

Ejercicio 2.18

[71.14] Modelos y Optimización I
Curso 4
2C 2021

Alumno:	Grassano, Bruno
Número de padrón:	103855
Email:	bgrassano@fi.uba.ar

Índice

1. Enunciado	2
2. Análisis de la situación problemática	3
3. Objetivo	4
4. Hipótesis y supuestos	4
5. Definición de variables	5
6. Modelo de programación lineal	5
6.1. Funcional	5
6.2. Restricciones	5
7. Variante	7
8. Solución por Software	8
9. Informe de la solución óptima	13

1. Enunciado

Una empresa dispone de 27 máquinas para realizar 3 artículos distintos. Para los próximos 3 días debe cumplir con los siguientes pedidos (considerar que cuenta con stock de algunos artículos)

	Stock Inicial	Martes	Miércoles	Jueves
Artículo 1	20	40	50	20
Artículo 2	—	10	20	40
Artículo 3	15	5	5	25

Las máquinas se desajustan con el paso de los días, a medida que se usan, y esto hace variar su rendimiento. Quiere decir que el día que comienzan a producir un artículo determinado, tienen una producción mayor que el segundo día y el segundo producen más que el tercero. Por política de la empresa sólo se ajusta una máquina cuando se le cambia el artículo que produce.

	Rendimiento de cada día		
	1er día	2do día	3er día
Artículo 1	2,2	2	1,8
Artículo 2	3	2,5	2
Artículo 3	2,3	2,1	1,7

El costo de ajustar una máquina es de \$200. No se puede posponer ni adelantar la entrega de un producto, el incumplimiento genera un costo de 30, 40 y 50 \$/unidad según se trate del artículo 1, 2 ó 3 respectivamente.

Análisis previo: comenzar la resolución del ejercicio, realizando un esquema que describa la situación problemática.

Variante: plantear el modelo considerando que se elimina la política de la empresa por la cual las máquinas se ajustan sólo cuando se cambia de artículo.

2. Análisis de la situación problemática

- Podemos ver que es un problema con múltiples periodos, 3 días en este caso, en los cuales debe cumplir ciertas condiciones.
- Algo nuevo que se puede ver, es que las maquinas van perdiendo rendimiento, diferencia a los otros problemas donde era constante.
- Esta perdida de rendimiento se puede arreglar, pero viene penalizado. Se puede ver que es una condición débil.
- Se puede ver que se dan como condiciones débiles el incumplimiento de los pedidos por producto.
- Notar también que nos dan stocks iniciales en el problema.
- A continuación se pueden ver esquemas representando parte de la situación:

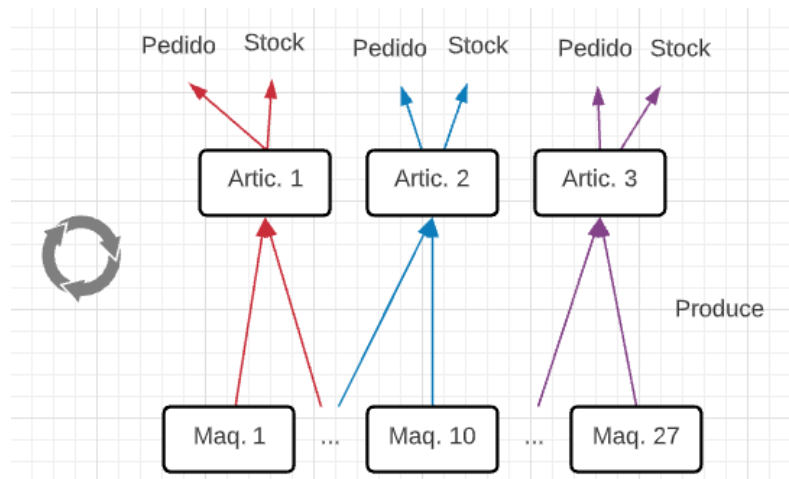


Figura 1: Sistema de producción

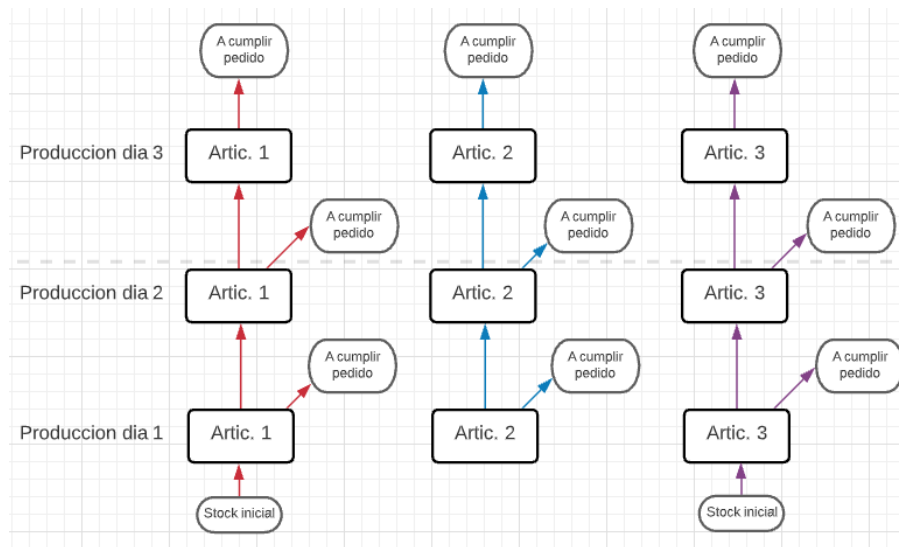


Figura 2: Desarrollo con los periodos

3. Objetivo

Determinar los planes de producción de cada día para cumplir con los pedidos y minimizar los costos durante los próximos 3 días.

4. Hipótesis y supuestos

1. Los mismos tipos de productos son idénticos independientemente de la máquina que salgan.
2. Los productos salen sin fallas.
3. Se tiene espacio suficiente para almacenar en stock los productos.
4. Los productos no se estropean durante el stock.
5. No hay costos asociados con el almacenamiento de los artículos.
6. Las máquinas no se rompen (inhabilitadas para producir), solo se desajustan con el paso de los días.
7. El desajuste de las máquinas es de forma exacta.
8. No ocurren pedidos extraordinarios a los que ya tenemos.
9. Se dispone del tiempo suficiente por día para fabricar los productos.
10. No se tiene stock final.
11. Se puede reajustar una máquina en un día y continuar con la producción de otro artículo.

5. Definición de variables

**Con tipos y unidades*

- $PM_{j,k}$: producción en el día j para el artículo k . $\{j = 1 \dots 3 ; k = 1 \dots 3\}$ (unidad/día) (continua)
- $SM_{j,k}$: stock total generado en el día j del artículo k . $\{j = 1, 2; k = 1 \dots 3\}$ (unidad/día) (continua)
- $DEFECTO_{j,k}$: defecto de cumplimiento del pedido en el día j para el artículo k . $\{j = 1 \dots 3; k = 1 \dots 3\}$ (unidad/día) (continua)
- $MAQUINAS_{j,k}$: cantidad de maquinas reajustadas (o inicial) dedicadas al producto k el día j . $\{j = 1 \dots 3; k = 1 \dots 3\}$ (unidad/día) (continua¹)
- $MAQUINASsinREAJUSTAR_{j,k}$: cantidad de maquinas dedicadas al producto k que no fueron reajustadas en un día estando desde el día j . $\{j = 1, 2; k = 1 \dots 3\}$ (unidad/día) (continua)
- $MAQUINASsinREAJUSTARdoble_{j,k}$: cantidad de maquinas dedicadas al producto k que no fueron reajustadas en dos días estando desde el día j . $\{j = 1; k = 1 \dots 3\}$ (unidad/día) (continua)

6. Modelo de programación lineal

**Indicando en cada restricción o grupo de restricciones la función que cumplen.*

6.1. Funcional

Buscamos minimizar los costos que ocurren para cumplir con los pedidos.

$$\min(\$200 \cdot (\sum_{j=2}^3 \sum_{k=1}^3 MAQUINAS_{j,k}) + \sum_{j=1}^3 (\frac{\$}{\text{unidad}} 30 \cdot DEFECTO_{j,1} + \frac{\$}{\text{unidad}} 40 \cdot DEFECTO_{j,2} + \frac{\$}{\text{unidad}} 50 \cdot DEFECTO_{j,3}))$$

Donde:

- j son los días.
- k son los tipos de artículos.

