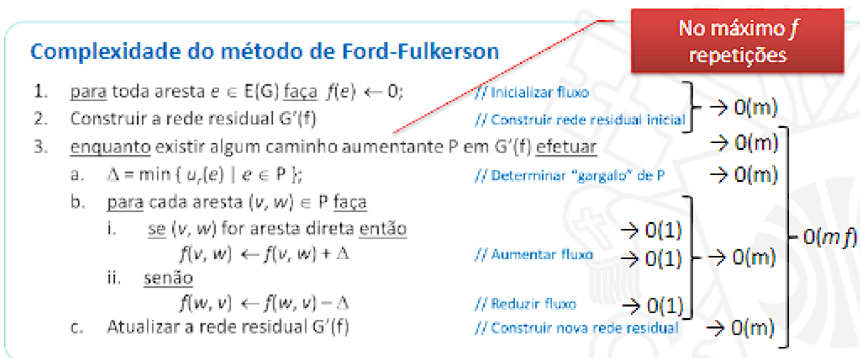
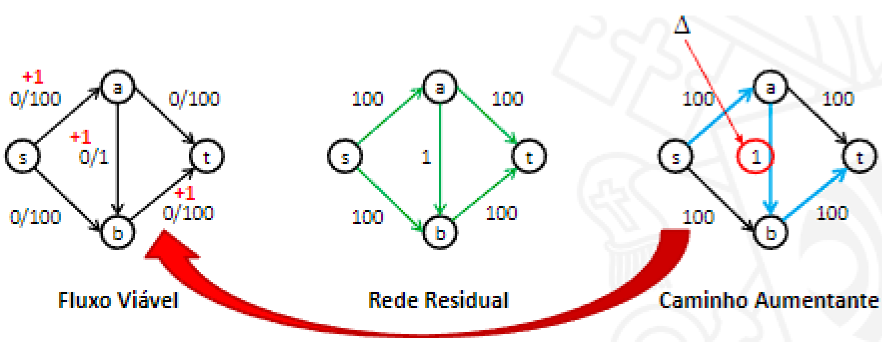
17 - Fluxo máximo - Edmonds-Karp - Dinic

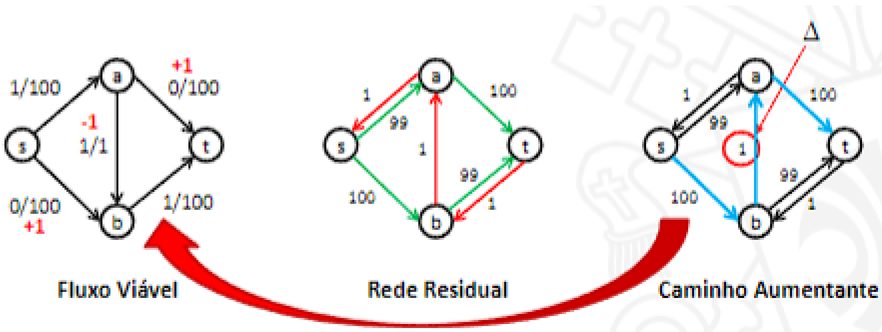
Complexidade do método Ford-Fulkerson:



Com capacidades inteiras é $O(m\, f)$, sendo $m = |E(G)|$, f = fluxo máximo

Problema de Ford-Fulkerson:





No pior caso, o número de iterações pode ser O(*f*) em que *f* representa o valor do fluxo máximo !

