

## Modelagem exata para o problema de roteamento de estoque com janelas de tempo

Bruno Eckwert Demantova (Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização – GTAO, PPGEP/UFPR)

[bruno.demantova@ufpr.br](mailto:bruno.demantova@ufpr.br)

Cassius Tadeu Scarpin (Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização – GTAO, PPGEP/UFPR)

[cassiusts@ufpr.br](mailto:cassiusts@ufpr.br)

### Resumo:

O problema de roteamento de estoque (*Inventory Routing Problem* - IRP) consiste da minimização dos custos associados a uma cadeia de suprimentos por meio de decisões táticas e operacionais relacionadas à periodicidade e quantidade de entregas e roteamento dos veículos. Dentre as variações deste problema já propostas e estudadas na literatura, aborda-se neste trabalho o problema com a adição de restrições associadas a janelas de tempo de funcionamento dos clientes (*Inventory Routing Problem with Time Windows* - IRPTW). Neste trabalho propõe-se um modelo matemático exato para o IRPTW, considerando um fornecedor e um conjunto de clientes que devem ser atendidos dentro de seus períodos de funcionamento. Além disso, este estudo avalia o impacto no tempo computacional de otimização da variação de parâmetros relacionados à estrutura da cadeia de suprimentos e às janelas de tempo, bem como a qualidade das soluções relacionada aos indicadores de desempenho logístico. Avaliou-se um conjunto de 30 instâncias, com janelas de tempo de 6 e de 12 horas, obtendo-se a solução exata em 53% e 36% dos problemas, respectivamente, dentro de um limite de tempo de 1 hora de otimização. Percebeu-se que um fator que explica essa diferença é o maior número de possibilidades de roteamento associado às janelas de tempo maiores, o que aumenta o espaço de busca do algoritmo e consequentemente o tempo de otimização.

**Palavras chave:** Controle de estoque, Roteamento de veículos, Janelas de tempo.

## An exact model for the inventory routing problem with time windows

### Abstract

The inventory routing problem (IRP) focuses on minimizing the total costs of a supply chain through tactical and operational decisions related to periodicity, delivery quantity, and vehicle routing. From the several variations of this problem proposed and studied in the literature, this paper focuses on the variation that considers time windows constraints for customer deliveries (*Inventory Routing Problem with Time Windows* - IRPTW). This paper proposes an exact mathematical model for the IRPTW considering one supplier and a set of customers, which must be served within their determined times of operation. This paper also evaluates the impact of parameters associated to the supply chain's structure and to the time windows themselves, on the computational times of the optimization process, and on the overall solution quality associated to the logistical performance indicators. A group of 30 instances was tested with time windows of both 6 and 12 hours, obtaining an exact solution in 53% and 36% of the cases, respectively, for a one-hour optimization period. A factor that contributes to this difference is the larger amount of routing possibilities associated with larger time windows, which increases both the problem's search space and the total optimization time.

**Key-words:** Inventory control, Vehicle routing, Time windows.

## 1. Introdução

O problema de roteamento de estoque (*Inventory Routing Problem* - IRP) tem sua origem no artigo seminal de Bell et al. (1983), no qual o controle de estoque da empresa *Air Products and Chemicals, Inc.* foi integrado ao serviço de roteamento de veículos, de modo a minimizar o custo total de uma cadeia de suprimentos por meio da aplicação de políticas de controle de estoque. A combinação do problema de roteamento de veículos (*Vehicle Routing Problem* - VRP) com o problema de controle de estoque (*Inventory Control Problem* - ICP), usando uma filosofia que busca o ganho comum de fornecedores e clientes por meio da otimização do estoque de ambos, chamada *Vendor Managed Inventory* (VMI), origina o IRP em sua forma mais básica.

Extensões do IRP foram elaboradas por esses próprios autores, sendo grande parte destas originadas em adaptações do VRP (COELHO, CORDEAU E LAPORTE, 2014). Dentre essas extensões, destaca-se alterações no número de períodos de tempo de planejamento do problema, número de fornecedores e clientes da cadeia de suprimentos, tipo de roteamento, política de estoque e homogeneidade da frota de veículos (ANDERSSON, HOFF, CHRISTIANSEN, HASLE E LØKKETANGEN, 2010). Atualmente outras variações mais complexas já vem sendo estudadas, como: Maior quantidade de elos na cadeia de suprimentos, frotas heterogêneas, velocidade de deslocamentos do veículos dependendo do instante de tempo que passa por uma determinada via, consideração de trânsito e integração com o carregamento do veículo (GUIMARÃES, COELHO, SCHENEKEMBERG E SCARPIN, 2018).

Outros autores também elaboraram novos problemas a partir do IRP. Coelho et al (2014) cita alguns desses novos problemas, como o problema de roteamento de produção (*Production Routing Problem* - PRP), o IRP com múltiplos produtos, o IRP com entregas diretas e transbordo (*Inventory Routing Problem with Transshipment* - IRPT) e o IRP com demandas probabilísticas (*Stochastic Inventory Routing Problem* - SIRP).

Uma dessas variantes é o problema de roteamento de estoque com janelas de tempo (*Inventory Routing Problem with Time Windows* – IRPTW), que visa a minimização do custo de uma cadeia de suprimentos através de decisões em conjunto de estoque e roteirização, respeitando também restrições de janelas de tempo relacionadas aos clientes e fornecedores. Ao contrário da roteirização de veículos com janelas de tempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows* - VRPTW), que possui diversos estudos acerca de algoritmos exatos (BALDACCI, MINGOZZI E ROBERTI, 2011) e heurísticos de resolução (EL-SHERBENY, 2010), assim como instâncias referência para testes (SOLOMON, 1987), o IRPTW começou a ser abordado com mais intensidade nos últimos anos.

