16 - Fluxo máximo - Ford-Fulkerson

Uma rede de fluxo é um grafo direcionado e ponderado, em que associa cada aresta a um valor de capacidade $u(e) > 0$.

Existem dois vértices especiais em uma rede de fluxo:

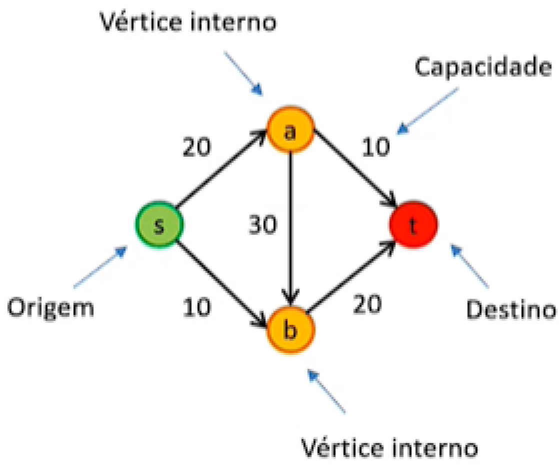
- **Vértice s:** *"source"* (fonte) que representa a origem fluxo.
- **Vértice t:** *"terminal"* (semidouro) que representa o destino do fluxo.

Os demais nós da rede são denominados nós internos.

Assume-se que não há arestas entrando em s nem saindo de t, que todo vértice possui pelo menos uma aresta incidente a ele e que as capacidades são inteiras.

Exemplo:

Para dizer que é um fluxo deve-se associar um valor inteiro, não nulo, positivo para cada arco, que representa o tanto de fluxo que podemos enviar pelo o arco.

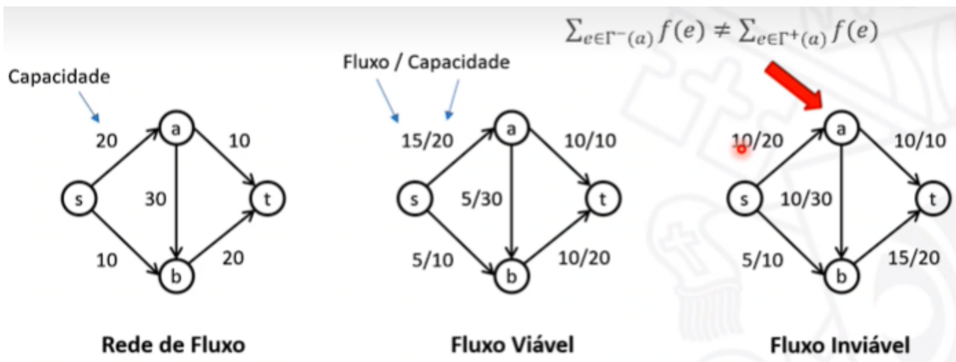


Nada é criado nos vértices internos.

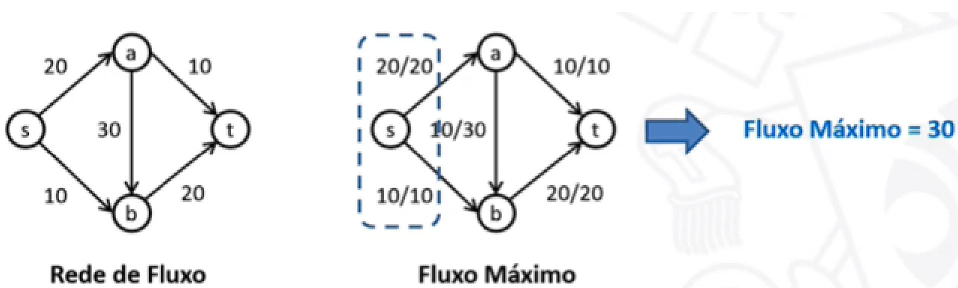
Para ser um fluxo as seguintes condições devem ser atendidas:

- **Condição de capacidade:** para toda aresta, seu valor de fluxo é não negativo e não pode exercer sua capacidade, isto é, $0 \leq f(e) \leq u(e)$.
- **Condição de conservação:** para todo o vértice interno v, a soma dos fluxos das arestas que entram em v é igual ao total de fluxo das arestas que saem de v, isto é, o somatório do fluxo dos predecessores é igual ao somatório do fluxo dos sucessores.