6.2. Restricciones

Empecemos planteando las restricciones correspondientes al **cumplimiento de los pedidos**.

Para el martes:

- $PM_{1,1} + 20 - 40 = SM_{1,1} - DEFECTO_{1,1}$
- $PM_{1,2} - 10 = SM_{1,2} - DEFECTO_{1,2}$
- $PM_{1,3} + 15 - 5 = SM_{1,3} - DEFECTO_{1,3}$

Para el miércoles:

- $PM_{2,1} + SM_{1,1} - 50 = SM_{2,1} - DEFECTO_{1,1}$
- $PM_{2,2} + SM_{1,2} - 20 = SM_{2,2} - DEFECTO_{1,2}$
- $PM_{2,3} + SM_{1,3} - 5 = SM_{2,3} - DEFECTO_{1,3}$

¹Supuesto 11

Para el jueves:

- $PM_{3,1} + SM_{2,1} = 20$
- $PM_{3,2} + SM_{2,2} = 40$
- $PM_{3,3} + SM_{2,3} = 25$

Producción de cada día.

Para el martes:

- $PM_{1,1} = 2, 2 \cdot MAQUINAS_{1,1}$
- $PM_{1,2} = 3 \cdot MAQUINAS_{1,2}$
- $PM_{1,3} = 2, 3 \cdot MAQUINAS_{1,3}$

Para el miércoles:

- $PM_{2,1} = 2, 2 \cdot MAQUINAS_{2,1} + 2 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,1}}$
- $PM_{2,2} = 3 \cdot MAQUINAS_{2,2} + 2, 5 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,2}}$
- $PM_{2,3} = 2, 3 \cdot MAQUINAS_{2,3} + 2, 1 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,3}}$

Para el jueves:

$$\begin{aligned} PM_{2,1} = & 2, 2 \cdot MAQUINAS_{3,1} \\ & + 2 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,1}} \\ & + 1, 8 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PM_{2,2} = & 3 \cdot MAQUINAS_{3,2} \\ & + 2, 5 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,2}} \\ & + 2 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PM_{2,3} = & 2, 3 \cdot MAQUINAS_{3,3} \\ & + 2, 1 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,3}} \\ & + 1, 7 \cdot MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,3}}} \end{aligned}$$

Cantidad total de maquinas cada día:

- $MAQUINAS_{1,1} + MAQUINAS_{1,2} + MAQUINAS_{1,3} = 27$
- $MAQUINAS_{2,1} + MAQUINAS_{2,2} + MAQUINAS_{2,3} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,1}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,2}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,3}} = 27$
- $MAQUINAS_{3,1} + MAQUINAS_{3,2} + MAQUINAS_{3,3} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,1}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,2}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,1}}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,2}}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,3}}} = 27$

Tenemos también como restricciones que las maquinas solo se reajustan cuando cambian de producto. No puede ocurrir que se reajuste y siga con el mismo tipo de articulo.

Para el miércoles:

- $MAQUINAS_{2,1} \leq MAQUINAS_{1,2} + MAQUINAS_{1,3}$ ²
- $MAQUINAS_{2,2} \leq MAQUINAS_{1,1} + MAQUINAS_{1,3}$
- $MAQUINAS_{2,3} \leq MAQUINAS_{1,1} + MAQUINAS_{1,2}$

Para el jueves:

$$MAQUINAS_{3,1} \leq MAQUINAS_{2,2} + MAQUINAS_{2,3} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,2}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,3}}$$

$$MAQUINAS_{3,2} \leq MAQUINAS_{2,1} + MAQUINAS_{2,3} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,1}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,3}}$$

$$MAQUINAS_{3,3} \leq MAQUINAS_{2,1} + MAQUINAS_{2,2} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,1}} + MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,2}}$$

Se agregan también las relaciones de cuantas maquinas hay sin reajustar también.

- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,1}} \leq MAQUINAS_{1,1}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,2}} \leq MAQUINAS_{1,2}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,3}} \leq MAQUINAS_{1,3}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,1}}} \leq MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,1}}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,2}}} \leq MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,2}}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{doble_{1,3}}} \leq MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{1,3}}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,1}} \leq MAQUINAS_{2,1}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,2}} \leq MAQUINAS_{2,2}$
- $MAQUINAS_{sinREAJUSTAR_{2,3}} \leq MAQUINAS_{2,3}$

7. Variante

La variante del problema pide plantear el modelo si se elimina la política de la empresa de que se ajusta solo para cambiar de producto. Esta modificación hace que ya no sean necesarias las restricciones correspondientes a la cantidad maxima que se pueden reajustar, ya que seria agregar a cada cuenta las maquinas que produjeron el mismo producto, dando el total de maquinas que es igual a 27.

²Aclaración: La cantidad de maquinas que tengo reajustadas un día, tiene que ser menor o igual a la cantidad de maquinas de los otros articulos del día anterior.

8. Solución por Software

El modelo:

```
/* VARIABLES */
var PM11 >= 0;
var PM12 >= 0;
var PM13 >= 0;

var PM21 >= 0;
var PM22 >= 0;
var PM23 >= 0;

var PM31 >= 0;
var PM32 >= 0;
var PM33 >= 0;

var SM11 >=0;
var SM12 >=0;
var SM13 >=0;

var SM21 >=0;
var SM22 >=0;
var SM23 >=0;

var DEFECT011 >=0;
var DEFECT012 >=0;
var DEFECT013 >=0;

var DEFECT021 >=0;
var DEFECT022 >=0;
var DEFECT023 >=0;

var DEFECT031 >=0;
var DEFECT032 >=0;
var DEFECT033 >=0;

var MAQUINAS11 >=0;
var MAQUINAS12 >=0;
var MAQUINAS13 >=0;

var MAQUINAS21 >=0;
var MAQUINAS22 >=0;
var MAQUINAS23 >=0;

var MAQUINAS31 >=0;
var MAQUINAS32 >=0;
var MAQUINAS33 >=0;

var MAQUINASsinREAJUSTAR11 >=0;
var MAQUINASsinREAJUSTAR12 >=0;
var MAQUINASsinREAJUSTAR13 >=0;

var MAQUINASsinREAJUSTAR21 >=0;
```

```

var MAQUINASsinREAJUSTAR22 >=0;
var MAQUINASsinREAJUSTAR23 >=0;

var MAQUINASsinREAJUSTARdoble11 >=0;
var MAQUINASsinREAJUSTARdoble12 >=0;
var MAQUINASsinREAJUSTARdoble13 >=0;

/* FUNCIONAL */
minimize z: 200 * (MAQUINAS21+MAQUINAS22+MAQUINAS23+MAQUINAS31+MAQUINAS32+MAQUINAS33)
+ 30 * (DEFECTO11+DEFECTO21+DEFECTO31)+40*(DEFECTO12+DEFECTO22+DEFECTO32)
+50*(DEFECTO13+DEFECTO23+DEFECTO33);

/* RESTRICCIONES */
s.t. martesProd1: PM11 - 20 =SM11-DEFECTO11;
s.t. martesProd2: PM12 - 10 =SM12-DEFECTO12;
s.t. martesProd3: PM13 + 10 =SM13-DEFECTO13;

s.t. miercolesProd1: PM21+SM11-50 =SM21-DEFECTO11;
s.t. miercolesProd2: PM22+SM12-20 =SM22-DEFECTO12;
s.t. miercolesProd3: PM23+SM13-5 =SM23-DEFECTO13;

s.t. juevesProd1: PM31+SM21= 20;
s.t. juevesProd2: PM32+SM22= 40;
s.t. juevesProd3: PM33+SM23= 25;

s.t. prodTotMart1: PM11= 2.2 * MAQUINAS11;
s.t. prodTotMart2: PM12= 3 * MAQUINAS12;
s.t. prodTotMart3: PM13= 2.3 * MAQUINAS13;

s.t. prodTotMier1: PM21= 2.2*MAQUINAS21+ 2*MAQUINASsinREAJUSTAR11;
s.t. prodTotMier2: PM22= 3*MAQUINAS22+ 2.5*MAQUINASsinREAJUSTAR12;
s.t. prodTotMier3: PM23= 2.3*MAQUINAS23+ 2.1*MAQUINASsinREAJUSTAR13;

s.t. prodTotJuev1: PM31= 2.2*MAQUINAS31+ 2*MAQUINASsinREAJUSTAR21
+ 1.8*MAQUINASsinREAJUSTARdoble11;
s.t. prodTotJuev2: PM32= 3*MAQUINAS32+ 2.5*MAQUINASsinREAJUSTAR22
+ 2*MAQUINASsinREAJUSTARdoble12;
s.t. prodTotJuev3: PM33= 2.3*MAQUINAS33+ 2.1*MAQUINASsinREAJUSTAR23
+ 1.7*MAQUINASsinREAJUSTARdoble13;

s.t. totalMaq1: MAQUINAS11+MAQUINAS12+MAQUINAS13= 27;

s.t. totalMaq2: MAQUINAS21+MAQUINAS22+MAQUINAS23+MAQUINASsinREAJUSTAR11
+MAQUINASsinREAJUSTAR12+MAQUINASsinREAJUSTAR13= 27;

s.t. totalMaq3: MAQUINAS31+MAQUINAS32+MAQUINAS33+MAQUINASsinREAJUSTAR21
+MAQUINASsinREAJUSTAR22+MAQUINASsinREAJUSTARdoble11+MAQUINASsinREAJUSTARdoble12
+MAQUINASsinREAJUSTARdoble13= 27;

s.t. ajuste1Mier: MAQUINAS21<=MAQUINAS12+MAQUINAS13;

s.t. ajuste2Mier: MAQUINAS22<=MAQUINAS11+MAQUINAS13;

s.t. ajuste3Mier: MAQUINAS23<=MAQUINAS11+MAQUINAS12;