Lau, Lim e Liu (2000) apresentaram um dos primeiros trabalhos a propor uma metodologia para o IRPTW que obtêm, com consistência, resultados factíveis com eficiência computacional para o problema. É proposto a decomposição do problema maior em dois subproblemas (distribuição e roteamento) e uma interface que possibilite a iteração em conjunto de dois diferentes algoritmos de resolução, utilizando conceitos de programação inteira e mista, programação de restrições e busca tabu.

Lau, Liu e Ono (2002) propõem um modelo simples, com um fornecedor distribuindo um produto para um conjunto de clientes com janelas de tempo específicas e penalizações associadas ao atraso de entregas (*backlog*). Uma combinação de modelos de fluxo de rede e busca local foi utilizada para a resolução do problema de controle de estoque, para em seguida

ser executada a resolução do roteamento associado, solucionando o problema de forma integrada.

Lau *et al* (2003) propuseram o IRPTW como um problema multiobjetivo e determinaram uma solução a partir de sua decomposição em subproblemas com objetivos únicos, com a aplicação de um algoritmo híbrido com colônia de formigas e busca tabu.

Liu e Lee (2011), considerando a escassez de modelos presentes na literatura, propuseram um modelo exato para o IRPTW com base no VRPTW e no ICP, em que um fornecedor com múltiplos veículos deve atender um conjunto de clientes sujeito a janelas de tempo não-rígidas, usando o conceito de tempo de ciclo de pedidos para determinar a periodicidade das entregas. Foi proposto uma metaheurística de duas fases, primeiro formando uma solução inicial e depois melhorando-a por meio de um algoritmo de busca local com busca tabu. Como o modelo admite que todos os clientes devem ser atendidos a cada período de ciclo de pedido, os autores apresentaram resultados a partir das instâncias de Solomon (1987), com soluções exatas para exemplos de menor escala e soluções heurísticas para casos maiores.

Li *et al* (2014) desenvolveram um modelo matemático para o IRP multiveículo com o objetivo de minimizar o tempo total de viagem, baseado no sistema de entrega de combustível de uma grande empresa petroquímica da China. Um modelo de programação inteira mista foi empregado em conjunto com um algoritmo de busca tabu e técnicas de relaxação lagrangeana. Os autores elaboraram instâncias próprias e apresentaram resultados exatos para exemplos de menor escala, enquanto problemas maiores foram solucionados com o uso de técnicas de relaxação e de uma metaheurística.

Lappas, Kritikos e Ioannou (2017) propuseram um modelo multiperíodo contendo um fornecedor e um conjunto de clientes que possuem janelas de tempo de funcionamento. São considerados um produto, uma frota de veículos homogênea e uma política *order-up-to-level* (OU). Uma meta-heurística de duas fases é proposta, em que a primeira determina os clientes a serem atendidos e as quantidades de produto entregue, enquanto a segunda usa busca local para determinar as rotas e os horários de atendimento aos clientes. Os resultados do algoritmo proposto foram avaliados junto a um conjunto de instâncias elaboradas pelos próprios autores.

Alguns trabalhos exploram características do VRPTW para criar modelos e algoritmos de solução para outras derivações do problema de roteamento com janelas de tempo. O SIRPTW (*Stochastic Inventory Routing Problem with Time Windows*) serviu como base para o trabalho de Zheng e Zhao (2010), que resolveu um problema IRP com janelas de tempo não-rígidas através de um processo de decisão de Markov. Alves (2018) desenvolveu um modelo SIRPTW que visa otimizar janelas de tempo de atendimento, capacidades de estoque nos clientes e fornecedor e níveis de confiança de atendimento individuais a cada cliente, ao mesmo tempo que considera demandas estocásticas para cada período de tempo. O autor usou relaxação lagrangeana e algoritmos heurísticos *Clarke & Wright* e *Simulated Annealing*, ambos adaptados para janelas de tempo.

Qiu *et al* (2018) apresentam uma formulação aplicada ao roteamento de produção com janelas de tempo (*Production Routing Problem with Time Windows - PRPTW*), com um algoritmo *branch-and-cut* e inequações válidas. Uma matheurística é usada em instâncias maiores, que combina conceitos de busca local, busca tabu e *Simulated Annealing*.

Por ser uma combinação dos problemas de controle de estoque e de roteamento de veículos, o IRPTW possui uma estrutura *NP-Hard* (LIU E LEE, 2011). Usualmente aplicam-se heurísticas para a aceleração do processo de otimização e convergência dos modelos, o que acaba gerando

uma escassez de resultados para abordagens exatas. A formulação do problema entre os autores também é bastante variada. Enquanto alguns autores admitem o IRPTW como uma variação do problema de roteamento com janelas de tempo, em que o principal foco é a roteirização eficaz dos veículos de entrega através da minimização dos caminhos percorridos, outros já integram aspectos de controle de estoque com maior relevância, porém o número restrito de trabalhos na área e as diferentes abordagens tomadas entre os autores tornam o problema geral bastante variado.

