Apuntes

[71.14] Modelos y Optimización I
Curso 4
2C 2021

Grassano, Bruno	
bgrassano@fi.uba.ar	

Índice

1. Introducción 2

2. ¿Que es Modelos y Optimización I? 3

3. Modelos 3

4. Supuestos básicos de la programación lineal 6

5. Tipos de problemas 7

6. Condiciones de vinculo 8

7. Varios periodos 8

8. Esquema modular 9

9. Variables enteras 9

10. Linealizar restricciones 10

11. Problemas combinatorios 10

11.1. Problema del viajante 11
11.2. Distribución y transporte 12
11.3. Problema de Trasbordo 12
11.4. Asignación y asignación cuadrática 13
11.5. Satisfacibilidad booleana - SAT 13
11.6. Coloreo de grafos 14

12. Cobertura de conjuntos 14

13. Secuenciamiento de tareas - Scheduling 15

14. Método Simplex 15

15. Casos particulares del método Simplex 19

16. Recursos saturados y sobrantes 20

17. Análisis de sensibilidad 20

18. Modificaciones de los términos independientes 22

19. Variación simultanea de recursos 22

20. Introducción de un nuevo producto 23

21. Agregado de inecuaciones 23

22. Resolución de problemas con variables enteras: Branch & Bound 23

23. Heurísticas 25

23.1. Problema del viajante 25
23.2. Coloreo de grafos 26
23.3. Para el problema de la mochila 27

1. Introducción

El presente archivo contiene los apuntes que fueron tomados a lo largo de la cursada de la materia Modelos y Optimización I (71.14) (Curso Colombo). La materia en formato virtual se puede considerar bastante pesada. Se tienen entregas de ejercicios casi todas las semanas, se tienen 3 trabajos prácticos, una evaluación inicial, una evaluación del ultimo trabajo practico, cuestionarios de las teóricas y un parcial en el que te puede tocar un tema difícil para el cual no da el tiempo o algo aceptable. Las clases teóricas en virtualidad fueron reemplazadas por vídeos, por lo que uno los puede ver cuando quiera durante la semana. Después de todo esto queda el final.

Recomendaciones:

- Seguir la materia al día, los temas en general son sencillos. Lo que consume mucho tiempo son los ejercicios. En mi caso entregue casi todas las semanas 3 ejercicios menos las ultimas que pase a entregar 2 debido al tiempo que consumían. Por lo general era estar casi 2 días haciendo los ejercicios para entregarlos antes del viernes (parecen como un mini TP)
- Para el final hacer varios finales de los presenciales (se evaluó presencial este cuatri). En la wiki hay varios finales del 2012/2013 que tienen pistas para su resolución.
- Respecto de este apunte, no esta del todo completo. Como la materia es bien practica conviene hacer los ejercicios principalmente para estudiar.

Primera semana

2. ¿Que es Modelos y Optimización I?

Es una asignatura vinculada con la Toma de decisiones y con la Investigación Operativa. La Investigación Operativa es la aplicación de ciencia moderna a problemas complejos que aparecen en la dirección y administración de sistemas

¿Que implica la toma de decisiones?

Esto implica que:

- Existen formas alternativas de actuar, con distintos resultados y diferentes eficiencias para lograr el objetivo.
- Existen dudas respecto del curso alternativo a utilizar.

¿Como aplicar la Investigación Operativa?

La Investigación Operativa utiliza modelos matemáticos para la toma de decisiones entre distintas alternativas, porque muchas veces la cantidad de alternativas y la complejidad para su formulación es tal que no es posible explicitarlas y analizarlas una por una. Por eso el modelo matemático sirve para encontrar y analizar las alternativas, y elegir la mejor (optimización).

3. Modelos

Definición: Un modelo matemático de un objeto o fenómeno es cualquier esquema simplificado e idealizado de ese objeto o fenómeno, constituido por símbolos y operaciones (relaciones) matemáticas.

Se podría decir que un modelo es una forma de representar cada uno de los tipos de entidades que intervienen en un cierto proceso físico mediante objetos matemáticos. Una vez formulado el modelo matemático, se le puede aplicar el calculo, el álgebra y demás herramientas para deducir el comportamiento del sistema bajo estudio.

Un modelo físico requerirá que se pueda seguir el camino inverso al modelado, permitiendo reinterpretar en la realidad las predicciones del modelo

Clasificación de los modelos

Hay diferentes formas de clasificar los modelos.
Según la información de entrada.

- **Modelos heurísticos**: Se basan en las explicaciones sobre las causas o mecanismos naturales que dan lugar al fenómeno estudiado
- **Modelos empíricos**: Son los que utilizan observaciones directas o los resultados del fenómeno estudiado.

Según el tipo de representación

- **Modelos cualitativos o conceptuales**: Usan figuras, gráficos o descripciones. Buscan predecir si el estado del sistema ira en determinada dirección, si aumenta o disminuye determinada magnitud, sin importar la magnitud concreta.

- **Modelos cuantitativos o numéricos**: Usan números para representar diferentes aspectos. Incluyen formulas y algoritmos que relacionan los valores.

Según la aleatoriedad

- **Determinista**: Se conoce de manera puntual el resultado, no hay incertidumbre. Los datos de entrada son conocidos y determinados.
- **Estocástico**: No se conoce el resultado esperado, sino su probabilidad. Existe incertidumbre.

Según su aplicación u objetivo

- **Modelo de simulación o descriptivo**: de situaciones medibles de manera precisa o aleatoria, por ejemplo con aspectos de programación lineal cuando es de manera precisa, y probabilística o heurística cuando es aleatorio. Este tipo de modelos pretende predecir qué sucede en una situación concreta dada.
- **Modelo de optimización**: Es para determinar el punto exacto para resolver alguna problemática. Cuando la optimización es entera o no lineal combinada, se refiere a modelos matemáticos poco predecibles, pero que pueden acoplarse a alguna alternativa existente y aproximada en su cuantificación. Este tipo de modelos requiere comparar diversas condiciones, casos o posibles valores de un parámetro y ver cual de ellos resulta óptimo según el criterio elegido.
- **Modelo de control**: Es para saber con precisión como esta algo en una organización, investigación, área de operación, etc. Pretende ayudar a decidir que nuevas variables, medidas, parámetros deben ajustarse para lograr un resultado o estado concreto.

Aplicación u objetivo	Descriptivos/Simulación		Optimización/Elección		
Aleatoriedad	Determinista	Probabilista	Determinista	Probabilista	
Cuantitativo/Numérico	Cálculos de astronomía	Simulaciones	Calculo de componentes de sistemas	Diseño de ingeniería	C
Cualitativo/Conceptual	Análisis de microeconomía	Juegos	Flujo en grafos		T

En amarillo el estudiado en Modelos y Optimización I.

Determinación de un problema

Hay que conocer los siguientes aspectos para poder determinar correctamente la decisión:

- Responsables de la decisión
- Escenario en el que actúan
- Objetivos
- Variables controlables
- Variables no controlables

Ventajas del modelo

- Mayor simplicidad para 'manejar'
- Posibilidad de técnicas ya desarrolladas para encontrar la solución con ese modelo
- Toda realidad transformada correctamente en un modelo dado se acepta que posee las propiedades del mismo

Elementos de un modelo

- Hipótesis y supuestos: Están para simplificar el modelo, ya que delimitan el sistema en estudio. Se transforma el sistema físico en un modelo simbólico. Las hipótesis deben ser probadas científicamente, y los supuestos son hipótesis que no pueden probarse.
- Objetivo: Mide la eficiencia de nuestro sistema. Tiene que surgir de tres preguntas: ¿Que puedo hacer? ¿Cuando? ¿Para que? Usamos la siguiente forma: *Determinar algo, para max/min algo, durante cierto tiempo.*
- Actividad: Es un proceso unitario que se realiza en el sistema físico caracterizado por consumir recursos y/o generar un resultado económico y/o indicar un estado.
- Variables: Miden o indican el estado de una actividad. Las que miden pueden ser continuas o enteras. Las que indican son generalmente (0,1) o bivalentes.