ALGORITMO PSEUDOPOLINOMIAL

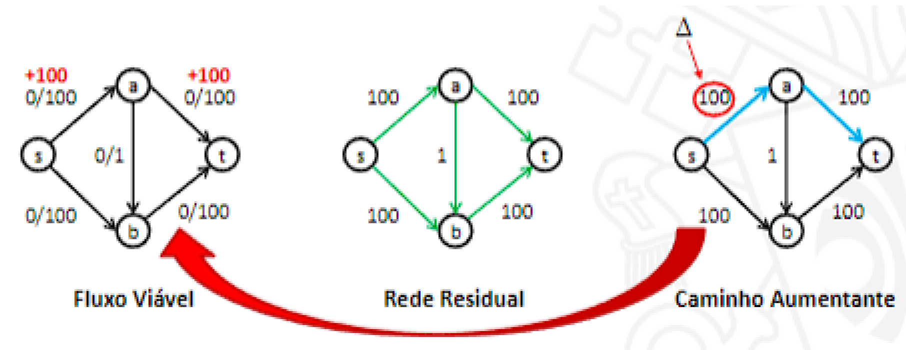
Método de Edmonds-Karp:

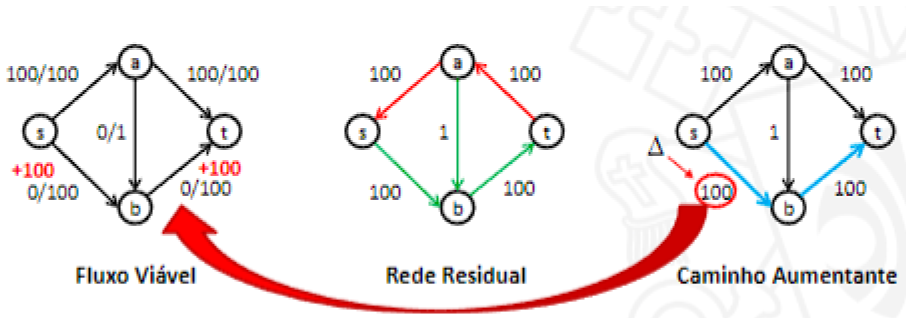
Pode ser visto como uma implementação eficiente do método de Ford-Fulkerson. A cada interação seleciona o caminho aumentante na rede residual, que seja mais curto, utilizando o menor número de arestas. O caminho mais curto pode ser encontrado utilizando uma busca em largura, pois na busca em largura você tem os níveis que mostra a distância de um vértice até a sua raiz.

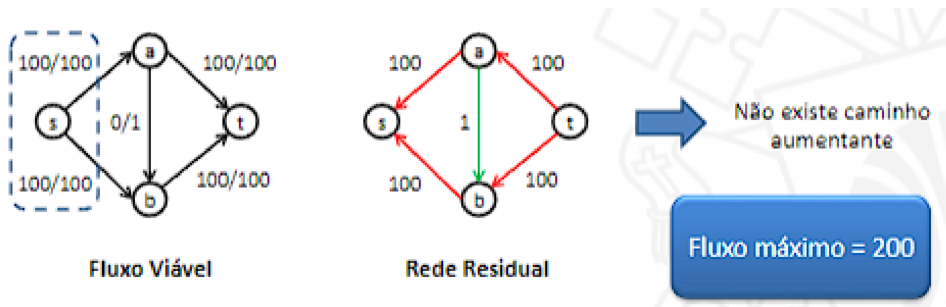
Algoritmo:

1. para toda aresta $e \in E(G)$ faça $f(e) \leftarrow 0$; // Inicializar fluxo
2. Construir a rede residual G'(f) // Construir rede residual inicial
3. enquanto existir algum caminho aumentante P em G'(f) efetuar
   a. Seja P o caminho aumentante em G'(f) com menor número de arestas
   b. $\Delta = \min \{ u_r(e) \mid e \in P \}$;
   c. para cada aresta $(v, w) \in P$ faça
      i. se (v, w) for aresta direta então $f(v, w) \leftarrow f(v, w) + \Delta$
      ii. senão $f(w, v) \leftarrow f(w, v) - \Delta$
   d. Atualizar a rede residual G'(f) // Construir nova rede residual

Exemplo:







Método de Dinic:

Dada uma rede residual $G'(f)$, uma rede em níveis G_1 é um grafo direcionado ponderado que:

- Possui os mesmos vértices que $G'(f)$, isto é, $V(G_1) = V(G')$
- Para toda aresta $e = (v, w)$ pertencente $E(G')$ com capacidade igual a $u_r(e), G_1$ contém aresta (v, w) com a mesma capacidade se $sit(w) = dist(v) + 1$, em que $dist(v)$ representa a menor distância geodésica entre a fonte e o vértice v (em números de arestas).

