

## Ejercicio 2.2

[71.14] Modelos y Optimización I  
Curso 4  
2C 2021

Alumno:	Grassano, Bruno
Número de padrón:	103855
Email:	bgrassano@fi.uba.ar

## Índice

<b>1. Enunciado</b>	<b>2</b>
<b>2. Análisis de la situación problemática</b>	<b>3</b>
<b>3. Objetivo</b>	<b>4</b>
<b>4. Hipótesis y supuestos</b>	<b>4</b>
<b>5. Definición de variables</b>	<b>4</b>
<b>6. Modelo de programación lineal</b>	<b>5</b>
6.1. Funcional . . . . .	5
6.2. Restricciones . . . . .	5
<b>7. Resolución por software</b>	<b>7</b>
<b>8. Informe de la solución óptima</b>	<b>12</b>

## 1. Enunciado

“Copani”, una compañía dedicada a la minería, explota tres yacimientos (Sierra Alta, Sierra Chica y El Abra), de cada uno de los cuales obtiene un mineral que contiene cuatro metales: Cobre, Estaño, Manganeso y Zinc. Con estos cuatro metales, y siguiendo las especificaciones que pueden verse en el cuadro que figura a continuación, Copani elabora dos aleaciones: A y B.

Aleación	Especificaciones
A	Como máximo 80% de Cobre
	Como máximo 30% de Estaño
	Como mínimo 50% de Zinc
B	Entre 40% y 60% de Estaño
	Como mínimo 30% de Manganeso
	Como máximo 70% de Zinc

La proporción de cada metal que está en el mineral depende del yacimiento del cual proviene ese mineral. La siguiente tabla indica esos datos, así como los costos de extracción de mineral:

Mineral	Máximo Disponible (toneladas)	Porcentaje de Metal					Costo \$/Tonelada
		Cobre	Estaño	Manganeso	Zinc	Otros	
Sierra Alta	1000	20	10	30	30	10	10
Sierra Chica	2000	10	20	30	30	10	40
El Abra	3000	5	5	70	20	0	50

La aleación A se vende a \$A por tonelada y la aleación B a \$B por tonelada. Con la información indicada: ¿Qué es lo mejor que puede hacer “Copani”?

Para facilitar el análisis se incluyen las siguientes definiciones:

- Aleación: Producto homogéneo de propiedades metálicas, compuesto de dos o más elementos, uno de los cuales, al menos, debe ser un metal. Ej: Bronce, Acero.
- Metal: Cada uno de los elementos químicos, buenos conductores del calor y de la electricidad. Ej: Oro, Cobre, Hierro.
- Mineral: Sustancia inorgánica que se halla en la superficie o en diversas capas de la tierra, cuya explotación ofrece interés. Ej: Ferrita, Pirita

## 2. Análisis de la situación problemática

- Puede observarse que se trata de un problema de mezclas respecto de las aleaciones.
- Se nota también que tenemos varios orígenes del metal que es utilizado.
- Nos dan los costos por tonelada, por lo que hay que tenerlo en cuenta si queremos calcular las ganancias.
- No se menciona el periodo en que se esta analizando el problema.
- Se ve a continuación un esquema del proceso.