Elementos de la formulación

De forma general tenemos:

1. Variables de decisión. *ejemplo ¿Que cantidad de X_i se va a fabricar de cada producto $i = 1..n$ - (n conocido)*

   $x = (x_1, ..., x_n)$
2. Objetivo. *Ej. Maximizar beneficios o minimizar costos.*

   $maxf(x)$ o $minf(x)$
3. Restricciones en las decisiones factibles.*Ej. Presupuesto limitado, cumplir cierta condición*

   $g_1(x) \leq b_1, g_2(x) \geq b_2, g_3(x) = b_3$

En la materia se va a elegir aquel o aquellos valores de las variables instrumentales pertenecientes al conjunto de oportunidades S ($X \in S$) que proporcionan el mayor o menor valor de la función objetivo.

Elementos de la formulación en el caso del modelo matemático de programación lineal

1. Variables de decisión continuas.

   $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$
2. Objetivo lineal.

   $min - o - max(c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n)$
3. Restricciones lineales para $i = 1, ...n$,

   $a_{i1} \cdot x_1 + ... + a_{in} \cdot x_n = b_i$ o $a_{i1} \cdot x_1 + ... + a_{in} \cdot x_n \leq b_i$ o $a_{i1} \cdot x_1 + ... + a_{in} \geq b_i$

Llamamos c_j al coeficiente de una variable en la función objetivo. Llamamos a_{ij} al coeficiente que tiene la variable x_j en la restricción i. Llamamos b_i a la constante que esta del lado derecho de la restricción i.

Para formular un modelo de programación lineal

1. Comprender la situación problemática, formular hipótesis y supuestos. Si no tenemos datos de los recursos no limitantes, por lo general suponemos que no son limitantes. *Ej. maquinaria, mano de obra, otros recursos, etc Otros ejemplos: No hay inflación, no hay productos fallados, no hay desperdicios de recursos al fabricar, etc*
2. Describir el objetivo con palabras, ¿Que buscamos? ¿Que queremos? ¿En que periodo de tiempo? *Cada maximizacion/minimización tiene sus contras y ventajas, hay que considerarlas Ej. Minimizar gastos, ¿y si los gastos son grandes, pero ganamos mucho también?* Una vez determinadas las respuestas a las preguntas dejar planteado completo.

3. Describir cada una de las restricciones con palabras. *¿Que recursos están limitados?¿Que cantidades hay que cumplir, ya sea mínimo o máximo?*

4. Definir las variables de decisión, las controlables. *Siempre pensar si hay algo que no podamos medir sabiendo lo que ya tenemos con las variables definidas.*

5. Expresar el objetivo en función de las variables de decisión. *Prestar atención a las unidades*

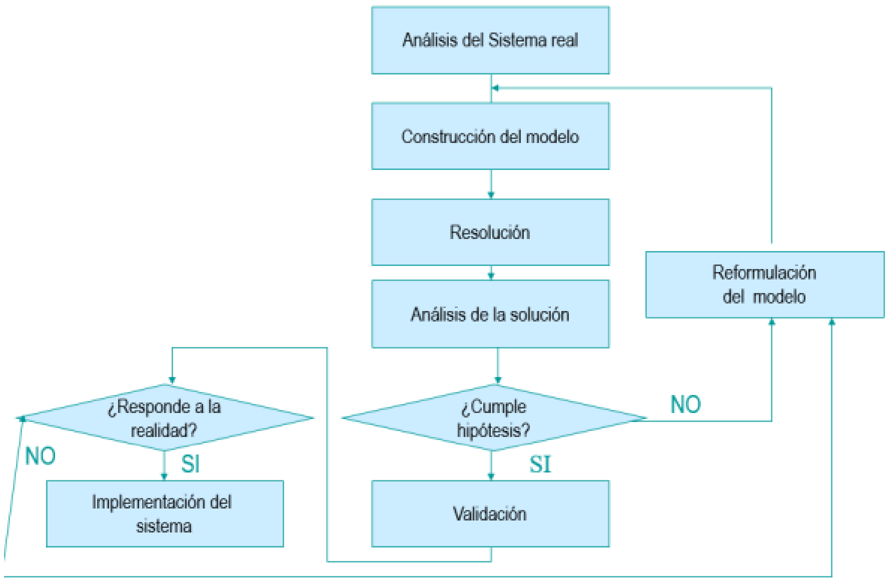
6. Expresar cada restricción en función de las variables de decisión. *Plantear en base a los tipos de restricciones que tengamos $\leq$ o $=$ Volver a prestar atención a las unidades, ambos lados de la restricción en las mismas unidades*

La región factible es siempre un conjunto convexo, es decir, tiene óptimos globales (no hay locales). Si el óptimo existe, esta en un vértice de la región factible, por lo tanto, no vale la pena analizar los que no son vértices. Para cada restricción se gráfica el semiplano que la cumple.

Para obtener el punto óptimo, graficamos la traza de la función objetivo, y lo alejamos lo mas posible del $(0, 0)$, ya que **estamos maximizando** , hasta que no se pueda mas por las restricciones.

Para saberlo con las restricciones, hay que agregar una variable en cada restricción llamada variable slack o de holgura. Esta variable convierte todas las restricciones en igualdades. Las que tengan variable slack igual a cero, indican que es limitante. Se agrega dependiendo de si es mayor o menor (si se suma o resta)

Puede pasar que tenga varias soluciones óptimas, la traza de la función objetivo coincide con un lado del poliedro. Puede pasar que no sea factible (incompatible) si no se forma una región. También puede pasar que sea no acotado, esto se da en modelos de maximización donde hay puntos con valor de Z arbitrariamente grandes en la región factible.



Segunda semana

4. Supuestos básicos de la programación lineal

Son cuatro condiciones que tiene que cumplir el modelo.

- **Proporcionalidad**: Tanto el beneficio como el uso de recursos son directamente proporcionales al nivel de actividad.

- **Aditividad**: No existen interacciones entre las actividades que cambien la medida total de la efectividad o el uso total de algún recurso. *Es lo mismo sumar por separado que junto los recursos. En el caso de problemas de química, la mayoría no es lineal, porque si ponemos un 10 % de la sustancia A y un 90 % de la sustancia B, la mezcla puede dar un resultado explosivo y si ponemos 50 % de A y 50 % de B, la mezcla puede quedar de color verde*
- **Certeza**: Todos los parámetros del modelo son constantes conocidas. *Con un litro de nafta anda 10km, no anda mas o menos.*
- **Divisibilidad**: Las unidades de actividad pueden dividirse en niveles fraccionarios cualesquiera, de modo que pueden permitirse valores no enteros para las variables. Tenemos que tratar de llevar siempre las variables enteras a continuas, ya que estos modelos de programación lineal son mas sencillos. Si da fracción, *ejemplo 3000,5*, fabricamos 3000 en un mes, y 3001 en otro mes, y así de forma tal de que tienda al óptimo.

Si no podemos llevarlo a continuas, usamos un método para variables enteras. Armamos el poliedro y vemos los valores enteros. Al poliedro le sacamos una parte del poliedro, de manera tal de que las soluciones que saco no va a incluir ninguna solución entera. Las voy sacando de manera tal de llevar los vértices a valores enteros. Se conoce como plano de corte (o hiper plano para mas dimensiones)

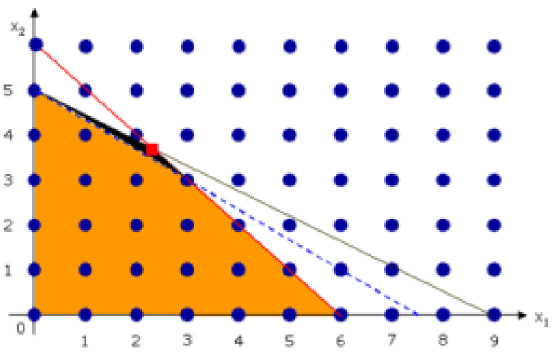


Figura 1: Método Gomory para variables enteras

5. Tipos de problemas

Problemas de centros de producción

La producción se divide en distintos lugares físicos, en cada uno de los cuales se realizan distintas partes del proceso. Se modela planteando variables de entrada y salida de cada centro, relacionado con los centros siguientes.

