

Sistemas de Comunicaciones

Análisis de señales y sistemas lineales

Ing. Marcelo Doallo - Ing. Jorge Rodriguez Mallo

Marzo 2020

Espectros de amplitud y fase

La frecuencia es la velocidad de ocurrencia de una onda con forma senoidal.

En la mayoría de la aplicaciones prácticas la forma de onda NO es senoidal.

La transformada de Fourier (FT) encuentra los componentes de tipo senoidal en $w(t)$.

$$W(f) = \mathcal{F}[w(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$W(f)$ es conocida como *espectro de dos lados de $w(t)$* . Para Fourier existe la frecuencia negativa.

Si el módulo de $W(f_0)$ es distinto de cero, entonces la frecuencia f_0 está presente en $w(t)$.

Si $w(t) = 1$, la transformada de Fourier es cero para todo valor de f con excepción de $f = 0$. Corriente continua.

Otro caso, si $w(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ la transformada de Fourier es cero para todo valor de f con excepción de $f = f_0$ y $f = -f_0$. Corriente alterna.

Expresión *en cuadratura o cartesiana*:

$$W_{(f)} = X_{(f)} + jY_{(f)}$$

Expresión *magnitud y fase o polar*

$$W_{(f)} = |W_{(f)}|e^{j\theta_{(f)}}$$

La forma de onda en el tiempo puede calcular a partir de:

$$w_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{(f)} e^{j2\pi ft} df$$

$w(t)$ y $W(f)$ constituyen un par de transformada de Fourier.

$$w_{(t)} \Leftrightarrow W_{(f)}$$

Si por ejemplo $w_{(t)}$ se mide en Volts, entonces su transformada de Fourier ($W_{(f)}$) se medirá en Volts por Segundo (Volts x Sg).

Si por ejemplo $w_{(t)}$ se mide en Amper, entonces su transformada de Fourier ($W_{(f)}$) se medirá en Amper por Segundo (Amps x Sg).

Clasificación de las señales temporales

- Periódicas (**Señales de potencia**)

$$v_{(t \pm m.T_0)} = v_{(t)} \text{ si } -\infty < t < \infty$$

- No periódicas (**Señales de energía**)

$$v_{(t)} \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \pm\infty$$

- Estrictamente limitadas en el tiempo.
- Asintóticamente limitadas en el tiempo.

Todas las señales físicas son señales de energía, aunque a menudo se utilizan se utilizan modelos matemáticos de señales de potencia para simplificar el análisis.

Simetría espectral de señales reales

Si $w(t)$ es real, entonces:

$$W(-f) = W^*(f)$$

- El espectro de magnitud es PAR alrededor del origen

$$|W(-f)| = |W(f)|$$

- El espectro de fase es IMPAR alrededor del origen

$$\theta(-f) = -\theta(f)$$

Además:

- Si $w(t)$ es real y PAR, entonces $W(f)$ es sólo REAL
- Si $w(t)$ es real e IMPAR, entonces $W(f)$ es sólo IMAGINARIA

$w(t)$ es transformable por Fourier si cumple las condiciones de Dirichlet.

- Sobre cualquier intervalo de tiempo finito, la función posee un número finito de máximos, de mínimos y de discontinuidades.
- La función es integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)| dt < \infty$$

Estás condiciones son suficientes pero no necesarias.

Una condición suficiente más débil para la existencia de la FT es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt < \infty$$

Todas las formas de ondas físicamente realizables satisfacen esto, ergo son transformables.

Se refiere como energía “normalizada” porque la impedancia es de valor unitario.

Teorema de Parseval y densidad espectral de energía

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t) w_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(f) W_2^*(f) df$$

Si $w_1(t) = w_2(t) = w(t)$, entonces:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df$$

conocido como Teorema de energía de Rayleigh.

Esto permite evaluar la energía en el espectro de la frecuencia, entonces **la densidad espectral de energía (ESD) es:**

$$\varepsilon(f) = |W(f)|^2$$

Algunas formas de evaluar la FT

- 1 Integración directa
- 2 Tablas de transformadas de Fourier o de Laplace
- 3 Teoremas de la FT
- 4 Superposición para dividir el problema en dos o más problemas simples
- 5 Integración numérica de la integral de la FT por medio de uso de una PC

Caso de resolución directa

Sea el caso del pulso de caída exponencial definido como:

$$w(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Resolviendo directamente:

$$W(f) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = -\left. \frac{e^{-(1+j2\pi f)t}}{1+j2\pi f} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

Por lo tanto:

$$w(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow W(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

Algunos Teoremas de la Transformada de Fourier

Si la función tiene la forma de:

$$a_1 w_{1(t)} + a_2 w_{2(t)}$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$a_1 W_{1(f)} + a_2 W_{2(f)}$$

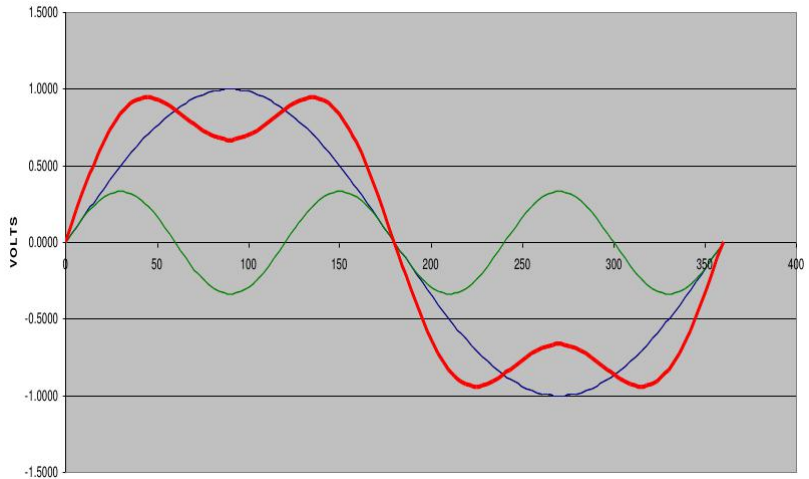
Si la función tiene la forma de:

$$w(t - T_d)$$

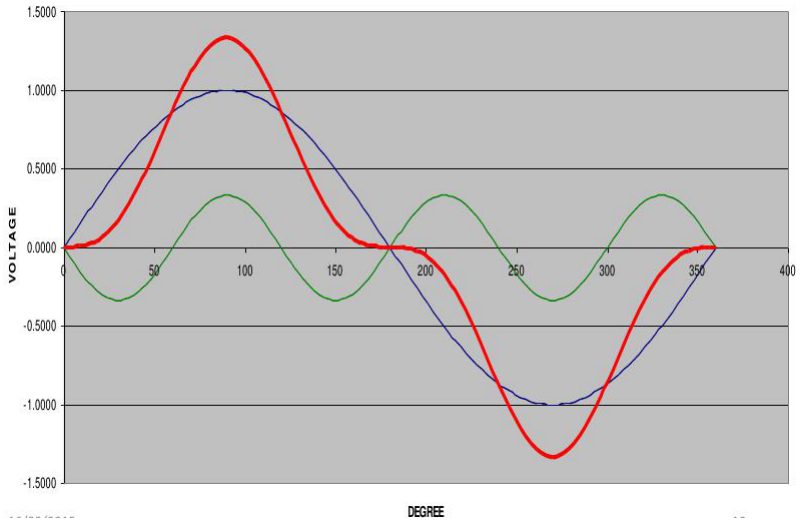
entonces la Transformada de Fourier es:

$$W_{(f)} e^{-j\omega T_d}$$

Efecto del retardo



Efecto del retardo (2)



En las señales moduladas o pasabanda el ancho de banda de la señal es mucho menor que la frecuencia de portadora

$$B_T \ll f_c$$

con lo cual esto no es un problema

Si la función tiene la forma de:

$$w_{(a\ t)}$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$\frac{1}{|a|} W_{\left(\frac{f}{a}\right)}$$

Si la función tiene la forma de:

$$w_{(t)}^*$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$W_{(-f)}^*$$

Si la función tiene la forma de:

$$W(t)$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$W(-f)$$

Si la función tiene la forma de:

$$w_{(t)} \cdot \cos(\omega_c t + \theta)$$

donde $w_{(t)}$ es real, entonces la Transformada de Fourier es:

$$\frac{1}{2} \left\{ e^{j\theta} W_{(f-f_c)} + e^{-j\theta} W_{(f+f_c)} \right\}$$

Si la función tiene la forma de:

$$w(t) e^{j\omega_c t}$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$W_{(f-f_c)}$$

Si la función tiene la forma de:

$$\frac{d^n w_{(t)}}{dt^n}$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$(j2\pi f)^n W_{(f)}$$

Si la función tiene la forma de:

$$\int_{-\infty}^t w_{(\lambda)} d\lambda$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$\frac{W_{(f)}}{j2\pi f} + \frac{1}{2} W_{(0)} \delta_{(f)}$$

Si la función tiene la forma de:

$$t^n \cdot w(t)$$

entonces la Transformada de Fourier es:

$$(-j2\pi)^{-n} \frac{d^n W(f)}{df^n}$$

Caso de uso de propiedades de las transformadas de Fourier

Sea el caso de la senoidal amortiguada:

$$w_{(t)} = \begin{cases} e^{-t/T} \cdot \text{sen}(w_0 t), & t > 0, T > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

tomando la FT del ejemplo anterior, combinada con las propiedades de cambio de escala, donde $a = 1/T$ y conversión de frecuencia de una señal real con $\theta = -\pi/2$, obtenemos:

$$W_{(f)} = \frac{1}{2} \left\{ e^{-j\pi/2} \frac{T}{1 + j2\pi T(f - f_o)} + e^{j\pi/2} \frac{T}{1 + j2\pi T(f + f_o)} \right\}$$

Caso de uso de propiedades de las transformadas de Fourier (2)

Puesto que $e^{\pm j\pi/2} = \cos(\pi/2) \pm j \sin(\pi/2) = \pm j$, obtenemos

$$W_{(f)} = \frac{T}{2j} \left\{ \frac{1}{1 + j2\pi T(f - f_o)} - \frac{1}{1 + j2\pi T(f + f_o)} \right\}$$

Donde $W_{(f)}$ es compleja debido a que $w_{(t)}$ real pero no es ni PAR ni IMPAR.

Además $W_{(f)}$ tiene su máximo en f_0 (en el ejemplo anterior el máximo estaba en cero).

Esto significa que multiplicar una función por $\sin(\omega_o t)$ causa que el espectro de la función se desplace a f_0 .

Función delta de Dirac $\delta(t)$

Definición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \delta(x) dx = w(0)$$

Donde $w(x)$ es cualquier función continua en $x = 0$. La variable x puede ser de tiempo o de frecuencia.

Definición alternativa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

y

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Características de la función delta de Dirac

Propiedad del corrimiento:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \delta(x-x_0) dx = w(x_0)$$

Integral equivalente de la función delta de Dirac es:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi xy} dy$$

ya que si evaluamos la integral es 0 para cualquier valor de x e ∞ para $x = 0$, entonces la transformada de Fourier es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^0 = 1$$

Ejemplo: “La bujía y la radio”.

Función escalón unitario $\mu(t)$ y su relación con la Delta de Dirac

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

La función Delta de Dirac está relacionada con esta mediante:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = \mu(t)$$

En consecuencia:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)$$

Espectro de una senoidal

Sea $v(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t)$, donde $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-i\omega t} dt$$

donde operando convenientemente obtenemos:

$$V(f) = j \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

El espectro es imaginario porque la función es IMPAR.

A una señal periódica le corresponde un espectro de líneas.

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

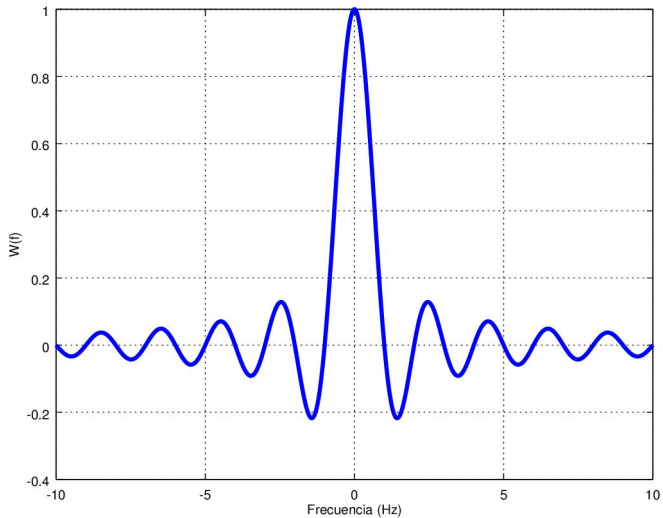
Cuya FT se relaciona con la función sinc, ya que:

$$\Pi(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = T \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Por lo tanto:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T \cdot \text{Sa}(\pi T f)$$

