DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE FEDERAL
UFERSA
RURAL DO SEMI-ARIDO

Árvore AVL

Algoritmos e Estruturas de Dados

2025.2

Agenda

- 1 Definição
- 2 Fator de Balanceamento
- 3 Rotações
- 4 Revisão e Considerações

Definição

Motivação

Um dos problemas das BSTs são que elas pode ficar desbalanceadas, no pior caso, degeneradas. A árvore AVL busca remover esse problema rebalanceado a árvore sem perder as propriedades de uma BST.

Definição

AVL

Uma árvore AVL (Adelson-Velsky e Landis) é uma árvore binária de busca (BST) que é balanceada, ou seja, a altura de cada nó difere em no máximo uma unidade entre suas subárvores esquerda e direita.

Isso garante que operações como inserção, remoção e busca sejam eficientes, com uma complexidade de tempo de O(log n).

Fator de Balanceamento

Definição

Fator de Balanceamento

O **fator de balanceamento** (fb) de um nó é a diferença entre as alturas de suas subárvores esquerda e direita. Um nó com fator de balanceamento de -1, 0 ou +1 é considerado balanceado.

Para calcular o fator, basta fazer a diferença entre a quantidade de níveis da subárvore esquerda e a quantidade de níveis da subárvore direta. O fator de balanceamento das folhas é sempre zero.

Significado

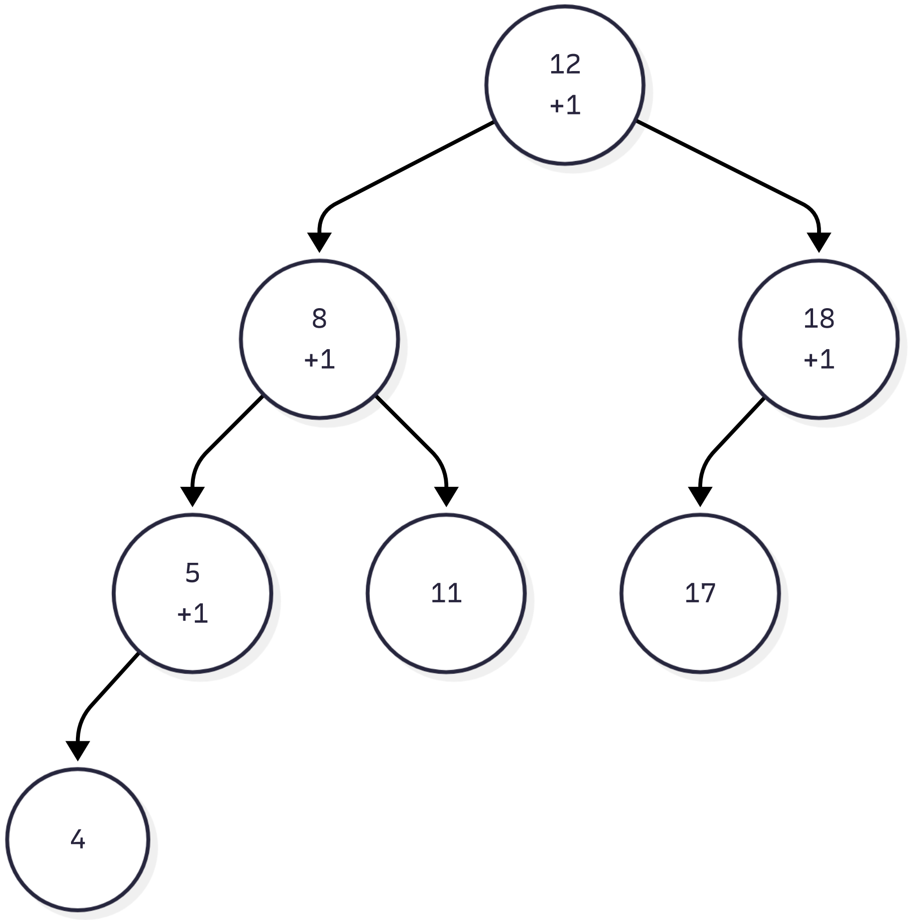
Os valores do fb nos dizem o estado de balanceamento de um nó:

- fb = 0: A subárvore esquerda e a subárvore direita têm a mesma altura. O nó está perfeitamente balanceado.
- fb = +1: A subárvore esquerda é uma aresta mais alta que a subárvore direita. O nó está balanceado, mas com uma leve inclinação para a esquerda.
- fb = -1: A subárvore direita é uma aresta mais alta que a subárvore esquerda. O nó está balanceado, mas com uma leve inclinação para a direita.

Em qualquer outro caso, será necessário um rebalanceamento.