¿La entrada es igual a la salida? ¿Hay perdida de material? Lo ponemos en la relación de lo que entra y sale.

Problemas de mezcla

Son problemas en los que hay que mezclar cierta proporción para producir bienes para la venta. Se llaman mezcla o bending.

Problemas de armado

Son situaciones en las cuales se fabrica un producto usando determinada cantidad de otros productos (**Cantidades, no porcentajes**). Los productos que intervienen no generan algo diferente (diferencia con mezcla), siguen manteniendo su esencia original. Plantear todas las restricciones para el armado.

Es importante asegurar que cada componente esta presente en el producto final en la cantidad requerida. Una restricción por cada componente

Reciclado

La cantidad que entra de producto va a ser la misma que la que sale eventualmente. La diferencia es la cantidad de veces que se realizan los controles, ya que una vez que se rechaza un producto, vuelve al control, y puede volver a ser rechazado devuelta.

- T: cantidad de veces que controlamos
- X: cantidad de productos a controlar
- a: tasa de rechazo
- X': cantidad de productos aprobados

$$T = X + a \cdot X + a \cdot (a \cdot X) + ... + a^n \cdot X$$

Esta serie va tomando forma a la geométrica.

$$T = lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot X = \frac{X}{1-a}$$

- X' = X

En un proceso de reciclado, donde se repite siempre, no hay una merma, lo que entra va a terminar saliendo.

Tercera semana

6. Condiciones de vinculo

Las condiciones de vinculo son parte del modelo. Relacionan las actividades entre si o con el contexto. Hay dos tipos:

- Fuertes: Se cumplen siempre.
- Débiles: Si el modelo quiere no cumplirlas, el modelo tiene que pagar un precio por esto.
- Conflictivas o contradictorias: dos o mas condiciones no pueden cumplirse simultáneamente.

Si al Z le conviniera que tomaran valor simultáneamente EXCESO y DEFECTO el esquema de metas no funcionaría bien.

En programación lineal continua no tenemos manera de hacer que cuando una variable es distinta de cero haya otra variable que esté obligada a valer cero

7. Varios periodos

Se tienen variables para cada periodo que los van relacionando. Para el periodo inicial y final pueden no tenerse variables de stock inicial/final.

8. Esquema modular

- Módulo: Conjunto de vinculaciones que poseen una misma naturaleza funcional Por naturaleza funcional entendemos que el conjunto de vínculos representan una misma función.
- Modularidad: Interdependencia entre los módulos.
- Estructura: conjunto de módulos vinculados entre sí que cumplen la condición de modularidad. Un modelo podría plantearse como una estructura

Lo que está dentro de un módulo tiene que estar vinculado por una función común (por ejemplo, todo lo que se refiere a la producción) y el pasaje de variables entre módulos debe ser mínimo. Es decir, la cohesión dentro del módulo debe ser máxima (todo lo que está dentro del módulo debe responder a una misma función) y el acoplamiento entre módulos debe ser mínimo (si hay demasiado pasaje de variables entre módulos, se podría deducir que esos dos módulos debieran ser uno solo o que no están correctamente divididos).

La idea principal del planteo por módulos es que se pueden modelar por separado cada uno de los módulos y luego solamente hace falta agregar unas restricciones de unión de las variables de cada módulo con sus módulos relacionados (si el modelo está bien hecho, no deberían ser muchas)

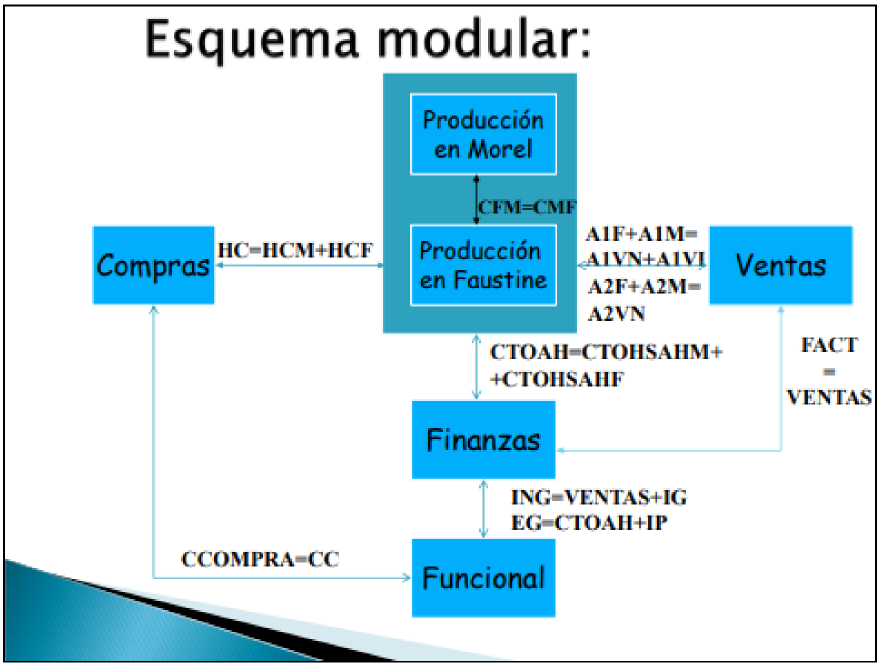


Figura 2: Ejemplo de un esquema modular, cada modulo tiene sus variables y restricciones, las cuales se conectan después. (Se pueden ver las conexiones con las flechas.)

Cuarta semana

9. Variables enteras

Enteras discretas

- Para productos enteros o recursos que no se pueden fraccionar.

Bivalentes o binarias

- Pueden ser para decisión, señalan alternativas posibles. Suelen indicarse con la letra Y
- También pueden ser indicativas, marcan el estado de una variable asociada (el barco navega o no)
- No tienen unidad

Relaciones binarias AND, OR, etc. Las planteamos con una tabla de verdad, para de esta forma decir que es lo que queremos que ocurra. Hay que tener en cuenta que no podemos restringir de mas. No multiplicar variables para cumplir las condiciones, no es lineal.
Para el AND: $n\,YAND \leq Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + \ldots + Yn \leq (n\breve{\ }1) + YAND$
Para el OR: planteo las variables menor o igual a 1.

Relaciones con variables continuas

$$m \cdot Y_i \leq X_i \leq M \cdot Y_i$$

m muy pequeña, y M muy grande (constantes), no tienen que afectar a las decisiones. Si no agregamos estas restricciones no tengo un vinculo entre las variables.

Decisiones mutuamente excluyentes

- No es posible plantearlas de manera lineal solo con variables continuas. Usamos variables binarias, las sumamos, y tienen que ser menor o igual a 1.
- Condiciones Si-Entonces las planteamos con variables binarias también, relacionándola con las variables de la condición.
- Linealizar restricciones si alguna no cumple los supuestos básicos de la programación lineal.
- Para 'quitarlas', si es de menor o igual el termino independiente tiene que tener un valor muy grande para que la restricción no restrinja. Si es de mayor o igual, tengo que achicar el termino (cero o menor que cero) para que no es restrinja.
- No se pueden eliminar restricciones de igual.