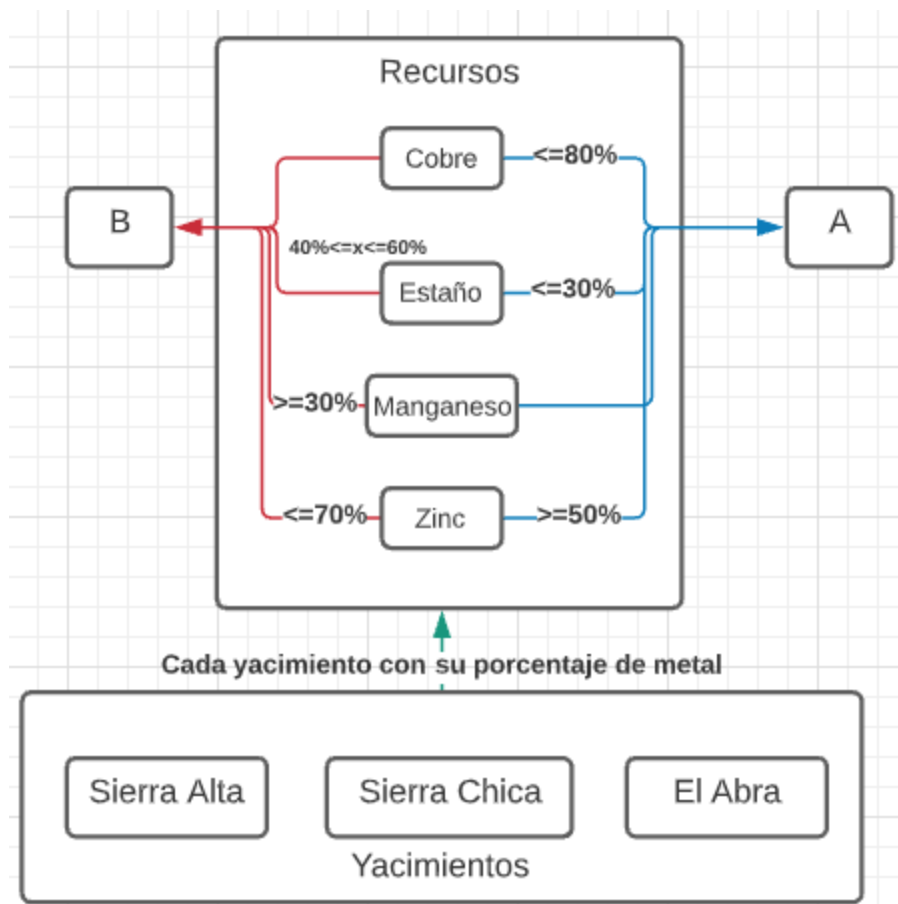


Figura 1: A y B se agruparían como Aleaciones o productos

### 3. Objetivo

Determinar las cantidades de toneladas de aleación A y B a producir para maximizar la ganancia durante un periodo de producción.

### 4. Hipótesis y supuestos

1. Todo lo que se produce se vende.
2. Los únicos costos asociados son los de la tonelada de cada uno de los yacimientos.
3. Los metales que provienen de distintos yacimientos (cobre, estaño, manganeso, zinc) son indistinguibles.
4. La mezcla no altera las toneladas usadas, esta va a ser la suma de los metales.
5. No hay pérdidas ni desperfectos en la producción de las aleaciones.
6. El traslado de los minerales a los centros de producción es despreciable.
7. No hay restricciones que obliguen a producir cantidades mínimas de aleaciones.
8. Económicamente son estables los precios de las toneladas (de aleación y minerales)
9. Se dispone del tiempo necesario para producir las aleaciones en un periodo de producción.
10. Las proporciones que se indican en los minerales son exactas.
11. Los límites de las especificaciones de las aleaciones son exactos.
12. Las aleaciones solo están compuestas por cobre, estaño, manganeso y zinc.
13. No se tienen stocks iniciales ni finales.
14. Los yacimientos pueden proveer minerales hasta su tope, no puede ocurrir que se acaben antes.
15. La aleación A tiene algún otro mínimo de alguno de los metales, ya que podría no ser aleación.

### 5. Definición de variables

*\*Con tipos y unidades*

- CA: Cantidad de cobre para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- EA: Cantidad de estaño para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- MA: Cantidad de Manganeso para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- ZA: Cantidad de zinc para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- CB: Cantidad de cobre para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- EB: Cantidad de estaño para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- MB: Cantidad de Manganeso para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- ZB: Cantidad de zinc para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- SAA: Cantidad de mineral comprado a Sierra Alta para la aleación A. (tonelada/periodo) (continua)

