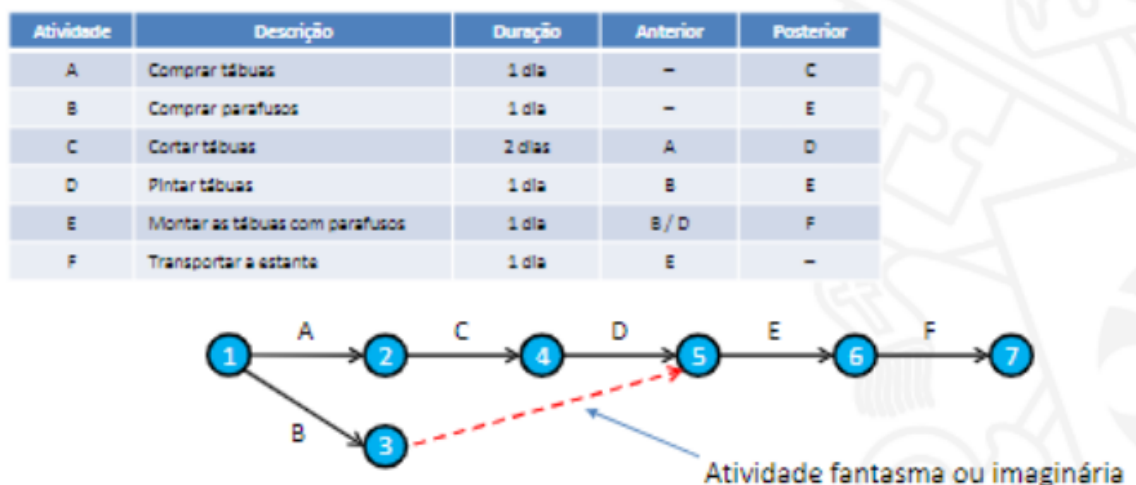


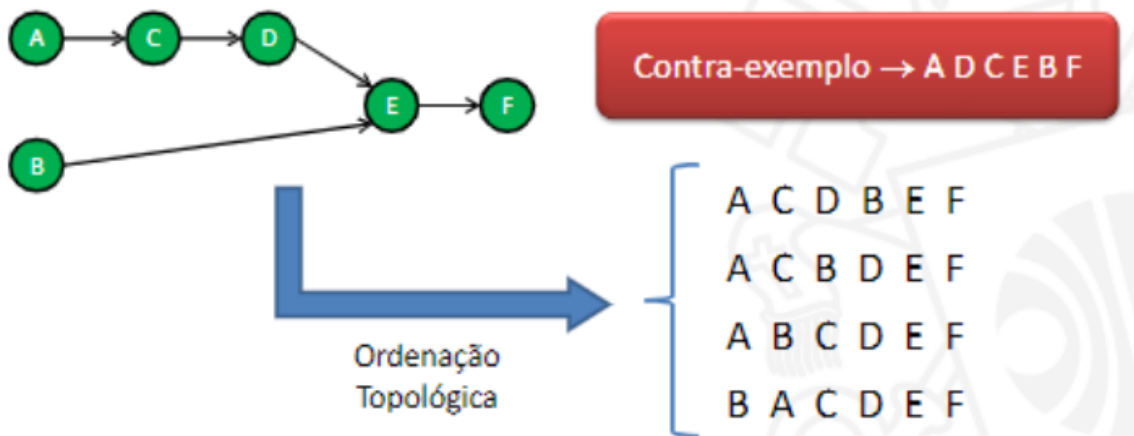
18 - Ordenação Topológica - DFS - Kahn

Um ordenação topológica de um grafo acíclico direcionado $G = (V, E)$ é uma ordenação linear de todos os seus vértices, tal que para toda aresta $(v, w) \in E$, o vértice v aparece antes do vértice w na ordenação. Em outras palavras, é uma ordenação linear de vértices na qual cada vértice precede todos os demais vértices que formam seu fecho transitivo direto.

- Cada grafo acíclico direcionado possui uma ou mais ordenações topológicas.
- Caso um grafo possua ciclos ou seja não direcionado, é impossível estabelecer uma ordenação topológica, pois não é possível estabelecer uma relação de precedência entre os vértices.