Quinta semana

10. Linealizar restricciones

- Nunca definir el costo o precio de venta como una variable.
- Dividimos en tantas variables como valores tengamos, cada una con sus restricciones multiplicadas por sus variables bivalentes. La suma de todas debe de ser 1.
- Función cóncava seccionalmente lineal, se van usando variables bivalentes que van habilitando y conectando las distintas partes. (Como diques)
- Con esto se pueden plantear descuentos/recargos por cantidad que no cumplen el supuesto básico de proporcionalidad.

11. Problemas combinatorios

- Se desean determinar combinaciones óptimas.
- Tienen un numero finito de soluciones factibles.

11.1. Problema del viajante

- Representa la salida de alguien que tiene que visitar a otras personas, utilizando la menor cantidad de recursos.
- Se conocen las distancias/costos.
- Caminos hamiltonianos, visita todos los vértices sin repetirlos. (Matemática Discreta)
- Problema del viajante es con un circuito cerrado. (Travelling Salesmen Problem)
- Problema del mensajero no es cerrado.
- Viajante simétrico, no importa la dirección de ir de un punto a otro.
- Viajante asimétrico, importa la dirección (es mas caro ir a un lado que volver)
- El objetivo es determinar el orden en el cual el viajante va a visitar las ciudades (se llama tour al viaje) partiendo y volviendo a la ciudad inicial, minimizando los costos/distancias del viaje.
- Usamos variables binarias que valen 1 si se va directo de la ciudad i a la ciudad j.
- Subtours son cuando no hace un recorrido completo, sino que hace ciclos que no están unidos.
- Una situación es un problema del viajante cuando no se conoce el orden en el cual se realizan. También cuando la función objetivo depende del orden que indique el modelo para esas actividades (directa o indirectamente) (a distinto orden, distinto resultado)
- Una variacion es teniendo dos medios de transporte para ir de cada ciudad i a cada ciudad j. Para cada tramo se agregan dos variables bivalentes (1 si se tomo un medio, 0 para la otra, y viceversa). Estas nuevas variables las vinculamos con las bivalentes originales mediante una igualdad.
- Otras variaciones del problema para por el orden, no se puede visitar D si no se visito G. En este caso se establece que el numero de orden de D es mayor (o igual) al de G. (Las U toman todos valores distintos)

Formulación MTZ

- Es una forma de eliminar subtours.
- Se agregan variables U_i que es el numero de secuencia en la cual la ciudad i es visitada $\forall i = 1, 2, ...n$

$U_i - U_j + nY_{ij} \leq n - 1$
$i \neq j$

- Genera un arco que no se cierra, una secuencia, por eso funciona.
- Las U_i toman valor entero aunque no estén definidas así.
- Correlación unitaria: el significado de las variables U_i es el numero de secuencia en el cual es visitada la ciudad i. Solo se puede volver a la ciudad cero, ya que no tiene U_i

Cantidad de relaciones:

- (n+1)n Y_{ij} variables
- n $U_i$variables
- n+1 vínculos $\sum_{j=0;i\neq j}^{n} Y_{ij} = 1 \forall i = 0, 1..n$
- n+1 vínculos $\sum_{i=0;i\neq j}^{n} Y_{ij} = 1 \forall j = 0, 1..n$
- n(n-1) vínculos $U_i - U_j + nY_{ij} \leq n - 1$

Formulación TSP

- Es agregar condiciones que eliminen todos los posibles subtours (todas las opciones posibles de 2, de 3, de 4, y así hasta un punto)

Cantidad de relaciones:

- $(n+1)n$ variables X_{ij}
- $2^n + 2n - 2$ restricciones

El numero exponencial de restricciones hace impractico resolverlo directamente. Una opción es agregar las opciones que solo agregan subtours.

Sexta semana

11.2. Distribución y transporte

- Tenemos un conjunto de lugares que se llaman orígenes o suministros. Cada uno con un producto (tiene que ser siempre el mismo)
- Tiene un conjunto de destinos o demandas que demandan los productos. (Siempre una restricción por cada origen/destino)
- Se conoce el costo de enviar de origen i a destino j.
- Teorema: si todas las ofertas y demandas son números enteros y las restricciones son igualdades, el problema se va a dar resultado entero (aun sin condición)
- Es importante verificar que la oferta total sea igual a la demanda total
- Si no fuera así, se agrega un origen ficticio si faltan unidades (demanda>oferta) o un destino ficticio (oferta>demanda). Los costos de estos destinos son CERO.
- El objetivo es determinar la cantidad de unidades de producto que cada origen envía a cada destino para minimizar los costos de transporte totales.
- Las hipótesis principales son el producto homogéneo y costos lineales.
- Tenemos m orígenes y n destinos. $m + n$ restricciones.

11.3. Problema de Trasbordo

- Es como el anterior con alguna diferencia.
- Tenemos un conjunto de puntos intermedios entere los orígenes y los destinos. Los productos pasan primero por los trasbordos.
- Hay que ver cuantas unidades se envían desde el origen al transbordo,y de ahí a los destinos.
- Pueden no tener demanda y capacidad máxima. Pueden entregar lo que recibieron.
- Se agrega una ecuación por cada transbordo, estos no se quedan con mercadería. La restricción es todo lo que entra es igual a todo lo que sale.

11.4. Asignación y asignación cuadrática

- El problema es encontrar pares ordenados entre dos conjunto de forma tal que se minimice una función de costo (o maximizar beneficio)
- Se pueden agregar elementos ficticios si faltan.
- Las restricciones consisten en que cada elemento de A y B deben de aparecer una vez en el conjunto P.
- El problema es lineal, depende solo de los pares.
- Las variables son bivalentes. (Si tenemos igual cantidad de origen/destino se resuelve con continua y da 0 o 1.
- Es un caso particular del problema del transporte.
- La asignación cuadrática es como asignación solo que hay un costo beneficio que se produce si algunos pares están asignados. (El costo depende de que se produzca dos asignaciones al mismo tiempo. Se puede plantear con una variable que vale 1 si las dos valen 1. (Yand)

11.5. Satisfacibilidad booleana - SAT

- Hay dos tipos de problema, P se conoce una resolución en tiempo polinomial, NP **no se conoce** una solución en tiempo polinomial (puede ocurrir con una maquina de Turing).
- De NP esta el NP-Completo el cual es si es NP y cualquier otro problema NP es reducible (reescribir o reformular) a este problema en tiempo polinomial.
- NP-Hard si cualquier problema NP es reducible a este problema en tiempo polinomial. (Incluyen a los NP pero no pueden necesariamente resolverse en una maquina de Touring en tiempo polinomial.)
- Esto sirve para saber donde estamos parados con la complejidad de los problemas.
- Queremos ver si existe alguna combinación tal que de todo verdadero. Creamos una bivalente Y que vale 1 si hay solución, 0 si no. Después planteamos las restricciones.

Problema de la mochila - Knapsack

- Necesito cargar diferentes cosas, no puedo cargar todo, necesito maximizar este beneficio de lo que llevo.
- Tenemos como variables los pesos, los aportes del objeto i a la mochila (positivo para nosotros), y la capacidad de la mochila.
- Variables bivalentes que valen 1 si el objeto esta en la mochila, 0 si no.
- La limitación es que tenemos 2^n combinaciones posibles. No es polinomial.
- Se puede plantear una relajación lineal, suponemos variables bivalentes como continuas con menor o igual a 1.
- Hay variantes con múltiples mochilas. No es valido sumar las mochilas.
- Otra alternativa es con un problema acotado, hay mas cantidad de objetos de un tipo que puedo llevar.

