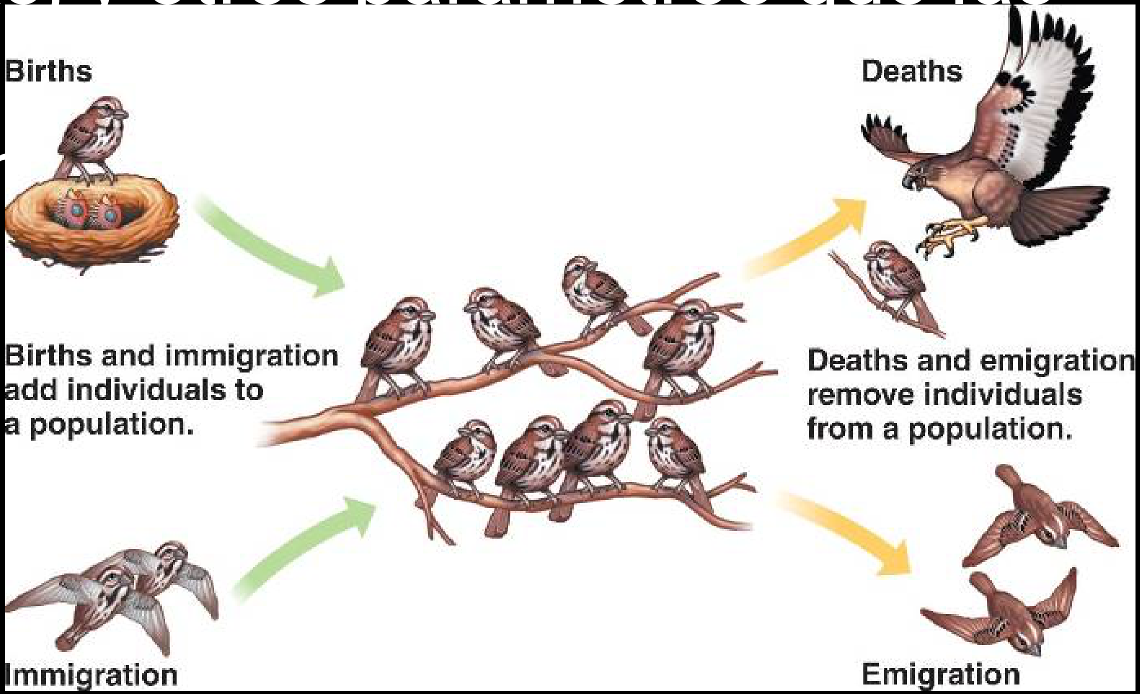
Tópicos en Ciencia de la Computación II

Dinámica de poblaciones

Prof. J.Fiestas

Dinámica de poblaciones:

Especialidad que se ocupa del estudio de los cambios que sufren las poblaciones en cuanto a tamaño, dimensiones físicas de sus miembros, estructura de edad, sexo, y otros parámetros que las definen, así como de los factores que causan esos cambios y los mecanismos por los que se producen.



Malthus (1798):

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (b-d)N = rN$$

Con b y d como tasas de nacimiento y muerte. N es la población.

Dimensiones: $[r] = [t^{-1}]$

Tiempo adimensional $\tau = rt$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\tau} = N$$

$$N(\tau) = N_0 \mathrm{e}^{\tau}$$

Malthus (1798):

Solución: crecimiento exponencial

$$N(\tau) = N_0 \mathrm{e}^{\tau}$$

Formulación adimensional
Brinda ley de crecimiento
universal sin parámetro libre

$$n(\tau) = N(\tau)/N_0$$

$$n(\tau) = \mathrm{e}^{\tau}$$

Ley de Malthus tiene $N^* = 0$ mo única, e inestable solución estacionaria

Malthus (1798):

Ley de Malthus tiene $N^* = 0$ mo única, e inestable solución estacionaria

Solucion estacionaria, estabilidad lineal:

Para $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = f(N)$ lución es N^*

estacionaria, si $f(N^*) = 0.$

Estabilidad lineal se prueba expandiendo

$$N(t) = N^* + n(t)$$

Malthus (1798):

Con

$$|n(t)| \ll 1$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = f'(N^*)n + \mathcal{O}(n^2)$$

Entonces

$$n(t) \simeq n(0)\exp[f'(N^*)t]$$

$$N^*\text{stable} \;\Leftrightarrow f'(N^*) < 0$$

Verhulst (1836):