Función sinc (Sa)



GNU Octave como herramienta para análisis de funciones

```
clear;  
  
f = -10:0.1:10;  
T = 1;  
x = pi*T*f;  
W = T*SA(x);  
plot(f,W);  
xlabel('f');  
ylabel('W(f)');  
grid;
```

Función SA(x)

```
function y = SA(x)
% This function computes sin(x)/x.

x = x(:);
y = zeros(length(x),1);
for (i = 1:length(x))
    if (x(i) == 0)
        y(i) = 1;
    else
        y(i) = sin(x(i))/x(i);
    end;
end;
```

Ver ejemplo: TF_Sinc.m (Evaluar para $T = 0,5$, $T = 1$, $T = 2$ y $T = 5$)

Preguntas sobre la TF de la Sinc

- La Transformada de Fourier es un complejo, pero en este caso en real. ¿Por qué?
- Lo que se observa es la Transformada de Fourier de un pulso rectangular, ¿Se corresponde con la Densidad Espectral de Energía de la señal, o con la Densidad Espectral de Potencia?
- ¿Las cuatro situaciones planteadas ($T = 0,5$, $T = 1$, $T = 2$ y $T = 5$) poseen la misma cantidad de Energía o Potencia?

$w_{1(t)}$ convolución con $w_{2(t)}$ produce una tercer función definida como:

$$w_{3(t)} = w_{1(t)} * w_{2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1(\lambda)} \cdot w_{2(t-\lambda)} d\lambda$$

Si se requiere la convolución de formas de onda discontinuas, generalmente es más fácil pensarla así:

$$w_{3(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1(\lambda)} \cdot w_{2(-(\lambda-t))} d\lambda$$

para su resolución gráfica.

Convolución: Resolución gráfica

$$w_{3(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1(\lambda)} \cdot w_{2(-(\lambda-t))} d\lambda$$

- 1 Invertir en el tiempo $w_{2(t)}$, lo llamaremos $w_{2i(t)}$
- 2 Desplazar en el tiempo de $w_{2i(t)}$ desde $-\infty$ a $+\infty$ sobre la representación gráfica de $w_{1(t)}$.
- 3 Calcular el área de superposición entre $w_{2i(t)}$ y $w_{1(t)}$ instantáneamente y el resultado del área instantánea se ubica en el tiempo correspondiente al origen de $w_{2i(t)}$, que se está desplazando de izquierda a derecha.

Animación gráfica (de convolución discreta) en:

<http://www.youtube.com/watch?v=6F1tvOZF02o>

Propiedad de la transformada de Fourier para la Convolución en el tiempo

Dada la función:

$$w_{3(t)} = w_{1(t)} * w_{2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1(\lambda)} \cdot w_{2(t-\lambda)} d\lambda$$

la transformada de Fourier es:

$$W_{3(f)} = W_{1(f)} \cdot W_{2(f)}$$

Propiedad de la transformada de Fourier para la Convolución en frecuencia

Dada la función:

$$w_{3(t)} = w_{1(t)} \cdot w_{2(t)}$$

la transformada de Fourier es:

$$W_{3(f)} = W_{1(f)} * W_{2(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{1(\lambda)} \cdot W_{2(f-\lambda)} d\lambda$$

Algunos pares de transformadas de Fourier

TABLA 2-2 ALGUNOS PARES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Función	Forma de onda en tiempo $w(t)$	Espectro $W(f)$
Rectangular	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\text{Sa}(\pi f T)]$
Triangular	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\text{Sa}(\pi f T)]^2$
Escalón unitario	$u(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
Signo	$\text{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$
Constante	1	$\delta(f)$
Impulso en $t = t_0$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
Sinc	$\text{Sa}(2\pi W t)$	$\frac{1}{2W} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
Fasor	$e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$	$e^{j\varphi} \delta(f - f_0)$
Senoidal	$\cos(\omega_c t + \varphi)$	$\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_c)$
Gaussiano	$e^{-\pi(t/t_0)^2}$	$t_0 e^{-\pi(f/f_0)^2}$
Exponencial, lateral	$\begin{cases} e^{-t/T}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{T}{1 + j2\pi f T}$
Exponencial, bilateral	$e^{- t /T}$	$\frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2}$
Tren de impulsos	$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT)$	$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(f - nf_0)$, donde $f_0 = 1/T$

Resumen de teoremas de la transformada de Fourier

TABLA 2-1 ALGUNOS TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER*

Operación	Función	Transformada de Fourier
Linealidad	$a_1 w_1(t) + a_2 w_2(t)$	$a_1 W_1(f) + a_2 W_2(f)$
Retraso de tiempo	$w(t - T_d)$	$W(f) e^{-j2\pi f T_d}$
Cambio de escala	$w(at)$	$\frac{1}{ a } W\left(\frac{f}{a}\right)$
Conjugación	$w^*(t)$	$W^*(-f)$
Dualidad	$W(t)$	$w(-f)$
Conversión de frecuencia de señal real [$w(t)$ es real]	$w(t) \cos(\omega_c t + \theta)$	$\frac{1}{2}[e^{j\theta} W(f - f_c) + e^{-j\theta} W(f + f_c)]$
Conversión de frecuencia de señal compleja	$w(t) e^{j\omega_c t}$	$W(f - f_c)$
Señal pasabanda	$\text{Re}\{g(t) e^{j\omega_c t}\}$	$\frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$
Diferenciación	$\frac{d^n w(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n W(f)$
Integración	$\int_{-\infty}^t w(\lambda) d\lambda$	$(j2\pi f)^{-1} W(f) + \frac{1}{2} W(0) \delta(f)$
Convolución	$w_1(t) * w_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) w_2(t - \lambda) d\lambda$	$W_1(f) W_2(f)$
Multiplicación ^b	$w_1(t) w_2(t)$	$W_1(f) * W_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda) W_2(f - \lambda) d\lambda$
Multiplicación por t^n	$t^n w(t)$	$(-j2\pi)^{-n} \frac{d^n W(f)}{df^n}$

* $\omega_c = 2\pi f_c$.

^b * cl * denota convolución, descrita detalladamente en la ecuación (2-62).