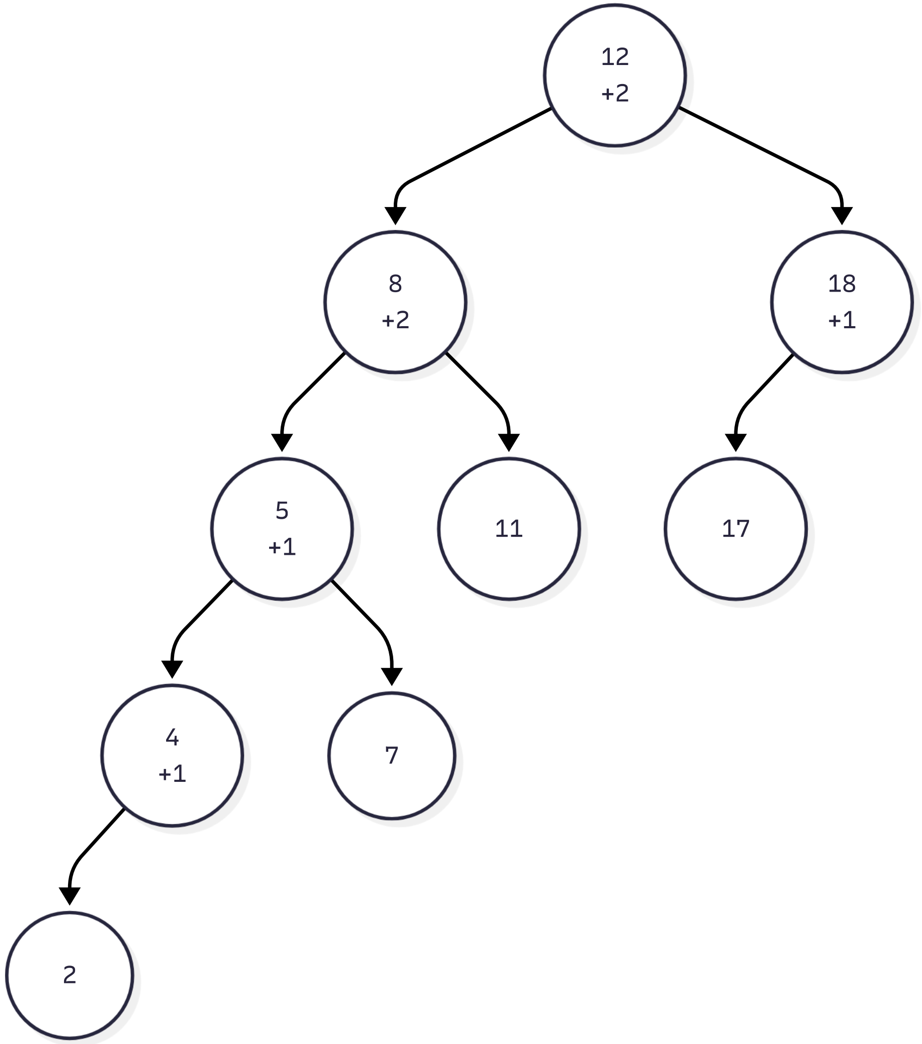
Exemplo

Neste exemplo, cada nó, além da chave, possui o fator de balanceamento. Onde não há indicação significa que o fb é zero.
Como todos os nós estão com fator de balanceamento dentro do limite permitido ([-1,1]), esta árvore é AVL.



Exemplo

Neste caso, temos o nó com chave 8 desbalanceado. Além dele, a raiz também está desbalanceada. Por essa razão, a árvore ilustrada não é AVL.



Rotações

Rotação

Para manter o balanceamento, a árvore AVL realiza operações de **rotação**. Elas são necessárias após inserções ou remoções para redistribuir os nós e garantir que o balanceamento seja preservado.

Rotação

- **Inserção/Remoção**:
  - Após esta operação, a árvore AVL verifica o fator de balanceamento dos nós afetados.
- **Rotação**:
  - Se um nó tiver um fator de balanceamento fora do intervalo aceitável (-1 a 1), uma rotação é realizada para restabelecer o balanceamento.
- **Atualização**:
  - A altura e o fator de balanceamento de todos os nós afetados pela rotação são atualizados.

Tipos de Rotações

As rotações podem ser divididas em **simples** ou **duplas**, além da direção **esquerda** ou **direita**. Como fb é a diferença entra as alturas das subárvores esquerda e direita, se

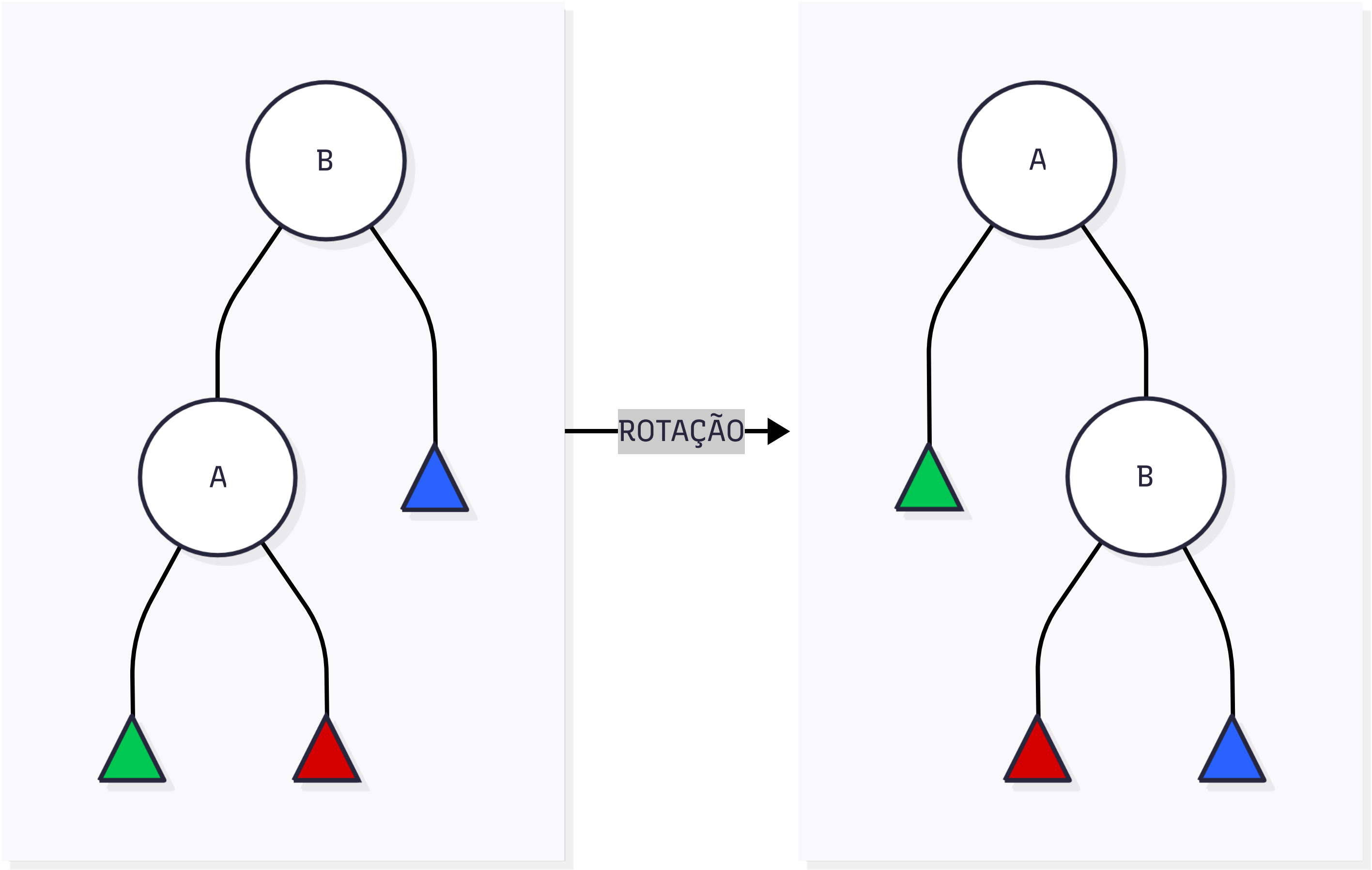
- fb > 1: deve-se rotacionar para a direita;
- fb < 1: deve-se rotacionar para a esquerda;

Sobre se a rotação é simples ou dupla, é necessário verificar o sinal do fb do filho.