Afirma que Malhust no es realistico, ya que el crecimiento es ilimitado. Define una capacidad finita K (alimentación, espacio d $\dot{N} > 0$ ible, et $N < K$

$\dot{N} < 0$ $N < K$

→ crecimiento logístico

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN(1 - N/K)$$

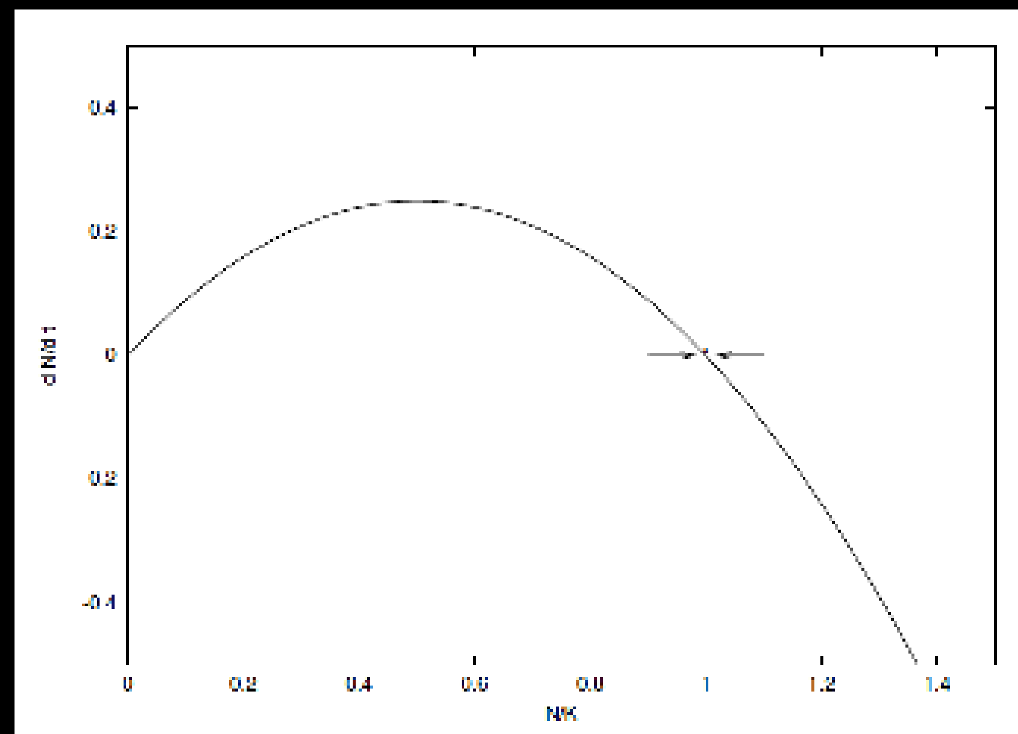
Soluciones estacionarias:

inesta $N^* = 0$

estable $N^* = K$

Verhulst (1836):

Dinámica cualitativa de Verhulst. Gráfica dN/dt vs. N



Verhulst (1836):

Dimensiones $[r] = [t^{-1}],\ [K] = [N]$

Cantidades adimensionales

$$\tau = rt,\ n = \frac{N}{K}$$

Ecuación adimensional

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau} = n(1-n)$$

Solución por separación de variables

Constante de integración

$$n(\tau) = \frac{n_0 e^{\tau}}{1 + n_0(e^{\tau} - 1)}$$

$$n(0) = n_0$$

Se logran reconstruir las dimensiones por substitución

Verhulst (1836):

Caso mas complejo

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = f(N) = rN(1 - N/K) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

Último término revela comportamiento limitado (threshold), i.e. relevante solo para $N > N_c \simeq A$