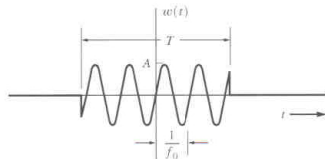
$$w_{(t)} = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)A \sin(\omega_0 t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)A \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

utilizando el cálculo anterior para $\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ y el teorema de la convolución obtenemos:

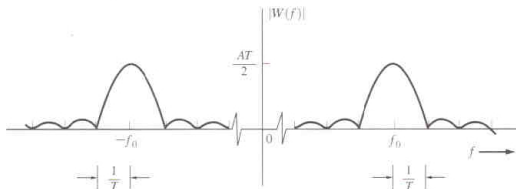
$$W_{(f)} = j\frac{A}{2}T[Sa(\pi T(f + f_0)) - Sa(\pi T(f - f_0))]$$

$W_{(f)}$ es continua e imaginaria.

Espectro de la seínode conmutada (2)



(a) Dominio del tiempo



(b) Dominio de frecuencia (espectro de magnitud)

Si $T \rightarrow \infty$ el espectro se vuelve de líneas en $\pm f_0$.

Este problema también se podía haber resuelto por convolución gráfica.

Formas de cálculo de potencia

A partir de $w(t)$

$$P = \langle w_{(t)}^2 \rangle$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w_{(t)}^2 dt$$

A partir de la Función Distribución de Probabilidad (PDF), $f_{(w)}$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 \cdot f_{(w)} dw$$

A partir de la Densidad Espectral de Potencia (PSD)

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} PSD df$$

La autocorrelación de la forma de onda real, física, es:

$$R_w(\tau) = \langle w_{(t)} w_{(t+\tau)} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w_{(t)} w_{(t+\tau)} dt$$

Puede demostrarse, no lo haremos, que la transformada de Fourier de la función autocorrelación de $w_{(t)}$ respecto de τ , da por resultado la Densidad espectral de Potencia (PSD)

$$R_w(\tau) \leftrightarrow \text{PSD}$$

De $w(t) = A \sin(\omega_0 t)$ primero calculamos la función autocorrelación $R_w(\tau) = \langle w(t) w(t+\tau) \rangle$:

$$R_w(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \sin(\omega_0 t) \sin[\omega_0(t + \tau)] dt$$

$$R_w(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$$\text{PSD} = \mathcal{F} \left[\frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \right] = \frac{A^2}{4} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \text{PSD} df = \frac{A^2}{2}$$

Una forma de onda física puede representarse en el intervalo $(a, a + T_0)$ mediante la serie exponencial compleja de Fourier, dada por:

$$w_{(t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

donde los coeficientes (fasores) de Fourier son:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w_{(t)} e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

$$\text{y } \omega_0 = 2\pi f_0$$

c_n es en general un número complejo.

También es un fasor, porque es el coeficiente de $e^{j.n.\omega_0.t}$.

Si $w_{(t)}$ es real, entonces $c_n = c_{-n}^*$.

Si $w_{(t)}$ es real y par ($w_{(t)} = w_{(-t)}$), entonces $Im[c_n] = 0$.

Si $w_{(t)}$ es real e impar ($w_{(t)} = -w_{(-t)}$), entonces $Re[c_n] = 0$.

El teorema de Parseval es en este caso:

$$\frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} |w_{(t)}|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2$$

Esta expresión, ¿es de potencia o de energía? (normalizada)

Serie de Fourier en cuadratura

La forma en cuadratura de la serie de Fourier para representar una forma de onda física $w_{(t)}$ en el intervalo $(a, a + T_0)$ es:

$$w_{(t)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos(n.\omega_0.t) + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin(n.\omega_0.t)$$

Las funciones $\cos(n.\omega_0.t)$ y $\sin(n.\omega_0.t)$ son ortogonales.

$$\int_a^{a+T_0} \varphi_{n(t)} \varphi_{m(t)}^* dt = 0$$

Sus coeficientes están dados por:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) dt, & n = 0 \\ \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) \cos(n.\omega_0.t) dt, & n \geq 1 \end{cases}$$
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) \operatorname{sen}(n.\omega_0.t) dt, n > 0$$

La serie de Fourier de una función $w(t)$ **real** también puede expresarse en forma polar:

$$w(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} D_n \cos(n.\omega_0.t + \varphi_n)$$

donde:

$$D_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} c_0, & n = 0 \\ 2|c_n|, & n \geq 1 \end{cases}$$

y

$$\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \text{Ángulo de } c_n$$

Si una forma de onda $w(t)$ es periódica con periodo T_0 , entonces su espectro es:

$$W(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - n.f_0)$$

Una función periódica tendrá siempre un espectro de líneas.

c_n son fasores.

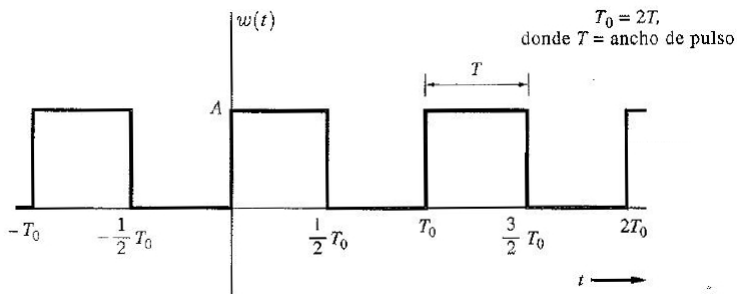
Si una función no contiene componentes periódicos, entonces su espectro será continuo.

Phasors-2.gif

Phasors-2.jpg

Representación de $w(t)$ a partir de los coeficientes de fourier

Sea el caso de una onda periódica rectangular:



Representación de $w_{(t)}$ a partir de los coeficientes de fourier (2)

Entonces los coeficientes son:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

que operando convenientemente se llega a:

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{2}, & n = 0 \\ -j \frac{A}{n\pi}, & n = \text{impar} \\ 0, & n = \text{par} \end{cases}$$

Representación de $w_{(t)}$ a partir de los coeficientes de fourier (3)

Entonces es posible reproducir $w_{(t)}$ a partir de los coeficientes:

$$w_{(t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \cdot e^{-j.n.\omega_0.t}$$

Usando GNU octave como herramienta de análisis
(SerieFourier.m)

Potencia normalizada en ondas periódicas

En problemas de comunicaciones se requiere con frecuencia conocer la potencia promedio normalizada, que para el caso de ondas periódicas se puede conocer a partir de los coeficientes de la serie de Fourier.

$$P_w = \langle w_{(t)}^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2$$

Un sistema es lineal si podemos hacer lo siguiente:

$$y_{(t)} = \mathcal{L}[a_1 x_{1(t)} + a_2 x_{2(t)}]$$

$$y_{(t)} = a_1 \mathcal{L}[x_{1(t)}] + a_2 \mathcal{L}[x_{2(t)}]$$

donde:

$y_{(t)}$ es la salida,

$a_1 x_{1(t)} + a_2 x_{2(t)}$ es la entrada, compuesta por dos señales y

$\mathcal{L}[\cdot]$ denota el operador sistema lineal.