De maneira a elaborar um problema em que ambos esses focos sejam considerados e possuam relevância similar, este trabalho propõe uma abordagem exata para o IRPTW considerando um problema de roteamento de estoque com um único veículo capacitado e uma política de reabastecimento OU, restrições de *stock-out* tanto no fornecedor quanto nos clientes e um planejamento multiperíodo. Também avalia-se a influência do tamanho da cadeia de suprimentos e de parâmetros de janela de tempo nos tempos computacionais dos modelos. Para isso, uma adaptação do modelo matemático proposto no trabalho de Archetti et al (2007) foi desenvolvida.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 deste artigo é apresentada a proposta de modelagem para o problema IRPTW. Na seção 3 é apresentado o modelo matemático do IRPTW, assim como considerações e comentários referentes às restrições do problema. A seção 4 mostra os resultados computacionais aplicados às instâncias base e a seção 5 apresenta as conclusões referentes ao trabalho.

## 2. Descrição do Problema

O modelo matemático deste trabalho foi baseado na formulação proposta por Archetti *et al* (2007) para um problema de roteamento de estoque entre um fornecedor e um conjunto de clientes com demandas determinísticas. Em conjunto a esta formulação, restrições de janela de tempo adaptadas de Solomon (1983) foram utilizadas de modo a implementar as condições de funcionamento do fornecedor e dos clientes.

Um fornecedor (considera-se o ponto 0) deve realizar entregas de um produto para um conjunto de clientes  $M = \{1, 2, \dots, C\}$  em um período de planejamento  $T = \{1, 2, \dots, H\}$ . A cada instante de tempo  $t \in T$  os clientes  $i \in S$  devem atender uma demanda fixa  $r_i$  e devem operar dentro de uma janela de tempo que inicia em um horário  $ET_i$  e termina em um horário  $LT_i$ . O fornecedor recebe novos produtos a uma taxa fixa de  $r_0$  para  $t \in T$  e opera com uma janela de tempo que inicia em  $ET_0 = 0$  e termina em  $LT_0 = 24$ .

Ambos o fornecedor e os clientes possuem um nível de estoque máximo ( $U_0$  e  $U_i$ ), um nível de estoque mínimo (nesse caso é igual a 0) e custos de armazenamento ( $h_0$  e  $h_i$ ). O fornecedor e os clientes tem seus níveis de estoque calculados pela variável  $I_{it}$  com  $i \in M' = \{0, 1, \dots, C\}$ , para um período de planejamento  $T' = \{1, 2, \dots, H + 1\}$ , de modo a levar em conta o impacto das decisões tomadas no período  $H$ . A política de reabastecimento de clientes considerada é do tipo OU, que implica que, se um cliente é designado para ser visitado por um veículo do armazém, ele deverá receber uma quantidade de produto  $x_{it}$  igual a diferença entre seu nível máximo de estoque e seu valor atual de estoque ( $U_i - I_{it}$ ).

As entregas podem ser realizadas em todos os períodos  $t \in T$ , por um veículo de capacidade  $C_v$  que deve visitar todos os clientes que forem designados para o dado instante de tempo.

Os custos de transporte  $c_{ij}$  e tempos de deslocamento  $t_{ij}$  entre pontos  $i, j \in M'$  são proporcionais às distâncias euclidianas entre esses pontos, sendo o tempo de atendimento no cliente considerado incluso em  $t_{ij}$ . Uma variável binária  $y_{ijt}$  tem valor 1 se o arco com início em  $i$  e fim em  $j$  é percorrido no instante  $t$ , ou valor 0 no caso contrário. Uma variável  $z_{it}$  terá valor

igual 1 caso o cliente/fornecedor  $i \in M'$  seja designado para ser visitado/operar no período  $t$ , ou valor 0 caso contrário. O fornecedor e os clientes deverão ter o início de seu atendimento em um dado horário  $s_{it}$ , de modo que  $ET_i \leq s_{it} \leq LT_i$  para  $t \in T$  e  $i \in M'$ , sendo necessário considerar um horário de retorno do veículo para o armazém, este determinado através da variável  $s_{Ct}$ .

Além da minimização dos custos de armazenamento associados aos clientes e ao fornecedor, propõe-se também minimizar o período de operação do veículo de entrega, por meio da penalização de uma parcela  $s_{Ct} - s_{0t}$ . Para isso, foi admitido um custo de operação  $m = 1$  por hora para o veículo.

### 3. Modelo Matemático

O modelo matemático para o problema proposto pode ser representado pelo conjunto de expressões disposto abaixo.

$$\min Z = \sum_{t=1}^{H+1} h_0 I_{0t} + \sum_{i=1}^C \sum_{t=1}^{H+1} h_i I_{it} + \sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^C \sum_{t=1}^H c_{ij} y_{ijt} + \sum_{t=1}^H m(s_{Ct} - s_{0t}) \quad (1)$$

