SME301 - Métodos Numéricos para Engenharia I - Lista 3

1. (a) Como funcionam os métodos iterativos para resolver sistemas lineares? Explique usando o Teorema do Ponto Fixo com a notação matricial.

(b) Cite algumas vantagens e desvantagens dos métodos iterativos em comparação com os métodos diretos para resolução de sistemas lineares.

2. Dado o sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz real $n \times n$ e b é um vetor coluna de n elementos.

(a) Deduza a função matricial de iteração do método iterativo de **Jacobi-Richardson** (JR) e escreva suas equações algébricas de iteração.

(b) Enuncie a condição suficiente para a convergência do método iterativo em questão (critério das linhas).

3. Verifique se os sistemas lineares da forma $Ax = b$, com A e b dados abaixo podem ser resolvidos pelo método de JR (permute as linhas da matriz, quando necessário, antes de checar o critério das linhas). Em caso afirmativo, faça 3 iterações e dê a precisão da aproximação da solução obtida.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & 22 \\ -15 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -7 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b) } A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 11 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.9 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c) } A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \\ 28 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.9 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d) } A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10.5 \\ 19.5 \\ 13.5 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 4.0 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

4. Seja $Ax = b$ um sistema linear, onde A é uma matriz real $n \times n$ e b é um vetor coluna de n elementos.

(a) Descreva o método iterativo de **Gauss-Seidel** (GS) na forma matricial e algébrica (equações de iteração).

(b) Enuncie e **demonstre** a condição suficiente para a convergência do método iterativo em questão (critério de Sassenfeld).

5. Considere o problema $Ax = b$, onde A e b são dados no exercício 3. Para cada ítem, verifique se o critério de Sassenfeld do método de GS é satisfeito e, em caso afirmativo, faça 3 iterações com esse método e dê a solução aproximada e a precisão relativa ao último passo.

Dica: Considere não só o pivoteamento entre as linhas, mas também **entre as colunas** antes de checar o critério de Sassenfeld.

6. Mostre a interpretação geométrica do método iterativo de GS, usando o sistema linear $Ax = b$, com A e b dados abaixo, e iniciando as iterações a partir do ponto $x^{(0)} = (0,0)^T$. Este sistema satisfaz o critério de Sassenfeld? Caso não, com base na interpretação geométrica desenvolvida, o método parece estar convergindo? Repita o exercício permutando as equações (as linhas).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

7. Deseja-se resolver o sistema linear $Ax = b$ pelo método dos gradientes, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com α e β números reais.

(a) Quais os possíveis valores para α e β?

(b) Considerando $\alpha = \beta = 0.5$, obtenha a solução do sistema com duas casas decimais corretas usando o método dos gradientes.

8. (a) Usando o método dos gradientes conjugados, resolva o sistema linear $Ax + b = 0$ com duas casas decimais corretas, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(b) Mostre a ortogonalidade dos vetores resíduos (como verificação dos cálculos efetuados).