

Numerisk Integration

Søren Fritzboøger 3F
HTX Hillerød - Erhversskolen Nordsjælland
Vejleder: Stig og CHR

2. Februar 2015

Abstract

This article demonstrates a basic set of LaTeX formatting commands. Compare the typeset output side-by-side with the input document.smøøre

Indhold

1	Spørgsmål	1
2	Trapezmetoden	3
2.1	Bevis for trapezmetoden	3
2.1.1	Opdeling i intervaller	5
	Litteratur	7

1 Spørgsmål

Jeg har fået følgende spørgsmål stillet af Christian, som er min vejleder i IT

- Lav en kort (30-40 linjer) beskrivelse af dit emne.
- Besvar de fem spørgsmål i pentagonen:
 1. Hvad spørger du om? (Hvad er din problemformulering)?

2. Hvorfor spørger du? (Hvad er de faglige problemstillinger? Hvad er interessant? Hvad undrer du dig over?)
 3. Hvad spørger du til? (Hvilket materiale skal du arbejde med? Hvad skal du analysere?)
 4. Hvad spørger du med? (Hvilke metoder vil du anvende?)
 5. Hvordan vil du gå frem? (Hvordan vil du strukturere og disponere din opgave?)
- Skriv en foreløbig kommenteret kildeliste

Disse spørgsmål vil jeg besvare på næste side.

2 Trapezmetoden

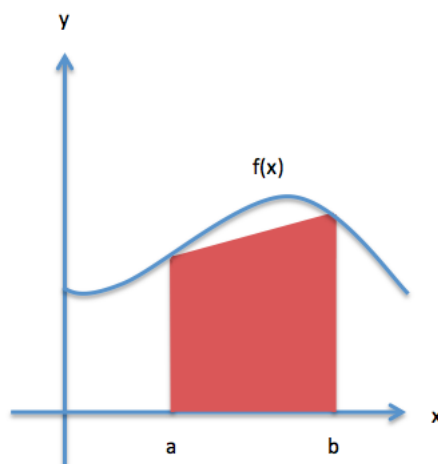
2.1 Bevis for trapezmetoden

Ved at bruge trapezmetoden kan vi tilnærmelsesvist finde det bestemte integral, selv for funktioner, hvor man ikke direkte kan bestemme det bestemte integral. Et eksempel på dette er funktionen $f(x) = e^{-x^2}$. For at bestemme arealet under en funktion vil vi gerne nærme os det bestemte integral.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Når $a < b$ og f er kontinuert og differentiabel i intervallet $[a; b]$, kan vi bruge trapezmetoden til at udregne det tilnærmelsesvist bestemte integral, som er arealet under funktionen.

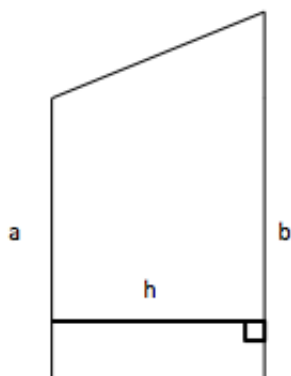
Som navnet trapezmetoden så fint hentyder til, opdeler vi vores funktion i en trapez, som vi udregner arealet af. Dette er illustreret på figur 1 her



Figur 1: Trapezmetoden

På figur 1 kan man se, hvordan trapezmetoden opdeler en parabel i en trapez. Denne trapez har intervallet $[a; b]$. Længden $a = f(a)$ og længden $b = f(b)$. Formlen for arealet af en trapez ses i formel 2.1

$$A = \frac{1}{2}h \cdot (a + b) \tag{2.1}$$



Figur 2: Trapez

Som man kan se på figur 2, er a og b er sidelænger og h er højden. I et trapez er højden defineret som afstanden mellem de to parallelle linjestykker, i dette tilfælde a og b , som man kan se illustreret på figur 2

Som man kan se på figur 2 svarer højden h til afstanden mellem a og b , som svarer til $h = b - a$. Når man indsætter henholdsvis a og b værdien ind i vores $f(x)$ funktion, får vi vores y værdi, som svarer til længden af henholdsvis a og b . Hvis vi indsætter dette i arealet for en trapez, får vi derfor:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2}h \cdot (a + b) && \Rightarrow \\
 &= \frac{1}{2}(b - a) \cdot (a + b) && \Rightarrow \\
 &= \frac{b - a}{2}(a + b) && \Rightarrow
 \end{aligned}$$

i stedet for a og b indsættes højderne på trapezens sider, $f(a)$ og $f(b)$

$$= \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b)) \quad (2.2)$$

Arealet af denne trapez svarer tilnærmelsesvist til arealet under funktionen. Så derfor kan vi sige at arealet af trapezen tilnærmelsesvist svarer til værdien af det bestemte integral:

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \quad (2.3)$$

2.1.1 Opdeling i intervaller

Som man kan se på figur 1 er trapezmetoden meget upræcis i forhold til det bestemte integral. Dette kan man forbedre ved at dele intervallet $[a; b]$ op i flere delintervaller, n . Dvs. at vi deler vores funktion op i mindre intervaller, som vi så finder arealet af med trapezmetoden. Disse delintervaller kalder vi for x_0, x_1, \dots, x_n . Vi skal bruge højden på trapezen, som er længden af delintervallet $x_0 - x_1$. I dette tilfælde svarer det til:

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} \quad (2.4)$$

Ud fra dette kan vi bestemme at højden, h , må svare til intervallet $[a; b]$ opdelt i n intervaller:

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (2.5)$$

Det samlede areal under funktionen kan betegnes som summen af alle delintervallerne:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \approx \int_a^b f(x) \quad \text{hvor } h = \frac{b-a}{n} \quad (2.6)$$

Når n går mod uendelig bliver vores delinterval infinitesimalt lille, hvilket vil sige at summen af alle trapezarealerne nærmer sig det bestemte integral. Det bestemte integral svarer faktisk til at vi deler arealet op i uendelige små og uendelig mange led.

For at udlede dette til formelen for trapezmetoden bliver vi nødt til at opskrive

dette på en lidt anden måde.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\
 &= h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1)\right) + h\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) + \cdots + h\left(\frac{1}{2}f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right) \\
 &= h \cdot \frac{1}{2}f(x_0) + h \cdot \frac{1}{2}f(x_1) + h \cdot \frac{1}{2}f(x_1) + h \cdot \frac{1}{2}f(x_2) + \cdots + h \cdot \frac{1}{2}f(x_{n-1}) + h \cdot \frac{1}{2}f(x_n)
 \end{aligned}$$

Dette bliver reduceret til formlen for trapezmetoden (2.7)

$$\boxed{\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))} \quad (2.7)$$

$$\text{Hvor } h = \frac{b-a}{n}$$

Litteratur

- [1] Christopher R. Johnson, *Denne kilde er et dokument med beviser, beskrivelse og andet af numerisk integration.*
Hamlet Project, Department of Computer Science, University of Utah,
<http://www.cs.utah.edu/~zachary/computing/lessons/uces-13/uces-13/contents-node1.html>
- [2] @mattmight, *En "tutorial" der viser hvordan man tegner en graf vha. html5 og canvas.*
<http://matt.might.net/articles/rendering-mathematical-functions-in-javascript-with-canvas-html/>
- [3] Aalborg Universitet, *Et foredrag fra Aalborg Universitet omhandlende Numerisk Integration.*
<http://staff.iha.dk/jse/bioproc/Forelaesningsnoter/BI1MAT1/Numeriske%20metoder%201.pdf>