

TP: Análisis Post-Optimal

[71.14] Modelos y Optimización I
Curso 4
2C 2021

Alumno	Padrón	Email
Gomez, Joaquín	103735	joagomez@fi.uba.ar
Grassano, Bruno	103855	bgrassano@fi.uba.ar
Romero, Adrián	103371	adromero@fi.uba.ar

Índice

1. Enunciado	2
2. Resolución	3
2.1. Problema 1	3
2.1.1. Item a	4
2.1.2. Item b	6
2.2. Problema 2	8
2.2.1. Item a	8
2.2.2. Item b	11

1. Enunciado

Seguidamente se plantea una serie de variantes a los problemas originales. Cada una debe resolverse (justificando las respuestas) en forma independiente a partir de la solución óptima del problema.

Problema 1

1. El proveedor de internet de la empresa le sugiere que reduzca la cantidad de conexiones. Le propone que si logra usar 50 conexiones o menos, ahorrará \$1.000.00 mensuales. ¿Conviene aceptar la oferta del proveedor de internet? ¿Y si la oferta fuera por llegar a 65 conexiones y un ahorro de \$340.000?
2. Dado que los desarrolladores suelen compartir archivos entre ellos, la empresa decide contratar un servicio de archivos en la nube que le brinda 35GB. Se estima que los desarrolladores asignados a proyectos nacionales usarán 500MB mientras que los asignados a exterior usarán 1GB. ¿Cómo afecta esto a la solución óptima?

Estos son el planteo inicial del problema y su tabla óptima.

X1: Cantidad de desarrolladores asignados a proyectos nacionales [desarrolladores / día]

X2: Cantidad de desarrolladores asignados a proyectos del exterior [desarrolladores / día]

Se modeló en miles de pesos por día (tenerlo en cuenta al responder las preguntas).

MAX 25 X1 + 75 X2

DES) X1 + X2 ≤ 48

CON) X1 + 2 X2 ≤ 75

ANC) X1 + 3 X2 ≤ 100

RAM) 8 X1 + 10 X2 ≤ 500

DISCO) 2 X1 + X2 ≤ 200

MIN_NAC) X1 ≥ 22

MIN_EXT) X2 ≥ 15

			25	75								
CK	XK	BK	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	
0	X9	11	0	0	1	0	0	0	0	1	1	
0	X4	1	0	0	-2	1	0	0	0	-1	0	
0	X5	0	0	0	-3	0	1	0	0	-2	0	
0	X6	64	0	0	-10	0	0	1	0	-2	0	
0	X7	130	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	
25	X1	22	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	
75	X2	26	0	1	1	0	0	0	0	1	0	
Z = 2.500			0	0	75	0	0	0	0	50	0	

Problema 2

1. Graficar la curva de oferta del producto entregado a Migueletes, la variación del valor marginal de la disponibilidad del maíz tipo 5 y la variación del valor del funcional al variar la disponibilidad del maíz tipo 2 entre 40.000 y 52.000¹. Realizar (sólo está permitido para este punto) sucesivas corridas de software, incluyendo la sección de análisis de sensibilidad. Justificar la cantidad de corridas necesarias para completar el rango solicitado. Justificar los límites elegidos
2. Existe la posibilidad de que Blasco Hnos. compre 20.000 tn menos de grano si Granolliers le ofrece una compensación comercial de USD 19.0000. Otra alternativa sería conseguir 6.000 tn más de maíz del tipo 2 por un valor de USD 34.0000. Comparar ambas alternativas e indicar cuál de las dos sería más conveniente sin realizar nuevas corridas.

¹El docente pidió cambiar el rango de análisis a este valor

2. Resolución

2.1. Problema 1

Análisis

Antes de empezar a resolver, vemos el modelo y determinamos lo que representa cada variable junto con su par en el problema dual.