Esto significa que podemos aplicar superposición.

Dado un sistema donde:

$$y(t) = \mathcal{L}[x(t)]$$

El sistema será invariable en el tiempo si para cualquier entrada retrasada $x_{(t-t_0)}$, la salida se retrasa por la misma cantidad $y_{(t-t_0)}$.

La forma de la respuesta es la misma sin importar en que momento se aplique la entrada. No tiene memoria.

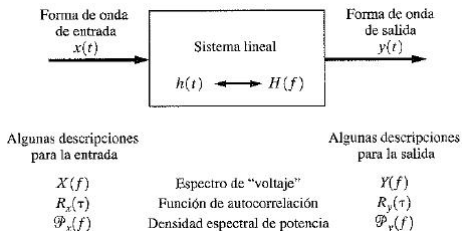
Respuesta al impulso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo

Si a un sistema lineal invariable en el tiempo se le aplica una función delta de Dirac ($\delta_{(t)}$) a la entrada; obtenemos a la salida del mismo una función denominada respuesta al impulso ($h_{(t)}$), que es la función transferencia del sistema en el dominio del tiempo.

En redes físicas la respuesta al impulso es causal, esto es $h_{(t)} = 0$ si $t < 0$.

Luego la respuesta al impulso puede utilizarse para calcular la respuesta del sistema para cualquier entrada.

Representación gráfica del sistema lineal



$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$$

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(f)]$$

o

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Densidad espectral de potencia en sistemas lineales invariantes en el tiempo

$$\mathcal{P}_{y(f)} = |H(f)|^2 \mathcal{P}_{x(f)}$$

en consecuencia la función transferencia de potencia del sistema es:

$$G_{h(f)} = \frac{\mathcal{P}_{y(f)}}{\mathcal{P}_{x(f)}} = |H(f)|^2$$

Evaluación de la transferencia por medio de señales senoidales

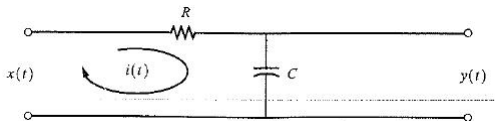
La función transferencia de un sistema lineal invariable en el tiempo puede también medirse con señales senoidales de prueba. Por ejemplo:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

entonces la salida será:

$$y(t) = A |H_{f_0}| \cos[\omega_0 t + \theta_{H(f_0)}]$$

Filtro pasabajos RC



Usando ley de Kirchhoff:

$$x(t) = R \cdot i(t) + y(t)$$

y puesto que $i(t) = C \cdot dy(t)/dt$:

$$x(t) = RC \frac{dy}{dt} + y(t)$$

que transformando a ambos miembros de la ecuación, nos queda:

$$X(f) = j \cdot \omega \cdot R \cdot C \cdot Y(f) + Y(f)$$

Transferencia del filtro pasabajos RC

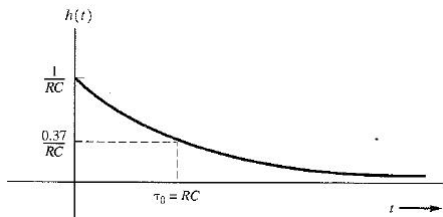
y por consiguiente la transferencia es:

$$H_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{X_{(f)}} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

que haciendo la transformada inversa de Fourier no dá:

$$h_{(t)} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

donde $\tau_0 = RC$, constante de tiempo.

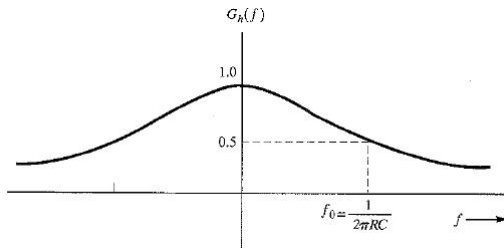


Transferencia de potencia del filtro pasabajos RC

La transferencia de potencia es:

$$G_{h(f)} = |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_0)^2}$$

donde $f_0 = 1/(2\pi RC)$.



A $f = f_0$, $G_{h(f_0)} = 1/2$, en consecuencia f_0 es el ancho de banda a 3 dB.

Efectos del canal de transmisión

A menudo se desea un canal sin distorsión, esto es:

$$y(t) = A x_{(t-T_d)}$$

Donde A es ganancia del canal y T_d es el retraso en el tiempo.
Y transformando:

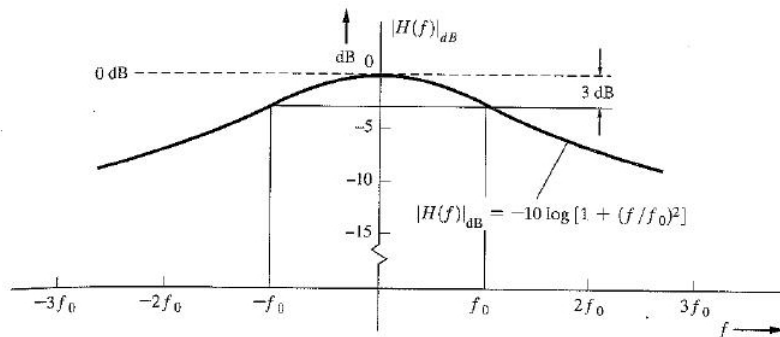
$$Y_{(f)} = A X_{(f)} e^{-j2.\pi.f.T_d}$$

