Prova 1 - Matemática Discreta

Bruno Carvalho Caxias

Bacharelado em Sistemas de Informação
Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Serra

1 Questão 1

Resolva a sequência dada.
$T(1) = 3$
$T(n) = 7T(n-1)$ ***para*** $n \leq 2$

a) (3,0 pontos) Utilizando a fórmula apropriada

$$S(n) = c^{n-1} \times S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} \times g(i) \tag{1}$$

$S(n) = c \times S(n-1) + g(n)$

$c = 7$

$g(n) = 0$

$S(n) = 7^{n-1} \times 3 + \sum_{i=2}^{n} 7^{n-i} \times 0$

$S(n) = 7^{n-1} \times 3$

b) (4,0 pontos) Utilizando o método Expandir, Conjecturar e Verificar.

$T(n) = 7T(n-1)$ $\boxed{\text{Termina p/ n-k=1 (k=n-1)}}$

$T(n) = 7(7T(n-1))$

$T(n) = 7^2T(n-2)$

$T(n) = 7(7^2T(n-2))$

$T(n) = 7^3T(n-3)$

$T(n) = 7(7^3T(n-3))$

$T(n) = 7^4T(n-4)$

$T(n) = 7^kT(n-k)$

$$T(n) = 7^{n-1}T(1)$$

$$T(n) = 7^{n-1} \times 3$$

2 Questão 2

(7,0 pontos) Prove por indução o resultado da seguinte somatória.

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n} \tag{2}$$

Caso Base

n=2

$\sum_{i=2}^{2} \frac{1}{(2-1)2} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{(2-1)2} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Supor que

$\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{k}$

$\frac{1}{(2-1)2} + \frac{1}{(3-1)3} + \frac{1}{(4-1)4} + ... + \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{k}$

Mostrar que

$\sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{k+1}$

$\frac{1}{(2-1)2} + \frac{1}{(3-1)3} + \frac{1}{(4-1)4} + ... + \frac{1}{((k+1)-1)(k+1)} = 1 - \frac{1}{(k+1)}$

Por Hipótese

$\frac{1}{(2-1)2} + \frac{1}{(3-1)3} + \frac{1}{(4-1)4} + ... + \frac{1}{(k-1)(k)} + \frac{1}{((k+1)-1)(k+1)} =$

$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{((k+1)-1)(k+1)} =$

$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1-1)(k+1)} =$

$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k)(k+1)} =$

$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} =$

$1 - \frac{k+1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} =$

$1 + \frac{-(k+1)+1}{k(k+1)} =$

$1 + \frac{-k-1+1}{k(k+1)} =$

$1 + \frac{-k}{k(k+1)} =$

$1 - \frac{1}{k+1} = OK!$

3 Questão 3

(7,0 pontos) Resolva a relação de recorrência utilizando a fórmula apropriada.
$S(1) = 1$
$S(n) = 4S(\frac{n}{2}) + \frac{n}{4}$ *; para* $n \geq 2, n = 2^m$

$$S(n) = c^{\log n} \times S(1) + \sum_{i=1}^{\log n} c^{(\log n)-i} \times g(2^i) \tag{3}$$

$S(n) = c \times S(\frac{n}{2}) + g(n)$

$c = 4$

$g(n) = \frac{n}{4}$

$S(n) = 4^{\log n} \times 1 + \sum_{i=1}^{\log n} 4^{(\log n)-i} \times \frac{2^i}{4}$

$S(n) = 4^{\log n} \times 1 + \sum_{i=1}^{\log n} 4^{\log n} \times 4^{-i} \times \frac{2^i}{4}$

$S(n) = (2^2)^{\log n} \times 1 + \sum_{i=1}^{\log n} (2^2)^{\log n} \times (2^2)^{-i} \times \frac{2^i}{2^2}$

$S(n) = (2^{\log n})^2 + \sum_{i=1}^{\log n} (2^2)^{\log n} \times (2^2)^{-i} \times \frac{2^i}{2^2}$

$S(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log n} (2^2)^{\log n} \times (2^2)^{-i} \times \frac{2^i}{2^2}$

$S(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log n} (2^2)^{\log n} \times (2^{-2i}) \times \frac{2^i}{2^2}$

$S(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log n} (2^2)^{\log n} \times \frac{2^{-2i} \times 2^i}{2^2}$

$S(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log n} (2^2)^{\log n} \times \frac{2^{-i}}{2^2}$

$S(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log n} (2^{\log n})^2 \times \frac{2^{-i}}{2^2}$

$S(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log n} 2^{\log n} \times 2^{\log n} \times \frac{2^{-i}}{2^2}$

$S(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log n} n^2 \times \frac{2^{-i}}{2^2}$