11.6. Coloreo de grafos

- Dado un grafo no dirigido con un conjunto de vértices y aristas, un coloreo valido de G se corresponde a una partición d e V en k conjuntos independientes.
- El objetivo es encontrar el menor k tal que se tenga un coloreo valido. Se llama numero cromático. Hallarlo en NP-Hard.
- Tenemos variables $X_{ij} = 1$ si el vértice i se colorea con el color j.
- Tenemos $W_j = 1$ si se usa el color j en algún vértice.
- Buscamos minimizar la suma de los W, y lo sujetamos a que todos los vértices tienen que tener un color. Otra forma de plantearlo es con conjuntos.
- Para reducir la cantidad de variables en el caso de los conjuntos, solo se modelan los conjuntos independientes maximales.
- Eliminamos simetrías para reducir la cantidad de soluciones que nos da. (no puedo usar un color hasta que no usado el anterior)
- Se puede aplicar a scheduling, asignación de registros, asignación de frecuencias, sudoku.

Séptima semana

12. Cobertura de conjuntos

Son de tres tipos:

- Grupos que se deben cubrir
- Grupos que se particionan
- Packing

Tenemos conjunto S con elementos a cubrir, L con subconjuntos de S. Elegimos de L dependiendo de lo buscado.

Cubrimiento

- El conjunto L tiene subconjuntos (circuitos) que tenemos que elegir de forma tal de cubrir S. Para esto definimos una variable bivalente por cada circuito. (1 si se usa el circuito)
- Se debe determinar cuales circuitos se usan para cubrir todas las 'ciudades'. Puede haber solapamiento, es decir que un elemento este presente en varios circuitos usados. La intersección no tiene porque ser el conjunto vació.
- En el modelo buscamos minimizar la cantidad de subconjuntos usados.
- Tenemos que exigir que cada ciudad este cubierta al menos una vez.

Particionamiento

- Tenemos que hacer lo mismo de antes (cubrir todos) pero sin solapamiento.
- La unión da todo, la intersección da vació.
- En vez de poner mayor o igual en las restricciones se pone igual. Se fuerza a que se elija uno solo.
- Puede pasar que no se tenga solución.

Packing

- Se busca ver cuales elementos se pueden cubrir y cuales no se pueden cubrir. Se trata de cubrir la mayor cantidad sin solapamiento
- Se pone menor o igual y se busca maximizar la cantidad de elementos.
- Ahora tiene sentido tener una bivalente por cada ciudad. (antes se visitaban si o si). (Vale 1 si se visita, 0 sino.)
- Buscamos maximizar la suma de las bivalentes de las ciudades
- Relacionamos los circuitos con las bivalentes
- Si el de particionamiento tiene solución, packing tiene el mismo resultado.

13. Secuenciamiento de tareas - Scheduling

- Queremos tardar lo menos posible en terminar todas las tareas.
- Tenemos que tener en cuenta los tiempos anteriores.
- Variables que nos dicen cuando empieza y termina una tarea.
- Hay que asegurarse de que no empiece en otra maquina antes de terminar en la primera (o anterior) maquina
- Para saber cual es la tarea que termina mas tarde, definimos una variable FINAL. (mayor o igual a todos)
- Buscamos minimizar final.
- Tenemos que avisar que no puede hacer mas de una tarea a la vez. (que elija cual hace.)

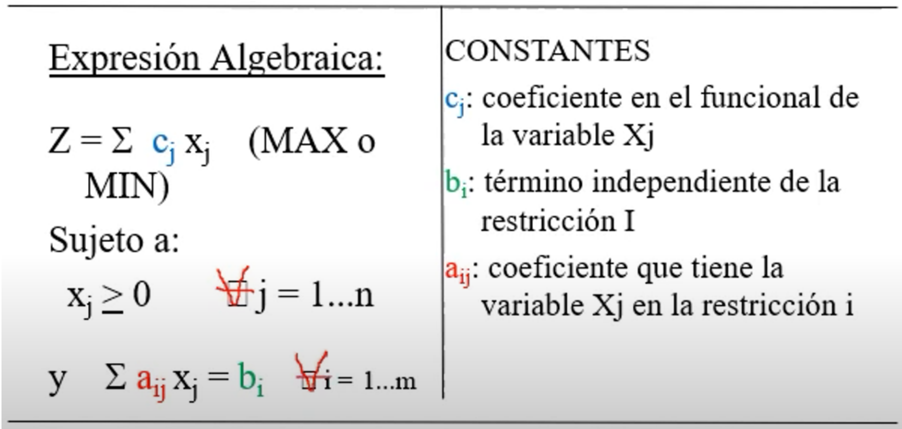
Octava semana

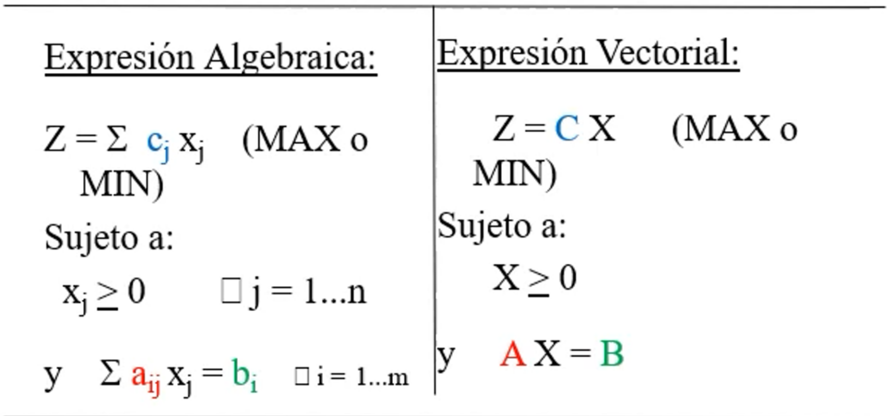
14. Método Simplex

- Es para la resolución de modelos de programación lineal.
- Procedimiento que recorre el poliedro por las aristas.
- Para poder resolver con el método simplex, un problema de PL tiene que cumplir:
- Todas las variables estén en el primer miembro
- Todas las restricciones sean igualdades. (el software se encarga) Para que sea así agregamos variables SLACK en cada restricción. (no tienen incidencia en la función objetivo) (Significan el sobrante de los recursos)
- Tenemos siempre mas variables que restricciones (al agregar las slack). Por lo que este sistema es indeterminado.
- El método simplex se maneja con la expresión vectorial

Teorema 1

El conjunto de todas las soluciones factibles a un problema de programación lineal es un conjunto convexo. (poliedro)





Teorema 2

La función objetivo alcanza su mínimo o máximo en un punto extremo del conjunto convexo K de soluciones factibles del problema de PL. Si alcanza ese mínimo o máximo en mas de un punto extremo, entonces la función objetivo tiene el mismo valor para cualquier combinación convexa de esos puntos extremos.

En cada vértice hay tantas variables distintas de cero como restricciones tiene el problema.

Teorema 3

Si se puede encontrar un conjunto de k=m vectores A1, A2, ... Ak que es linealmente independiente y tal que:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = B$$

Si todos los xi >=0, entonces es punto extremo del conjunto convexo de soluciones posibles.

X es un vector n-dimensional cuyos últimos n-k elementos son cero.

Teorema 4

Si X es un punto extremo del poliedro solución K, entonces los vectores asociados con las componentes xi que son mayores que cero forman un conjunto linealmente independiente.