Rotações Simples

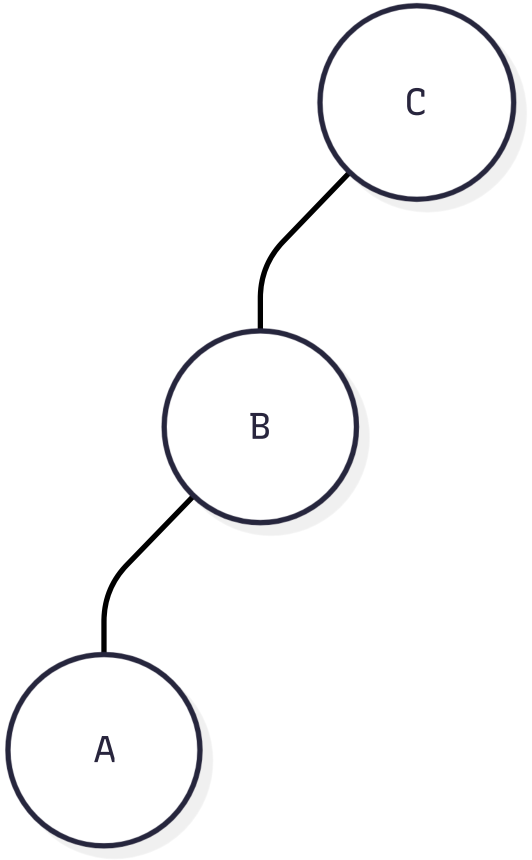
Rotação à Direita

Considere que fb(B) > 1. Além disso, fb(A) $\geq$ 0.

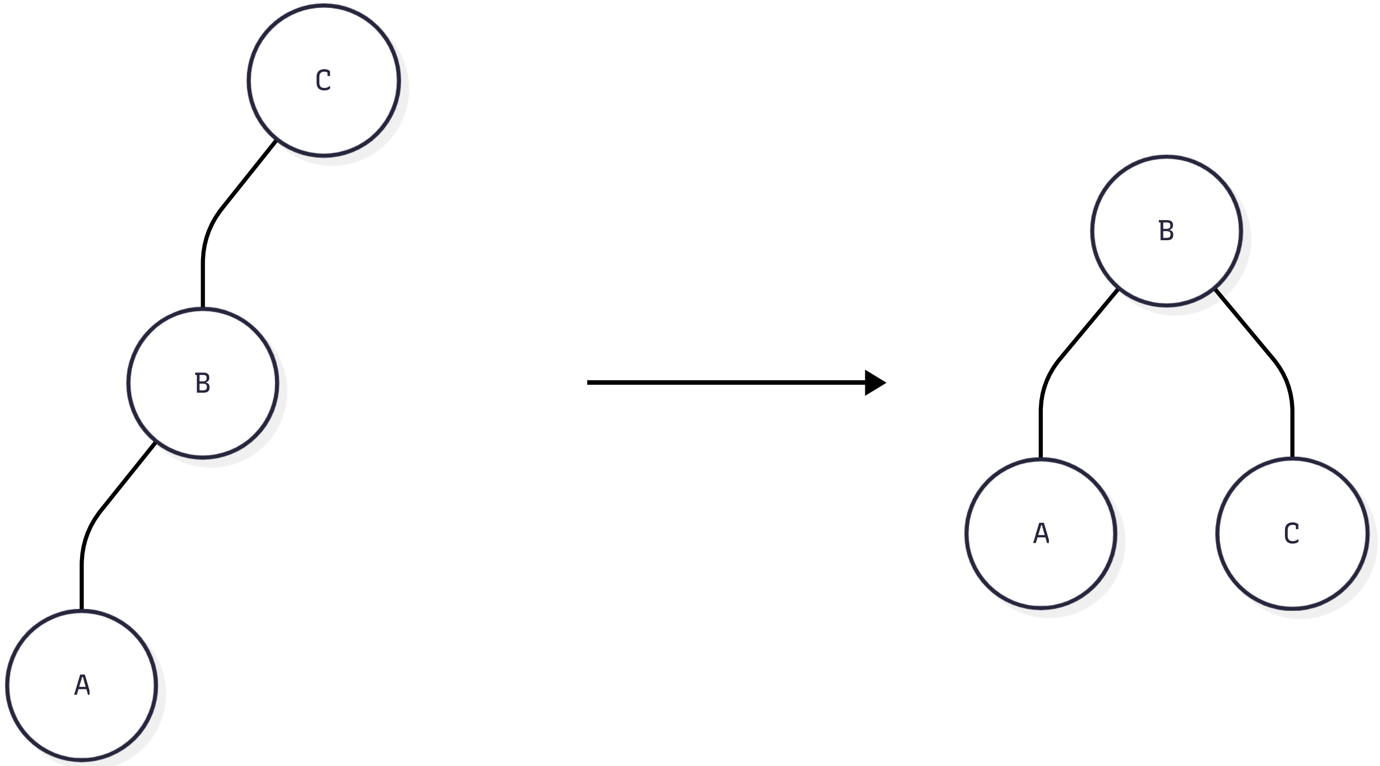


Exemplo

Claramente, o nó **C** está desbalanceado com um fator igual a +2. É necessário que seja realizada uma rotação para a direita. Desse modo, o nó **B** funciona como um pivô.