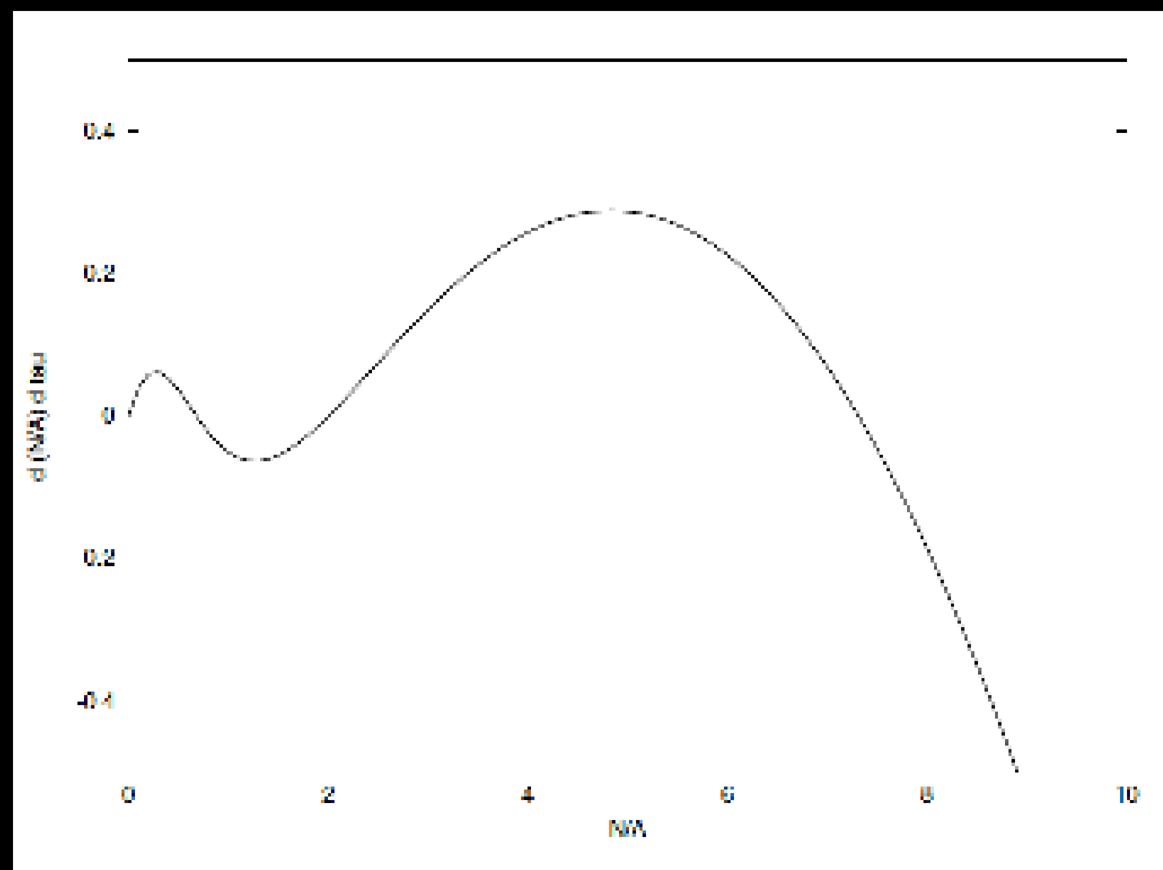
e.g. Modelos de dinámica de depredación de especies partiendo de una población crítica, como aves depredando larvas, siempre y cuando hayan suficiente población de larvas

Ver tambien: M. Scheer, S. Carpenter, J. A. Foley, C. Folke, and B. Walker, Catastrophic shifts in ecosystems, Nature, 413 591 (2001).

Verhulst (1836):

Caso mas complejo
K/A □ 10
rA/B□0.5

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = f(N) = rN(1 - N/K) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$



