10 - Grafos Hamiltonianos e Eurelianos

Grafo Hamiltoniano:

- **Caminho hamiltoniano:** passa por cada vértice uma só vez.
- **Ciclo hamiltoniano:** caminho hamiltoniano que retornar ao vértice inicial (caminho fechado).
- Um grafo é dito hamiltoniano se possuir ciclo hamiltoniano.
- Um grafo é dito semi-hamiltoniano se possuir um caminho hamiltoniano.

Condição suficiente:

- Um grafo simples com $n \geq 3$ vértices é hamiltoniano, se o grau de cada um do seus vértices $d(v) \geq n/2$, para todo vértice do grafo.
- Para cada par de vértices adjacentes (aqueles que não tem arestas entre eles), a soma dos seus graus $d(v) + d(w) \geq n$.
- Se o fecho hamiltoniano for um grafo completo, então ele é hamiltoniano. Mas, se o fecho hamiltoniano de um grafo é obtido adicionando arestas, enquanto for possível, entre vértices adjacentes cuja a soma de graus $\geq n$.

Grafo Euleriano:

- **Trajeto Euleriano:** passa por cada aresta de um grafo exatamente uma vez.
- **Ciclo Euleriano:** é um caminho euleriano que começa e termina no mesmo vértice, ou seja, um trajeto fechado.
- Um grafo é dito euleriano se possuir ciclo euleriano.
- Um grafo é dito semi-euleriano se possuir um trajeto euleriano.

Condição suficiente:

- Um grafo conexo é euleriano se somente se todos os seus vértices possuírem grau par.
- Um grafo conexo é não-euleriano se existirem dois ou mais vértices de grau ímpar.
- Um grafo conexo é semi-euleriano se e somente se existirem exatamente dois vértices de grau ímpar.

Algoritmo:

1. se V(G) possuir 3 ou mais vértices de grau ímpar então **PARE**;
2. Seja $G' = (V', E')$ tal que $V' \leftarrow V(G)$ e $E' \leftarrow E(G)$; // Inicializar grafo auxiliar
3. Selecionar vértice inicial $v \in V'$ (escolher v cujo grau seja ímpar, se houver)
4. enquanto $E' \neq \varnothing$ efetuar
   a. se $d(v) > 1$ então
      Selecionar aresta $\{v, w\}$ que não seja ponte em G'
   b. senão
      Selecionar a única aresta $\{v, w\}$ disponível em G'
   c. $v \leftarrow w$; $E' \leftarrow E' - \{v, w\}$; // Caminhar de v para w e eliminar aresta