```

s.t. ajuste1Juev: MAQUINAS31<=MAQUINAS22+MAQUINAS23+MAQUINASsinREAJUSTAR12
+MAQUINASsinREAJUSTAR13;

s.t. ajuste2Juev: MAQUINAS32<=MAQUINAS21+MAQUINAS23+MAQUINASsinREAJUSTAR11
+MAQUINASsinREAJUSTAR13;

s.t. ajuste3Juev: MAQUINAS33<=MAQUINAS21+MAQUINAS22+MAQUINASsinREAJUSTAR11
+MAQUINASsinREAJUSTAR12;

s.t. relMaq11: MAQUINASsinREAJUSTAR11<=MAQUINAS11;

s.t. relMaq12: MAQUINASsinREAJUSTAR12<=MAQUINAS12;

s.t. relMaq13: MAQUINASsinREAJUSTAR13<=MAQUINAS13;

s.t. relMaq31: MAQUINASsinREAJUSTARdoble11<=MAQUINASsinREAJUSTAR11;

s.t. relMaq32: MAQUINASsinREAJUSTARdoble12<=MAQUINASsinREAJUSTAR12;

s.t. relMaq33: MAQUINASsinREAJUSTARdoble13<=MAQUINASsinREAJUSTAR13;

s.t. relMaq21: MAQUINASsinREAJUSTAR21<=MAQUINAS21;

s.t. relMaq22: MAQUINASsinREAJUSTAR22<=MAQUINAS22;

s.t. relMaq23: MAQUINASsinREAJUSTAR23<=MAQUINAS23;

end;

Resultados:

Problem: 218
Rows: 37
Columns: 42
Non-zeros: 128
Status: OPTIMAL
Objective: z = 1070.652047 (MINimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	z	B	1070.65			
2	martesProd1	NS	20	20	=	15
3	martesProd2	NS	10	10	=	-29.3228
4	martesProd3	NS	-10	-10	=	-36.0526
5	miercolesProd1					
		NS	50	50	=	15
6	miercolesProd2					
		NS	20	20	=	-29.3228
7	miercolesProd3					
		NS	5	5	=	-36.0526
8	juevesProd1	NS	20	20	=	-157.178
9	juevesProd2	NS	40	40	=	-29.3228
10	juevesProd3	NS	25	25	=	-36.0526
11	prodTotMart1	NS	0	-0	=	-15
12	prodTotMart2	NS	0	-0	=	29.3228
13	prodTotMart3	NS	0	-0	=	36.0526
14	prodTotMier1	NS	0	-0	=	-15
15	prodTotMier2	NS	0	-0	=	29.3228
16	prodTotMier3	NS	0	-0	=	36.0526