$S(n) = n^2 + n^2 \times \sum_{i=1}^{\log n} \frac{2^{-i}}{2^2}$

$S(n) = n^2(1 + \sum_{i=1}^{\log n} \frac{2^{-i}}{2^2})$

$S(n) = n^2(1 + \sum_{i=1}^{\log n} 2^{-i-2})$

$S(n) = n^2(1 - \frac{1}{4}(\frac{1}{n} + 1))$

$S(n) = n^2(1 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4})$

$S(n) = n^2(-\frac{1}{4n} - \frac{3}{4})$

$S(n) = -\frac{n^2}{4n} - \frac{3n^2}{4}$

$S(n) = -\frac{3n^2}{4} - \frac{n}{4}$

$S(n) = -\frac{3(2^{2m})}{4} - \frac{2^m}{4}$

$S(n) = -\frac{3(2^{2m})}{2^2} - \frac{2^m}{2^2}$

$S(n) = -3(2^{2m-2}) - 2^{m-2}$

<u>*Rascunho:*</u>

$Q = \sum_{i=1}^{\log n} 2^{-i-2}$

$Q = [2^{-3} + 2^{-4} + ... + 2^{-\log n - 2}] \quad (\div 2)$
$Q/2 = [2^{-4} + ... + 2^{-\log n - 2} + 2^{-\log n - 3}]$
$Q/2 - Q = 2^{-logn-3} - 2^{-3}$

$2^{-logn-3} - 2^{-3} = 2^{-logn} \times 2^{-3} - 2^{-3} = 2^{logn^{-1}} \times 2^{-3} - 2^{-3}$
$n^{-1} \times 2^{-3} - 2^{-3} = \frac{1}{n} \times 2^{-3} - 2^{-3}$
$\frac{1}{n} \times 2^{-3} - 2^{-3} = \frac{1}{8n} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(\frac{1}{n} + 1)$

$-Q/2 = \frac{1}{8}(\frac{1}{n} + 1) \quad (\times -2)$
$Q = -\frac{1}{4}(\frac{1}{n} + 1)$

4 Questão 4

Considere o algoritmo abaixo.

Cálculo(inteiro a, inteiro não-negativo n)

1. **Variáveis inteiras** i, j
2. i = 1
3. j = a + 1
4. **Enquanto** $i \neq n$ **faça**
5.   j = j + (i + 1)
6.   i = i +1
7. **Fim Enquanto**
8. **retorne** j

a)(6,0 pontos) Mostre que a invariante do laço é $j_k = a + \frac{(i_k+1)i_k}{2}$
Sugestão: Use o teste de mesa

Teste de Mesa:

$i_0 = 1; i_1 = i_0 + 1 = 1 + 1 = \underline{2}$
$j_0 = a + 1; j_1 = j_0 + (i_0 + 1) = a + 1 + (1 + 1) = a + 1 + 1 = \underline{a + 3}$

$i_1 = 2; i_2 = i_1 + 1 = 2 + 1 = \underline{3}$
$j_1 = a + 3; j_2 = j_1 + (i_1 + 1) = a + 3 + (2 + 1) = a + 3 + 3 = \underline{a + 6}$

$i_2 = 3; i_3 = i_2 + 1 = 3 + 1 = \underline{4}$
$j_2 = a + 6; j_3 = j_2 + (i_2 + 1) = a + 6 + (3 + 1) = a + 6 + 4 = \underline{a + 10}$

$i_3 = 4; i_4 = i_3 + 1 = 4 + 1 = \underline{5}$
$j_3 = a + 10; j_4 = j_3 + (i_3 + 1) = a + 10 + (4 + 1) = a + 10 + 5 = \underline{a + 15}$

$i_4 = 5; i_5 = i_4 + 1 = 5 + 1 = \underline{6}$
$j_4 = a + 15; j_5 = j_4 + (i_4 + 1) = a + 15 + (5 + 1) = a + 15 + 6 = \underline{a + 21}$

Conjectura: $j_k = a + \frac{(i_k+1)i_k}{2}$

$j_0 = a + \frac{(i_0+1)i_0}{2} \rightarrow \quad \text{j}_0 = a + \frac{(1+1)1}{2} \rightarrow \quad \text{j}_0 = a + 1 \qquad \text{OK!}$

$j_1 = a + \frac{(i_1+1)i_1}{2} \rightarrow \quad \text{j}_0 = a + \frac{(2+1)2}{2} \rightarrow \quad \text{j}_0 = a + 3 \qquad \text{OK!}$

$j_2 = a + \frac{(i_2+1)i_2}{2} \rightarrow \quad \text{j}_0 = a + \frac{(3+1)3}{2} \rightarrow \quad \text{j}_0 = a + 6 \qquad \text{OK!}$

b)(6,0 pontos) Prove que o segmento de programa está correto demonstrando a invariante do laço e calculando o resultado dessa invariante depois do laço terminar.