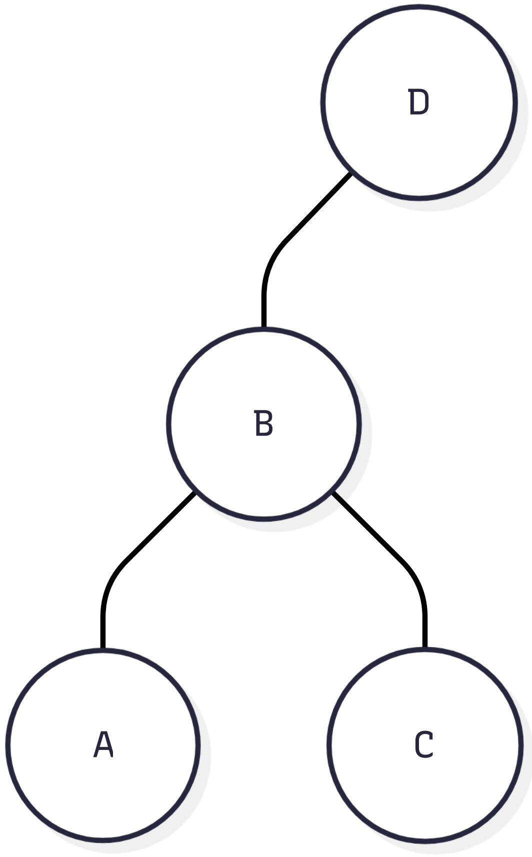


Exemplo

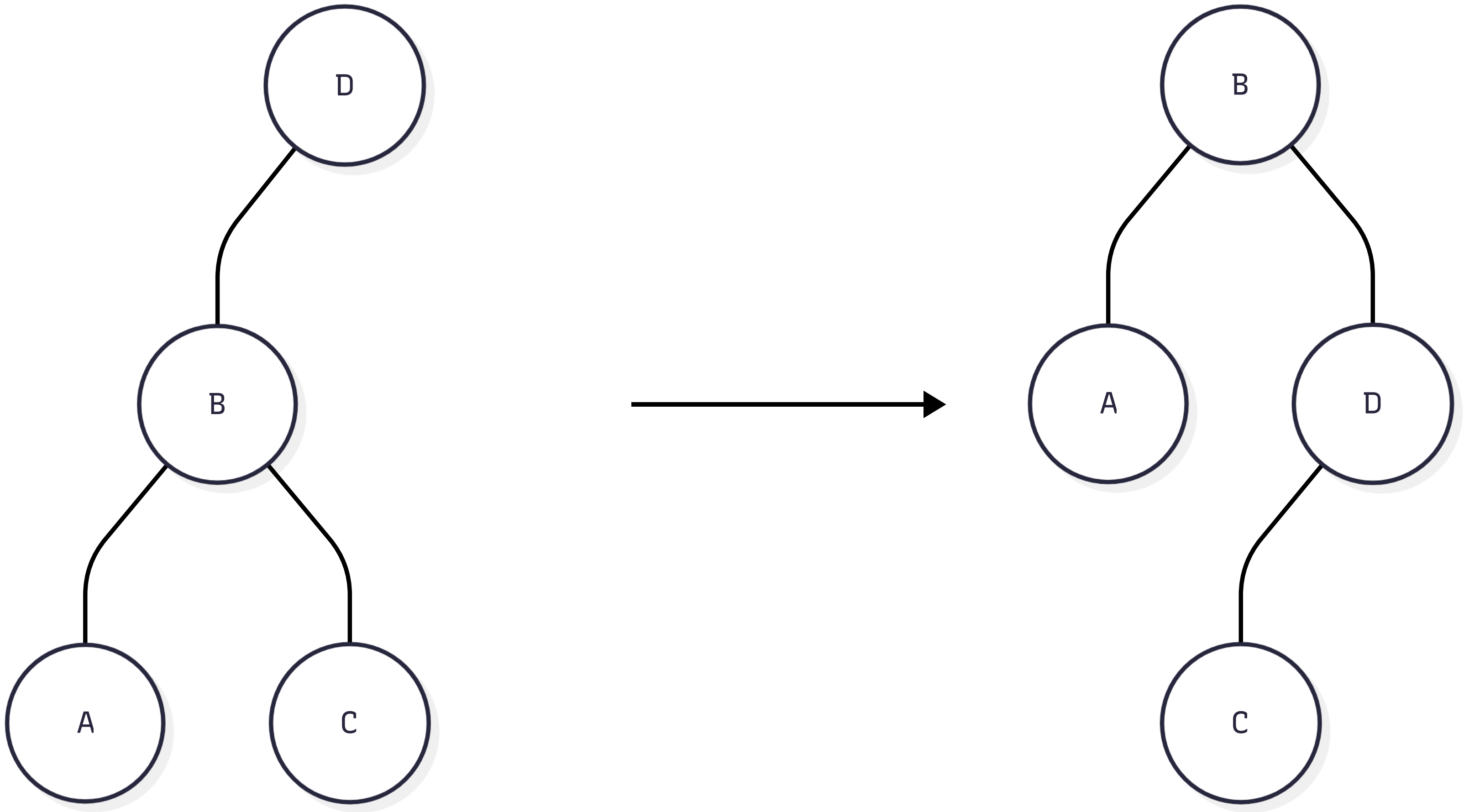


Exemplo

Claramente, o nó **A** está desbalanceado com um fator igual a +2. É necessário que seja realizada uma rotação para a direita. Como **A** deve se tornar filho da direita de **B**, devemos realocar **D** como filho da esquerda de **A**.