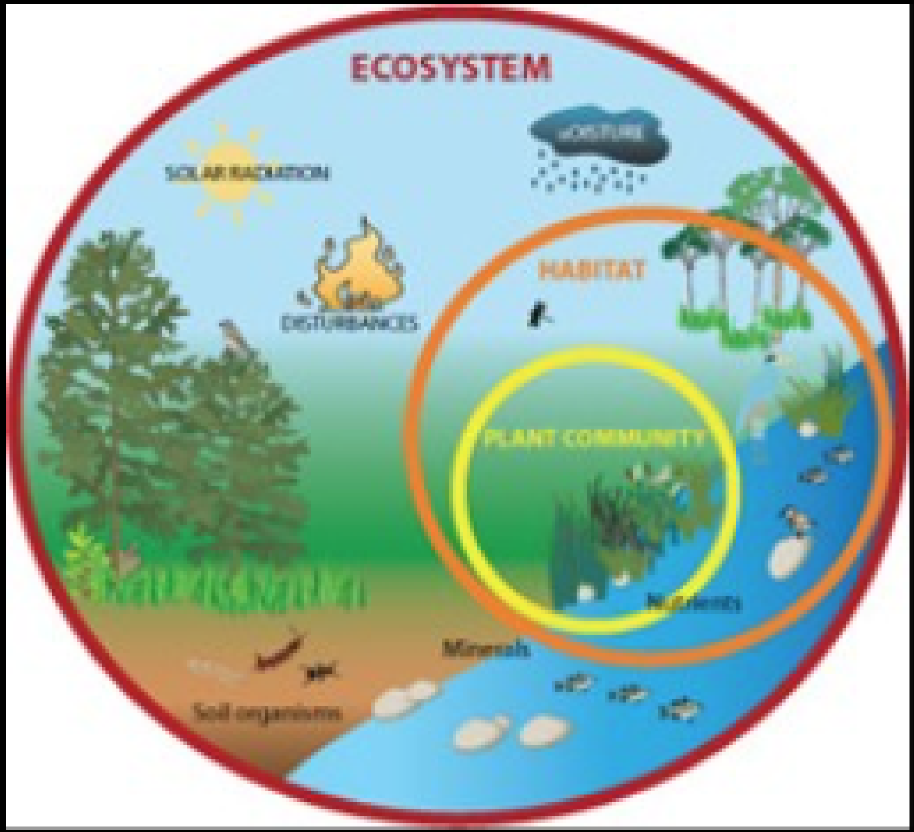
Ejemplo 1: Verhulst

```
int main(int argc, char *argv[]) {
....
double r,K,x0;

out.open("verhulst.txt")
...
x=r*n*(1-n/K); // x=dn/dt

out<<n<<"\t"<<x<<endl;
...
}
```

Interacción de poblaciones:

Mutua interacción de tasas de reproducción.

- Depredador – presa
- Competencia
- simbiosis



Sistema Volterra-Lotka

Caso simple: 2 poblaciones (e.g. depredador - presa)

Todos los parámetros a,b,c,d, son positivos. En caso Malthusiano, Seria crecimiento para N1, sin N2, y extinción De N2 (predador) sin N1 (presa)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= N_1(a - bN_2) \\
\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= N_2(cN_1 - d)
\end{aligned}
$$

Sistema Volterra-Lotka

Objetivo es predicción de cantidad de poblaciones, efectos de caza, pesca

Formulación adimensional

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = aN_1(1 - \frac{b}{a}N_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = dN_2(\frac{c}{d}N_1 - 1)$$

Con unidades adimensionales

$$\Rightarrow u_1 = \tfrac{c}{d}N_1,\ u_2 = \tfrac{b}{a}N_2\ \tau = at,\ \text{and}\ \alpha = \tfrac{d}{a}$$

Sistema Volterra-Lotka

Y ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\tau} &= u_1(1-u_2)\\ \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\tau} &= \alpha u_2(u_1-1)\end{aligned}$$

Solo un parámetro libre (en vez de 4)

Puntos estacionarios

$$u_1^* = u_2^* = 0$$

$$u_1^* = u_2^* = 1$$

Sistema Volterra-Lotka

Análisis de estabilidad de caso multi-dimensional :

Dado un sistema ODE de la forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

por componentes

$$(\mathbf{u}) = (u_1, u_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = f_i(\mathbf{u})$$

Puntos estacionarios son soluciones de

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Ecuación lineal para solución de la forma

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^* + \mathbf{v}(t) \ \ (|\mathbf{v}(t)| \ll 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \nabla\mathbf{f}(\mathbf{u}^*)\,\mathbf{v} \ + \mathcal{O}(\mathbf{v}^2)$$

Sistema Volterra-Lotka

$A = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{u}^*)$ una matriz con componentes

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_{\mathbf{u}^*}$$

Solución formal de la ecuación lineal:

$$\mathbf{v}(t) = \mathrm{e}^{At}\,\mathbf{v}(0)$$

Contiene términos que crecen en el tiempo, si A tiene valores propios λ_α con parte real positiva

$$\mathrm{Re}(\lambda_\alpha) > 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}^* \text{ unstable}$$

Si $\mathrm{Re}(\lambda_\alpha) < 0$ $\mathbf{u}^*$ es estable

Para ello, expandir v(0) en vectores propios de A

Sistema Volterra-Lotka

Estabilidad de soluciones estacionarias

(i) $u_1^* = u_2^* = 0 \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Es diagonal, soluciones estacionarias no-estables

