

Ejercicio 2.23

[71.14] Modelos y Optimización I
Curso 4
2C 2021

Alumno:	Grassano, Bruno
Número de padrón:	103855
Email:	bgrassano@fi.uba.ar

Índice

1. Enunciado	2
2. Análisis de la situación problemática	3
3. Objetivo	4
4. Hipótesis y supuestos	4
5. Definición de variables	4
6. Modelo de programación lineal	5
6.1. Funcional	5
6.2. Restricciones	5
7. Solución por software	6
8. Solución óptima	8

1. Enunciado

Una empresa fabrica y vende Etolones, Krakos y Sultos. Los fabrica a partir de 3 recursos básicos; Horas Hombre (HH), Horas Máquina (HM) y Materia Prima (MP).

A continuación se indican los consumos unitarios de cada recurso para los tres productos (en lugar de mostrar los números los indicamos con letras):

Producto	HH	HM	MP
Etolones	E_1	E_2	E_3
Krakos	K_1	K_2	K_3
Sultos	S_1	S_2	S_3

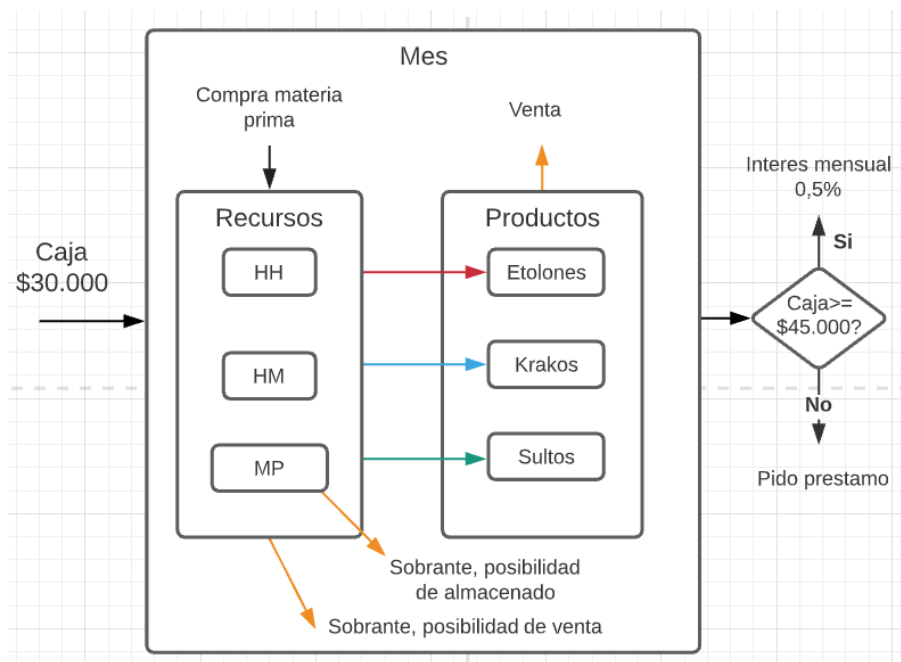
Se dispone de 2500 HH, 1000 HM y 5000 kg de MP por mes, siendo el costo por unidad de recurso de \$5 por HH, \$7 por HM y \$2 por kg. de MP. Si sobrara MP se la podría guardar en el depósito, las HH y las HM no se pueden atesorar de un mes para el otro.

Los precios de venta de los productos son de \$100, \$150 y \$200 por unidad para los Etolones, Krakos y Sultos respectivamente. Asimismo es posible vender los recursos no utilizados a \$4 la HH, \$8 la HM y a \$2 el kg de MP.

La caja inicial del mes es de \$30.000 y se quiere que, a fin de mes, la caja sea, como mínimo, de \$45.000. Si existe un sobrante de dinero se coloca en un banco a interés al 0.5 % mensual y si falta dinero se puede tomar prestado pagando el 1 % mensual. El préstamo máximo que se puede obtener es de \$20.000. Ambos intereses se cobran o pagan por adelantado.

