SME301 - Métodos Numéricos para Engenharia I - Lista 2

1. (a) Mostre a fórmula da fatoração (ou deflação) de um polinômio, isto é, se ξ_i, $i = 1, 2, ..., n$, são zeros de $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$, então

$$p_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)...(x - \xi_n)q_0,$$

onde q_0 é uma constante.

(b) Qual é o valor de q_0?

2. Dado o sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz real $n \times n$.

(a) Qual é a condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de solução do referido sistema?

(b) Explique sucintamente cada uma das quatro possibilidades em que pode ser enquadrado o sistema acima (*Sistema Possível e Determinado*, *Sistema Possível e Indeterminado*, *Sistema Impossível* e *Sistema Mal Posto*).

3. Utilizando o método da eliminação de gauss, encontre a solução de $Ax = b$ para cada um dos pares abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 0.004 & 15.73 \\ 0.423 & -24.72 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 15.77 \\ -20.49 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.5 \\ 0.001 & 4 & 7 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(a) sem estratégia de pivoteamento parcial (EPP) e (b) com EPP. Calcule o erro relativo entre as soluções de (a) e (b) (utilize quatro casas decimais no arredondamento).

4. (a) Como é utilizado o método da fatoração LU na resolução de sistemas lineares?

(b) Dado o sistema linear abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & -4.8 & 0.5 \\ 6.7 & 2.2 & 5.3 \\ 0.9 & 8.2 & -7.4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -56.0 \\ 43.2 \\ 125.7 \end{pmatrix}$$

Resolva-o utilizando a fatoração LU sem estratégia de pivoteamento parcial.

5. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

onde $\theta \in \Theta := \{\theta \in \mathbb{R} : \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Efetue a fatoração LU da matriz A, com L sendo unitária na diagonal.

(b) Encontre a matriz inversa de A usando as matrizes L e U obtidas no ítem anterior.

(c) Calcule o determinante de A pela fórmula da fatoração LU.

6. (a) O que é fatoração de Cholesky de uma matriz A, e em que condições essa fatoração é possível de ser determinada?

(b) Utilizando a fatoração de Cholesky, verifique se as matrizes A_1 e A_2 são definidas positivas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

(c) Determine os possíveis valores de a_{21} e a_{33} para que a matriz A_3,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ a_{21} & 14 & -20 \\ 9 & -20 & a_{33} \end{pmatrix},$$

seja simétrica definida positiva.

(d) Escolhendo um vetor b e um valor coerente para a_{33} na matriz A_3, resolva o sistema linear $A_3 x = b$ com a fatoração de Cholesky.