Sistema Volterra-Lotka

Estabilidad de soluciones estacionarias

$$\text{(ii)}\ u_1^* = u_2^* = 1 \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios $\lambda_\alpha = \pm i\sqrt{\alpha}$ imaginarios. Solución estacionaria es estable marginalmente: solución general de ecuación lineal

$$\mathbf{v}(t) = c_1 \mathrm{e}^{+i\sqrt{\alpha}t}\mathbf{v}_1 + c_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{\alpha}t}\mathbf{v}_2$$

Es de carácter oscilatorio. $V_{1,2}$ son vectores propios de A que corresponden a valores p $\pm i\sqrt{\alpha}.$

Sistema Volterra-Lotka

Análisis cualitativo de sistema ODE

1. Diagrama de fases

en el plano

$$\mathbf{f}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1\,(1-u_2) \\ \alpha u_2\,(u_1-1) \end{pmatrix}$$

(u_1, u_2)

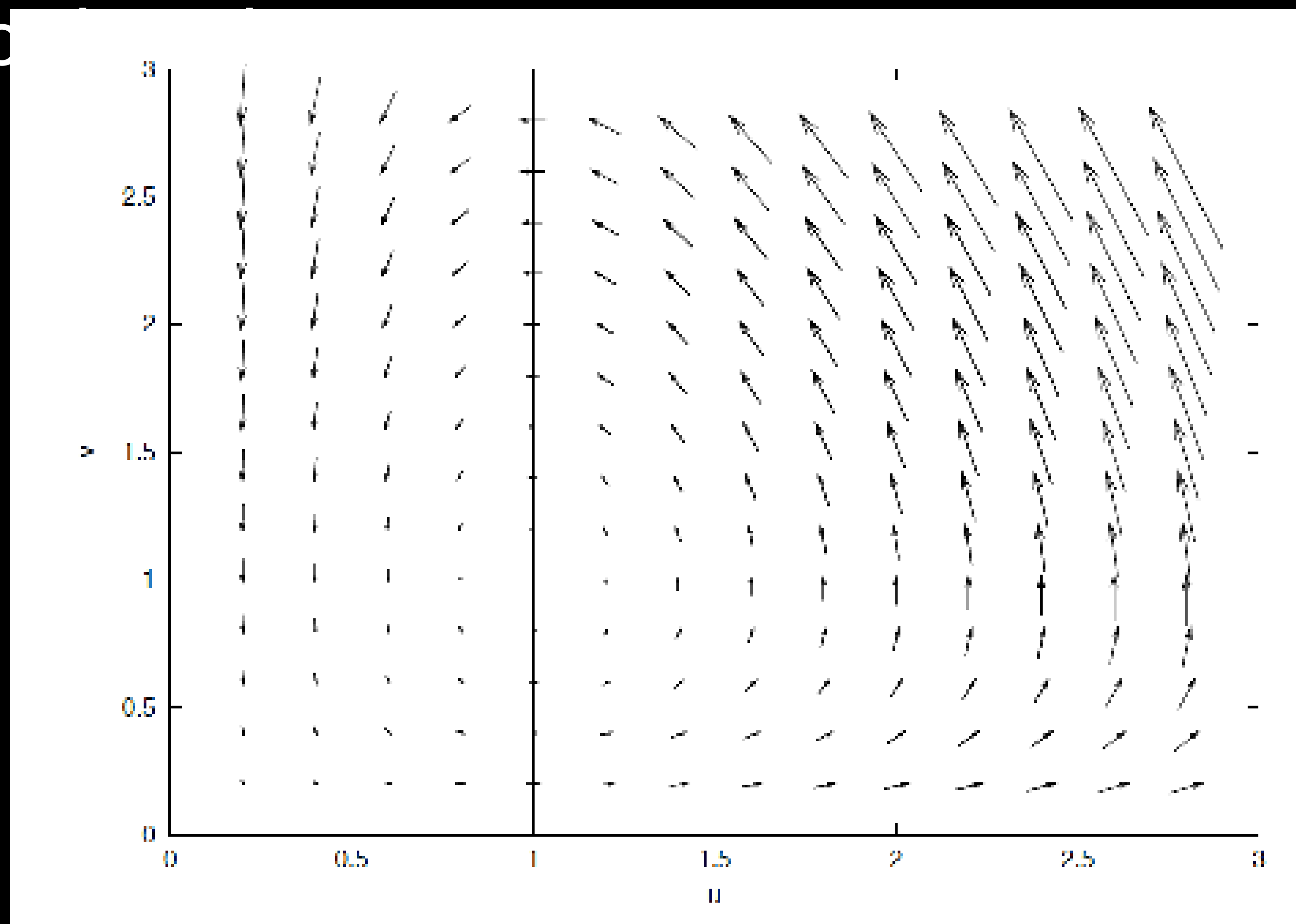
Y gráfico de isoclinas (ceros $\dot{u}_1$ y $\dot{u}_2$)) en el plano (u_1, u_2)