<u>Exemplo:</u>



Dada uma rede, o problema de fluxo máximo consiste em determinar o maior valor de fluxo viável entre a fonte s e o sumidouro t.



Método Ford-Fulkerson:

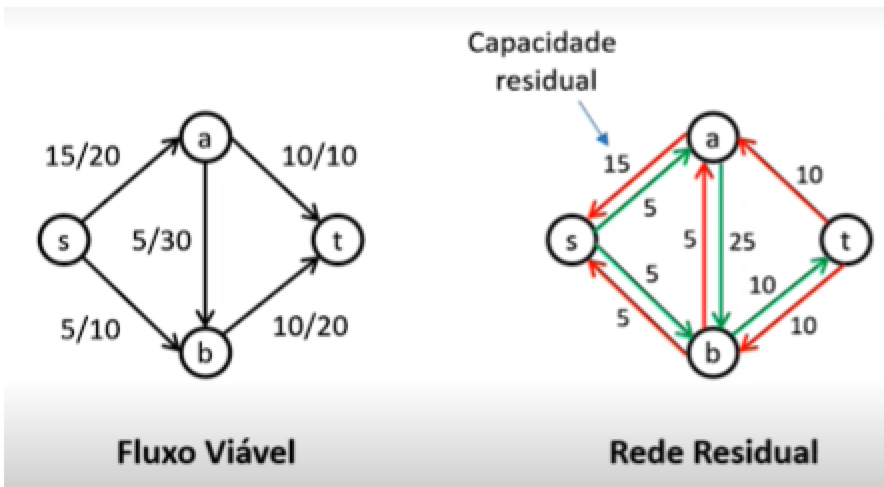
Dado um fluxo f em uma rede $G = (V, E)$, a rede residual $G'(f)$ é um grafo direcionado ponderado que (observe que se o fluxo mudar a rede residual também muda, porque ela depende do fluxo):

- Possui os mesmos vértices que G, isto é, V(G') = V(G)

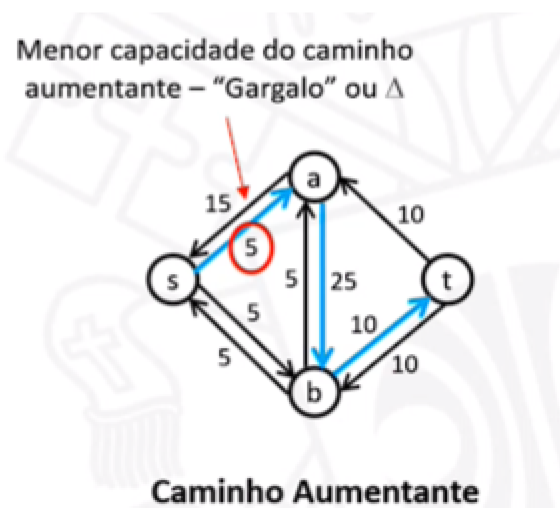
- Para toda aresta e = (v, w) pertencente a E, tal que $f(e)$ < $u(e)$, $G'(f)$ contém a aresta direta (v, w) com capacidade (residual) igual a $u_r(e) = u(e) - f(e)$.
- Para toda aresta $e = (v, w)$ pertencente a E tal que $f(e) > 0, G'(f)$ contém a aresta reversa (w, v) com capacidade (residual) igual a $u_r(e) = f(e)$.

Um caminho na rede residual saindo da fonte s até o sumidouro t é chamado de caminho aumentante (ou caminho de aumento de fluxo).