$$H_{(f)} = \frac{Y_{(f)}}{X_{(f)}} = A e^{-j2.\pi.f.T_d}$$

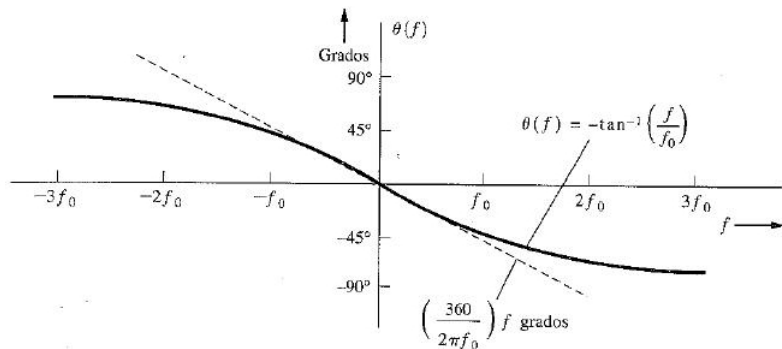
$$|H_{(f)}| = A$$

$$\theta_{H_{(f)}} = -2.\pi.f.T_d$$

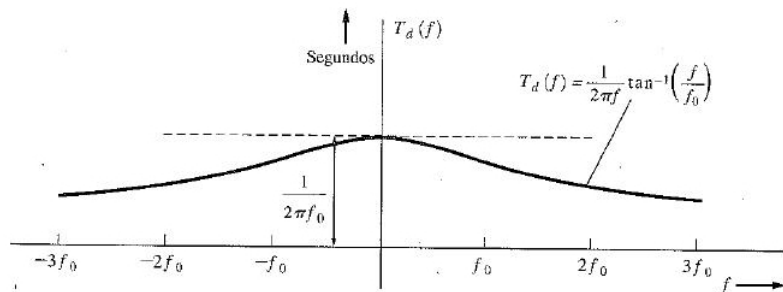
Distorsión causada por un filtro RC en magnitud



Distorsión causada por un filtro RC en fase



Distorsión causada por un filtro RC en el retardo



Un sistema lineal invariable en el tiempo producirá una distorsión en amplitud si su respuesta no es plana, a su vez producirá una distorsión en fase, es decir retardos diferenciales, si la respuesta de fase no es función lineal de la frecuencia.

En aplicaciones de audio el oído es relativamente más sensible a la distorsión de amplitud que a la distorsión en fase.

En aplicaciones de video analógico es al revés.

En transmisiones de datos la diferencias en los retardos puede producir interferencias inter-símbolos ISI.

En sistemas no lineales o variables en el tiempo se producirán otro tipo de distorsiones.

Como resultado de ello aparecerán a la salida nuevos componentes de frecuencia, no presentes a la entrada, algunas veces esto es un efecto deseado.

Una señal limitada en banda es aquella que tiene espectros diferente de cero sólo en cierta porción de frecuencias.

$$W_{(f)} = \mathcal{F}[w_{(t)}] = 0 \text{ ,para } |f| \geq B$$

donde B es el **ancho de banda**.

Esto permite aplicar el teorema del muestreo, especialmente utilizado en comunicaciones digitales.

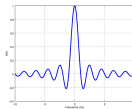
Señales limitadas en el tiempo

Una señal $w(t)$ es limitada en el tiempo si:

$$w(t) = 0, \text{ para } |t| \geq T$$

Matemáticamente: “Una señal absolutamente limitada en banda no puede ser absolutamente limitada en el tiempo y viceversa”.

Esto lo afirma el modelo matemático empleado para el análisis de señales en comunicaciones, la práctica indica que todas las señales son limitadas en el tiempo y pueden tener un espectro también limitado. Recordar el ejemplo del pulso rectangular.



Teorema de muestreo

Una señal también se puede representar utilizando siguiente serie:

$$w_{(t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n \frac{\sin \pi f_s [t - (n/f_s)]}{\pi f_s [t - (n/f_s)]}$$

ya que $\frac{\sin \pi f_s [t - (n/f_s)]}{\pi f_s [t - (n/f_s)]}$ constituye una serie ortogonal. Y donde:

$$a_n = f_s \int_{-\infty}^{\infty} w_{(t)} \frac{\sin \pi f_s [t - (n/f_s)]}{\pi f_s [t - (n/f_s)]} dt$$

Se observa que a_n es función de f_s .

Frecuencia de Nyquist

Si $w_{(t)}$ es limitada en banda a B hertz. Y

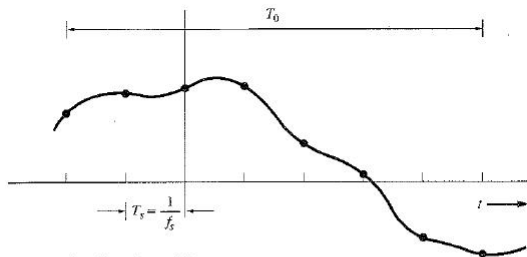
$$f_s \geq 2.B$$

entonces el cálculo de los a_n se reduce a:

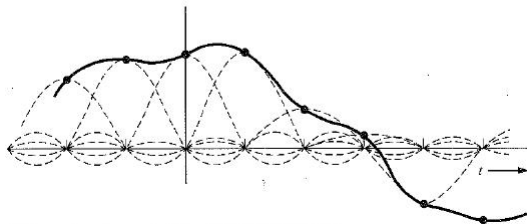
$$a_n = w(n/f_s)$$

A $f_s = 2.B$ se la conoce como frecuencia de Nyquist.

Reproducción de la señal limitada en banda



(a) Forma de onda y valores de las muestras



(b) Forma de onda reconstruida y valores de las muestras

Supongamos que deseamos representar T_0 segundos de una señal limitada en banda. Necesitaremos entonces:

$$N = \frac{T_0}{1/f_s} = f_s \cdot T_0 \geq 2 \cdot B \cdot T_0$$

donde N son la cantidad de muestras o funciones ortogonales necesarias o dimensiones requeridas para la reconstrucción de la señal durante T_0 segundos.

Estas muestras pueden cuantificar, almacenar, transmitir digitalmente.

Banda base, pasabanda y modulación

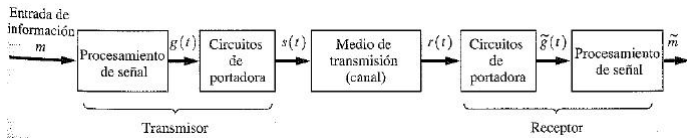
Una señal **banda base** tiene una magnitud espectral diferente de cero para las frecuencias alrededor del origen ($f = 0$) y es despreciable en cualquier otro caso.

Una señal **pasabanda** tiene magnitud espectral distinto de cero para cierta porción del espectro, concentrada en una frecuencia f_c , donde $f_c \gg 0$. La magnitud espectral es despreciable fuera de la banda. f_c se denominada frecuencia portadora.