- SCA: Cantidad de mineral comprado a Sierra Chica para la aleación A. (tonelada/periodo) (continua)
- EAA: Cantidad de mineral comprado a El Abra para la aleación A. (tonelada/periodo) (continua)
- SAB: Cantidad de mineral comprado a Sierra Alta para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- SCB: Cantidad de mineral comprado a Sierra Chica para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)
- EAB: Cantidad de mineral comprado a El Abra para la aleación B. (tonelada/periodo) (continua)

## 6. Modelo de programación lineal

*\*Indicando en cada restricción o grupo de restricciones la función que cumplen.*

### 6.1. Funcional

Buscamos maximizar la ganancia obtenida en un periodo de producción. Esto lo podemos obtener con las cantidades vendidas (producidas) de aleaciones restándole los costos de la compra de los minerales.

$$\max\left(\frac{\$A}{\text{tonelada}} \cdot A + \frac{\$B}{\text{tonelada}} \cdot B - 10\frac{\$}{\text{tonelada}}SA - 40\frac{\$}{\text{tonelada}}SC - 50\frac{\$}{\text{tonelada}}EAP\right)$$

Donde:

- $A = CA + EA + MA + ZA$
- $B = CB + EB + MB + ZB$
- $SA = SAA + SAB$
- $SC = SCA + SCB$
- $EAP = EAA + EAB$

### 6.2. Restricciones

Empecemos planteando las restricciones correspondientes a los porcentajes de las especificaciones de cada aleación.

Para A:

- Para el cobre:  $CA \leq (CA + EA + MA + ZA) \cdot 0,8$
- Para el estaño:  $EA \leq (CA + EA + MA + ZA) \cdot 0,3$
- Para el zinc:  $ZA \geq (CA + EA + MA + ZA) \cdot 0,5$
- Agrego una restricción adicional para el cobre en pequeña proporción, ya que solo con las tres de arriba podría no ser aleación.  $CA \geq (CA + EA + MA + ZA) \cdot 0,01$

Para B:

- Para el manganeso:  $MB \geq (CB + EB + MB + ZB) \cdot 0,3$
- Para el estaño:  $EB \geq (CB + EB + MB + ZB) \cdot 0,4$  y  $EB \leq (CB + EB + MB + ZB) \cdot 0,6$
- Para el zinc:  $ZB \leq (CB + EB + MB + ZB) \cdot 0,7$

Tenemos restricciones en la cantidad de toneladas disponibles también.

- $SAA + SAB \leq 1000 \frac{\text{toneladas}}{\text{periodo}}$
- $SCA + SCB \leq 2000 \frac{\text{toneladas}}{\text{periodo}}$
- $EAA + EAB \leq 3000 \frac{\text{toneladas}}{\text{periodo}}$

Por ultimo, nos queda establecer la relación entre los minerales que recibimos de los yacimientos y las aleaciones finales.

Para A:

- Para el cobre:  $CA = 0,2 \cdot SAA + 0,1 \cdot SCA + 0,05 \cdot EAA$
- Para el estaño:  $EA = 0,1 \cdot SAA + 0,2 \cdot SCA + 0,05 \cdot EAA$
- Para el manganeso:  $MA = 0,3 \cdot SAA + 0,3 \cdot SCA + 0,7 \cdot EAA$
- Para el zinc:  $ZA = 0,3 \cdot SAA + 0,3 \cdot SCA + 0,2 \cdot EAA$

Para B:

- Para el cobre:  $CB = 0,2 \cdot SAB + 0,1 \cdot SCB + 0,05 \cdot EAB$
- Para el estaño:  $EB = 0,1 \cdot SAB + 0,2 \cdot SCB + 0,05 \cdot EAB$
- Para el manganeso:  $MB = 0,3 \cdot SAB + 0,3 \cdot SCB + 0,7 \cdot EAB$
- Para el zinc:  $ZB = 0,3 \cdot SAB + 0,3 \cdot SCB + 0,2 \cdot EAB$

*En la Resolución por software se va a ver una modificación de estas restricciones*

## 7. Resolución por software

El modelo propuesto en GLPK:

---

```
/* Declaracion de variables */
var CA >= 0;
var EA >= 0;
var MA >= 0;
var ZA >= 0;
var CB >= 0;
var EB >= 0;
var MB >= 0;
var ZB >= 0;
var SAA >= 0;
var SCA >= 0;
var EAA >= 0;
var SAB >= 0;
var SCB >= 0;
var EAB >= 0;
/* Funcional*/
maximize z: 2000 * (CA + EA + MA + ZA) + 1000 * (CB + EB + MB + ZB)
- 10 * (SAA + SAB) - 40 * (SCA + SCB) - 50 * (EAA + EAB);
/* Restricciones*/
s.t. cobreEnA: CA <= (CA + EA + MA + ZA) * 0.8;
s.t. cobreEnA2: CA >= (CA + EA + MA + ZA) * 0.01;
s.t. estanioEnA: EA <= (CA + EA + MA + ZA) * 0.3;
s.t. zincEnA: ZA >= (CA + EA + MA + ZA) * 0.5;

s.t. manganesoEnB: MB >= (CB + EB + MB + ZB) * 0.3;
s.t. estanioInfB: EB >= (CB + EB + MB + ZB) * 0.4;
s.t. estanioSupB: EB <= (CB + EB + MB + ZB) * 0.6;
s.t. zincB: ZB <= (CB+EB+MB+ZB) * 0.7;

s.t. dispoSA: (SAA + SAB) <= 1000;
s.t. dispoSC: (SCA + SCB) <= 2000;
s.t. dispoEA: (EAA + EAB) <= 3000;

s.t. relacionCobreA: CA = (0.2 * SAA + 0.1 * SCA + 0.05 * EAA );
s.t. relacionEstanioA: EA = (0.1 * SAA + 0.2 * SCA + 0.05 * EAA );
s.t. relacionManganesoA: MA = (0.3 * SAA + 0.3 * SCA + 0.7 * EAA );
s.t. relacionZincA: ZA = (0.3 * SAA + 0.3 * SCA + 0.2 * EAA );

s.t. relacionCobreB: CB = (0.2 * SAB + 0.1 * SCB + 0.05 * EAB );
s.t. relacionEstanioB: EB = (0.1 * SAB + 0.2 * SCB + 0.05 * EAB );
s.t. relacionManganesoB: MB = (0.3 * SAB + 0.3 * SCB + 0.7 * EAB );
s.t. relacionZincB: ZB = (0.3 * SAB + 0.3 * SCB + 0.2 * EAB );
end;
```

---



Los resultados:

Corriendo el modelo de esta forma, los resultados otorgan la solución trivial. Probé cambiando el valor de \$A y \$B pero sigue dando cero con esta versión del modelo.

---

Problem: prueba22  
 Rows: 20  
 Columns: 14  
 Non-zeros: 84  
 Status: OPTIMAL  
 Objective: z = 0 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
<hr/>						
1	z	B	0			
2	cobreEnA	B	0		-0	
3	cobreEnA2	B	0	-0		
4	estanioEnA	B	0		-0	
5	zincEnA	NL	0	-0		-11933.3
6	manganesoEnB	NL	0	-0		-2785.05
7	estanioInfB	NL	0	-0		-5897.2
8	estanioSupB	B	0		-0	
9	zincB	B	0		-0	
10	dispoSA	B	0		1000	
11	dispoSC	B	0		2000	
12	dispoEA	B	0		3000	
13	relacionCobreA					
		NS	0	-0	=	-3966.67
14	relacionEstanioA					
		NS	0	-0	=	-3966.67
15	relacionManganesoA					
		NS	0	-0	=	-3966.67
16	relacionZincA					
		NS	0	-0	=	7966.67
17	relacionCobreB					
		NS	0	-0	=	-2194.39
18	relacionEstanioB					
		NS	0	-0	=	3702.8
19	relacionManganesoB					
		NS	0	-0	=	590.654
20	relacionZincB					
		NS	0	-0	=	-2194.39

