Trabajo Práctico 2 - 1ºC 2020

Análisis Numérico - Curso Sassano

Fecha de entraga: xx/08/2020

1. Introducción

Se desea analizar el comportamiento en el tiempo de un péndulo compuesto por una masa, un hilo inextensible sumergido en un medio con rozamiento. La ecuación diferencial que describe la posición de la masa en función del tiempo es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\,\theta = 0 \tag{1}$$

Donde θ es el ángulo, $d\theta/dt$ es la velocidad angular,l la longitud del hilo, m la masa, $g = 9.81 m/s^2$ la constante de la gravedad y b el coeficiente de amortiguación dado por el razomiento del medio. La energía del sistema para un instante dado es:

$$E = m\,g\,l\,\cos(\theta) + \frac{1}{2}m\,(l\,\frac{d\theta}{dt})^2 \tag{2}$$

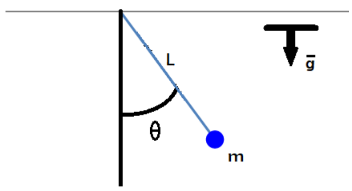

Figura 1:

2. Enunciado

1. Desarrolle un script Python que permita resolver por el método de Runge-Kutta 4 la ecuación diferencial ordinaria a valores iniciales del péndulo para distintos juegos de datos y paso h.

   El programa debe permitirle al usuario especificar los datos de entrada, ya sea mediante interacción con el intérprete de Python, o a través de una sección específica del script a entregar. En este último caso, dicha sección de código debe estar claramente definida (se sugiere utilizar bloques de comentarios para guiar al usuario).

2. Desarrolle un script Python que permita resolver el problema del punto anterior, pero utilizando el método de Euler.

3. Mediante los programas desarrollados, resuelva para el intervalo $[0.0,\ 20.0]s$ los siguientes casos:

   a) Caso 1: Sistema no amortiguado

$$m = 1\,\mathrm{kg} \tag{3a}$$
$$l = 1\,\mathrm{m} \tag{3b}$$
$$b = 0\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}} \tag{3c}$$
$$h = 0.2s \tag{3d}$$
$$\theta_0 = 30^\circ \tag{3e}$$
$$\frac{d\theta_0}{dt} = 0\,^\circ\,\mathrm{s^{-1}} \tag{3f}$$

   b) Caso2: Sistema con amortiguamiento subcrítico

$$m = 1\,\mathrm{kg} \tag{4a}$$
$$l = 1\,\mathrm{m} \tag{4b}$$
$$b = 0.5\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}} \tag{4c}$$
$$h = 0.2s \tag{4d}$$
$$\theta_0 = 30^\circ \tag{4e}$$
$$\frac{d\theta_0}{dt} = 100\,^\circ\,\mathrm{s^{-1}} \tag{4f}$$

   Para cada caso, la presentación de resultados debe seguir las siguientes especificaciones:

   - una tabla con los primeros y últimos 5 instantes de tiempo, cuyo encabezado sea de la forma mostrada en el cuadro 1. Utilizar una leyenda descriptiva. El los números deben estar formateados en notación científica, con 3 decimales significativos. Al formatear el paso, tenga en cuenta cuál fue utilizado, dependiendo el inciso del trabajo.
   - una figura que incluya un gráfico de θ, $\frac{d\theta}{dt}$ y E en función del tiempo muestreado t_k, para lo métodos RK1 y RK4. Debe ser de la forma que se muestra en la figura 2 (puede utilizarla para validar sus resultados).

	θ_k[rad]		$d\theta_k/dt$[rad s^{-1}]	
t_k[s]	**RK1**	**RK4**	**RK1**	**RK4**

Cuadro 1: Formato de encabezado.

Por favor, describa correctamente las unidades, nombres de ejes, y leyenda de la figura.

El formato del gráfico debe ser vectorial. Si utiliza LaTeXpara confeccionar el informe, puede generar imágenes PDF con el siguiente comando Python:

`fig.savefig("fig.pdf",orientation='portrait')`

Si utiliza MS Word para confeccionar el informe, puede generar imágenes SVG con el siguiente comando Python:

`fig.savefig("fig.svg",orientation='portrait')`

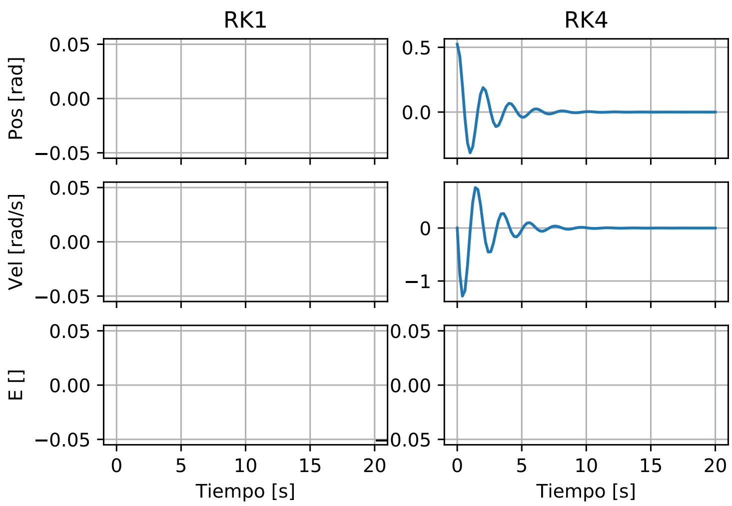

Figura 2: Figura ejemplo para el caso 1. Se utiliza un paso $h = 0.2$ s para ambos métodos de integración.

4. Para cada caso, compare las curvas de posición y velocidad angular utilizando ambos métodos, y variando el paso de integración. Obtenga conclusiones empíricas respecto a cómo afecta dicho paso a la estimación de las variables a integrar. Utilice los resultados teóricos de las cotas de error de cada método para determinar si sus conclusiones empíricas se corresponden con las teóricas. ¿Cuán diferente debe ser el paso de RK1 respecto de RK4 para obtener resultados similares? Explique dicha observación empírica utilizando las ecuaciones de error teóricas.

   Puede utilizar el comando Python

   `fig, axs = plt.subplots(fila,columnas, sharex=True)`

   para crear múltiples gráficos en una sola figura. No mezcle en el mismo gráfico variables con diferentes unidades, y no utilice más de 1 figura por caso.

Por ejemplo, puede realizar un gráfico como el de la figura 3.

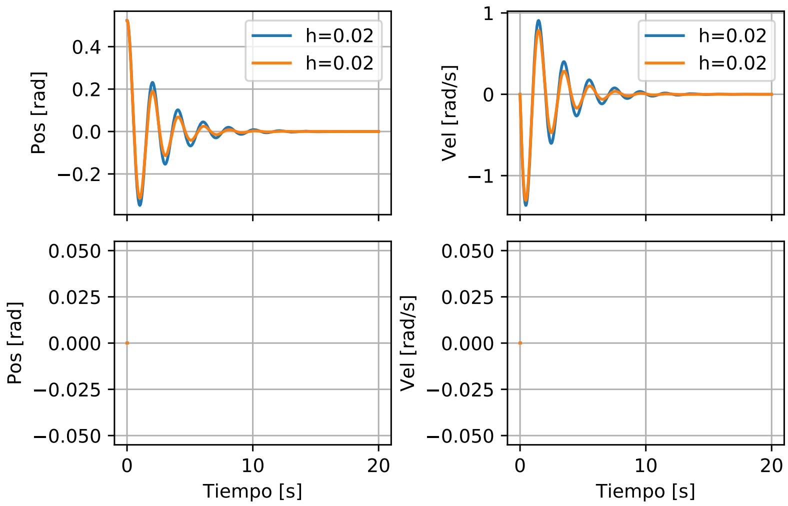

Figura 3: Figura ejemplo para el caso 1. En azul se muestran los resultados de aplicar RK1, y en naranja los de RK4.

5. Indique si la energía en el caso no amortiguado se comporta como lo esperaba. Si es que encuentra algún problema, investigue cómo podría solucionarlo y detalle la explicación en no más de dos párrafos.

3. Ejemplos

Tabla

La tabla 2 muestra los resultados obtenidos para $m = 1$, $l = 1$, $b = 1$, $\theta_0 = 0.523599$, $\frac{d\theta}{dt}_0 = 0$ utilizando un paso $h = 0.02$. La puede usar para validar sus resultados.

	θ_k[rad]		$d\theta_k/dt$[rad s^{-1}]	
t_k	**RK1**	**RK4**	**RK1**	**RK4**
0.00	5.236e-01		0.000e+00	
0.02	5.236e-01		-1.027e-01	
0.04	5.215e-01		-2.034e-01	
0.06	5.175e-01		-3.017e-01	
0.08	5.114e-01		-3.972e-01	
...				
19.92	1.082e-04		3.342e-04	
19.94	1.149e-04		3.063e-04	
19.96	1.210e-04		2.776e-04	
19.98	1.266e-04		2.483e-04	
20.00	1.315e-04		2.185e-04	

Cuadro 2: Resultados obtenidos para RK1 utilizando el set de datos $m = 1$, $l = 1$, $b = 1$, $\theta_0 = 0.523599$, $\frac{d\theta}{dt}_0 = 0$ utilizando un paso $h = 0.02$.