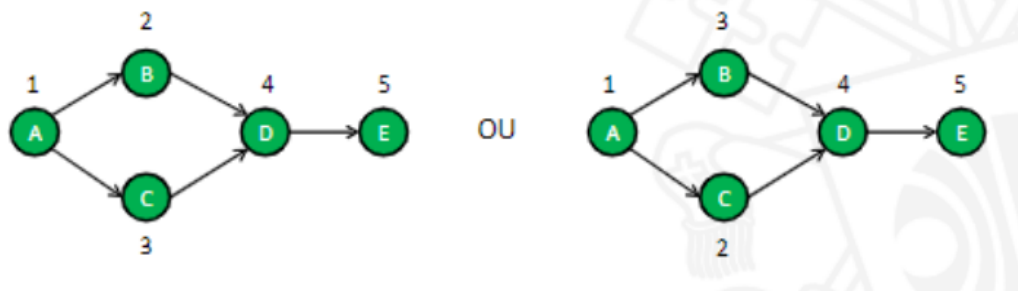
Exemplo:





Numeração topológica:

Uma numeração topológica dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função que representa a atribuição de um número inteiro $ord(v)$ para cada vértice v tal que $ord(v) < ord(w)$ para toda aresta $(v, w) \in E(G)$. Se dois vértices não são adjacentes, não há mal algum em se permitir que eles recebam o mesmo número. Geralmente vértices diferentes recebem números diferentes no intervalo de $(1 - n) \rightarrow (0, n - 1)$, em que n é o número de vértice do grafo. Apenas grafo acíclicos possuem numeração topológica.



Método de Kahn:

Método que determina a cada instante o vértice que não possui arcos de entrada e o insere na solução.

- A cada vértice inserido na solução, o método remove todas as arestas do grafo saindo dele.

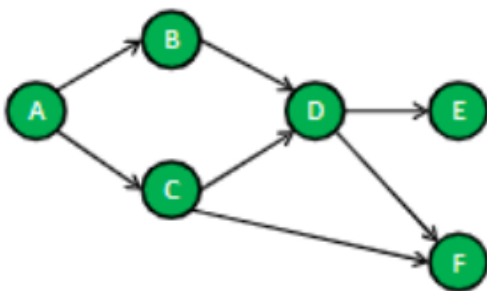
- Determinar a existência de ciclos no grafo.
- Para controle, usa-se uma fila dos vértices de grau de entrada 0.
- Para melhorar a eficiência, armazena-se (e atualiza-se) o grau de entrada de cada vértice (ao invés de remover a aresta).

```

1. para todo vértice  $v$  faça  $M[v] \leftarrow d^-(v)$ ; // Inicializar mapa de graus de entrada
2.  $Fila \leftarrow \emptyset$ ;  $Ordena\_Top \leftarrow \emptyset$ ; // Inicializar fila e resultado
3. para todo vértice  $v$  tal que  $d^-(v) = 0$  faça  $Fila.Insere(v)$ ;
4. enquanto not  $Fila.Vazia()$  efetuar
    a.  $v \leftarrow Fila.Remove()$ ; // Remover 1º elemento da fila
    b.  $Ordena\_Top.InsereNoFim(v)$ ; // Inserir elemento no resultado
    c. para todo vértice  $w \in \Gamma^+(v)$  faça // Para toda a vizinhança de  $v$ 
        i.  $M[w] \leftarrow M[w] - 1$ ; // Reduzir uma unidade no grau de  $w$ 
        ii. se  $M[w] = 0$  então  $Fila.Insere(w)$ ;
5. Se todos os vértices forem processados, SUCESSO; caso contrário, existe um CICLO

```

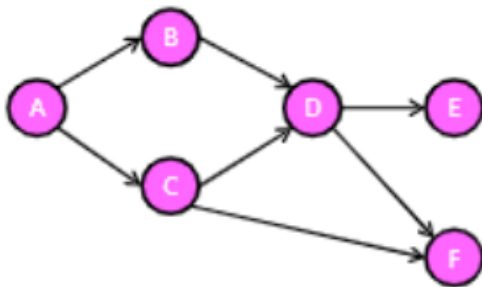
Exemplo:



	A	B	C	D	E	F
M	0	1	1	2	1	2

Fila:

Ordena_Top:



	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	0

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ ~~E~~ ~~F~~

Ordena_Top: A B C D E F

Método por busca em profundidade:

O algoritmo percorre cada vértice do grafo, em ordem arbitrária, iniciando uma busca em profundidade que termina quando.