Mostrando ciclos limitados o familias de orbitas cerradas (estables marginalmente)

Sistema Volterra-Lotka

Isoclinas de un sistema Volterra-Lotka para alpha=0.5

abscisa u_1, o



Sistema Volterra-Lotka

2. Discusión y solución de ecuación de trayectorias

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}u_1} = \alpha \frac{u_2\,(u_1 - 1)}{u_1\,(1 - u_2)}$$

Solución por se

$$\frac{1 - u_2}{u_2}\mathrm{d}u_2 = \alpha \frac{u_1 - 1}{u_1}\mathrm{d}u_1$$

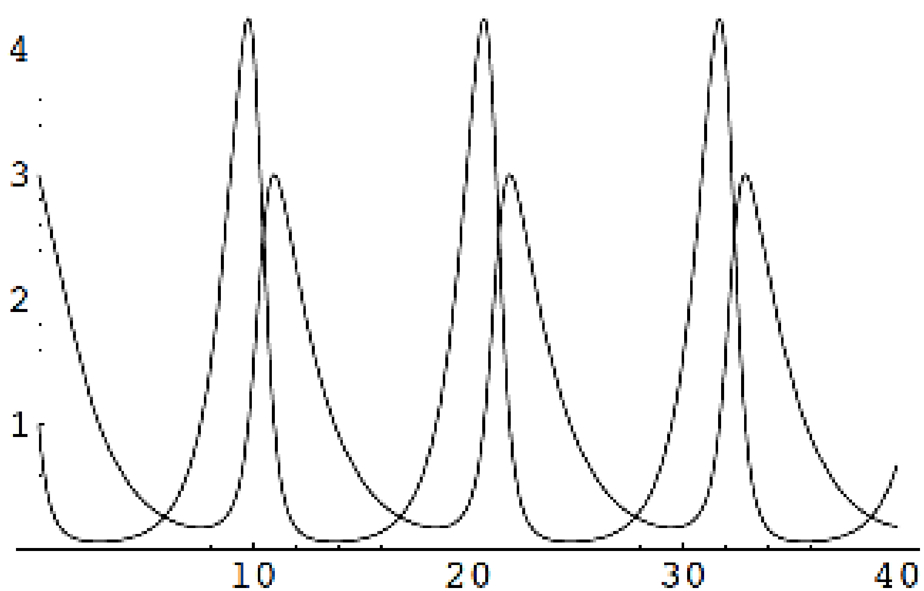
Se obtiene

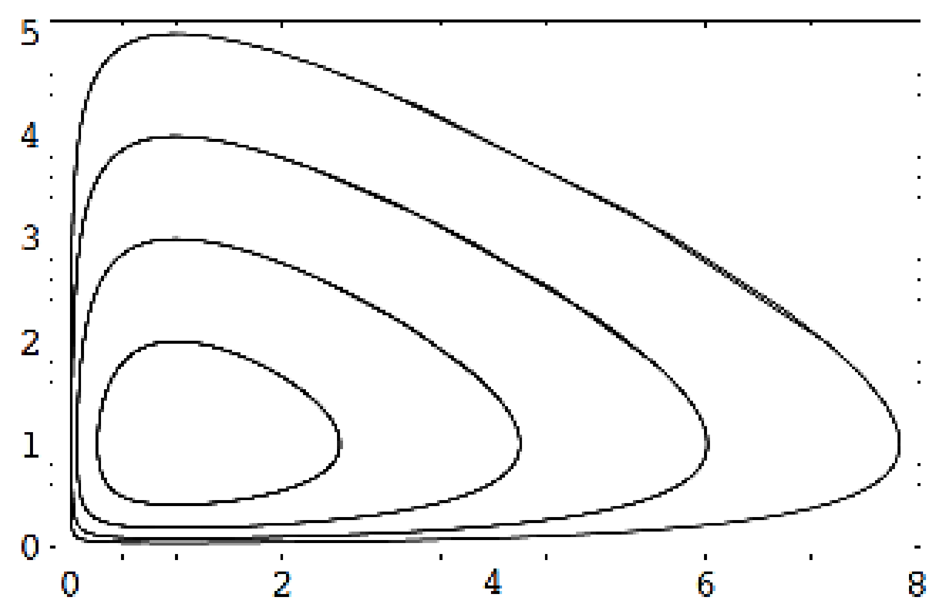
$$u_2 - \ln u_2 + \alpha(u_1 - \ln u_1) = H$$