Sujeito à:

$$I_{0t} = I_{0t-1} + r_0 - \sum_{i=1}^C x_{it-1}, \forall t \in T' \quad (2)$$

$$I_{00} = B_0 \quad (3)$$

$$I_{it} = I_{it-1} - r_i + x_{it-1}, \forall i \in M, \forall t \in T' \quad (4)$$

$$I_{i0} = B_i, \forall i \in M \quad (5)$$

$$I_{0t} \geq \sum_{i=1}^C x_{it}, \forall t \in T \quad (6)$$

$$x_{it} \geq U_i z_{it} - I_{it}, \forall i \in M, \forall t \in T \quad (7)$$

$$x_{it} \leq U_i - I_{it}, \forall i \in M, \forall t \in T \quad (8)$$

$$x_{it} \leq U_i z_{it}, \forall i \in M, \forall t \in T \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^C x_{it} \leq C_v, \forall t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^C x_{it} \leq C_v z_{0t}, \forall t \in T \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^C y_{ijt} + \sum_{j=0}^C y_{jit} = 2z_{it}, \forall i \in M', \forall t \in T \quad (12)$$

$$\sum_{j=0}^C y_{ijt} = z_{it}, \forall i \in M', \forall t \in T \quad (13)$$

$$s_{it} + t_{ij} - s_{jt} \leq M_g(1 - y_{ijt}), \forall i \in M', \forall j \in M, \forall t \in T \quad (14)$$

$$s_{it} + t_{io} - s_{Ct} \leq M(1 - y_{iot}), \forall i \in M, \forall t \in T \quad (15)$$

$$s_{it} \leq LT_i z_{it}, \forall i \in M' \cup \{C\}, \forall t \in T \quad (16)$$

$$s_{it} \geq ET_i z_{it}, \forall i \in M' \cup \{C\}, \forall t \in T \quad (17)$$

$$I_{it} \geq 0, \forall i \in M, \forall t \in T' (\text{inteiro}) \quad (18)$$

$$B_t \geq 0, \forall t \in T' (\text{inteiro}) \quad (19)$$

$$x_{it} \geq 0, \forall i \in M, \forall t \in T (\text{inteiro}) \quad (20)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\}, \forall i \in M', \forall j \in M', \forall t \in T \quad (21)$$

$$z_{it} \in \{0,1\}, \forall i \in M, \forall t \in T \quad (22)$$

$$s_{it} \geq 0, \forall i \in M' \cup \{C\}, \forall t \in T \quad (23)$$

A equação (1) determina a função objetivo de minimização, em que o primeiro termo representa os custos associados ao estoque do fornecedor, o segundo representa os custos associados ao estoque dos clientes, o terceiro representa os custos associados ao transporte fornecedor-clientes (onde  $i \neq j$ ) e o último termo representa os custos associados às horas de serviço do veículo de entrega.

As restrições (2) e (3) garantem o balanceamento de entrada e saída no estoque do fornecedor ao longo do período de planejamento, assim como determina um estoque inicial conhecido para o primeiro período.

As restrições (4) e (5), de forma análoga, garantem o balanço de entrada e saída no estoque dos clientes ao longo do período de planejamento e determina um estoque inicial conhecido para o primeiro período.

As restrições (6) evitam a ruptura ou *stock-out* (falta de produto) no fornecedor, enquanto que as restrições (7), (8) e (9) representam a política OU aplicada aos clientes. As restrições (10) impõe a restrição de capacidade de carga do veículo de entrega.

As restrições (11), (12), (13) e (14), em conjunto, determinam as restrições de roteamento do problema. As restrições (11) determinam que se uma entrega ocorre, o fornecedor deve necessariamente estar incluso na rota final. As restrições (12) impõem que se um fornecedor ou cliente  $i$  é visitado, tanto um arco de chegada quanto um de saída do ponto devem ser usados (em que  $i \neq j$ ). As restrições (13) relacionam as variáveis de designação com as de transporte, evitando que mais de um arco saia de um determinado ponto.

As restrições (14) e (15) representam as adaptações realizadas a partir do modelo de Solomon (1983) e são referentes às janelas de tempo, impondo que um ponto  $j$  visitado imediatamente após um ponto  $i$  deverá possuir um horário de atendimento condizente com o horário de atendimento do ponto anterior e com o tempo de transporte entre os dois pontos. A constante  $M_g$  refere a um valor positivo suficientemente grande. Neste trabalho utilizou-se  $M_g$  com o

valor de 999, de modo a garantir um limitante superior suficientemente grande para as restrições de janela de tempo.

As restrições (16) e (17) conectam as variáveis de designação com as limitações de janela de tempo, impondo que um ponto deva ser visitado dentre os limites de horário inferior e superior estabelecidos.

As restrições (18) a (23) são referentes às condições de integralidade e binariedade das variáveis.

#### **4. Resultados e Discussão**

Os testes foram realizados utilizando como base as instâncias disponibilizadas no artigo de Archetti *et al* (2007). Essas instâncias contém: valores de coordenadas para os clientes/fornecedor, demandas, entrada de produtos no fornecedor, capacidades de transporte, custos e capacidades de armazenamento para cada cliente/fornecedor.

Em conjunto com os valores pré-determinados desses exemplos, janelas de tempo para cada cliente foram geradas a partir de uma distribuição uniforme, com a semente desta distribuição sendo determinada a partir da soma das coordenadas x e y de cada cliente. Para um dado período e um determinado intervalo de funcionamento TW, as janelas de tempo podem ser determinadas da seguinte maneira.

$$ET_i = U(0,24 - TW) \quad (24)$$

$$LT_i = ET_i + TW \quad (25)$$

Assume-se que o fornecedor opera ao longo de todo o período, possuindo então  $ET_0 = 0$  e  $LT_0 = 24$ . A faixa de valores foi escolhida de modo que cada instante de planejamento ilustrasse a operação diária do fornecedor.