Teorema 5

X es un punto extremo del poliedro solución K, si y solo si las componentes xi que son mayores que cero están asociadas con vectores linealmente independientes en:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_kA_k = B$$

- Como consecuencia sabemos que existe un punto extremo del poliedro K de soluciones factibles en el cual la función de objetivo alcanza su máximo o mínimo.
- También sabemos que cada solución factible básica corresponde a un punto extremo del poliedro solución K.
- Cada punto extremo de K tiene asociados a el m vectores linealmente independientes del conjunto dado de n vectores asociados con el.

$$Z = \overbrace{(8 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0)}^{C} \overbrace{\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix}}^{X}$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

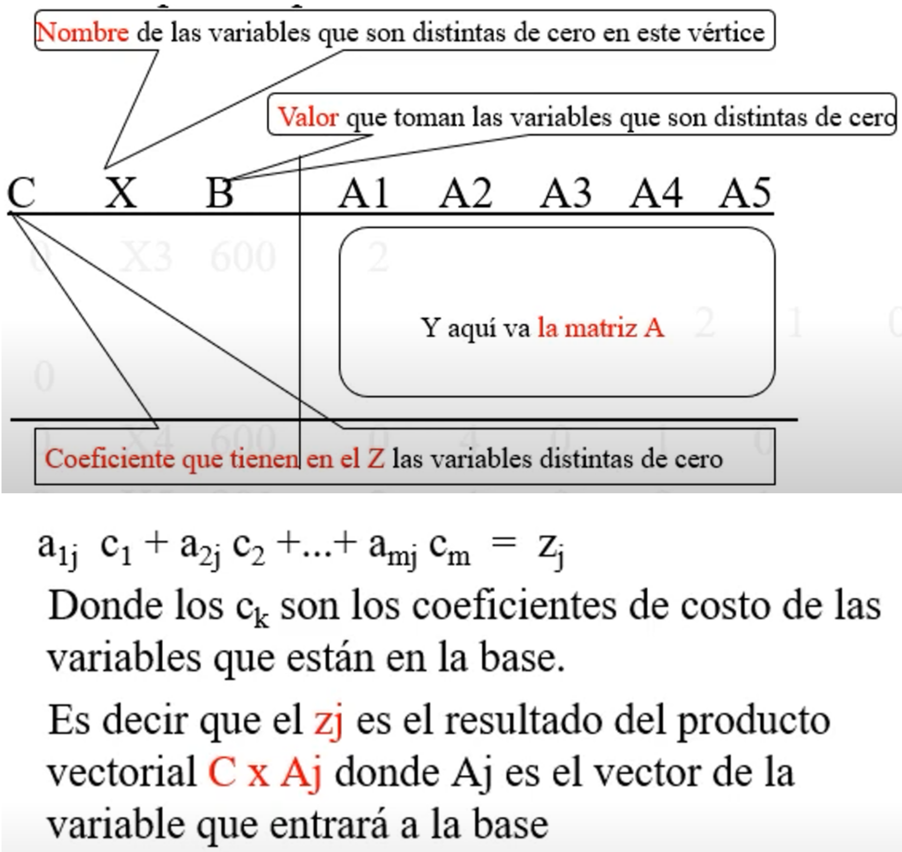
$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}}_{A} \overbrace{\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix}}^{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 801 \end{pmatrix}}_{B}$$

COEF X_1

TERM INDEP

¿Como encontrar un vértice?

- En cada vértice hay tantas variables distintas de cero como restricciones tiene el problema.
- Si vimos que tenemos la identidad, ya tenemos los vectores linealmente independientes. Las variables que son distintas de cero son estas. (El primer vértice es el 0)



Teorema A

Dado un Z sujeto a A X = B y X>=0, si existe alguna columna j de la matriz A para la cual zj -cj <0 (para un problema de máximo) entonces puede construirse un conjunto de soluciones posibles tal que su Z es mejor que el actual, donde el limite superior de Z puede ser finito o infinito.

Teorema B

Dado un Z de máximo sujeto a A X = B y X>=0. Si para una solución básica factible X las condiciones zj - cj >= 0 se cumplen para todas las j, entonces:

$x1A1 + ... + xmAm = B$ y $x1c1 + ... + xmcm = Z$

constituyen una solución factible máxima.

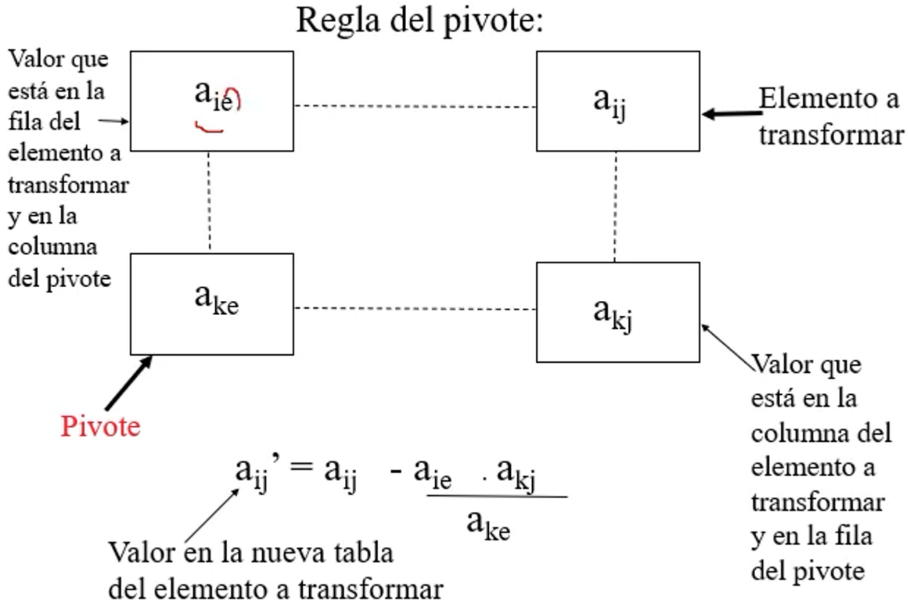
Coeficiente tita para cada fila

Resulta dividiendo la columna B por cada valor de las A. Ej tita = B / A1 (si alguna ai es 0, no se calcula ese valor). El mínimo tita nos indica cual es la variable que sale de la base. (Cambia ese Xk, su Ck y Bk)

Para cambiar de base

- Elegimos el elemento pivote que esta en la intersección de la fila de la variable que sale de la base con la columna de la variable que entra a la base.
- Dividimos la fila del pivote por el valor del pivote.

- Completamos la columna del pivote con ceros.
- Aplicar la regla del pivote para obtener el resto de los valores



- El pivote es la intersección de la fila que sale de la base, y de la variable que entra a la base.
- Se divide toda la fila por el pivote.

Novena semana

15. Casos particulares del método Simplex

Con funcional de mínimo

Fórmula de mejora del funcional: $Z^{p+1} = Z^p - \theta_{min}(zj - cj)$ de la variable que entrará a la base en el paso p+1

Lo único que cambia es que si todos los $zj - cj \leq 0$ estamos en el óptimo y que las variables candidatas a entrar a la base son las que tienen $zj - cj > 0$.

Con restricciones mayor o igual

- Se agregan las variables slack para convertirlas en igualdades.
- El método simplex empieza haciendo cero las variables reales, pero con mayor o igual va a dar valores negativos a las variables. Para solucionar esto, fingimos que el (0,0) es solución.
- Para fingir que es solución, agregamos una variable sumando en la primera fila de tal manera que cuando estamos en el (0,0) tenga dos variables mayores que cero. (Se conocen como variables artificiales) (Se nombran como μ). Estamos alterando el poliedro de soluciones para que incluya al (0,0).
- Este μ aparece en el funcional también, en el óptimo queremos que valga 0. Para eso se le agrega un coeficiente $-M$ (contrario a lo que busca el Z (maximizar))