Con H constante (de integración), dada por

Sistema Volterra-Lotka

Complejidad y estabilidad:
Tiene un punto estacionario marginalmente estable, no-trivial. En sistemas mas complejos (mas de 2 poblaciones), las soluciones son usualmente inestables





$\alpha = 0.5$ $u_1(0) = 1, u_2(0) = 3.$

$u_1(0) = 1$ and $u_2(0) = 2, 3, 4$

Sistema Volterra-Lotka

Ejemplo:
Sistema de K predadores y K presas (todos los parámetros positivos)

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = f_i(\mathbf{N},\mathbf{P}) = N_i\left(a_i - \sum_j b_{ij}P_j\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = g_i(\mathbf{N},\mathbf{P}) = P_i\left(\sum_j c_{ij}N_j - d_i\right)$$

A parte de la solución trivial (inestabl $\mathbf{N}^* = \mathbf{P}^* = 0$
Tiene una solución no-trivial, para la que

$a_i = \Sigma_j b_{ij}P_j^*$ $\qquad$ $d_i = \Sigma_j c_{ij}N_j^*.$

Sistema Volterra-Lotka

La matriz de estabilida $A = \nabla\binom{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ valuada en el punto estacionario tiene
una estructura de bloque
Con 0 a $K \times K$ triz
De ceros y matriz de
Elementos dados por

$$\frac{\partial f_i}{\partial P_j} \qquad \frac{\partial g_i}{\partial N_j}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & (-N_i^* b_{ij}) \\ \hline (P_i^* c_{ij}) & 0 \end{array}\right)$$

Sistema Volterra-Lotka

Ya que $\mathrm{tr}\ A = \Sigma_\alpha \lambda_\alpha = 0$ y 2 posibles soluciones fijas:

- Estabilidad marginal (valores propios imaginarios)
- Punto fijo inestable (si existe valor propio con $\mathrm{Re}(\lambda_\alpha) < 0$ debe existir uno con $\mathrm{Re}(\lambda_\alpha) > 0$)

La solución marginal no sera genérica: cualquier perturbación de los elementos de la matriz, generará partes reales en valores propios. En este caso, la complejidad, genera inestabilidad.

Ejercicio 1: Volterra-Lotka

Resolver el sistema Volterra-Lotka para dos poblaciones con los siguientes parametros:
a = 0.05; b = 0.002, x0=10; c = 0.06; d = 0.004, y0=10;
Grabar el resultado en VolterraLotka.txt y generar la grafica x,y vs. tiempo, y grafica de fases, como en la lamina 24.
Hacer un analisis de estabilidad de las soluciones estacionarias.

```
int main(int argc, char *argv[]) {
....
double x,y,x0,y0;
....
x=x+step*(x*(a -b*y));
y=y+step*(-y*(c -d*x));
...
out.open("VolterraLotka.txt")
...
out<<i<<"\t"<<x<<"\t"<<y<<endl;
...
}
```

Ejercicio 2:

Se muestra la matriz de estabilidad de un sistema Volterra-Lotka, con 3 presas y 3 depredadores.

Calcule los valores propios λ_i y los vectores propios v_i i=1,...,6 de la matriz (se aconseja usar eliminación de Gauss-Jordan)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -20 & -30 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -10 & -20 \\ 20 & 30 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

Escoja como condiciones iniciales

$$n = \sum_{i=1}^{6} c_i v_i,$$

$$c_1 = c_2 = 3,\ c_3 = c_4 = 1,\ c_5 = 5,\ c_6 = 0.1.$$

Simule y grafique el comportamiento de las 6 poblaciones en el tiempo , hasta que el sistema se vuelva estable o inestable.