Ejercicio 1.6

[71.14] Modelos y Optimización I
Curso 4
2C 2021

Alumno:	Grassano, Bruno
Número de padrón:	103855
Email:	bgrassano@fi.uba.ar

Índice

1. Enunciado

Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$4 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 \leq 4$$
$$4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 8$$
$$X_1 + X_2 \geq 1$$

Y el funcional:

$$Z = 8 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 \rightarrow \text{Máx}$$

Se pide:

1. Encontrar un enunciado compatible con el modelo.
2. Resolución gráfica.
3. Indicar la o las soluciones que optimicen el funcional.
4. Dar el valor de las variables débiles o slacks, sus unidades y significado en cada uno de los vértices del poliedro.

2. Enunciado compatible con el modelo

Una empresa produce dos tipos distintos de productos, A y B, que van consumiendo y produciendo las sustancias S1 y S2 al ser fabricados en maquinas distintas.

Para producir el producto A, se requieren 2 litros de agua por litro de la sustancia S1. En el proceso de esta mezcla, se obtiene una relación 1 a 1 de S1 con S2 que surge como subproducto debido a otros ingredientes, presión, y temperatura. Este subproducto no es deseado en el tanque, ya que la mezcla se produce en un tanque reducido limitado a 2 litros, por lo que no se debe de superar este limite.

Para el producto B, se necesitan 2 litros de agua por cada litro de sustancia S1, mas un litro de agua por cada litro de S2. Este producto se produce en un tanque que tiene 4 litros como capacidad máxima.

La empresa nos indica también que siempre se tiene que tener un stock de seguridad, en donde la suma de las sustancias tiene que tener como mínimo un litro.

Nos piden maximizar la cantidad de S1 y S2 que piden para cada periodo, sabiendo que en los encargos S1 es el doble que S2.

3. Resolución gráfica

Si se planteara el problema del enunciado compatible, habría que agregar las restricciones físicas, no seria posible tener S1 y S2 negativos, por lo que la región factible se cortaría en el eje y.

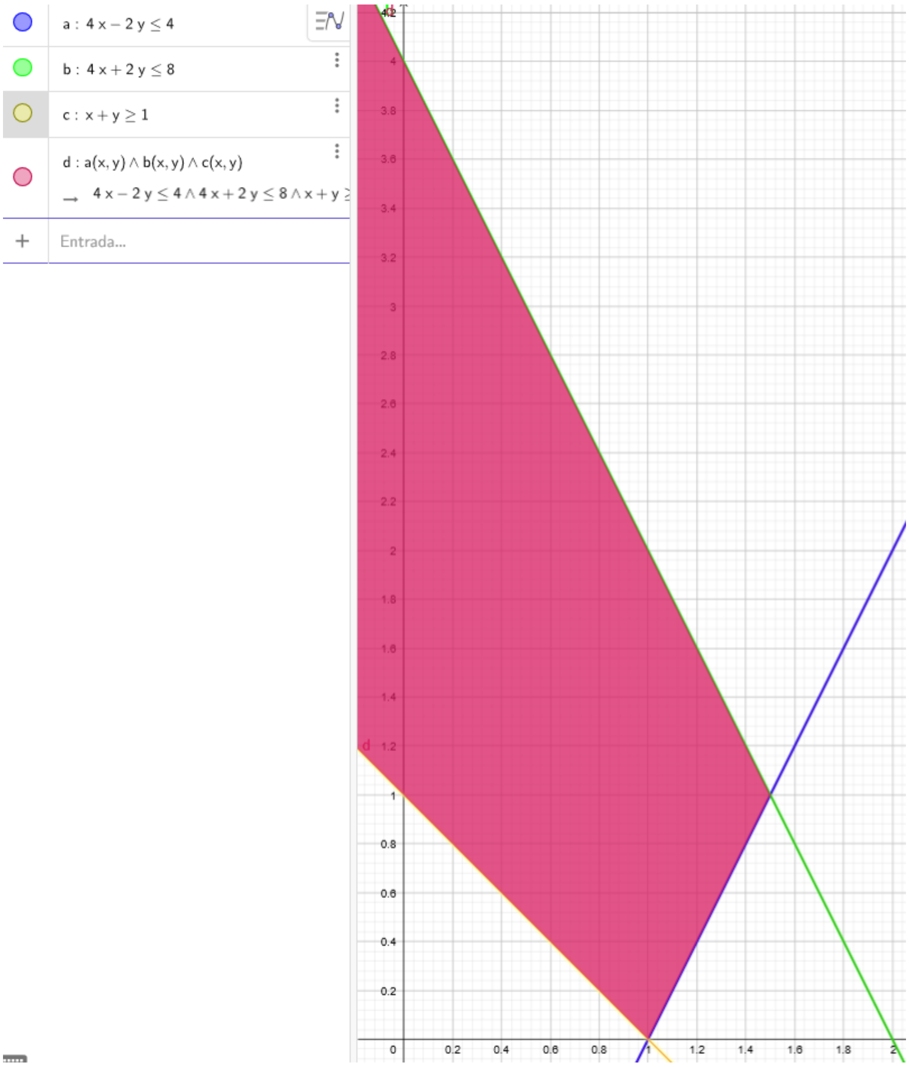

Figura 1: Resolución gráfica de las ecuaciones planteadas

4. Indicar la o las soluciones que optimicen el funcional

Las soluciones que maximicen el funcional van a ser los puntos que estén en la función antes del $(1,5;1)$. Ya que la traza de la función coincide con todo ese borde.

En el caso del problema propuesto, habría que considerar que esta el limite físico, por lo que la linea iría del $(4,0)$ al $(1,5;1)$.

5. Dar el valor de las variables débiles o slacks, sus unidades y significado en cada uno de los vértices del poliedro

Para $(1,5;1)$:

$$\begin{aligned} 4 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 + SL_1 &= 4 \\ 4 \cdot 1,5 - 2 + SL_1 &= 4 \\ SL_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + SL_2 &= 8\\ 4 \cdot 1,5 + 2 + SL_2 &= 8\\ SL_2 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_1 + X_2 - SL_3 &= 1\\ 1,5 + 1 - SL_3 &= 4\\ SL_3 &= -1,5\end{aligned}$$

Para $(1, 0)$:

$$\begin{aligned}4 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 + SL_1 &= 4\\ 4 \cdot 1 + SL_1 &= 4\\ SL_1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + SL_2 &= 8\\ 4 \cdot 1 + SL_2 &= 8\\ SL_2 &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_1 + X_2 - SL_3 &= 1\\ 1,5 - SL_3 &= 4\\ SL_3 &= -2,5\end{aligned}$$

Agregando la restricción de $X_1 \geq 0$ tenemos los siguientes vértices:

Para $(0, 1)$:

$$\begin{aligned}4 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 + SL_1 &= 4\\ -2 + SL_1 &= 4\\ SL_1 &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + SL_2 &= 8\\ 2 + SL_2 &= 8\\ SL_2 &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_1 + X_2 - SL_3 &= 1\\ 1 - SL_3 &= 4\\ SL_3 &= -3\end{aligned}$$

Para $(0, 4)$:

$$\begin{aligned}4 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 + SL_1 &= 4\\ -8 + SL_1 &= 4\\ SL_1 &= 12\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + SL_2 &= 8 \\
8 + SL_2 &= 8 \\
SL_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 - SL_3 &= 1 \\
4 - SL_3 &= 4 \\
SL_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Las restricciones que tengan cero como valor de la variable slack indican que son limitantes. Si tiene otro valor, indica que queda un rango de libertad con respecto a esa restricción.