O tempo de percurso de um arco  $i, j$  é dependente do número de clientes presentes no sistema pode ser calculado pela relação (26).

$$t_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{20c} \quad (26)$$

Foi escolhida a categoria de instâncias “*lowcost\_H6*”, que considera sistemas de 5 a 30 clientes e seis períodos de planejamento. Os modelos exatos elaborados foram programados em linguagem C++ e solucionados com o uso do software GUROBI 8.0.2.

Um total de 60 instâncias foram resolvidas, para janelas de tempo de 6 e 12 horas, com um limite de tempo de resolução de 1(uma) hora para cada uma. Os resultados obtidos estão na Tabela 1 e Tabela 2.

Instância	TW	Tempo (s)	Gap	Z
abs1n5	6	0,34	0	3383,81
abs1n10	6	227,06	0	5054,02
abs1n15	6	271,69	0	6085,14
abs1n20	6	3235,56	0	8102,06
abs1n25	6	3600	14,64%	10347,20
abs1n30	6	3600	10,38%	11482,30
abs2n5	6	0,32	0	3015,25
abs2n10	6	9,54	0	6339,65
abs2n15	6	419,18	0	6662,71
abs2n20	6	1760,88	0	7500,20

abs2n25	6	3600	5,34%	9473,91
abs2n30	6	3600	13,04%	11120,90
abs3n5	6	0,26	0	5116
abs3n10	6	7,91	0	5169,63
abs3n15	6	65,11	0	7455,93
abs3n20	6	3600	9,10%	8855,30
abs3n25	6	3600	12,76%	10043,30
abs3n30	6	3600	7,06%	10793,30
abs4n5	6	0,20	0	3433,51
abs4n10	6	56,41	0	6161,72
abs4n15	6	3600	2,24%	5703,28
abs4n20	6	3600	10,57%	9973,39
abs4n25	6	3600	0,52%	9160,90
abs4n30	6	3600	13,17%	11233,60
abs5n5	6	0,31	0	2555,49
abs5n10	6	9,24	0	5137,07
abs5n15	6	30,06	0	6375,25
abs5n20	6	3600	0,98%	9148,95
abs5n25	6	3600	11,71%	9707,40
abs5n30	6	3600	10,18%	10008,90

Fonte: Os autores (2018)

Tabela 1 - Resultados dos testes realizados com janela de tempo de seis horas

Instância	TW	Tempo (s)	Gap	Z
abs1n5	12	1,39	0	3360,66
abs1n10	12	3600	3,43%	4517,52
abs1n15	12	3600	2,32%	5477,46
abs1n20	12	3600	11,13%	6614,40
abs1n25	12	3600	10,98%	7331,31
abs1n30	12	3600	20,40%	9199,08
abs2n5	12	2,06	0	2742,84
abs2n10	12	54,99	0	5259,09
abs2n15	12	3600	3,86%	5509,67
abs2n20	12	3600	11,81%	6352,06
abs2n25	12	3600	12,22%	7583,12
abs2n30	12	3600	5,31%	7869,73
abs3n5	12	4,75	0	4813,78
abs3n10	12	149,26	0	4671,72
abs3n15	12	962,33	0	6101,81
abs3n20	12	3600	2,21%	6964,73
abs3n25	12	3600	22,74%	9248,57
abs3n30	12	3600	13,51%	9068,02
abs4n5	12	0,42	0	3271,95
abs4n10	12	2079,11	0	5563,69

abs4n15	12	3600	6,36%	5554,53
abs4n20	12	3600	14,19%	7957,95
abs4n25	12	3600	3,32%	7717,18
abs4n30	12	3600	5,98%	7839,64
abs5n5	12	0,89	0	2437,81
abs5n10	12	62,56	0	5020,92
abs5n15	12	2257,65	0	5324,29
abs5n20	12	3600	18,82%	7753,98
abs5n25	12	3600	11,19%	7803,93
abs5n30	12	3600	12,90%	7778,92

Fonte: Os autores (2018)

Tabela 2 - Resultados dos testes realizados com janela de tempo de doze horas

Para janelas de tempo de 6 horas, 53% das instâncias obtiveram resultados ótimos dentro do período de uma. Já para instâncias com janelas de tempo de 12 horas, 36% dos problemas atingiram uma solução ótima dentro do intervalo de tempo estipulado. O valor de gap médio para instâncias que atingiram o tempo limite de otimização foi de 8,7% para janelas de 6 horas, e de 10,14% para janelas de 12 horas.

Embora exista variabilidade dentre os casos estudados devido a estrutura NP-hard do problema, observa-se que sistemas com janelas de 6 horas com 20 ou mais clientes possuem uma maior dificuldade de resolução, enquanto que com janelas de 12 horas esse número cai para 15 clientes.

Os resultados presentes nas tabelas 1 e 2 mostram que as instâncias com janelas de tempo menores possuíram um desempenho computacional melhor do que instâncias com janelas maiores. Isso pode decorrer do fato de haverem menos opções de roteamento factíveis devido às janelas mais restritas, enquanto instâncias maiores oferecem maior flexibilidade de escolha de clientes na formação de rotas.