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
<hr/>						
1	CA	B	0	0		
2	EA	B	0	0		
3	MA	B	0	0		
4	ZA	B	0	0		
5	CB	B	0	0		
6	EB	B	0	0		
7	MB	B	0	0		
8	ZB	B	0	0		
9	SAA	B	0	0		

10	SCA	NL	0	0	-30
11	EAA	NL	0	0	-1630
12	SAB	NL	0	0	-559.72
13	SCB	B	0	0	
14	EAB	B	0	0	

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

KKT.PE: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0  
max.rel.err = 0.00e+00 on row 0  
High quality

KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0  
max.rel.err = 0.00e+00 on row 0  
High quality

KKT.DE: max.abs.err = 9.09e-13 on column 2  
max.rel.err = 1.90e-16 on column 9  
High quality

KKT.DB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0  
max.rel.err = 0.00e+00 on row 0  
High quality

End of output

---

Debido a esto, seguí probando para ver si hay alguna mejor solución. Probé relajando las restricciones de cuanto metal se utiliza de lo que se recibe de los yacimientos para cada aleación. De esta forma, una aleación puede no usar todo lo que recibe de los yacimientos.

Específicamente fueron modificadas estas restricciones, pasando de igual a menor o igual:

Para A:

- Para el cobre:  $CA \leq 0,2 \cdot SAA + 0,1 \cdot SCA + 0,05 \cdot EAA$
- Para el estaño:  $EA \leq 0,1 \cdot SAA + 0,2 \cdot SCA + 0,05 \cdot EAA$
- Para el manganeso:  $MA \leq 0,3 \cdot SAA + 0,3 \cdot SCA + 0,7 \cdot EAA$
- Para el zinc:  $ZA \leq 0,3 \cdot SAA + 0,3 \cdot SCA + 0,2 \cdot EAA$

Para B:

- Para el cobre:  $CB \leq 0,2 \cdot SAB + 0,1 \cdot SCB + 0,05 \cdot EAB$
- Para el estaño:  $EB \leq 0,1 \cdot SAB + 0,2 \cdot SCB + 0,05 \cdot EAB$
- Para el manganeso:  $MB \leq 0,3 \cdot SAB + 0,3 \cdot SCB + 0,7 \cdot EAB$
- Para el zinc:  $ZB \leq 0,3 \cdot SAB + 0,3 \cdot SCB + 0,2 \cdot EAB$

Quedando el modelo en el software:

---

```

/* Declaracion de variables */
var CA >= 0;
var EA >= 0;
var MA >= 0;
var ZA >= 0;
var CB >= 0;
var EB >= 0;
var MB >= 0;
var ZB >= 0;
var SAA >= 0;
var SCA >= 0;
var EAA >= 0;
var SAB >= 0;
var SCB >= 0;
var EAB >= 0;
/* Funcional*/
maximize z: 2000 * (CA + EA + MA + ZA) + 1000 * (CB + EB + MB + ZB) - 10 * (SAA + SAB) - 40 * (SCA + SCB) - 50 * (EAA + EAB);
/* Restricciones*/
s.t. cobreEnA: CA <= 0.8 * (CA + EA + MA + ZA);
s.t. cobreEnA2: CA >= 0.01 * (CA + EA + MA + ZA);
s.t. estanioEnA: EA <= 0.3 * (CA + EA + MA + ZA);
s.t. zincEnA: ZA >= 0.5 * (CA + EA + MA + ZA);

s.t. manganesoEnB: MB >= 0.3 * (CB + EB + MB + ZB) ;
s.t. estanioInfB: EB >= 0.4 * (CB + EB + MB + ZB);
s.t. estanioSupB: EB <= 0.6 * (CB + EB + MB + ZB);
s.t. zincB: ZB <= 0.7 * (CB + EB + MB + ZB);

s.t. dispoSA: (SAA + SAB) <= 1000;
s.t. dispoSC: (SCA + SCB) <= 2000;
s.t. dispoEA: (EAA + EAB) <= 3000;

s.t. relacionCobreA: CA <= (0.2 * SAA + 0.1 * SCA + 0.05 * EAA );
s.t. relacionEstanioA: EA <= (0.1 * SAA + 0.2 * SCA + 0.05 * EAA );
s.t. relacionManganesoA: MA <= (0.3 * SAA + 0.3 * SCA + 0.7 * EAA );
s.t. relacionZincA: ZA <= (0.3 * SAA + 0.3 * SCA + 0.2 * EAA );

s.t. relacionCobreB: CB <= (0.2 * SAB + 0.1 * SCB + 0.05 * EAB );
s.t. relacionEstanioB: EB <= (0.1 * SAB + 0.2 * SCB + 0.05 * EAB );
s.t. relacionManganesoB: MB <= (0.3 * SAB + 0.3 * SCB + 0.7 * EAB );
s.t. relacionZincB: ZB <= (0.3 * SAB + 0.3 * SCB + 0.2 * EAB );
end;

