SME301 - Métodos Numéricos para Engenharia I - Lista 4

1. Seja A uma matriz real $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ e seu polinômio característico, escrito em termos desses mesmos autovalores:

$$det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) \tag{1}$$

(a) Usando a expressão (1), mostre que $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$.

(b) Mostre que $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(c) Prove que: A é singular se, e somente se, existe pelo menos um λ, autovalor de A, que é nulo.

Dica: no ítem (b), iguale os coeficientes de λ^{n-1} em ambos os membros da equação (1).

2. (a) Determine o autovalor de maior valor absoluto e seu correspondente autovetor da matriz A pelo método das potências, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Faça 3 iterações do método tomando como aproximação inicial $y_0 = (1, 1)^T$.

(b) Determine o segundo autovalor de A e seu correspondente autovetor.

Dica: use o determinante de A.

3. Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(a) Sabendo-se que os autovalores de A e B são todos reais, distintos, e maiores do que zero, calcule o maior autovalor para cada uma das matrizes acima através do método das potências (com precisão de 10^{-2}). Tome como aproximação inicial $y_0 = (0.5, 0.5, 1.0)^T$ para A e $y_0 = (-1.0, -0.5, 0.5)^T$ para B.

(b) Verifique que $AB = BA = I$, onde I é a matriz identidade.

(c) Encontre o menor autovalor de cada uma das matrizes acima.

(d) Sabendo-se que o polinômio característico associado a matriz A é $P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 14\lambda + 6$, encontre o autovalor restante para cada uma das matrizes acima.

Dica: no ítem (d), use divisão de polinômios de modo a envolver todos os autovalores já calculados.

4. (a) Utilizando o método das potências inversas, calcule o autovalor de maior valor absoluto da matriz inversa A^{-1} de A, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2}. Tome como aproximação inicial $y_0 = (1, 1, 1)^T$.

(b) Qual é o autovalor de menor valor absoluto da matriz A?

5. Faça a decomposição $A = QR$ pelo dispositivo prático de Gram-Schmidt, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

Q é uma matriz ortonormal ($QQ^t = Q^tQ = I$) e R é uma matriz triangular superior.

6. Considere o sistema linear $Ax = b$, com A sendo fornecida tal como no exercício 5 e $b = (1, -4, 5)^T$.

(a) Verifique se o critério das linhas do método de Jacobi-Richardson é satisfeito para essa matriz. Podemos garantir a convergência ou divergência do método?

(b) Escreva A de modo a satisfazer $A = L + D + U$, onde:

- $L(i, j) = A(i, j)$, se $i > j$ e $L(i, j) = 0$, caso contrário.
- $D(i, j) = A(i, j)$, se $i = j$ e $D(i, j) = 0$, caso contrário.
- $U(i, j) = A(i, j)$, se $i < j$ e $U(i, j) = 0$, caso contrário.

Em seguida, calcule $B = D^{-1}(L + U)$, onde B é utilizada na forma geral de iteração do ponto fixo para o método de Jacobi-Richardson, isto é,

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \tag{2}$$

com $c = D^{-1}b$.

(c) De posse de B, calcule todos os seus autovalores pelo método QR de Francis (faça três iterações).

(d) Considere o seguinte teorema:

O método iterativo de Jacobi-Richardson (2) converge para a solução de $Ax = b$ se, e somente se, $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1$, com λ_i sendo os autovalores de B.

Com base nos resultados obtidos em (c) e no teorema apresentado, podemos garantir a convergência do método de Jacobi-Richardson para o sistema $Ax = b$ em questão?

Dica: em (c), aproveite a fatoração inicialmente realizada no exercício 5.

7. Calcule os autovalores da matriz A abaixo utilizando o método QR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule o erro a cada iteração de modo que a precisão $\varepsilon = 0.07$ seja atingida. Para realizar essas cálculos, considere que os autovalores originais são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$.