2. Análisis de la situación problemática

- Se puede ver que es un problema de producción con tres productos
- Nos hablan de condición final para caja, y nos dicen que podemos pedir dinero si hace falta, y que podemos ponerlo en un banco si tenemos sobrante, una condición débil.
- Nos dan los costos de cada producto, por lo que hay que tenerlo en cuenta si queremos maximizar la ganancia.
- El siguiente es un esquema representando la situación.



3. Objetivo

Determinar las cantidades de cada tipo de producto y materia prima a vender para maximizar el dinero en caja durante un mes.

4. Hipótesis y supuestos

1. Todo lo que se produce se vende.
2. Los costos y cantidades de recursos disponibles son precisos y estables.
3. La cantidad de recursos utilizados por cada producto es exacta.
4. No hay que cumplir con un stock final¹ ni se tiene un stock inicial de productos.
5. No hay que cumplir con pedidos específicos para cada tipo de producto.
6. Si se pone a la venta los recursos no utilizados, estos se van a vender sin importar la cantidad (no hay un límite mínimo o máximo).
7. La venta de los recursos no conlleva costo alguno.
8. Los productos no se estropean en la fabricación.
9. Se tiene el espacio suficiente en caso de guardar la materia prima en el depósito.
10. Guardar materia prima en el depósito no conlleva costos.
11. No hay intereses ni deudas pendientes al inicio del mes.
12. El/los banco/s no pueden negarse en caso de solicitar un préstamo o colocar dinero.
13. El dinero ganado va a parar a caja.

5. Definición de variables

**Con tipos y unidades*

- E: Cantidad de Etalones producidos en el mes. (unidad/mes) Continua
- K: Cantidad de Krakos producidos en el mes. (unidad/mes) Continua
- S: Cantidad de Sultos producidos en el mes. (unidad/mes) Continua
- MPU: Cantidad de materia prima usadas a fin de mes. (kg/mes) Continua
- HMU: Cantidad de horas maquinas usadas a fin de mes. (h/mes) Continua
- HHU: Cantidad de horas hombre usadas a fin de mes. (h/mes) Continua
- MPS: Cantidad de materia prima sobrantes vendidas a fin de mes. (kg/mes) Continua
- HMS: Cantidad de horas maquinas sobrantes vendidas a fin de mes. (h/mes) Continua
- HHS: Cantidad de horas hombre sobrantes vendidas a fin de mes. (h/mes) Continua
- MPA: Cantidad de materia prima almacenada a fin de mes. (kg/mes) Continua
- DEFCAJA: Cantidad de dinero faltante a fin de mes para cumplir con la caja. (\$/mes) Continua
- SOBCAJA: Cantidad de dinero en exceso a fin de mes sobre el cumplimiento de caja. (\$/mes) Continua

¹Supuesto 1

6. Modelo de programación lineal

**Indicando en cada restricción o grupo de restricciones la función que cumplen.*

6.1. Funcional

De funcional tenemos que queremos maximizar el dinero en caja.

$$\max(1,005 \cdot SOBCAJA - 1,01 \cdot DEFCAJA)$$

6.2. Restricciones

Comenzamos planteando las restricciones de cuantos recursos son utilizados por cada producto.

- Las horas hombre usadas: $E_1 \cdot E + K_1 \cdot K + S_1 \cdot S = HHU$
- Las horas maquina usadas: $E_2 \cdot E + K_2 \cdot K + S_2 \cdot S = HMU$
- La materia prima usada: $E_3 \cdot E + K_3 \cdot K + S_3 \cdot S = MPU$

Ahora planteamos la cantidad total de recurso que tenemos:

- Las horas hombre: $HHU + HHS \leq 2,500 \frac{h}{mes}$
- Las horas maquina: $HMU + HMS \leq 1,000 \frac{h}{mes}$
- La materia prima: $MPU + MPS + MPA \leq 5,000 \frac{h}{mes}$

Nos queda plantear las restricciones correspondientes a la caja:

- La cantidad de dinero prestado que podemos pedir: $DEFCAJA \leq 20,000 \frac{\$}{mes}$
- Lo que queremos al final de mes: $30,000 \frac{\$}{mes} + VENTAS - COSTOS - 45,000 \frac{\$}{mes} = SOBCAJA - DEFCAJA$
- $VENTAS = \frac{100\$}{unidad} \cdot E + \frac{150\$}{unidad} \cdot K + \frac{200\$}{unidad} \cdot S + \frac{2\$}{kg} \cdot MPS + \frac{8\$}{h} \cdot HMS + \frac{4\$}{h} \cdot HHS$
- $COSTOS = \frac{2\$}{kg} \cdot MPU + \frac{7\$}{h} \cdot HMU + \frac{5\$}{h} \cdot HHU$

7. Solución por software

Se muestra a continuación un modelo por GLPK, se asignaron valores a las constantes de la tabla.

```
var E >=0;
var K >=0;
var S >=0;
var MPU >=0;
var HMU >=0;
var HHU >=0;
var MPS >=0;
var HMS >=0;
var HHS >=0;
var MPA >=0;
var DEFCAJA >=0;
var SOBCAJA >=0;

var VENTAS >=0;
var COSTOS >=0;

maximize z: 1.005 * SOBCAJA - 1.01 * DEFCAJA;

s.t. horasHombreUsadas: 3 * E + 4 * K + 5 * S = HHU;
s.t. horasMaquinaUsadas: 5 * E + 2 * K + 8 * S = HMU;
s.t. materiaPrimaUsadas: 4 * E + 6 * K + 7 * S = MPU;

s.t. horasHombreDisp: HHU + HHS <= 2500;
s.t. horasMaquinaDisp: HMU + HMS <= 1000;
s.t. materiaPrimaDisp: MPU + MPS + MPA <= 5000;

s.t. limPrestamo: DEFCAJA <= 20000;
s.t. ventas: VENTAS = 100 * E + 150 * K + 200 * S + 2 * MPS + 8 * HMS + 4 * HHS;
s.t. costos: COSTOS = 2 * MPU + 7 * HMU + 5 * HHU;
s.t. caja: 30000 + VENTAS - COSTOS - 45000 = SOBCAJA - DEFCAJA;
```

Los resultados:

Problem: 2
 Rows: 11
 Columns: 14
 Non-zeros: 37
 Status: OPTIMAL
 Objective: $z = 43215$ (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	z	B	43215			
2	horasHombreUsadas	NS	0	-0	=	9.045
3	horasMaquinaUsadas	NS	0	-0	=	45.225
4	materiaPrimaUsadas	NS	0	-0	=	4.02
5	horasHombreDisp	NU	2500		2500	4.02
6	horasMaquinaDisp	NU	1000		1000	38.19
7	materiaPrimaDisp	NU	5000		5000	2.01
8	limPrestamo	B	0		20000	
9	ventas	NS	0	-0	=	1.005
10	costos	NS	0	-0	=	-1.005
11	caja	NS	15000	15000	=	-1.005

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	E	NL	0	0		-168.84
2	K	B	500	0		
3	S	NL	0	0		-234.165
4	MPU	B	3000	0		
5	HMU	B	1000	0		
6	HHU	B	2000	0		
7	MPS	B	2000	0		
8	HMS	NL	0	0		-30.15
9	HHS	B	500	0		
10	MPA	NL	0	0		-2.01
11	DEFCAJA	NL	0	0		-0.005
12	SOBCAJA	B	43000	0		
13	VENTAS	B	81000	0		
14	COSTOS	B	23000	0		

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

KKT.PE: max.abs.err = 4.55e-13 on row 5
 max.rel.err = 9.09e-17 on row 5
 High quality

KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
 max.rel.err = 0.00e+00 on row 0

High quality

KKT.DE: max.abs.err = 1.78e-15 on column 6
max.rel.err = 9.82e-17 on column 9
High quality

KKT.DB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
High quality

End of output

8. Solución óptima

Habiendo realizado el análisis, se recomienda lo siguiente para maximizar la cantidad de dinero en caja.

- Producir 500 unidades de Krakos, y 0 de Etolones y Sultos.
- Vender los 2000kg de materia prima sobrantes y las 500 horas hombre.

De esta forma, se está cumpliendo con el objetivo propuesto de tener \$45.000 en caja, obteniendo incluso un sobrante del cual se consiguen intereses, quedando un total de \$43.215 adicionales.