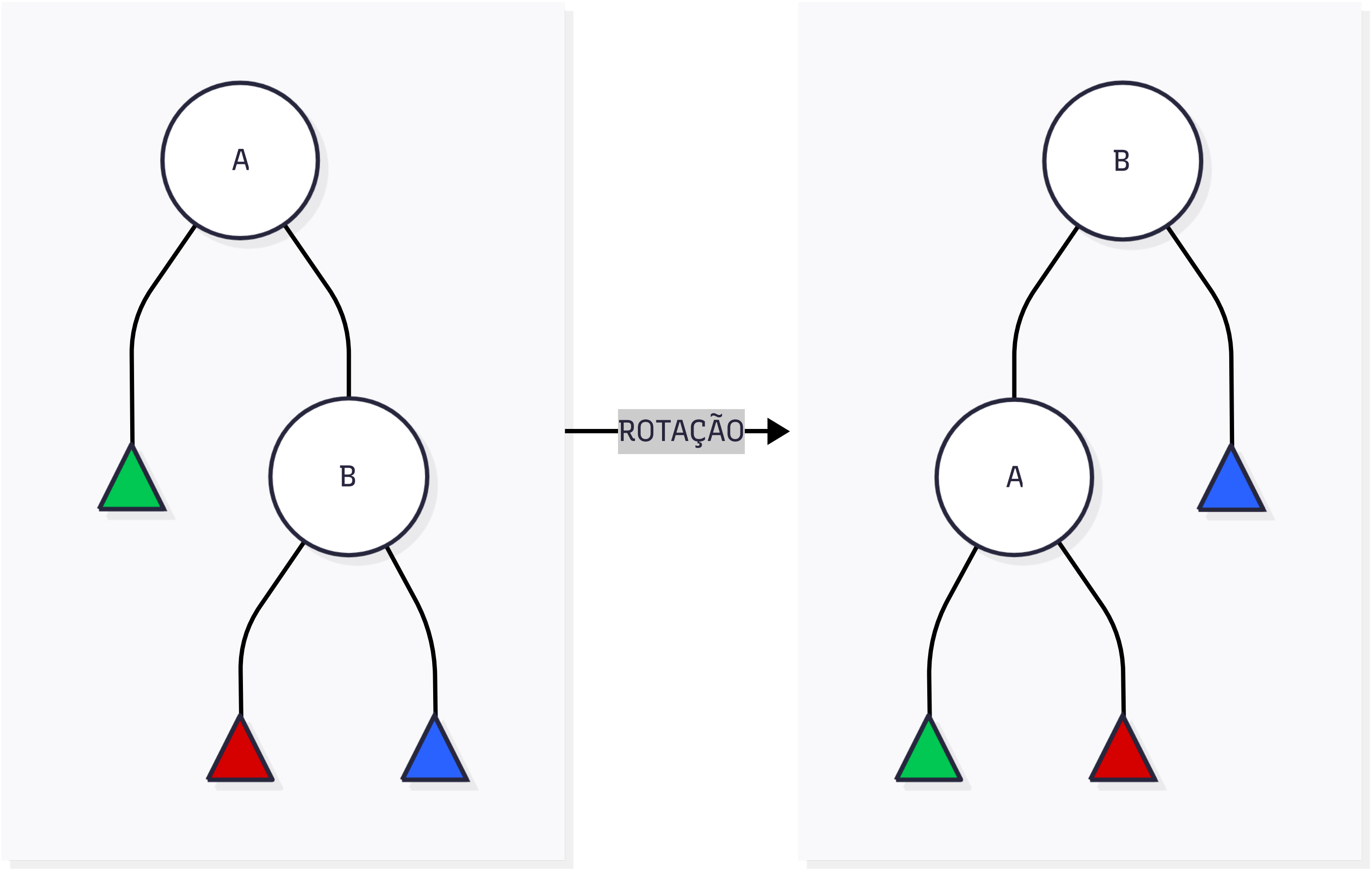


Exemplo



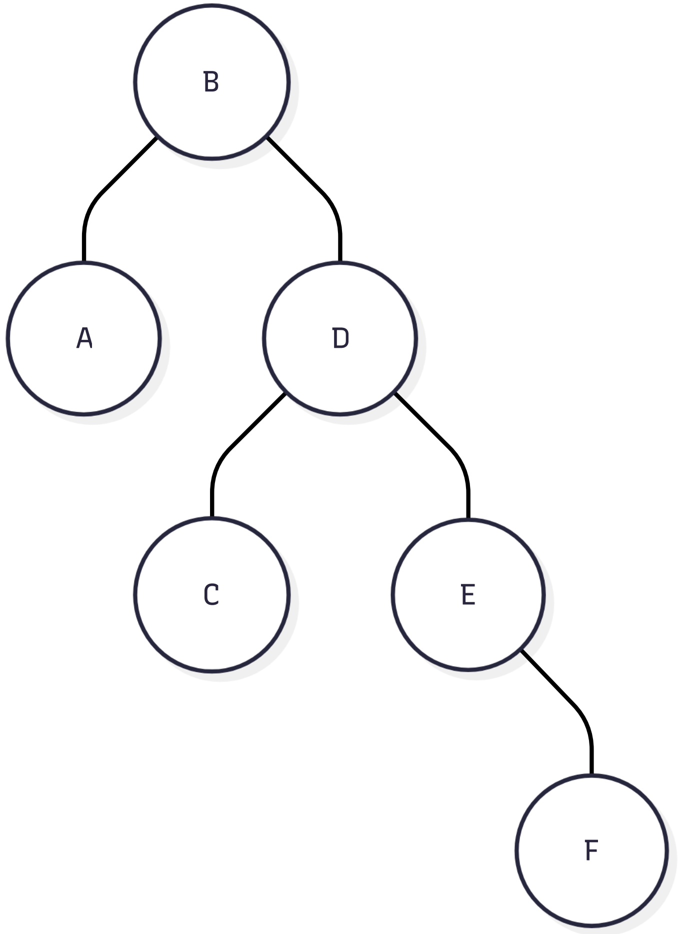
Rotação à Esquerda

A rotação à esquerda é dual à direta.