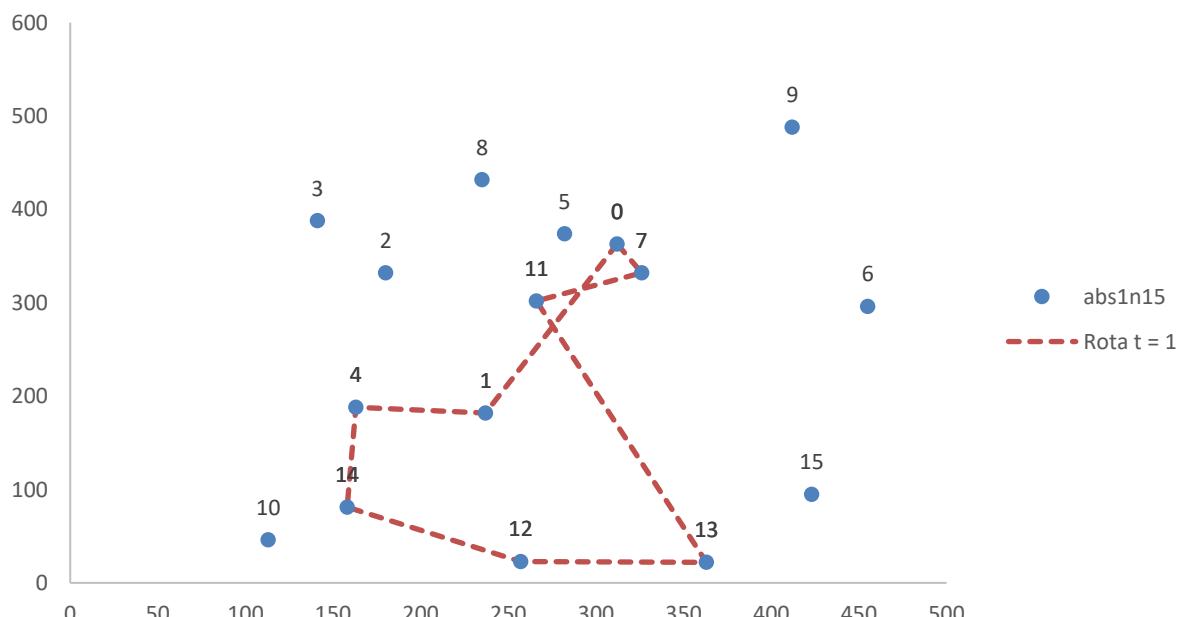


Figura 1 - Rota para a instância abs1n15 com TW = 6 no tempo t = 1

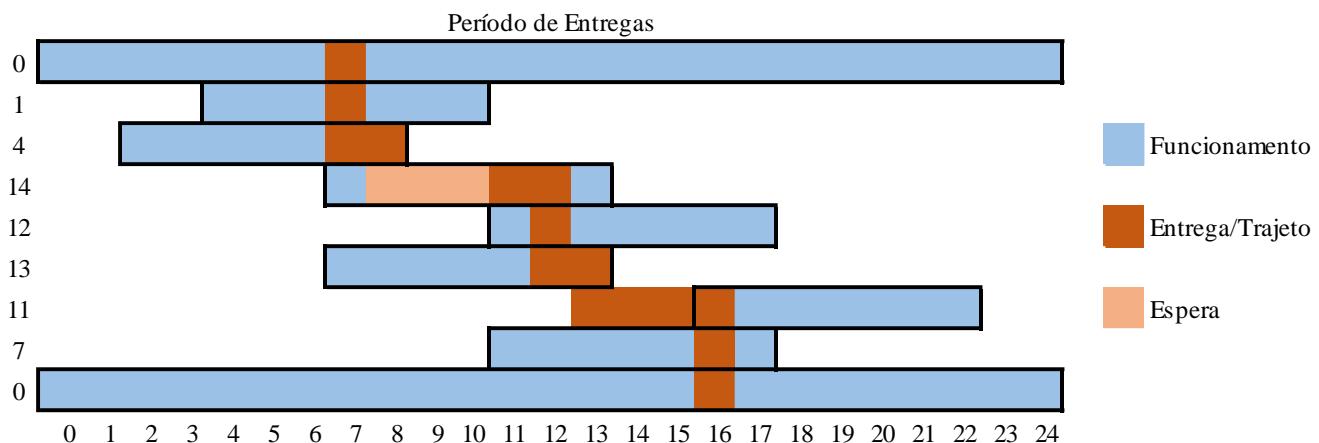


Figura 2 - Gráfico de Gantt para a instância abs1n15 com TW = 6 no tempo t = 1

Os desafios associados ao roteamento com janelas de tempo ficam evidenciados na Figura 2, que demonstra os resultados obtidos para uma instância com 15 clientes e janelas de tempo de 6 horas. Embora os clientes 7 e 11 estejam posicionados mais próximos do fornecedor do que o cliente 1, para que o roteamento respeite as condições de funcionamento de todos os clientes designados na rota é necessário que seus atendimentos sejam realizados posteriormente, devido a seus períodos de operação começarem apenas às 11h e 16h, respectivamente.

Também é interessante observar que embora os clientes 4 e 14 estejam posicionados próximos um ao outro, existe um tempo de espera no atendimento do cliente 14, de modo que o horário de saída do ponto permita realizar os atendimentos restantes sem nenhum tempo ocioso entre eles.