La **modulación** es el proceso de plasmar la información fuente sobre una señal pasabanda con una frecuencia de portadora f_c , mediante la introducción de perturbaciones en amplitud y/o fase. Esta señal pasabanda se conoce como **modulada** $s_{(t)}$ y la señal fuente de banda base se la llama **moduladora** $m_{(t)}$.

Señal pasabanda de comunicación

Es la que se obtiene de modular una señal pasabanda analógica o digital en una portadora.



El ancho de banda espectral de las señales y del ruido es un concepto importante en los sistemas de comunicaciones.

Porque el espectro puede ser un recurso finito, por lo tanto hay que administrarlo, tal es el caso del espectro de RF.

Es condición de diseño de los circuitos y antenas.

Hay varias formas de definir y representar el ancho de banda de una señal. Esto puede dificultar la interpretación de determinadas especificaciones.

Ancho de banda absoluto es $f_2 - f_1$, donde el espectro es cero fuera del intervalo $f_1 < f < f_2$.

Ancho de banda a 3 db (o ancho de banda de potencia media) es $f_2 - f_1$, donde para las frecuencias dentro de la banda la magnitud del espectro ($|H(f)|$) permanece por encima de $1/\sqrt{2}$ de su valor máximo, el cual también está dentro de la banda.

Ancho de banda de nulo a nulo (o de cruce con cero) es $f_2 - f_1$, donde f_2 es el primer valor nulo del espectro de magnitud ($|H_{(f)}|$) por encima de f_0 , para el caso de señales pasabanda f_1 es el primer valor nulo de $|H_{(f)}|$ por debajo de f_0 , donde f_0 es la frecuencia donde $|H_{(f)}|$ tiene su máximo. No siempre se puede definir.

Ancho de banda de espectro limitado es $f_2 - f_1$ tal que para valores fuera de la banda la densidad espectral de potencia (que es proporcional a $|H_{(f)}|^2$) debe ser inferior a cierta cantidad, por ejemplo 50 db, debajo del valor máximo.

Ancho de banda equivalente de ruido (B_N , B_{eq}) está definido por:

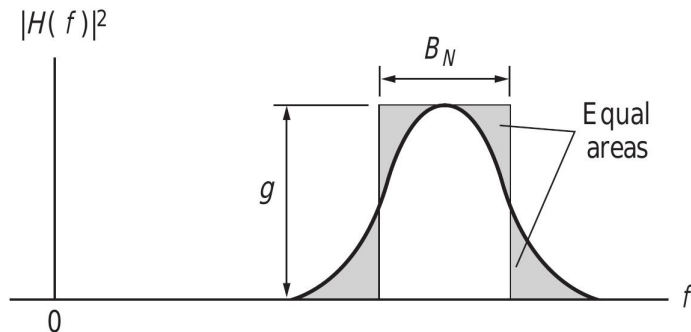
$$B_N = \frac{1}{|H_{(f_0)}|^2} \int_0^\infty |H_{(f)}|^2 df$$

donde f_0 es la frecuencia en la cual el espectro de magnitud tiene su máximo.

Es un espectro ficticio tal que la potencia de esa banda rectangular es igual a la potencia de la señal bajo estudio.

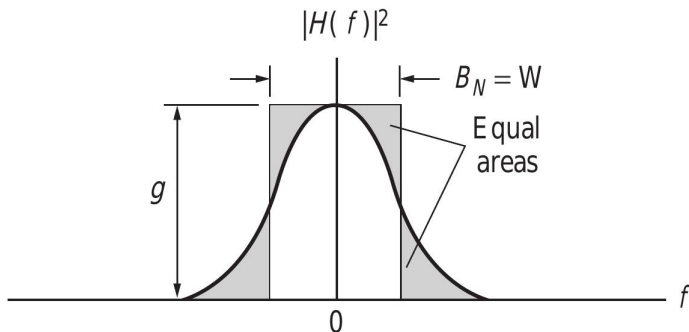
Ancho de banda equivalente de ruido (2)

Ancho de banda equivalente de ruido en filtro pasabanda



Ancho de banda equivalente de ruido (3)

Ancho de banda equivalente de ruido en filtro pasabajos



Ancho de banda equivalente de ruido (4)

Por definición de potencia de ruido a la salida de un filtro (N) es:

$$N = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Donde N_0 es la densidad espectral de ruido a la entrada del filtro.

Por definición de ancho de banda equivalente de ruido:

$$B_N = \frac{1}{|H(f_0)|^2} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{1}{g} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Donde $g = |H(f_0)|^2$.

Entonces, la potencia a la salida del filtro es:

$$N = g \cdot N_0 \cdot B_N$$

Representación de la envolvente compleja

Cualquier señal pasabanda puede representarse mediante:

$$v_{(t)} = \text{Re} \left\{ g_{(t)} e^{j\omega_c t} \right\}$$

donde:

$g_{(t)}$ es la envolvente compleja de $v_{(t)}$

f_c es la frecuencia de portadora y

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

Demostración de la representación de la envolvente compleja

Partiendo de la serie compleja de Fourier:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Considerando que en señales reales $c_{-n} = c_n^*$ y por lo tanto $Re\{\cdot\} = 1/2\{\cdot\} + 1/2\{\cdot\}^*$ llegamos a:

$$v(t) = Re \left\{ c_0 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

pero $v(t)$ es una señal pasabanda, $c_0 = 0$ y para n alrededor de 0, $c_n = 0$. E introduciendo f_c tenemos:

Demostración de la representación de la envolvente compleja (2)

$$v_{(t)} = \operatorname{Re} \left\{ \left(2 \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{j(n\omega_0 - \omega_c)t} \right) e^{j\omega_c t} \right\}$$

Por lo tanto:

$$g_{(t)} = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{j(n\omega_0 - \omega_c)t}$$

Puesto que $v_{(t)}$ es una señal pasabanda con centro en f_c , c_n sólo tiene valores para n que permitan que $n \cdot f_0 \approx f_c$.

Esto produce que $g_{(t)}$ tenga un espectro centrado en cero, es decir que es una señal banda base.

$g_{(t)}$ es compleja en el tiempo (fasores).