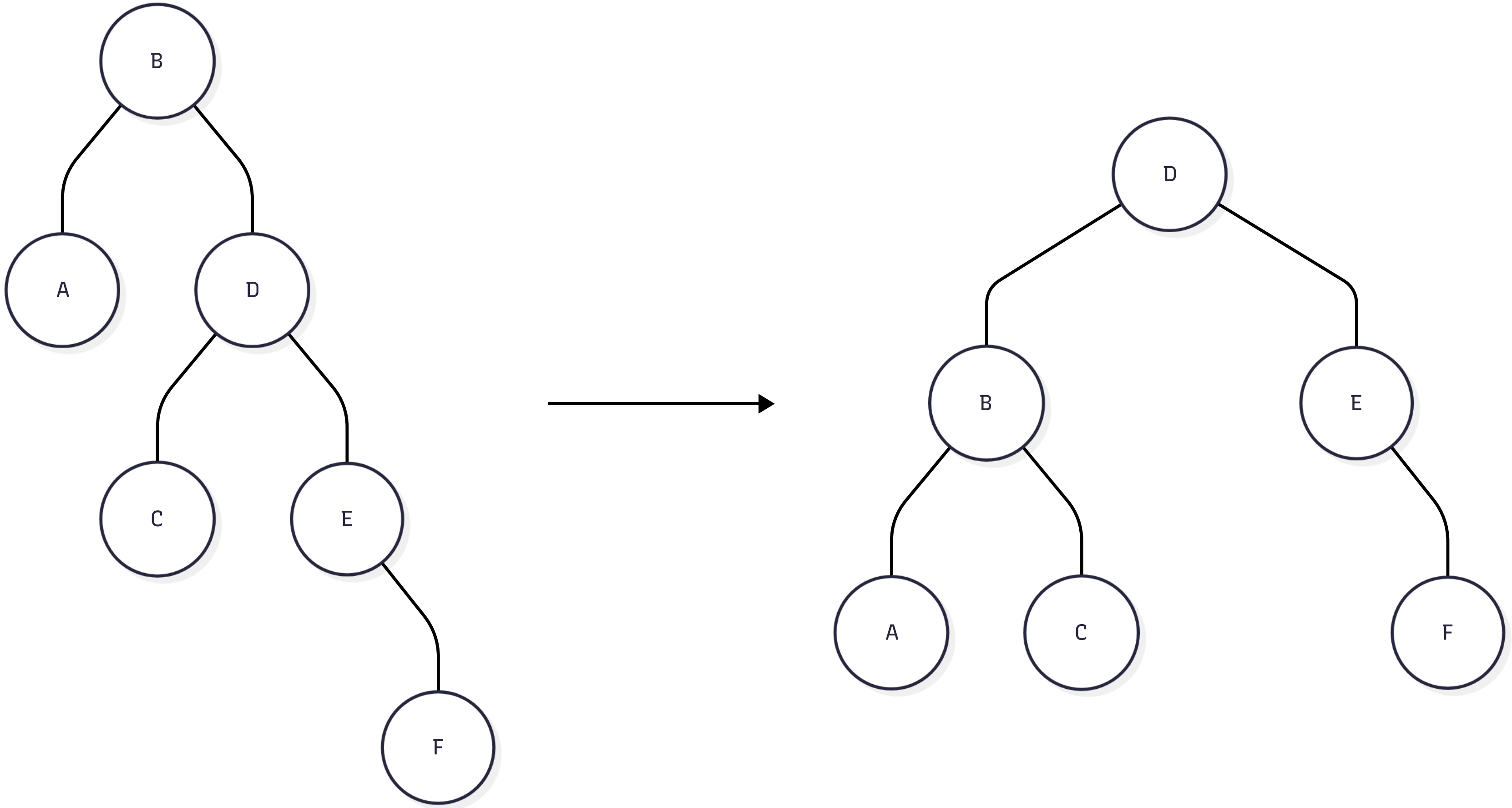


Exemplo

- Qual nó está desbalanceado?
- Qual rotação deve ser aplicada?
- Qual a árvore resultante dessa operação?



Exemplo



Nota

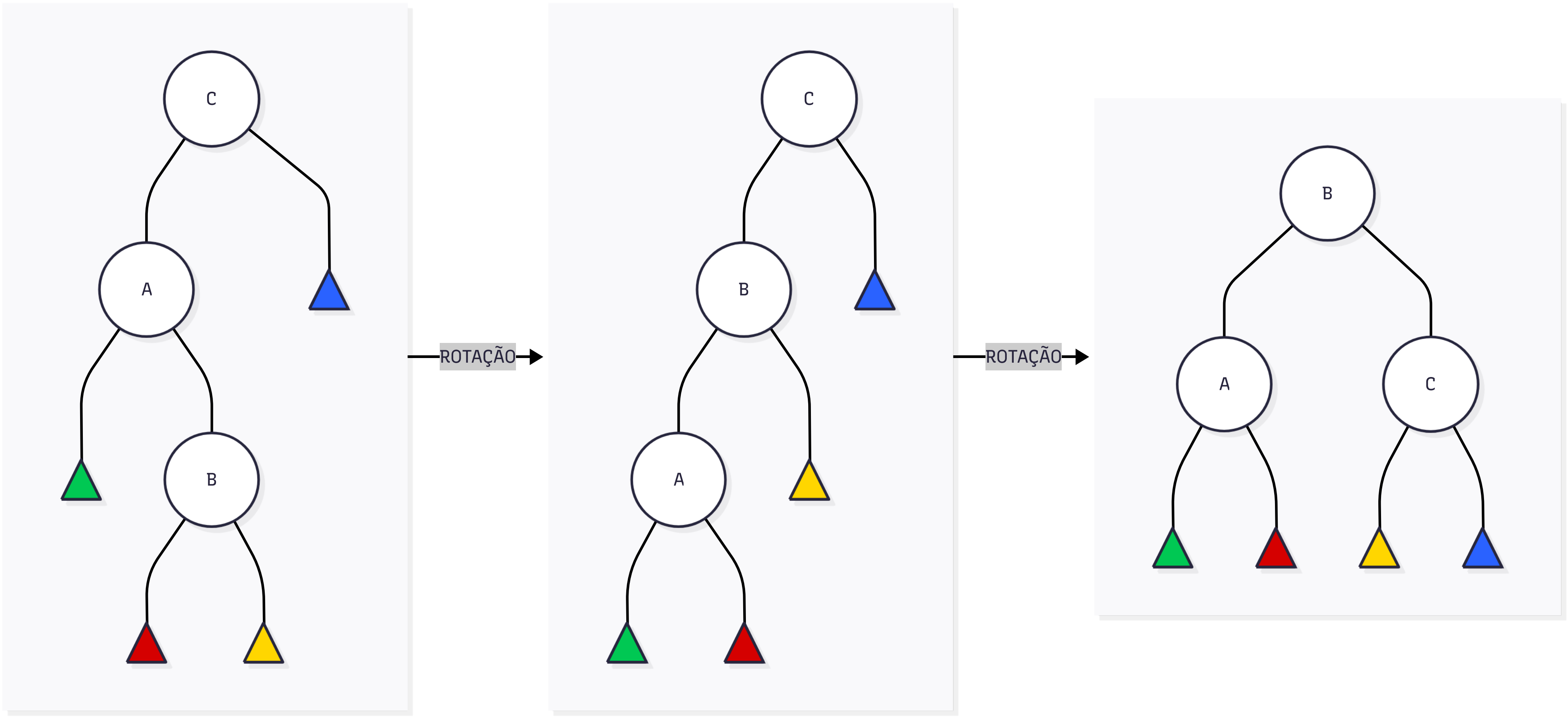
Você irá perceber que, teoricamente, só precisamos de uma rotação. Primeiro, porque as rotações à esquerda e direita são espelhadas. Segundo, como você notará, as rotações duplas pode ser divididas em simples.

Uma rotação dupla à esquerda, por exemplo, não significa duas rotações à esquerda, mas uma para a direita na subárvore seguida de uma para a esquerda. Todavia, para diminuir o número de operações, podemos fazer tudo em um passo só.