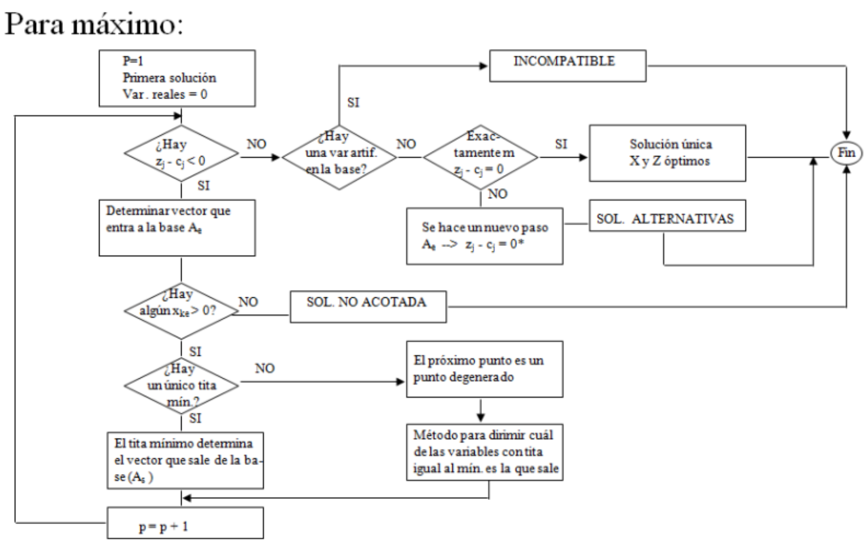
Con restricciones de igualdad

Se agrega una variable artificial en la restricción de igual para obtener el canónico que falta. (otro μ) (Aparece en el funcional también)

Casos particulares

- **Soluciones alternativas óptimas**
- **Punto degenerado**: Tenemos un empate de titas, por lo que el próximo punto va a ser degenerado. Lo define que una variable en la base vale 0.
- **Poliedro abierto**: cuando una variable quiere entrar a la base pero no puede salir ninguna (porque en la columna no hay ningún numero mayor que cero es un poliedro abierto - no hay próximo vértice)
- **Problema incompatible**: Es cuando se llega aun óptimo(zj - cj >=0 - problema de máximo) pero en la base hay una variable artificial es un problema incompatible.

Diagrama de flujo del método simplex:



Semana 10

16. Recursos saturados y sobrantes

- Si un recurso tiene sobrante cero se dice saturado. (la variable que indica el sobrante no esta en la base o vale cero.) Si consigo algo mas de estos, puedo ganar mas?
- El análisis de sensibilidad estudia esto.

17. Análisis de sensibilidad

Es en problemas lineales continuos.

- Si el zj - cj corresponde a una variable real del problema se llama costo de oportunidad de ese producto (CO)
- Si el zj - cj corresponde a una variable slack del problema (en general sobrantes de recursos) se llama valor marginal de ese recurso o restricción (VM)

- El costo de oportunidad es distinto de cero cuando la variable correspondiente al producto no esta en la base (vale cero)
- Indica en cuanto va a desmejorar el funcional si tenemos la obligación de fabricar una unidad de ese producto.
- Valor marginal es distinto de cero cuando no nos sobra nada, la variable correspondiente al sobrante de recurso o slack no esta en la base (vale cero)
- Indica en cuanto va a mejorara el funcional si esa restricción se afloja en una unidad.

Modificación de coeficientes de eficiencia

- Es un análisis perimétrico, solo cambiamos uno de los valores de todas las constantes que tiene el modelo. Tenemos que tener en claro donde figuran. (arriba de las columnas o como coeficiente en la base)
- En lugar del valor, ponemos un parámetro y calculamos los zj - cj con los parámetros. Vemos cuando se vuelven negativos, en ese punto la solución ya no es la óptima.

Curva de oferta

- Cuanto estamos dispuestos a ofrecer de un producto a distintos valores de coeficientes de eficiencia (cj) que puede tener ese producto en el Z, que cantidad de ese producto Xj es conveniente fabricar.
- Dentro de un rango de movimiento la Xj no cambia.
- Se empieza con la tabla óptima.

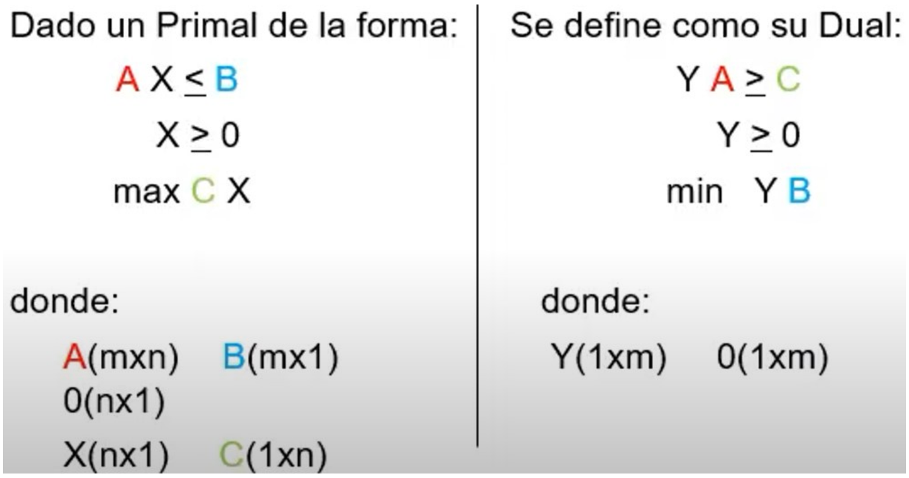
Cambios en los términos independientes

Es importante ver en que momento el valor marginal deja de ser siempre igual.

Planteo Dual

Lo usamos para saber el limite de los términos independientes.

- Tenemos que conseguir que todas las restricciones sean de menor o igual. Para esto multiplicamos por menos uno toda la resorción.
- Las Y no son bivalentes, son variables del problema dual.
- Tiene una variable real por cada restricción del problema primal.
- Tiene tantas restricciones como variables reales tiene el primal.
- El sentido de los funcionales es inverso.
- El sentido de las desigualdades del primal es el inverso en el dual.
- Las slack del directo se relación con las reales del dual, y las reales del directo se relacionan con las slack del dual.



Teorema fundamental de la dualidad

- Si el problema primal (o dual) tiene una solución óptima finita, entonces el otro problema tiene una solución óptima finita, y el valor de los dos funcionales óptimos es el mismo.
- Si cualquiera de los dos problemas tiene una solución óptima no acotada, entonces el otro problema no tiene soluciones posibles.

Teorema de la holgura complementaria

- Dados el problema primal y el dual correspondiente, siempre que la k-esima restricción de uno de ellos la variable de holgura o slack tome valor distinto de cero, entonces la k-esima variable del otro problema desaparece de la base y, si la k-esima variable de uno de los dos problemas es mayor que cero, en la k-esima restricción del otro problema se verifica la igualdad (la variable slack o de holgura de esa restricción es igual a cero).
- Quiere decir que cada par de variables directo-dual solo una variable puede ser distinta de cero. Una sola aparece en la base de la tabla óptima.
- Relación entre tablas óptimas

Semana 11

18. Modificaciones de los términos independientes

Si un problema nos dice que hay soluciones alternativas, el opuesto va a tener un punto degenerado

El gráfico de valor marginal de un recurso nos muestra ante los distintos valores que puede tomar la disponibilidad de ese recurso cual es el valor marginal del mismo. Es una función de intervalos cuyo valor va decreciendo.

En la tabla óptima tenemos que obtener el rango de variación para el cual es valido ese valor marginal. Se sigue asi hasta que la disponibilidad llegue a cero.

19. Variación simultanea de recursos

Si variamos mas de un recurso a mismo tiempo no podemos confiar en el rango de variación

Semana 12

20. Introducción de un nuevo producto

Queremos saber si es conveniente o no fabricar este producto y que cantidad.

Se agregaría una nueva variable para analizarlo. Esto causaría realizar devuelta la tabla de Simplex, lo que queremos evitar.

Para evitarlo hacemos estimaciones previas: $Lucrocesante = \sum UsoRecurso \cdot VMRecurso$

Cuanto perdemos en principio si empezamos a usar los recursos en otro lado. Es una estimación del valor de Zj del nuevo producto. Si el lucro cesante es mayor que el beneficio del nuevo producto no conviene producir el nuevo producto. Si el lucro cesante es menor o igual que el beneficio del nuevo producto puede ser conveniente fabricar del nuevo producto.