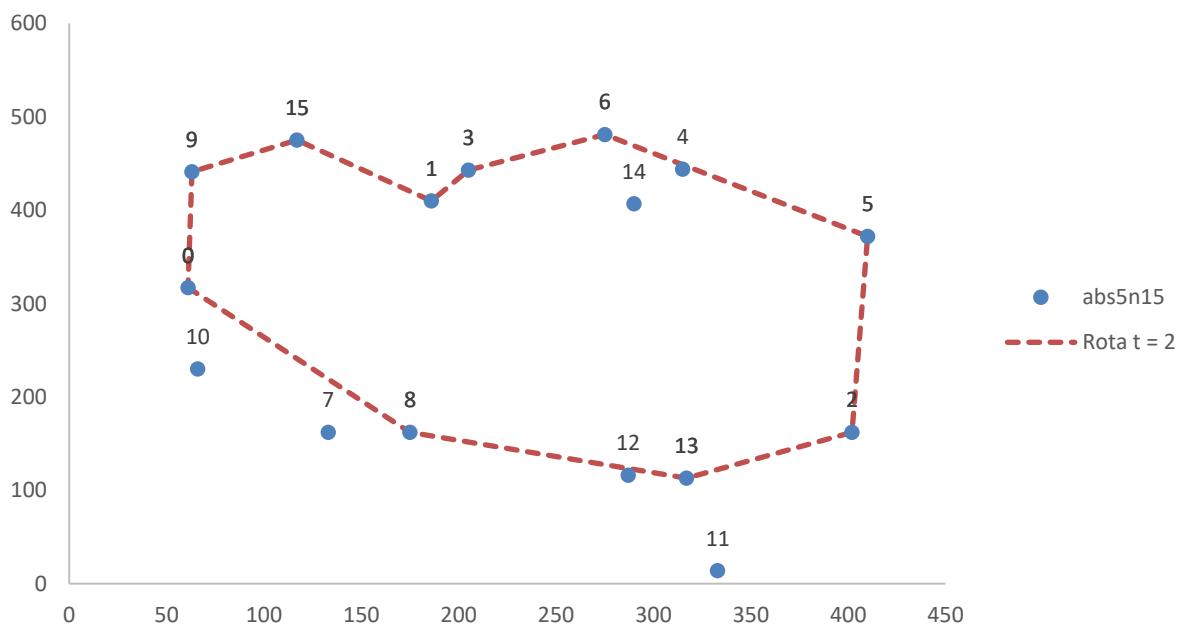


Figura 3 - Rota para a instância abs5n15 com TW = 12 no tempo t = 2

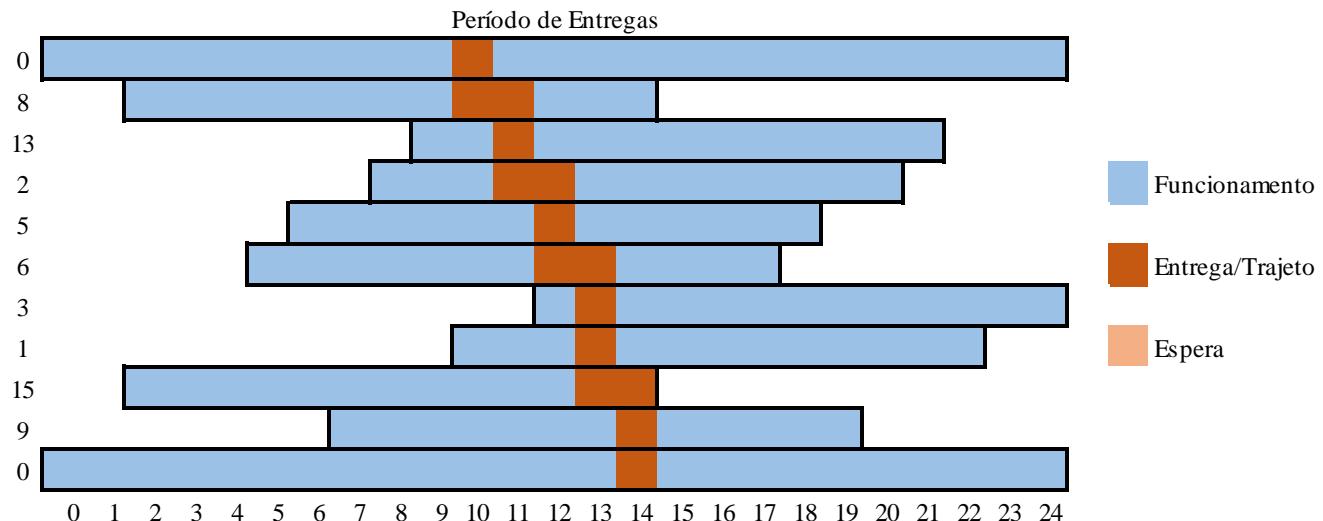


Figura 4 - Gráfico de Gantt para a instância abs5n15 com TW = 12 no tempo t = 2

A Figura 4 demonstra a flexibilidade de roteamento associada às janelas de tempo maiores para o período de processamento computacional limitado em uma hora. Tomando como referência os clientes designados para atendimento no período, existem mais opções de escolha de ordem de atendimento dos mesmos sem que haja necessariamente infactibilidade na solução, aumentando assim o espaço de busca do problema e consequentemente ocasionando maiores tempos de resolução. Paralelamente, foi observada a redução, ou até mesmo inexistência, de períodos ociosos entre entregas nesses casos.

## 5. Conclusão

Neste trabalho foi proposto um modelo matemático para a resolução de um problema de roteamento de estoque com janelas de tempo. Foi utilizada uma formulação baseada no IRP com um veículo e restrições individuais de horários de atendimento para cada cliente e fornecedor. O objetivo do modelo era avaliar, simultaneamente, decisões de controle de estoque e decisões de roteamento para cada período de um dado intervalo de planejamento, de modo que todos os clientes possam atender suas demandas e operar dentro de suas condições de funcionamento.