Um fluxo de bloqueio (ou blocante) f_b representa um fluxo de G_1 que se mantidas apenas as arestas que possuem capacidade maior que f_b não existia mais um caminho aumentante em G_1.

Se o caminho aumentante escolhido for o mais curto, então os tamanho de caminhos são não decrescentes e método termina mesmo que as capacidades não sejam inteiras. A cada interação, determina-se o fluxo de bloqueio na rede de níveis.

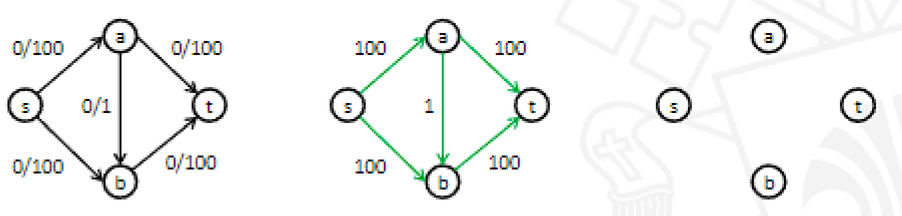
Pode-se mostrar que o número de níveis de um fluxo de bloqueio aumenta de pelo menos uma unidade a cada interação (logo existem $|V| - 1$ fluxos de bloqueio, no máximo). Um fluxo de bloqueio pode ser encontrado em $O(|V| * |E|)$.

Algoritmo:

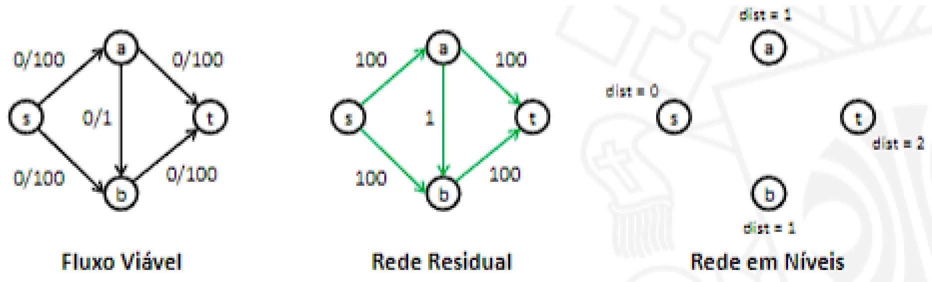
1. para toda aresta $e \in E(G)$ faça $f(e) \leftarrow 0$; // Inicializar fluxo
2. Construir a rede residual $G'(f)$ // Construir rede residual inicial
3. Construir a rede em níveis G_L a partir de $G'(f)$ // Construir rede em níveis inicial
4. enquanto $dist(t) < \infty$ efetuar
   a. Determinar um fluxo de bloqueio f_b em G_L
   b. Atualizar o fluxo f usando f_b
   c. Atualizar a rede residual $G'(f)$ // Construir nova rede residual
   d. Construir a rede em níveis G_L a partir de $G'(f)$ // Construir nova rede em níveis

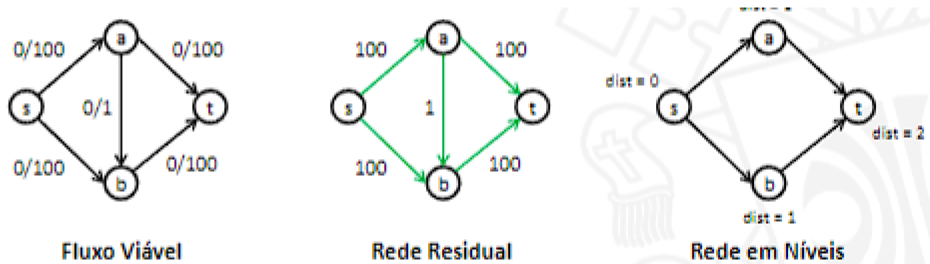
Exemplo:

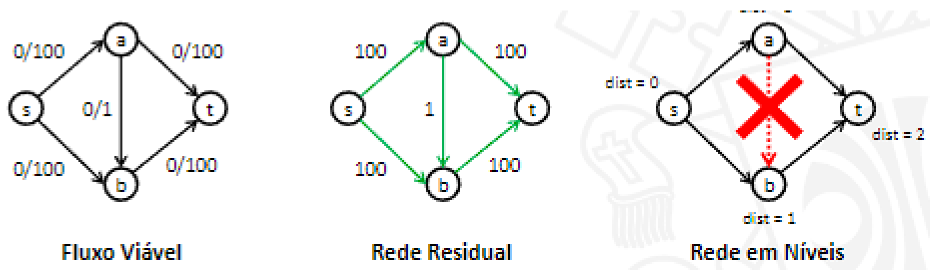
Passos:

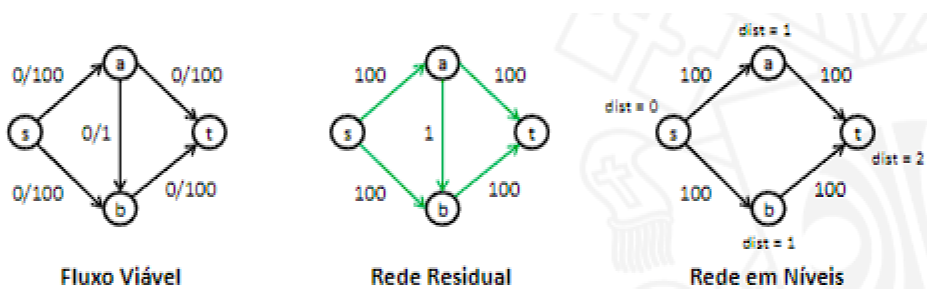


Fluxo Viável — Rede Residual — Rede em Níveis

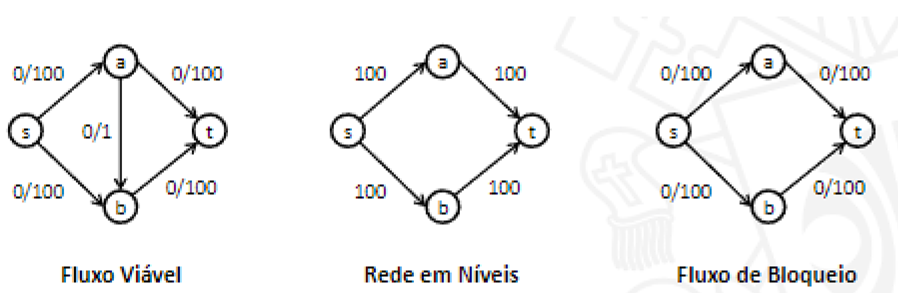