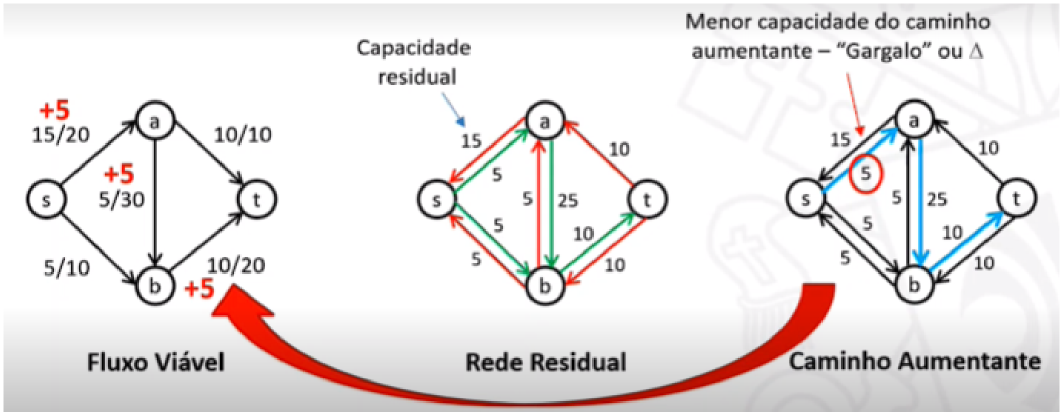
Caminho residual - exemplo:



Se a aresta reversa for ficar com capacidade nula é melhor não colocar.



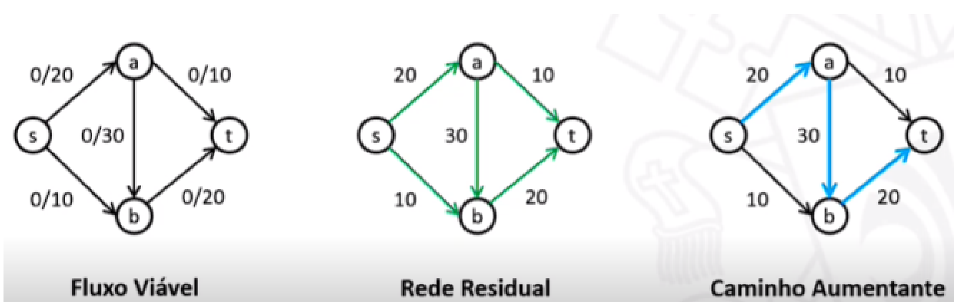
Caminho de s para a permite aumentar o fluxo que passa da seguinte forma:

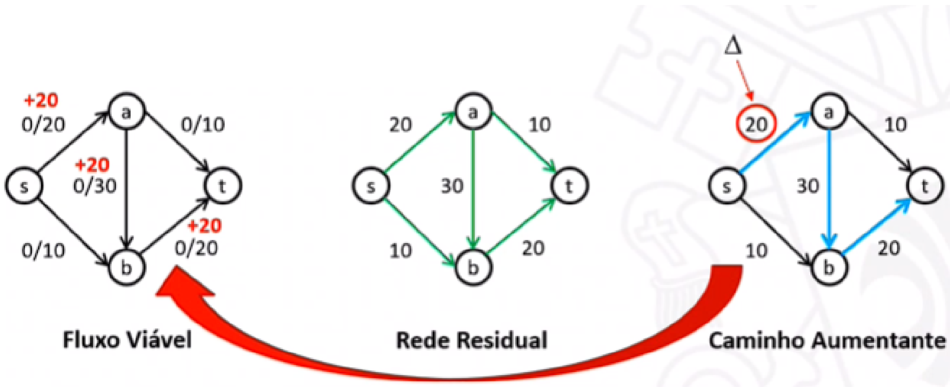


Algoritmo:

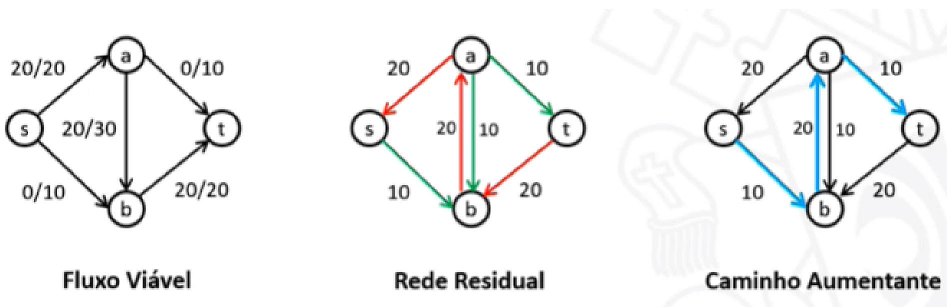
1. para toda aresta $e \in E(G)$ faça $f(e) \leftarrow 0$; // Inicializar fluxo
2. Construir a rede residual G'(f) // Construir rede residual inicial
3. enquanto existir algum caminho aumentante P em G'(f) efetuar
   a. $\Delta = \min \{ u_r(e) \mid e \in P \}$; // Determinar "gargalo" de P
   b. para cada aresta $(v, w) \in P$ faça
      i. se (v, w) for aresta direta então
         $f(v, w) \leftarrow f(v, w) + \Delta$ // Aumentar fluxo
      ii. senão
         $f(w, v) \leftarrow f(w, v) - \Delta$ // Reduzir fluxo
   c. Atualizar a rede residual G'(f) // Construir nova rede residual

Exemplo:

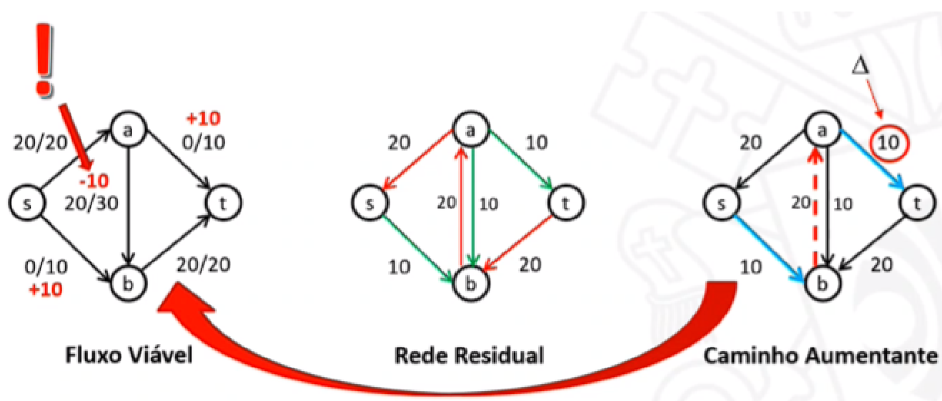


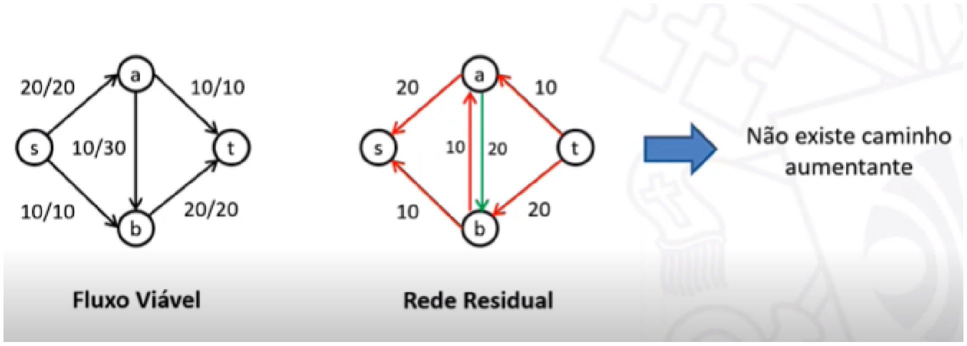


Fazer todos os passos, até os caminhos aumentantes serem eliminados:

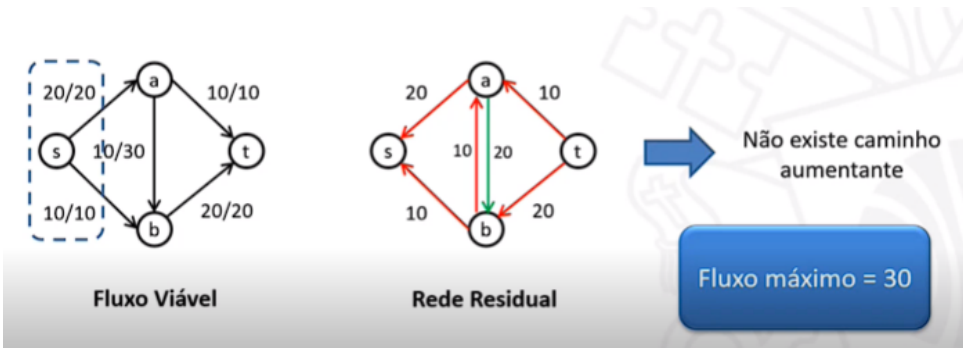


Quando o caminho aumentante tiver um arco reverso, basta subtrair.





Acabou, pois se você fizer uma busca no grafo você não consegue sair de s, ou seja, o t não vai ser descoberto.



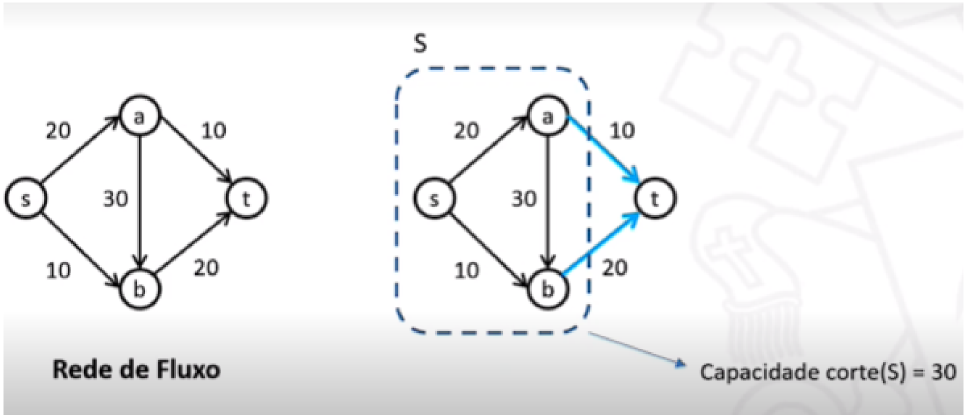
Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo:

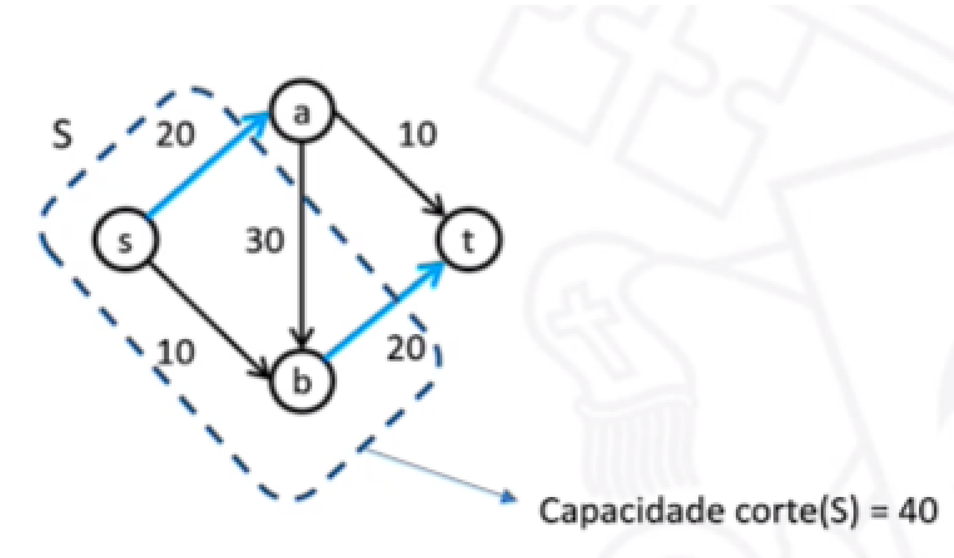
Dada uma rede $G = (V, E)$ e um subconjunto S contendo todos os vértices, tal que a fonte s pertence a S e o sumidouro t não pertence S.