Instâncias de 5 a 30 clientes, para um planejamento de seis períodos de tempo e janelas de tempo de 6 e 12 horas foram avaliadas, sendo analisado o impacto desses parâmetros sobre a eficiência computacional do modelo. Para janelas de tempo de 6 horas, o modelo apresentou resultados exatos consistentes até instâncias com 15 clientes, enquanto instâncias com janelas de 12 horas apresentaram melhores resultados para instâncias até 10 clientes. O tamanho das janelas de tempo também influencia nas decisões de rota, já que janelas maiores proporcionam mais opções de roteamento, e consequentemente geram um maior espaço de busca para o algoritmo dentro do limite de uma hora para o processamento computacional de busca da solução.

Os tempos computacionais para as instâncias aqui resolvidas deixam evidente o motivo de meta-heurísticas serem um dos principais artifícios de resolução para o IRPTW. É interessante destacar que, embora os casos mais simples do IRPTW existam em escassez na literatura, já existem estudos focados na resolução de problemas mais complexos que o próprio IRP com janelas de tempo, como o PRP ou o PDIRP. Estudos futuros podem ser feitos de modo a integrar

os métodos de resolução encontrados nestes trabalhos com o IRPTW, como o uso de métodos heurísticos e métodos de relaxação, por exemplo.

## Referências

- ALVES, P.** *Problema de estoque e roteirização com demanda estocástica e janelas de tempo: uma abordagem utilizando relaxação lagrangeana.* Universidade de São Paulo, p. 0-110, 2018.
- ANDERSSON, H.; HOFF, A.; CHRISTIANSEN, M.; HASLE, G.; LØKKETANGEN, A.** *Industrial aspects and literature survey: Combined inventory management and routing.* Computers & Operations Research, v. 37, n. 9, p. 1515–1536, 2010.
- ARCHETTI, C.; BERTAZZI, L.; LAPORTE, G.; SPERANZA, M. G.** *A Branch-and-Cut Algorithm for a Vendor-Managed Inventory-Routing Problem.* Transportation Science, v. 41, n. 3, p. 382–391, 2007.
- BALDACCI, R.; MINGOZZI, A.; ROBERTI, R.** *Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints.* European Journal of Operational Research, v. 218, n. 1, p. 1–6, 2012.
- BELL, W. J.; DALBERTO, L. M.; FISHER, M. L.** *Improving the Distribution of Industrial Gases with an On-Line Computerized Routing and Scheduling Optimizer.* Interfaces, v. 13, n. 6, p. 4–23, 1983.
- COELHO, L. C.; CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G.** *Thirty Years of Inventory Routing.* Transportation Science, v. 48, n. 1, p. 1–19, 2014.
- EL-SHERBENY, N. A.** *Vehicle routing with time windows: An overview of exact, heuristic and metaheuristic methods.* Journal of King Saud University - Science, v. 22, n. 3, p. 123–131, 2010.
- GUIMARÃES, T. A.; COELHO, L. C.; SCHENEKEMBERG, C. M.; SCARPIN, C. T.** *The two-echelon multi-depot inventory-routing problem.* Computers & Operations Research, 2018. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0305054818302144>>. Acesso em: 20/9/2018.
- LAU, H. C.; LIM, A.; LIU, Q. Z.** *Solving a Supply Chain Optimization Problem Collaboratively.* AAAI-00, p. 0-6, 2000.
- LAU, H. C.; LIU, Q.; ONO, H.** *Integrating Local Search and Network Flow to Solve the Inventory Routing Problem.* AAAI-02, p. 0-6, 2002.
- LAU, H. C.; LIM, M. K.; WAN, W. C.; WANG, H.; WU, X.** *Solving Multi-Objective Multi-Constrained Optimization Problems Using Hybrid Ants System and Tabu Search.* MIC2003: The Fifth Metaheuristics International Conference, p. 10, 2003.
- LI, K.; CHEN, B.; SIVAKUMAR, A. I.; WU, Y.** *An inventory-routing problem with the objective of travel time minimization.* European Journal of Operational Research, v. 236, n. 3, p. 936–945, 2014.
- LIU, S.-C.; LEE, W.-T.** *A heuristic method for the inventory routing problem with time windows.* Expert Systems with Applications, v. 38, n. 10, p. 13223–13231, 2011.
- PANTELIS Z. LAPPAS; MANOLIS N. KRITIKOS; GEORGE D. IOANNOU.** *A Two-phase Solution Algorithm for the Inventory Routing Problem with Time Windows.* Journal of Mathematics and System Science, v. 7, n. 9, 2017.
- SOLOMON, M. M.** *Vehicle routing and scheduling with time window constraints: Models and algorithms.* 1983.
- SOLOMON, M. M.** *Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints.* Operations Research, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987.
- QIU, Y.; WANG, L.; FANG, X.; PARDALOS, P. M.; GOLDENGORIN, B.** *Formulations and branch-and-cut algorithms for production routing problems with time windows.* Transportmetrica A: Transport Science, v. 14, n. 8, p. 669–690, 2018.
- ZENG, W.; ZHAO, Q.** *Study of Stochastic Demand Inventory Routing Problem with Soft Time Windows Based on MDP.* Advances in Neural Network Research and Applications. v. 67, p.193–200, 2010.