Dos representaciones equivalentes

$$v(t) = x(t) \cos(\omega_c t) + y(t) \sin(\omega_c t)$$

donde:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{g(t)\} = R(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \operatorname{Im}\{g(t)\} = R(t) \sin \theta(t)$$

$$v(t) = R(t) \cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

donde:

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

$$\theta(t) = \angle g(t) = \tan^{-1} \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)$$

Interpretación de la representación de la envolvente compleja

$$v_{(t)} = \text{Re} \left\{ g_{(t)} e^{j\omega_c t} \right\}$$

El factor $e^{j\omega_c t}$ traslada el espectro de la señal banda base $g_{(t)}$.
Partiendo de una banda base hasta la frecuencia de portadora f_c .

En comunicaciones se dice “las frecuencias de la señal banda base $g_{(t)}$ son *heterodinadas* hasta f_c ”.

Interpretación de la representación de la envolvente compleja (2)

$$g_{(t)} = x_{(t)} + j \cdot y_{(t)}$$

- $x_{(t)}$ es la *modulación en fase* asociada a $v_{(t)}$
- $y_{(t)}$ es la *modulación en cuadratura* asociada a $v_{(t)}$

En los sistemas modernos de comunicaciones la señal pasabanda $v_{(t)}$ a menudo se descompone en dos canales:

- $x_{(t)}$ denominado canal I
- $y_{(t)}$ denominado canal Q

Interpretación de la representación de la envolvente compleja (3)

$$g_{(t)} = R_{(t)} e^{j\theta_{(t)}}$$

- $R_{(t)}$ es la *modulación en amplitud* (AM) sobre $v_{(t)}$
- $\theta_{(t)}$ es la *modulación en fase* (PM o FM) sobre $v_{(t)}$

La modulación en fase también se la denomina modulación exponencial

La modulación es el proceso de codificar la información de la fuente, $m_{(t)}$, dentro de la señal pasabanda $v_{(t)}$, que mantiene su condición de pasabanda y está determinada por:

$$v_{(t)} = \text{Re} \left\{ g_{(t)} e^{j\omega_c t} \right\}$$

La envolvente compleja $g_{(t)}$ es función de la señal moduladora $m_{(t)}$. Esto es función de función:

$$g_{(t)} = g [m_{(t)}]$$

Representación de señales moduladas (2)

Dependiendo de $g[\cdot]$ la modulación obtenida (AM, FM, PM, BLU, entre otras).

Por ende se buscan funciones $g[m]$ que sean fáciles de implementar, tanto en transmisión como en recepción.

En el receptor se debe realizar la operación inversa $m[g]$.

De tal manera que $m_{(t)}$ pueda recuperarse con la mínima distorsión posible.

Espectro de señales pasabanda

El espectro de una señal pasabanda se relaciona directamente con el espectro de su envolvente compleja

$$v(t) = \text{Re} \left\{ g(t) e^{j\omega_c t} \right\} = 1/2 g(t) e^{j\omega_c t} + 1/2 g^*(t) e^{-j\omega_c t}$$

$$V(f) = 1/2 \mathcal{F}[g(t) e^{j\omega_c t}] + 1/2 \mathcal{F}[g^*(t) e^{-j\omega_c t}]$$

Puesto que $\mathcal{F}[g^*(t)] = G^*_{(-f)}$ y aplicando la propiedad de conversión en frecuencia de una señal compleja, tenemos:

$$V(f) = 1/2 \{ G_{(f-f_c)} + G^*_{-(f+f_c)} \}$$

La PSD se obtiene evaluando primero la autocorrelación de $v(t)$ y luego tomar la transformada de Fourier

$$R_{v(\tau)} = \langle v(t) v(t+\tau) \rangle = \left\langle \operatorname{Re} \left\{ g(t) e^{j\omega_c t} \right\} \operatorname{Re} \left\{ g(t+\tau) e^{j\omega_c (t+\tau)} \right\} \right\rangle$$

Utilizando la identidad: $\operatorname{Re}(c_1) \cdot \operatorname{Re}(c_2) = 1/2 \cdot \operatorname{Re}(c_2^* c_1) + 1/2 \cdot \operatorname{Re}(c_2 c_1)$

$$R_{v(\tau)} = \left\langle \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ g(t)^* g(t+\tau) e^{-j\omega_c t} e^{j\omega_c (t+\tau)} \right\} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ g(t) g(t+\tau) e^{j\omega_c t} e^{j\omega_c (t+\tau)} \right\} \right\rangle$$

Dado que valor medio y el real de un complejo son operadores lineales:

$$R_{v(\tau)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \langle g(t)^* g(t+\tau) \rangle e^{j\omega_c \tau} \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \langle g(t) g(t+\tau) \rangle e^{j2\omega_c \tau} \right\}$$

El segundo término es despreciable ya que $2 \cdot f_c$ es mucho mayor que las frecuencias $g(t)$, entonces:

$$R_{v(\tau)} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left\langle g_{(t)}^* g_{(t+\tau)} e^{j\omega_c \tau} \right\rangle \right\}$$

Y la autocorrelación es: $R_{g(\tau)} = \langle g_{(t)} g_{(t+\tau)} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_{(t)} g_{(t+\tau)} dt$

$$R_{v(\tau)} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ R_{g(\tau)} e^{j\omega_c \tau} \right\}$$

Resta calcular la transformada de Fourier

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_{g(f-f_c)} + \mathcal{P}_{g^*(-f-f_c)}]$$

Puesto que $\mathcal{P}_{g^*(f)} = \mathcal{P}_{g(f)}$ ya que se trata de una real, nos queda:

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_{g(f-f_c)} + \mathcal{P}_{g(-f-f_c)}]$$

Potencia normalizada promedio de señales pasabanda

$$P_v = \langle v_{(t)}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{v(f)} df = R_{v(0)}$$

Puesto que $R_{v(\tau)} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ R_{g(\tau)} e^{j\omega_c \tau} \}$, entonces:

$$P_v = \frac{1}{2} \text{Re} \{ R_{g(0)} e^{j\omega_c 0} \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ g_{(t)}^* g_{(t+0)} \}$$

$$P_v = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \langle |g_{(t)}|^2 \rangle \}$$

Como $|g_{(t)}|$ es real:

$$P_v = \frac{1}{2} \langle |g_{(t)}|^2 \rangle$$

Presentación basada en:

- Couch, “Sistemas de comunicación digitales y analógicos”
7ma Ed. Capítulos 2 y 4

Críticas, aportes, sugerencias, son todas bienvenidas a la siguiente dirección de correo electrónico:

m.doallo@frba.utn.edu.ar

Muchas Gracias.