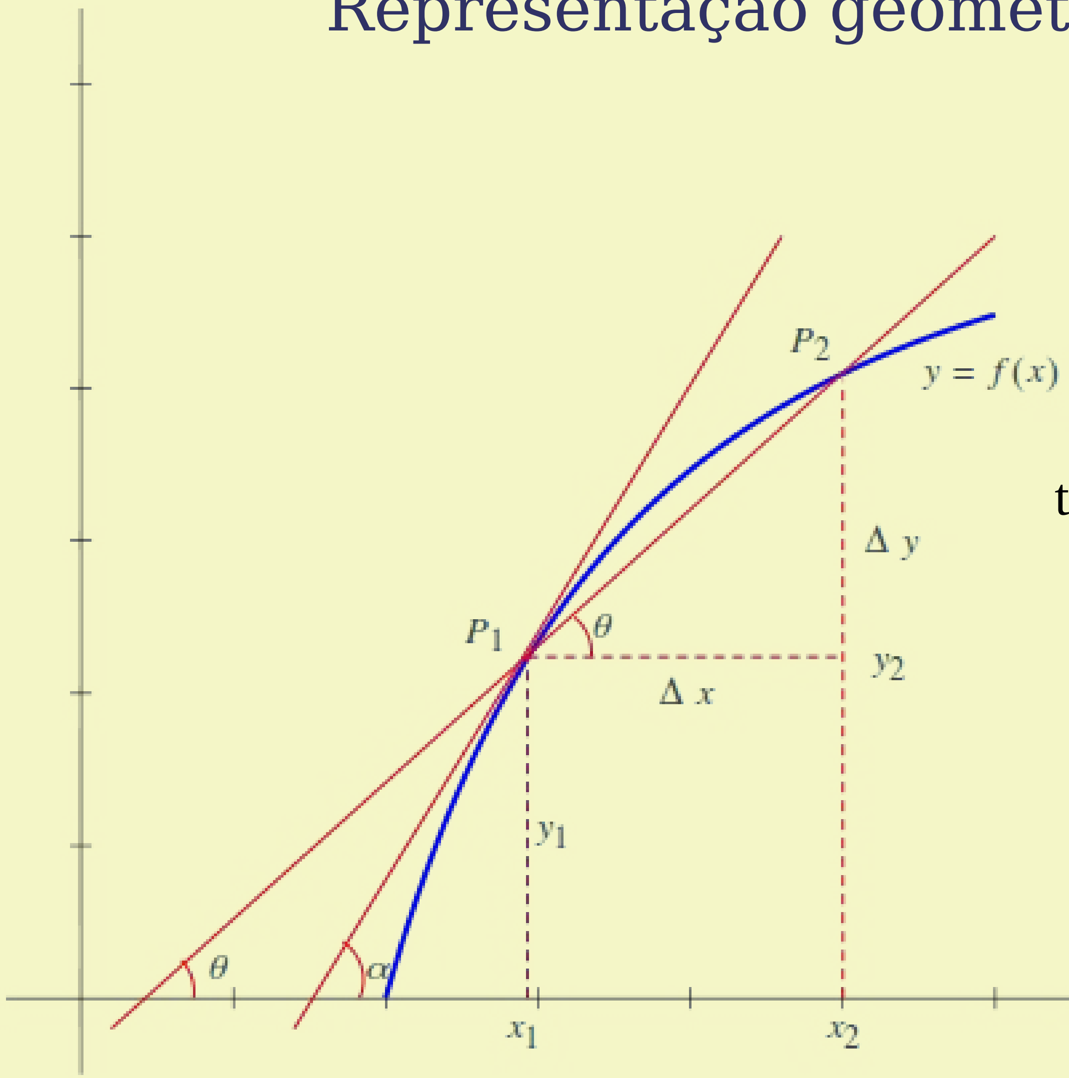
Representação geométrica da derivada:



Introdução à Informática

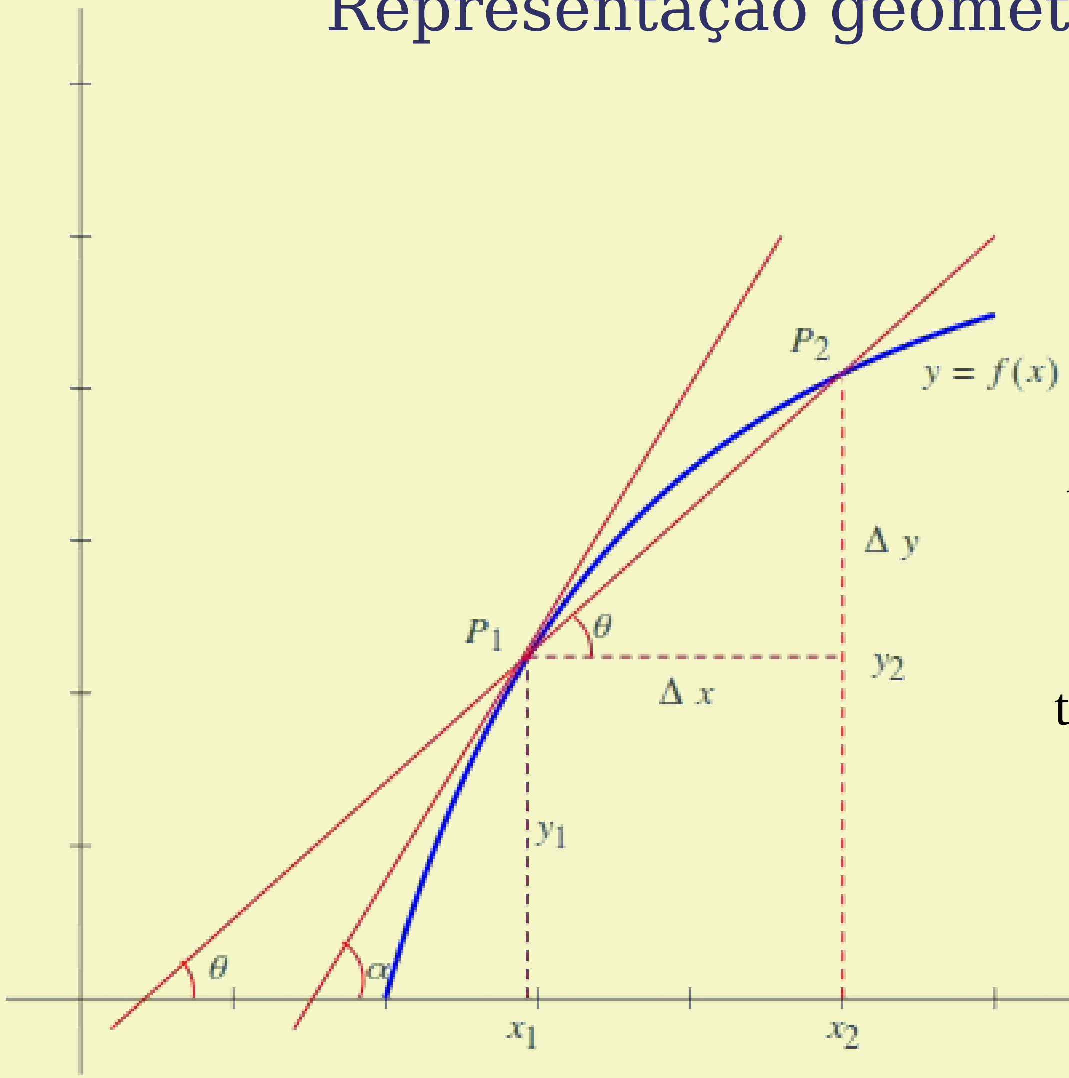
Função derivada

Representação geométrica da derivada:



$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Representação geométrica da derivada:



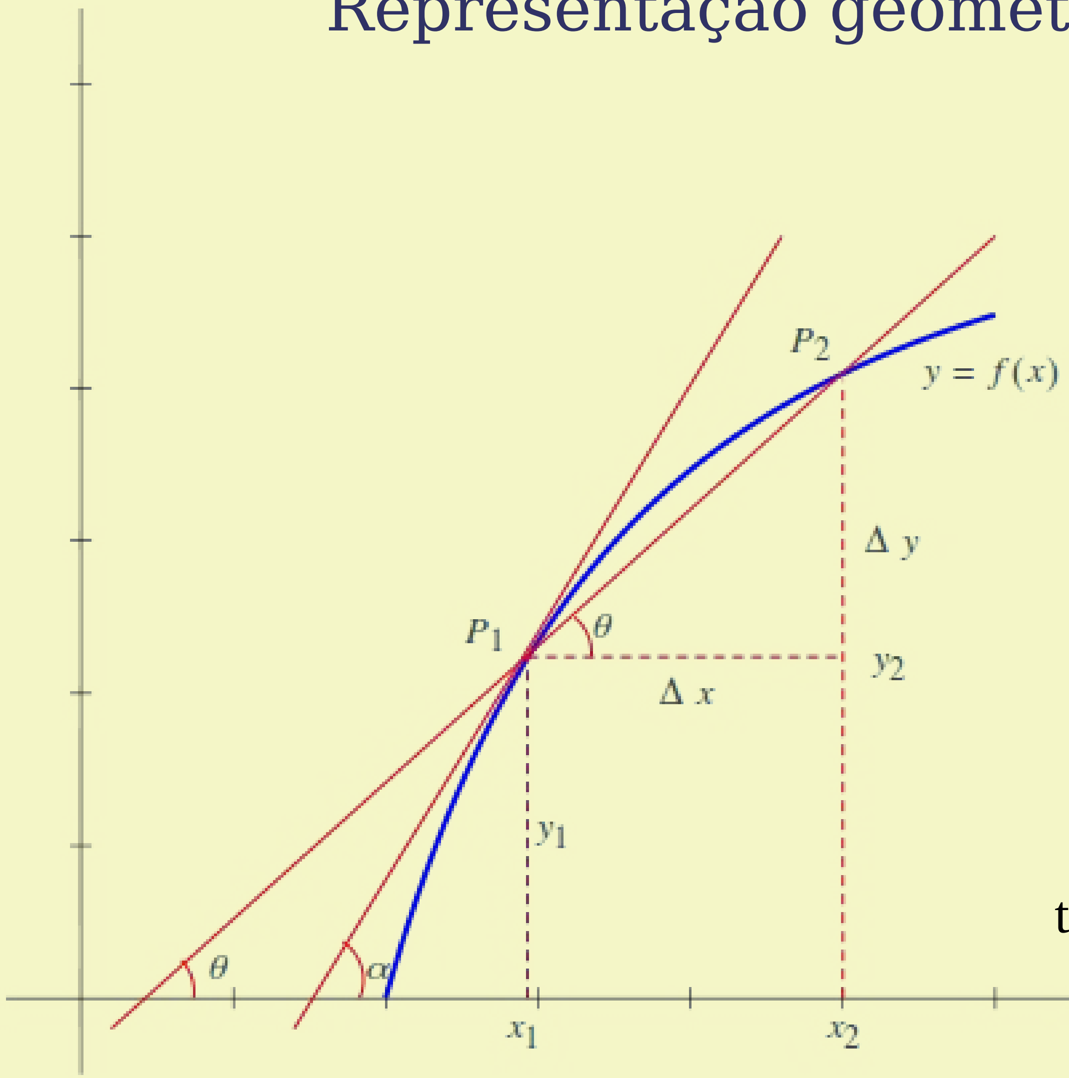
$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\tan\alpha = \lim_{P_2 \to P_1} \tan\theta = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Introdução à Informática

Função derivada

Representação geométrica da derivada:



$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\tan\alpha = \lim_{P_2 \to P_1} \tan\theta = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Introdução à Informática

Propriedade das derivadas:

1. A derivada de uma função constante é zero:

$$Se\, f(x) = k, \quad \therefore \quad f(x+\Delta x) = k \quad \therefore \quad f'(x) = 0$$

Introdução à Informática

Propriedade das derivadas:

1. A derivada de uma função constante é zero:

$$Se\, f(x) = k, \quad \therefore \quad f(x+\Delta x) = k \quad \therefore \quad f'(x) = 0$$

2. A derivada da função identidade é 1:

$$Se\, f(x) = x, \quad \therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} \quad \therefore \quad f'(x) = 1$$

Introdução à Informática

Propriedade das derivadas:

1. A derivada de uma função constante é zero:

$$Se\, f(x) = k, \quad \therefore \quad f(x+\Delta x) = k \quad \therefore \quad f'(x) = 0$$

2. A derivada da função identidade é 1:

$$Se\, f(x) = x, \quad \therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} \quad \therefore \quad f'(x) = 1$$

3. A derivada da soma é igual à soma das derivadadas:

$$Seja \quad u = f(x), \quad v = g(x) \quad e \quad y = u+v,$$

$$y+\Delta y = u+\Delta u+v+\Delta v$$

$$\Delta y = u+\Delta u+v+\Delta v-y$$

$$\Delta y = u+\Delta u+v+\Delta v-(u+v) = \Delta u+\Delta v$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$ou \quad \frac{d}{dx}(u+v) = u'+v'$$

Introdução à Informática

Propriedade das derivadas:

4. A derivada de um produto de duas funções é igual ao produto da primeira pela derivada da segunda somada ao produto da segunda pela derivada da primeira:

$$Seja \quad u = f(x), \quad v = g(x) \quad e \quad y = u.v,$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\cdot(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - uv$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

$$Se \quad \Delta u \quad e \quad \Delta v \quad são \quad deriváveis \quad em \quad x, \quad então: \; \Delta u \cdot \Delta v \to 0 \quad se \quad \Delta x \to 0.$$

$$ou \quad \frac{d}{dx}(u \cdot v) = uv' + vu'$$

Introdução à Informática

Propriedade das derivadas:

5. A derivada do quociente de duas funções é igual ao produto da primeira pela derivada da segunda menos o produto da segunda pela derivada da primeira, dividido pela segunda ao quadrado:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Demonstre!

Introdução à Informática

Diferencial de uma função

O diferencial *dy* de uma função *y=f(x)* é igual ao produto da derivada *f'(x)* da função pelo diferencial *dx* da variável independente.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$