Rotações Duplas

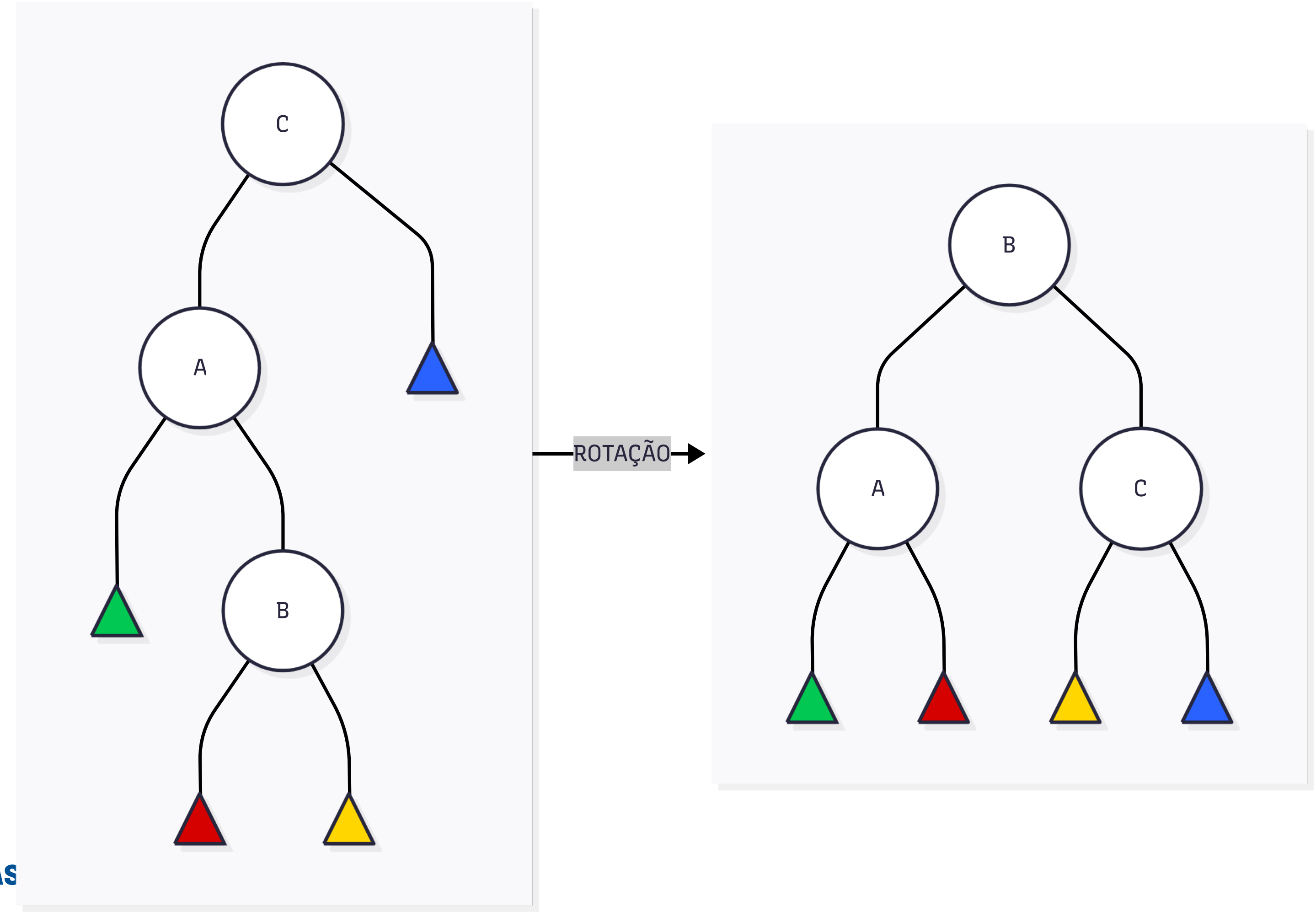
Rotação à Direita

Em dois passos. Rotação para a esquerda em **B**, depois para a direita em **A**.