17	prodTotJuev1	NS	0	-0	=	157.178
18	prodTotJuev2	NS	0	-0	=	29.3228
19	prodTotJuev3	NS	0	-0	=	36.0526
20	totalMaq1	NS	27	27	=	-33
21	totalMaq2	NS	27	27	=	-30
22	totalMaq3	NS	27	27	=	282.921
23	ajuste1Mier	B	-10.6287		-0	
24	ajuste2Mier	B	-17.6667		-0	
25	ajuste3Mier	B	-25.7047		-0	
26	ajuste1Juev	B	-10.6287		-0	
27	ajuste2Juev	B	-17.6667		-0	
28	ajuste3Juev	B	-20.4444		-0	
29	relMaq11	B	0		-0	
30	relMaq12	NU	0		-0	-120.968
31	relMaq13	NU	0		-0	-115.921
32	relMaq31	B	-5.26023		-0	
33	relMaq32	NU	0		-0	-224.275
34	relMaq33	NU	0		-0	-221.632
35	relMaq21	B	0		-0	
36	relMaq22	NU	0		-0	-209.614
37	relMaq23	B	0		-0	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	PM11	B	36.017	0		
2	PM12	B	28	0		
3	PM13	B	2.97924	0		
4	PM21	B	32.7427	0		
5	PM22	B	23.3333	0		
6	PM23	B	2.72018	0		
7	PM31	B	20	0		
8	PM32	B	18.6667	0		
9	PM33	B	14.3006	0		
10	SM11	B	16.6371	0		
11	SM12	B	18	0		
12	SM13	B	12.9792	0		
13	SM21	NL	0	0		172.178
14	SM22	B	21.3333	0		
15	SM23	B	10.6994	0		
16	DEFECT011	B	0.620175	0		
17	DEFECT012	NL	0	0		98.6456
18	DEFECT013	NL	0	0		122.105
19	DEFECT021	NL	0	0		30
20	DEFECT022	NL	0	0		40
21	DEFECT023	NL	0	0		50
22	DEFECT031	NL	0	0		30
23	DEFECT032	NL	0	0		40
24	DEFECT033	NL	0	0		50
25	MAQUINAS11	B	16.3713	0		
26	MAQUINAS12	B	9.33333	0		
27	MAQUINAS13	B	1.29532	0		
28	MAQUINAS21	NL	0	0		197
29	MAQUINAS22	NL	0	0		108.354
30	MAQUINAS23	NL	0	0		312.921

31	MAQUINAS31	NL	0	0	262.871
32	MAQUINAS32	NL	0	0	5.04737
33	MAQUINAS33	B	5.26023	0	
34	MAQUINASSinREAJUSTAR11				
		B	16.3713	0	
35	MAQUINASSinREAJUSTAR12				
		B	9.33333	0	
36	MAQUINASSinREAJUSTAR13				
		B	1.29532	0	
37	MAQUINASSinREAJUSTAR21				
		NL	0	0	31.4357
38	MAQUINASSinREAJUSTAR22				
		B	0	0	
39	MAQUINASSinREAJUSTAR23				
		NL	0	0	75.7105
40	MAQUINASSinREAJUSTARdoble11				
		B	11.1111	0	
41	MAQUINASSinREAJUSTARdoble12				
		B	9.33333	0	
42	MAQUINASSinREAJUSTARdoble13				
		B	1.29532	0	

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

KKT.PE: max.abs.err = 1.42e-14 on row 3
max.rel.err = 5.57e-16 on row 31
High quality

KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
High quality

KKT.DE: max.abs.err = 5.68e-14 on column 31
max.rel.err = 9.17e-16 on column 1
High quality

KKT.DB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
High quality

End of output

9. Informe de la solución óptima

Se recomienda para minimizar los costos:

- Para el primer día. asignar 16,37³ maquinas a el articulo 1, 9,33 al articulo 2, y 1,29 al articulo 3.
- Después para el segundo día, no se realizarían ajustes.
- Para el tercero, se reajustan 5,26 provenientes del articulo 1 para el articulo 3.

De esta forma, se estarían cumpliendo casi todos los pedidos. Solamente no se cumple parte del articulo 1 para el primer día (0.62 específicamente).

Respecto de los costos totales al incurrir en este plan de producción, el valor obtenido fue de \$1070,65.

³Ver la fracción como el tiempo de estas