Argumentos: *(a)* $j_k = a + \frac{(i_k+1)i_k}{2}$ (b) $j_{k+1} = j_k + (i_k + 1)$ (c) $i_{k+1} = i_k + 1$

Caso Base:

$\text{j}_0 = a + 1 \ ; \ i_0 = 1$

$j_k = a + \frac{(i_k+1)i_k}{2}$

$j_0 = a + \frac{(i_0+1)i_0}{2} = a + \frac{(1+1)1}{2} = a + 1 \qquad \text{OK!}$

Supor que:

$j_k = a + \frac{(i_k+1)i_k}{2}$; p/ alguma iteração k

Mostrar que:

$j_{k+1} = a + \frac{(i_{k+1}+1)i_{k+1}}{2}$

$j_{k+1} = j_k + (i_k + 1)$ (b)

$j_{k+1} = a + \frac{(i_k+1)i_k}{2} + (i_k + 1)$ (a)

$j_{k+1} = a + \frac{(i_k+1)i_k+2(i_k+1)}{2}$

$j_{k+1} = a + \frac{(i_k+1)(i_k+2)}{2}$

$j_{k+1} = a + \frac{((i_{k+1}-1)+1)((i_{k+1}-1)+2)}{2}$

$j_{k+1} = a + \frac{(i_{k+1}-1+1)(i_{k+1}-1+2)}{2}$

$j_{k+1} = a + \frac{(i_{k+1})(i_{k+1}+1)}{2}$

$j_{k+1} = a + \frac{(i_{k+1}+1)i_{k+1}}{2}$ CQD!

<u>Término:</u>

$\boxed{\text{i=n}}$

$j_k = a + \frac{(i_k+1)i_k}{2} \rightarrow \text{j}_k = a + \frac{(n+1)n}{2}$

5 Questão 5

(7,0 pontos) Uma sequência é definida pela recorrência.

$S(0) = 1$

$S(1) = 1$

$S(n) = 2S(n-1) + S(n-2)$, para n ≥ 2

Usando o 2º Princípio de Indução, prove que $S(n)$ é um número ímpar para n ≥ 0.

<u>Caso Base:</u>

$S(n) = 2S(n-1) + S(n-2)$

$S(2) = 2S(2-1) + S(2-2)$

$S(2) = 2S(1) + S(0)$

$S(2) = 2 \times 1 + 1$

$S(2) = 3$

$S(3) = 2S(3-1) + S(3-2)$

$S(3) = 2S(2) + S(1)$

$S(3) = 2 \times 3 + 1$

$S(3) = 7$

<u>Passo Indutivo:</u> Se uma propriedade vale de [2,k] então ele vale para k+1

<u>Supor que:</u>

<u>Mostrar que:</u>

6 Questão 6

Considere o algoritmo de Ordenação por Inserção.

OrdenaçãoInserção(A, n) //onde A é a lista a ser ordenada e n é o tamanho da lista

Para j = 2 até n
    chave = A[j]
    i = j - 1
    Enquanto$(i > 0)e(A[i] > chave)$
        A[i + 1] = A[i]
        i = i - 1
    Fim Enquanto
    A[i + 1] = chave
FimPara
Retorne A

a) (3,0 pontos) Apresente o teste de mesa para uma lista de 6 elementos.

<u>Teste de Mesa:</u>

Supondo que a lista fosse = [2,8,30,60,5,7], o algoritmo a organizaria da seguinte forma
$[2, 8, 30, 60, 60, 7]$
$[2, 8, 30, 30, 60, 7]$
$[2, 8, 8, 30, 60, 7]$
$[2, 5, 8, 30, 60, 60]$
$[2, 5, 8, 30, 30, 60]$
$[2, 5, 8, 8, 30, 60]$
$[2, 5, 7, 8, 30, 60]$

b) (3,0 pontos) Quantas trocas o algoritmo realiza em uma lista de n elementos, no pior caso.

No pior caso o algoritmo realizaria $(n-2)^2$ trocas, nesse caso a lista estaria organizada de forma decrescente necessitando assim da mudança de toda a sequência

c) (5,0 pontos) Prove que o algoritmo está correto, demonstrando que a invariante do laço abaixo é verdadeira.
"No começo de cada iteração do laço **"Para"** das linhas 1 a 8, a sub-lista A[1, ... ,j1] consiste nos elementos contidos originalmente em A[1, ... ,j1], mas estão ordenados" .