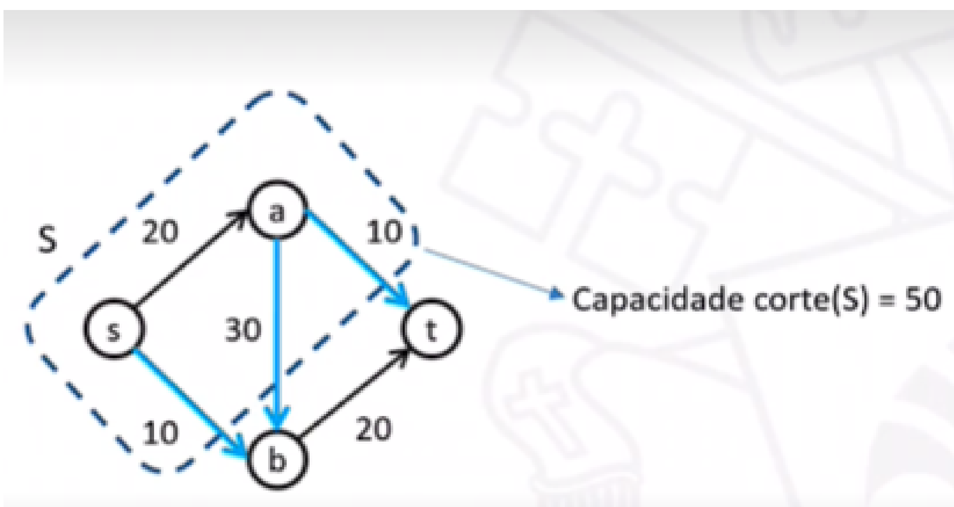
O corte(S) - chamado de corte $s - t$ da rede de fluxo - contém arestas (v, w) em que vértice v pertence a S e o vértice w não pertence a S.

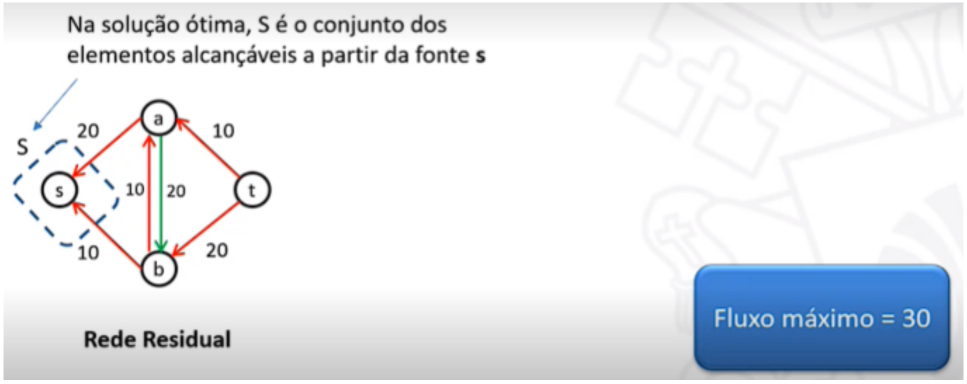
A capacidade de um corte(S) é dada pela soma das capacidades de suas arestas.

Teorema: em qualquer rede de fluxo, o valor do fluxo máximo entre a fonte s e o sumidouro t é igual à capacidade do corte $s - t$ mínimo da rede.


S
20
a
10
s
30
t
10
b
20
Rede de Fluxo
Capacidade corte(S) = 30


S
20
a
10
s
30
t
10
b
20
Capacidade corte(S) = 40


S
20
a
10
Capacidade corte(S) = 50
s
30
t
10
b
20


Na solução ótima, S é o conjunto dos elementos alcançáveis a partir da fonte **s**
S
20
10
a
s
10
20
t
10
b
20
Rede Residual
Fluxo máximo = 30