```

---

Y los resultados:

---

Problem: prueba22  
 Rows: 20  
 Columns: 14  
 Non-zeros: 84  
 Status: OPTIMAL  
 Objective: z = 5760000 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
<hr/>						
1	z	B	5.76e+06			
2	cobreEnA	B	-2370		-0	
3	cobreEnA2	NL	0	-0		< eps
4	estanioEnA	B	-250		-0	
5	zincEnA	NL	0	-0		-4000
6	manganesoEnB	B	0	-0		
7	estanioInfB	NL	0	-0		-2500
8	estanioSupB	B	0		-0	
9	zincB	B	0		-0	
10	dispoSA	NU	1000		1000	1190
11	dispoSC	NU	2000		2000	1160
12	dispoEA	NU	3000		3000	750
13	relacionCobreA					
		B	-520		-0	
14	relacionEstanioA					
		NU	0		-0	< eps
15	relacionManganesoA					
		B	-2180		-0	
16	relacionZincA					
		NU	0		-0	4000
17	relacionCobreB					
		B	0		-0	
18	relacionEstanioB					
		NU	0		-0	2500
19	relacionManganesoB					
		B	0		-0	
20	relacionZincB					
		B	0		-0	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
<hr/>						
1	CA	B	30	0		
2	EA	B	650	0		
3	MA	B	820	0		
4	ZA	B	1500	0		
5	CB	NL	0	0		< eps
6	EB	B	0	0		
7	MB	NL	0	0		< eps
8	ZB	B	0	0		
9	SAA	B	1000	0		
10	SCA	B	2000	0		
11	EAA	B	3000	0		

---

12	SAB	NL	0	0	-950
13	SCB	NL	0	0	-700
14	EAB	NL	0	0	-675

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

KKT.PE: max.abs.err = 9.09e-13 on row 11  
max.rel.err = 2.27e-16 on row 11  
High quality

KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0  
max.rel.err = 0.00e+00 on row 0  
High quality

KKT.DE: max.abs.err = 4.55e-13 on column 6  
max.rel.err = 9.47e-17 on column 9  
High quality

KKT.DB: max.abs.err = 1.14e-13 on column 5  
max.rel.err = 1.14e-13 on column 5  
High quality

End of output

---

## 8. Informe de la solución óptima

Viendo los resultados obtenidos, se recomienda seguir el segundo modelo propuesto. Siguiendo esto, y tomando que se utilizó como valor de \$A y \$B, \$2000 y \$1000 respectivamente, se recomienda producir solamente aleación A (algo que se podía esperar con los valores utilizados) con 30 toneladas de cobre, 650 de estaño, 820 de manganeso, y 1500 de zinc. De esta forma se obtiene una ganancia de \$5.760.000 por periodo.

Respecto del origen de los minerales, se utiliza todo lo disponible en los yacimientos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no se está utilizando todo el metal obtenido (por ejemplo del cobre), por lo que esto hay que tenerlo en cuenta para futuros periodos si se quiere aprovechar.