Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME0305 Métodos Numéricos e computacionais I
Prof.: Luís Gustavo Nonato
Monitora Pae : Juliana Bertoco.

Lista 2: Métodos Diretos para Sistemas Lineares

1. Dado o sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz real $n \times n$.

   (a) Qual é a condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de solução do referido sistema?

   (b) Explique sucintamente cada uma das quatro possibilidades em que pode ser enquadrado o sistema acima *(Sistema Possível e Determinado, Sistema Possível e Indeterminado, Sistema Impossível e Sistema Mal Posto).*

2. Demonstre o seguinte Teorema:

   Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal, constituido das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assumimos que $det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Então, existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = l_{33} = \cdots l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$, tal que $LU = A$. Além disso, $det(A) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$.
   DICA : Livro Calculo Numérico - Neide B. Franco.

3. Seja o seguinte sistema linear $Ax = b$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
E_1 & : & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
E_2 & : & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & : & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
E_n & : & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

   Mostre que as operações:

   (a) $\lambda E_i \to E_i$ (Ou seja, multiplicar a linha E_i por λ e subscreve-la , $\forall i \in [1, n]$);

   (b) $E_i + \lambda E_j \to E_i$;

   (c) $E_i \leftrightarrow E_j$;

   não mudam o conjunto de soluções de um sistema linear.

4. Utilizando o método da eliminação de gauss, encontre a solução de $Ax = b$ para cada um dos pares abaixo:

$$
A = \begin{pmatrix} 0.004 & 15.73 \\ 0.423 & -24.72 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 15.77 \\ -20.49 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.5 \\ 0.001 & 4 & 7 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}
$$

(a) Sem estratégia de pivoteamento parcial (EPP).

(b) com EPP.

(c) Calcule o erro relativo entre as soluções de (a) e (b) (utilize quatro casas decimais no arredondamento).

5. **(a)** Como é utilizado o método de fatoração LU na resolução de sistemas lineares?

   (b) Dado o sistema linear abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & -4.8 & 0.5 \\ 6.7 & 2.2 & 5.3 \\ 0.9 & 8.2 & -7.4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -56.0 \\ 43.2 \\ 125.7 \end{pmatrix}$$

   Resolva-o utilizando a fatoração LU sem estratégia de pivoteamento parcial.

6. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix},$$

   onde $\theta \in \Theta = \left\{\theta \in \Re : \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$

   (a) Efetue a fatoração LU da matriz A.

   (b) Encontre a matriz inversa de A usando as matrizes L e U obtidas no ítem anterior.

   (c) Calcule o determinante de A pela fórmula da fatoração LU.

7. **(a)** O que é fatoração de Cholesky de uma matriz A, e em que condições essa fatoração é possível de ser determinada?

   (b) Verifique se as matrizes A_1 e A_2 satisfazem as condições de Cholesky, e em caso afirmativo, faça a fatoração.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

   (c) Determine os possíveis valores de a_{21} e a_{33} para que a matriz $A3$,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ a_{21} & 14 & -20 \\ 9 & -20 & a_{33} \end{pmatrix}$$

   seja simétrica definida positiva.

   (d) Escolhendo um vetor b e um valor coerente para a_{33} na matriz A_3, resolva o sistema linear $A_3x = b$ com a fatoração de Cholesky.

8. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para que valores de α :

(a) A matriz A é decomponível no produto LU? Justifique.

(b) O sistema pode ser resolvido por Cholesky? Justifique.

(c) Considere $\alpha = 1$ e resolva o sistema linear obtido pelo método de eliminação de Gauss.

9. Comprove as seguintes afirmações, ou de exemplos que comprovem que elas não são verdadeiras:

(a) O produto de duas matrizes simétricas é simétrico;

(b) A inversa de uma matriz simétrica não singular é uma matriz simétrica não singular;

(c) Se A e B são matrizes $n \times n$, então $transposta(AB) = transposta(A)transposta(B)$.

10. Se a decomposição LU de uma matriz simétrica A é dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

verifique que a matriz G da decomposição de Cholesky é dada por:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Mostre as seguintes afirmações:

(a) O produto de duas matrizes triangulares inferiores $n \times n$ é uma matriz triangular inferior.

(b) O produto de duas matrizes triangulares superiores $n \times n$ é uma matriz triangular superior.

(c) A inversa de uma matriz triangular inferior não singular $n \times n$ é triangular inferior.

Bom trabalho!