- Atinge qualquer vértice que já tenha sido visitado desde o início da ordenação topológica.
- Alcança um vértice que possui grau de saída igual a zero.

Cada vértice v é inserido no resultado somente após considerar todos os outros que dependem de v (isto é, todos os descendentes de v na busca).

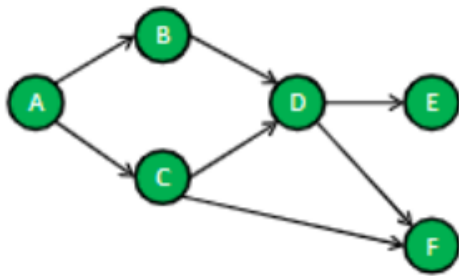
Algoritmo:

1. para todo vértice v faça $\text{Marca}[v] \leftarrow 0$; // Inicializar vértices como desmarcados
2. $\text{Ordena_Top} \leftarrow \emptyset$; // Inicializar resultado
3. enquanto existir algum vértice v tal que $\text{Marca}[v] = 0$ efetuar $\text{Visita}(v)$;

Visita(v)

1. se $\text{Marca}[v] \neq 2$ então // Se v não for marcado permanentemente
 - a. se $\text{Marca}[v] = 1$ então CICLO; // Se v tiver marca temporária
 - b. $\text{Marca}[v] \leftarrow 1$; // Colocar marca temporária em v
 - c. para todo vértice $w \in \Gamma^+(v)$ faça $\text{Visita}(w)$; // Visitar toda a vizinhança de v
 - d. $\text{Marca}[v] \leftarrow 2$; // Colocar marca permanente em v
 - e. $\text{Ordena_Top.InsereNoInicio}(v)$; // Inserir elemento no resultado

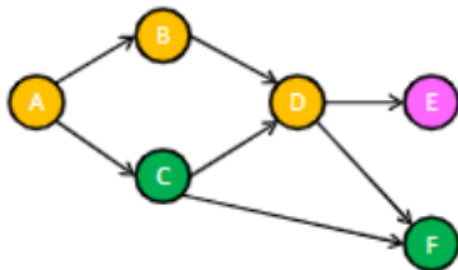
Exemplo:



	A	B	C	D	E	F
Marca	0	0	0	0	0	0

Ordena_Top:

Visita(A):



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	0

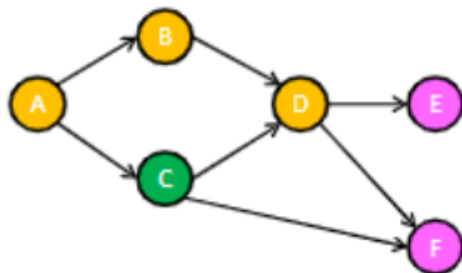
Ordena_Top: E

Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

~~Visita(E):~~



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	2

Ordena_Top: F E

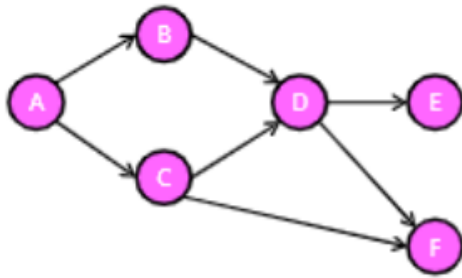
Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~



	A	B	C	D	E	F
Marca	2	2	2	2	2	2

Ordena_Top: A C B D F E

~~Visita(A):~~

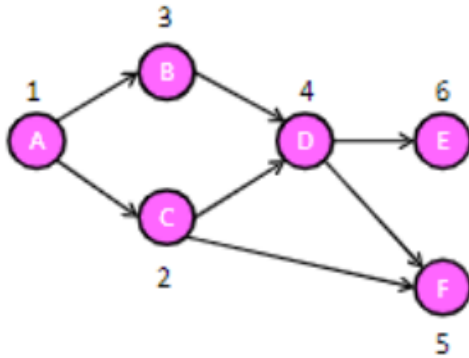
~~Visita(B):~~

~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

~~Visita(C):~~



	A	B	C	D	E	F
Marca	2	2	2	2	2	2

Ordena_Top: A C B D F E



Numeração topológica corresponde a ordem reversa de inserção no resultado