Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
SME0305 Métodos Numéricos e computacionais I
Prof.: Luís Gustavo Nonato
Monitora Pae : Juliana Bertoco.

Lista 2: Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

1. **(a)** Como funcionam os métodos iterativos para resolver sistemas lineares? Explique usando o Teorema do Ponto Fixo com a notação matricial.

   (b) Cite algumas vantagens e desvantagens dos métodos iterativos em comparação com os métodos diretos para resolução de sistemas lineares.

2. Dado o sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz real $n \times n$ e b é um vetor coluna de n elementos.

   (a) Deduza a função matricial de iteração do método iterativo de Jacobi-Richardson (JR) e escreva suas equações algébricas de iteração.

   (b) Enuncie a condição suficiente para a convergência do método iterativo em questão (critério das linhas).

3. Verifique se os sistemas lineares da forma $Ax = b$, com A e b dados abaixo podem ser resolvidos pelo método de JR (permute as linhas da matriz, quando necessário, antes de checar o critério das linhas). Em caso afirmativo, faça 3 iterações e dê a precisão da aproximação da solução obtida.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & 22 \\ -15 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -7 \end{pmatrix}, \; x_0 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 11 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_0 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.9 \\ 0.9 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \\ 28 \end{pmatrix}, \; x_0 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.9 \\ 3.8 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 10.5 \\ 19.5 \\ 13.5 \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \tag{4}$$

4. Seja $Ax = b$ um sistema linear, onde A é uma matriz real $n \times n$ e b é um vetor coluna de n elementos.

   (a) Descreva o método iterativo de Gauss-Seidel (GS) na forma matricial e algébrica (equações de iteração).

   (b) Enuncie e demonstre a condição suficiente para a convergência do método iterativo em questão(critério de Sassenfeld).

5. Considere o problema $Ax = b$, onde A e b são dados no exercício 3. Para cada item, verifique se o critério de Sassenfeld do método de GS é satisfeito e, em caso afirmativo, faça 3 iterações com esse método e dê a solução aproximada e a precisão relativa ao último passo.

6. Mostre a interpretação geométrica do método iterativo de GS usando o sistema linear $Ax = b$, com A e b dados abaixo, e iniciando as iterações a partir do ponto $x(0) = (0; 0)^T$. Este sistema satisfaz o critério de Sassenfeld? Caso não, com base na interpretação geométrica desenvolvida, o método parece estar convergindo? Repita o exercício permutando as equações (as linhas).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

7. Seja A uma matriz real $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in C$ e seu polinômio característico, escrito em termos desses mesmos autovalores:
   $det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ (1)

   (a) Usando a expressão (1), mostre que $det(A) = \lambda 1 \lambda 2 \cdots \lambda n$.

   (b) Mostre que $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}$

   (c) Prove que: A é singular se, e somente se, existe pelo menos um λ, autovalor de A, que é nulo.
   Dica: no ítem (b), iguale os coeficientes de λ^{n-1} em ambos os membros da equação (1).

8. **(a)** Determine o autovalor de maior valor absoluto e seu correspondente autovetor da matriz A pelo método das potências, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

   Faça 3 iterações do método tomando como aproximação inicial $y_0 = (1, 1)^T$.

(b) Determine o segundo autovalor de A e seu correspondente autovetor. Dica: use o determinante de A.

9. Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

(a) Sabendo-se que os autovalores de A e B são todos reais, distintos, e maiores do que zero, calcule o maior autovalor para cada uma das matrizes acima através do método das potências (com precisão de 10^{-2}). Tome como aproximação inicial $y_0 = (0.5, 0.5, 1.0)^T$ para A e $y_0 = (-1.0, -0.5, 0.5)^T$ para B.

(b) Verifique que $AB = BA = I$, onde I é a matriz identidade.

(c) Encontre o menor autovalor de cada uma das matrizes acima.

(d) Sabendo-se que o polinômio característico associado a matriz A é $P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 14\lambda + 6$, encontre o autovalor restante para cada uma das matrizes acima. Dica: no ítem (d), use divisão de polinômios de modo a envolver todos os autovalores já calculados.

Bom trabalho!