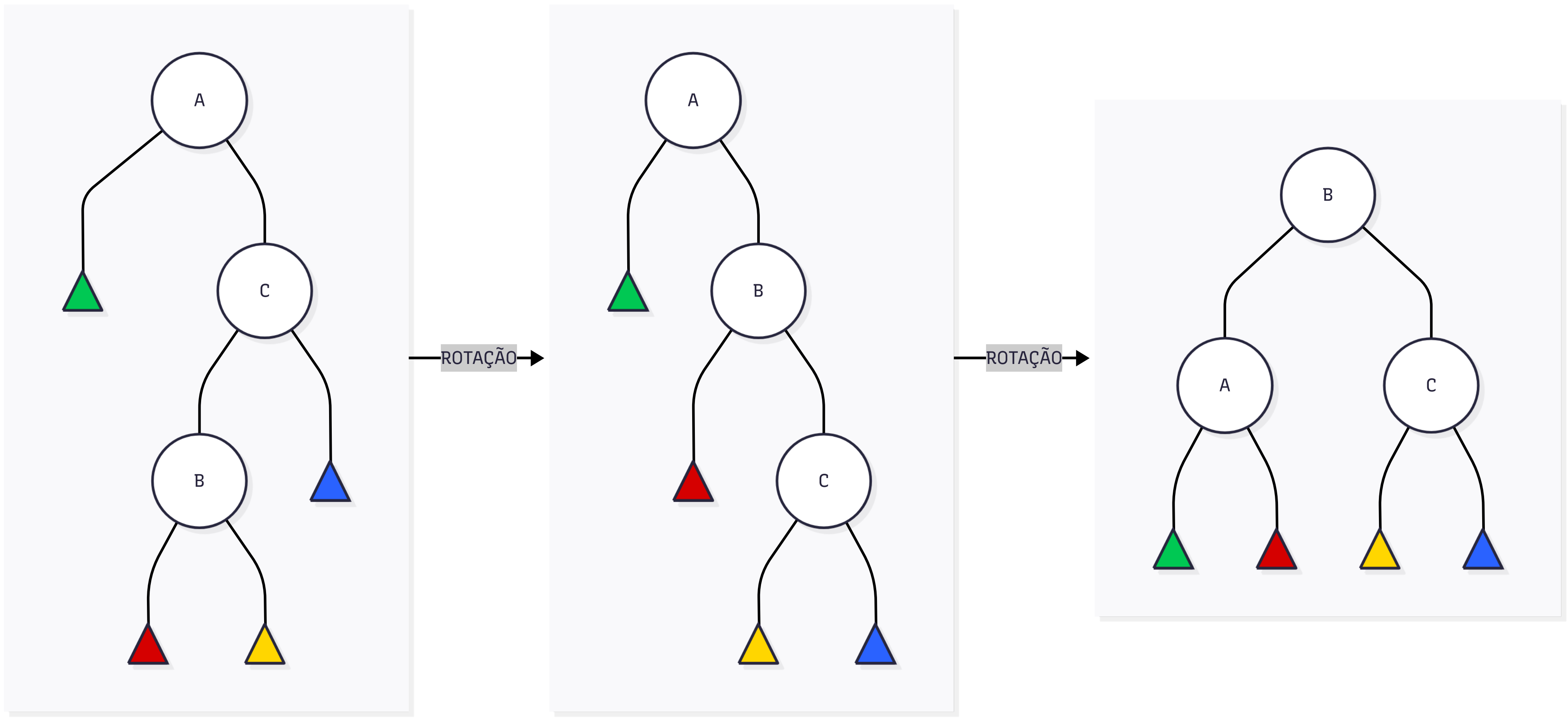
Rotação à Direita

Em um único passo. Considere fb(A) > 1 e fb(B) < 0.



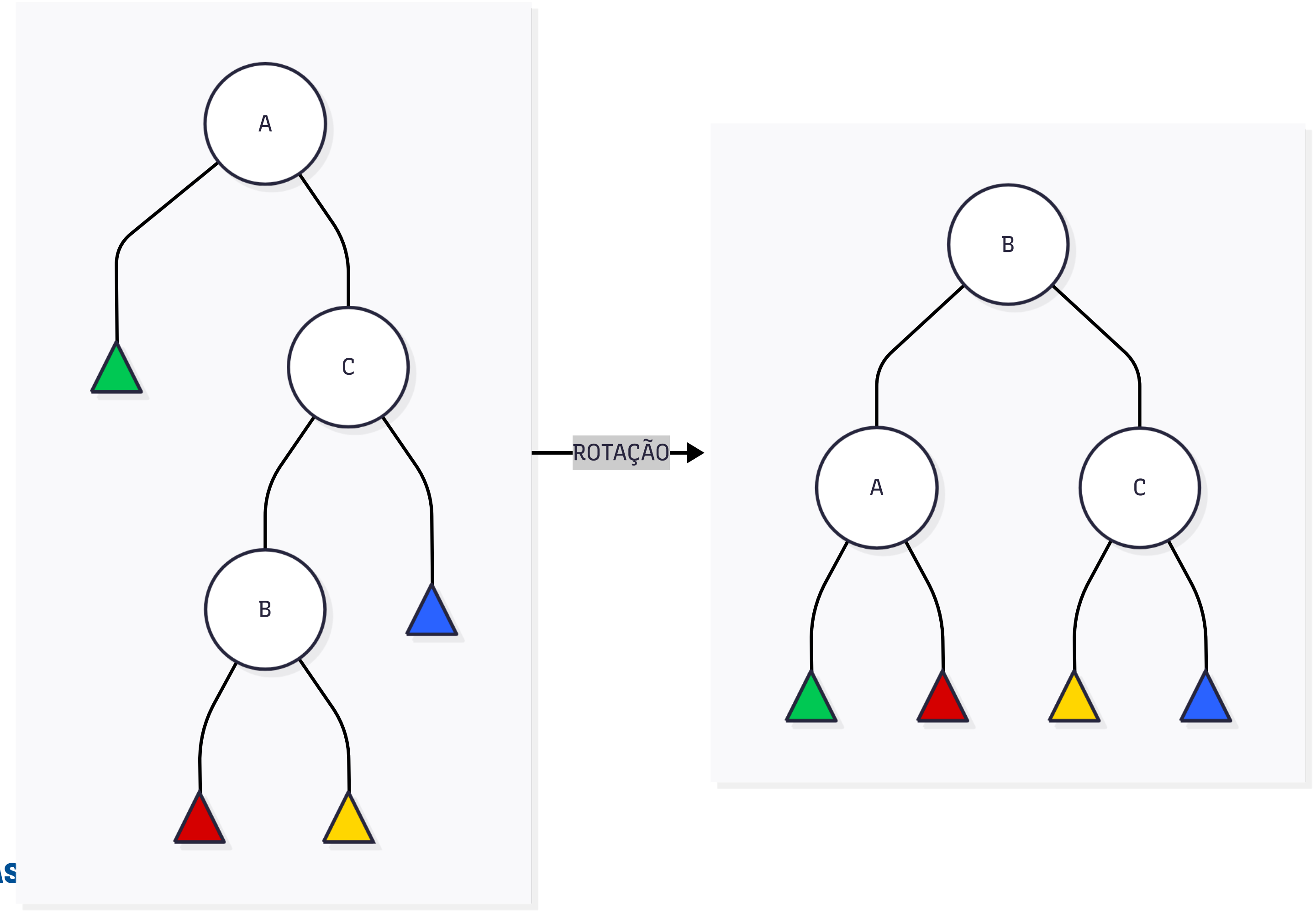
Rotação à Esquerda

Em dois passos. Rotação para a direita em **B**, depois para a esquerda em **A**.



Rotação à Esquerda

Em um único passo. Considere fb(A) < -1 e fb(B) > 0



Revisão e Considerações

Resumo

Nesta aula, estudamos a estrutura de dados árvore AVL.

> - Definimos essa estrutura baseada em BST;
> - Definimos o fator de balanceamento de um nó;
> - Estudamos as rotações
>   - Simples (Esquerda e Direita)
>   - Dupla (Esquerda e Direita)

Na próxima aula, iremos abordar as operações de inserção, busca e remoção em AVL e como as rotações são aplicadas nessas operações.

Considerações

A árvore **AVL** é uma estrutura otimizada além da BST. Ela supera a possibilidade de degeneração da árvore efetuando operações de rotação. Embora essas rotações exijam mais computações, o ganho com o rebalanceamento é maior, principalmente para buscas.

No nosso próximo estudo, iremos abordar a aplicação das rotações durante as inserções e remoções de nós na árvore.

Obrigado

UNIVERSIDADE FEDERAL
UFERSA
RURAL DO SEMI-ÁRIDO

Prof. Dr. Bruno Xavier

Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros
Departamento de Engenharias e Tecnologia
Algoritmos e Estruturas de Dados 2

2025.2