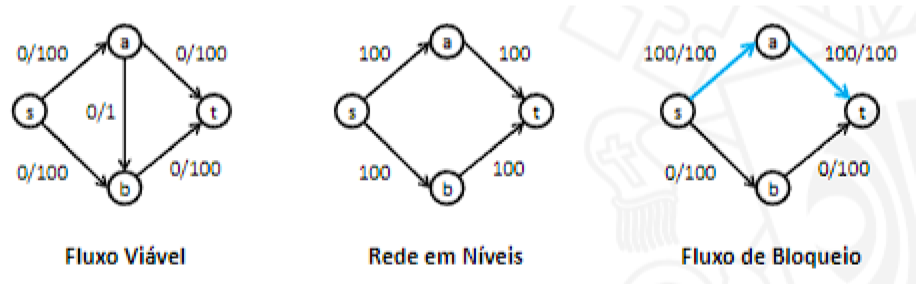


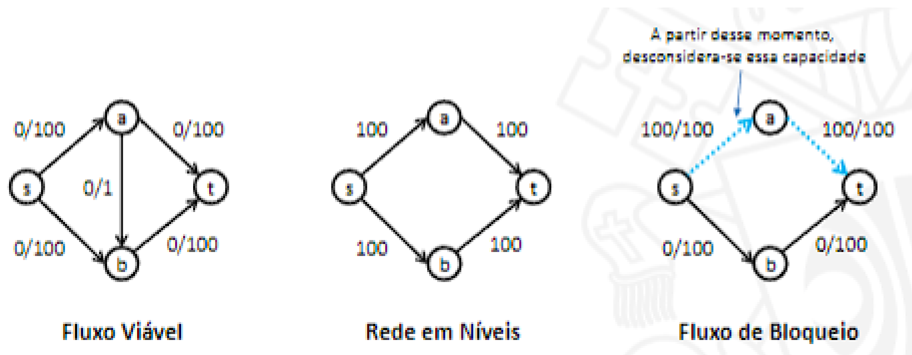


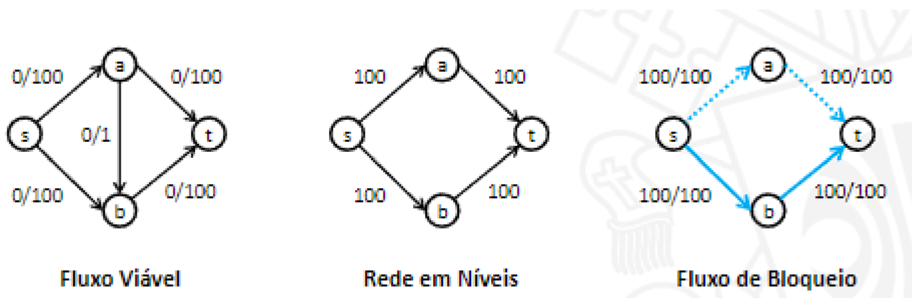


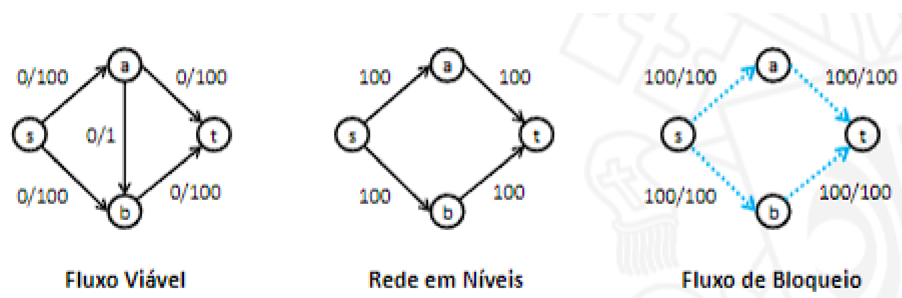
Continuação:



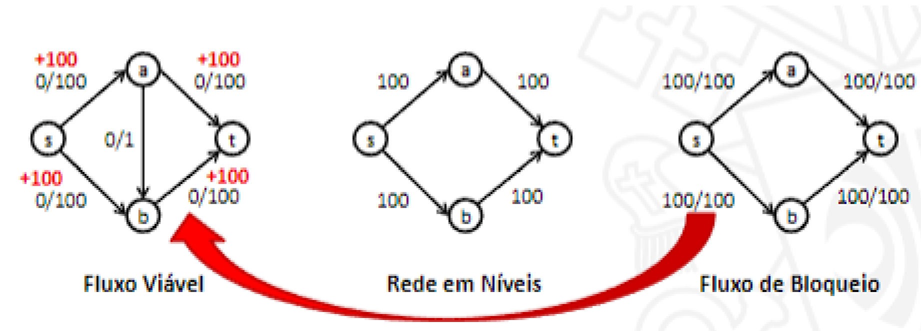




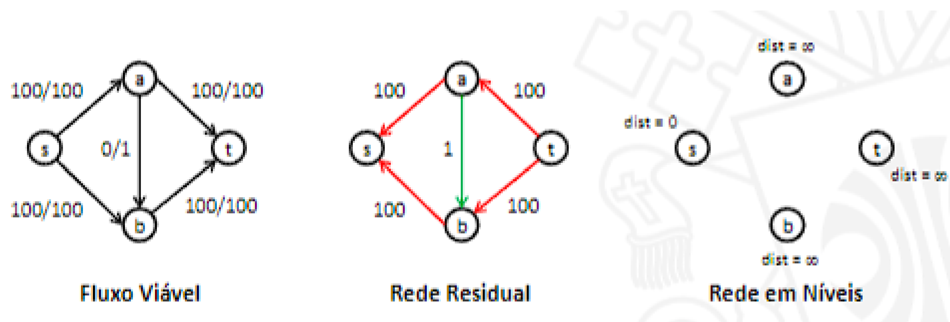


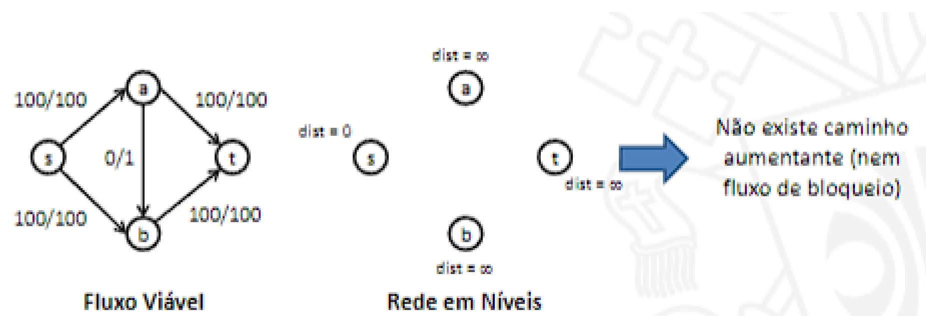


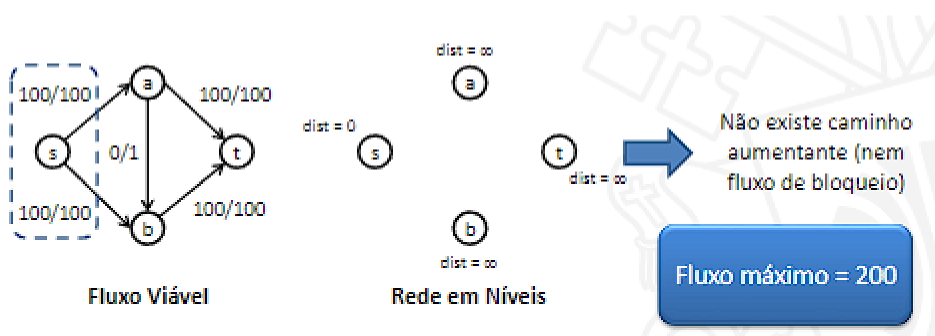
A partir desse momento não há mais caminho aumentante.



Exemplo 2:







Comparação métodos Fluxo máximo:

Método	Tempo
Ford-Fulkerson	$O(m\ f)$
Edmonds-Karp	$O(n\ m^2)$
Dinic	$O(n^2\ m)$

m = # de arestas
f = fluxo máximo
n = # de vértices

Algoritmo pseudopolinomial

Número máximo de caminhos aumentante é $O(n\ m)$ e cada caminho pode ser encontrado em $O(m)$

Número máximo de fluxos de bloqueio é $n - 1$ e cada fluxo de bloqueio pode ser encontrado em $O(n\ m)$