Si puede convenir, agregamos el producto a la tabla óptima. Para esto necesitamos una matriz de cambio de base. Se obtiene de la expresión en la tabla óptima de los vectores que en la primera tabla eran canónicos. (Se toman en el orden que permita expresar la matriz identidad en la primera tabla)

Multiplicamos la matriz por el vector nuevo expresado en la primera tabla. De esta forma se obtiene el vector en el óptimo. Con esto calculamos el Zj - cj para ver si seguimos en el óptimo.

21. Agregado de inecuaciones

Se quiere agregar una nueva restricción al problema. Antes de agregarla,se prueba la restricción con los valores actuales de las variables para ver si alcanza. Si no alcanza hay que agregarla y la solución va a ser peor. (Si alcanza sigo en la óptima)

No se pueden agregar filas, se agregan columnas. Para esto pasamos el problema al Dual y ahí agregamos la nueva columna. (Cambio de base devuelta)

22. Resolución de problemas con variables enteras: Branch & Bound

Dividimos el problema y vamos acotando a medida que encontramos soluciones.

Branch

- Para el nodo con mejor solución continua no entera, genero dos subnodos limitando la variable a los enteros más próximos.
- Estas soluciones pueden ser incompatibles, no enteras, enteras.

Bound

- Si tengo una solución entera puedo podar del árbol las soluciones no enteras con soluciones peores.
- Si todavía quedan nodos con soluciones no enteras sin analizar en el árbol vuelvo al primer paso
- La solución entera obtenida es la óptima.
- Se empieza por la que tiene mayor valor de funcional (máximo)

Desigualdad valida

Cumplen todos los puntos del poliedro entero. Nos interesan las que son validas para el PLE pero no para el PLC.

Cara

Desigualdad valida cuya intersección con el poliedro no es vacía. (Contiene algún punto del poliedro)

Faceta

Es una desigualdad valida cuya intersección con el poliedro tiene dimensión igual a la dimensión del poliedro menos uno.

Cápsula Convexa

Es el poliedro mas chico que puedo formar que incluya a todas las soluciones factibles. Se lo puede formular utilizando solo facetas.

Planos de Corte

- Una desigualdad valida satisfecha por todas las soluciones factibles.
- No es parte de la actual formulación.
- No es satisfecha por la solución óptima de la relajación lineal actual.
- Tiene un algoritmo para encontrarlo (separación)
- Solo se basan en la condición de integralidad de las variables
- Pueden ser utilizados para cualquier PLE
- Suelen ser muy débiles. Se aplican muchas veces para encontrar la solución

Planos de corte Gomory

Debemos plantear las variables del problema en función de las variables que están en la base.
Variable + sumjeN piso akj * Xj no basicas <= piso Valor de la variable
Trunco el valor Se resuelve el problema como si fuera continuo Si la solución es entera FIN Sino identificamos una variable fraccionaria y agregamos el plano de corte Gomory Volver a 1 (agregar otra variable hasta llegar a una solución entera - al problema mediante el dual la restricción)
Al tener una cara y no una faceta no estoy obteniendo la cápsula convexa de todo el poliedro en su dimensión mínima. No tengo asegurado que con el corte alcance para llegar al óptimo.
¿Porque usarlos?

- Garantizan convergencia finita dada cierta regla para la elección de la variable fraccionaria
- Es necesario un gran numero de planos de corte
- Errores numéricos pueden generar soluciones incorrectas o que programa falle.
- Recién se obtiene una solución factible al finalizar el algoritmo

Cortes específicos

- Cortes Cover: ?????
- Cortes de coloreo: Agujero red de nodos donde se conectan entre si.

23. Heurísticas

- Se aplican para problemas de optimización combinatoria.
- Su proceso es guiar el proceso de búsqueda en la dirección mas provechosa. Sugiere un camino a seguir primero cuando hay mas de uno.

¿Cuando usarlo?

- Conviene usarlas cuando no existe un método exacto de resolución o requiere demasiado tiempo o recursos.
- No es necesario la solución óptima
- Datos poco fiables
- Limitaciones de tiempo
- Paso intermedio en la aplicación de otro algoritmo

Tipos

De construcción

- Arrancan sin solución, nos dan una primera
- Pueden o no tener garantía de calidad
- Garantía de calidad significa que están a una distancia de cierto por ciento de la solución óptima.
- Se tienen que tomar reglas heurísticas, criterios para desempatar.
- El resultado depende de los datos planteados.

De mejora

- Se apoyan en una solución y ven si pueden llegar a una mejor.
- Un ejemplo es K-intercambios: Toma características de la solución y las intercambia. Si el intercambio es mejor, cambiamos la solución. Si no, seguir analizando si hay otros k-intercambios (en general se busca una cantidad de veces). (Repetir o ir a fin si no hay.)

Problemas con costo de Set-Up Esperas antes de realizar una siguiente tarea.

Semana 14

23.1. Problema del viajante

Vecino mas cercano

Es común tomar un camino largo al final

Emparchamiento más cercano

Eje con menor costo

Inserción mas cercana

- Cada paso tiene un tour cerrado con distintas ciudades
- Se corta un arco, se agregan dos arcos con la ciudad

Árbol generador mínimo

- Se debe cumplir la desigualdad triangular
- Se arma el árbol de costo mínimo, cada ciudad se conecta a la mas cercana armando una rama. Todas las ramas se conectan.
- Tiene garantía de calidad de 2.

De barrido

Se rota una semi recta alrededor del centro del plano y se ponen las ciudades en el tour a medida que las semi recta las toca

Curvas de Sierpinski

Se genera una curva de Sierpinski y se arma el tour en el orden en que la curva va tocando ciudades

De Mejoramiento

- **K-Intercambios**:
- **Lin y Kernighan**: Saca una de las ciudades y la vuelve a colocar, es con la intención de salir de óptimos locales

Semana 15

23.2. Coloreo de grafos

Se mencionan las de construcción primero.

- Golosas
- Son rápidas
- No suelen tener buenos resultados
- Se usan para soluciones iniciales

Se ordenan los vértices siguiendo algún criterio y vamos pintando en orden.

- **Largest First**, se asignan primero los vértices con mayor grado
- **DSATUR** En cada paso se asigna primero el vértice con mas colores distintos de su vecindad
- **Largest first with interchange** Si el próximo vértice implica asignar un nuevo color, pruebo antes si puedo evitarlo cambiando de color un vértice ya asignado

Coloreo secuencial siguiendo un orden de colores

- Para cada color i se asigna a ese color tantos vértices como sea posible antes de pasar al siguiente color i+1.
- Se irían construyendo conjuntos independientes maximízales.
- El criterio de selección de vértices varia según la implementación
- **Recursive Largest First**: Selecciona de acuerdo a la cantidad de vecinos no coloreados que no puedan usar el color i en orden creciente

De mejoramiento

- Búsqueda local
- A partir de una solución actual buscan soluciones cercanas esperando encontrar una mejor
- Tabú: recuerdo los cambios recientes y tengo prohibido volver atrás
- Simulated annealing: exploro cambios en todas direcciones. Los cambios que no encuentran mejoras se van enfriando en los sucesivos pasos
- Algoritmos genéricos se establece una población de soluciones y se las va combinando sucesivamente buscando mejoras.

23.3. Para el problema de la mochila

Heurística básica

1. Calcular los cocientes r = p/w
2. Ordenar la tabla de mayor a menor r, en caso de empate por menor peso, en caso de empate por orden alfabético
3. Recorrer la tabla comenzando desde arriba colocando elementos mientras sea posible
4. Cuando un elemento no entra finalizar

- Se puede mejorar la heurística recorriendo la tabla colocar mientras sea posible. Puedo seguir poniendo algún elemento final.
- Hay casos particulares que hacen que la heurística sea mala. Por ejemplo un elemento de peso 1 y valor 2, otro de valor 100 y peso 100, mochila de 100. Elige el primer elemento en vez del segundo.