El modelo llevado a igualdades:

MAX $25 X_1 + 75 X_2$
 DES) $X_1 + X_2 + X_3 = 48$
 CON) $X_1 + 2 X_2 + X_4 = 75$
 ANC) $X_1 + 3 X_2 + X_5 = 100$
 RAM) $8 X_1 + 10 X_2 + X_6 = 500$
 DISCO) $2 X_1 + X_2 + X_7 = 200$
 MIN_NAC) $X_1 - X_8 = 22$
 MIN_EXT) $X_2 - X_9 = 15$

La tabla con equivalencias:

X		Y	
X1	Desarrolladores asignados a proyectos nacionales (Real)	Y8	Costo de oportunidad de desarrolladores nacionales
X2	Desarrolladores asignados a proyectos extranjeros (Real)	Y9	Costo de oportunidad de desarrolladores extranjeros
X3	Desarrolladores no asignados a ningún proyecto (Slack)	Y1	Valor marginal de desarrolladores
X4	Conexiones no asignadas (Slack)	Y2	Valor marginal de conexiones
X5	Ancho de banda no asignado (Slack)	Y3	Valor marginal del ancho de banda
X6	RAM no asignada (Slack)	Y4	Valor marginal de RAM
X7	Disco no asignado (Slack)	Y5	Valor marginal de Disco
X8	Desarrolladores para proyectos nacionales en excedente (Surplus)	Y6	Valor marginal de desarrolladores
X9	Desarrolladores para proyectos del extranjero en excedente (Surplus)	Y7	Valor marginal de desarrolladores

2.1.1. Item a

El proveedor de internet de la empresa le sugiere que reduzca la cantidad de conexiones. Le propone que si logra usar 50 conexiones o menos, ahorrará \$1.000.00 mensuales. ¿Conviene aceptar la oferta del proveedor de internet? ¿Y si la oferta fuera por llegar a 65 conexiones y un ahorro de \$340.000?

Para poder analizar esto, vemos de pasar a la tabla dual y ver en cuanto se ve afectado el funcional. En base a esto, y al beneficio que se nos menciona podemos decidir si nos conviene.

			48	75	100	500	200	-22	-15		
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
48	Y1	75	1	2	3	10	1	0	-1	0	-1
-22	Y6	50	0	1	2	2	-1	1	-1	1	-1
Z = 2500			0	-1	0	-64	-130	0	-11	-22	-26

Para poder analizar, agregamos el parámetro a y vemos el rango de variación. (Afecta solamente a la columna A2)

$$\begin{aligned}
 Z_2 - c_2 &= 2 \cdot 48 - 22 - a \leq 0 \\
 74 - a &\leq 0 \\
 74 &\leq a
 \end{aligned}$$

Podemos reducir en una unidad y se va a seguir teniendo la misma solución. Reemplazamos por 74 y seguimos analizando.

			48	a	100	500	200	-22	-15		
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
48	Y1	75	1	2	3	10	1	0	-1	0	-1
-22	Y6	50	0	1	2	2	-1	1	-1	1	-1
Z = 2500			0	74-a	0	-64	-130	0	-11	-22	-26

Calculamos los θ para ver cual sacamos y así ingresar Y2 a la base.

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \frac{75}{2} = 37,5 \\
 \theta_2 &= \frac{50}{1} = 50
 \end{aligned}$$

Sale Y1 e ingresa Y2 (estamos en un punto degenerado debido a los multiples 0)

			48	74	100	500	200	-22	-15		
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
48	Y1	75	1	2	3	10	1	0	-1	0	-1
-22	Y6	50	0	1	2	2	-1	1	-1	1	-1
Z = 2500			0	0	0	-64	-130	0	-11	-22	-26

			48	74	100	500	200	-22	-15		
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
74	Y2	37,5	1/2	1	3/2	5	1/2	0	-1/2	0	-1/2
-22	Y6	12,5	-1/2	0	1/2	-3	-3/2	1	-1/2	1	-1/2
Z = 2500			0	0	0	-64	-130	0	-11	-22	-26

Volvemos a poner a para seguir cambiando el rango.

			48	a	100	500	200	-22	-15		
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
a	Y2	37,5	1/2	1	3/2	5	1/2	0	-1/2	0	-1/2
-22	Y6	12,5	-1/2	0	1/2	-3	-3/2	1	-1/2	1	-1/2
Z = 37,5a - 275			a/2 - 37	0	3a/2 - 111	5a - 434	a/2 - 167	0	-a/2 - 4	-22	-a/2 + 11

Sacamos el rango:

$$\begin{aligned} a/2 - 37 &\leq 0 \\ a &\leq 74 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a/2 - 111 &\leq 0 \\ a &\leq 74 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a - 434 &\leq 0 \\ a &\leq 86,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a/2 - 167 &\leq 0 \\ a &\leq 334 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a/2 - 4 &\leq 0 \\ a &\geq -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a/2 + 11 &\leq 0 \\ a &\geq 22 \end{aligned}$$

$$a \in [22; 74]$$

Vemos con $a = 50$ y $a = 65$. En ambos casos se va a estar en la solución óptima.

$$\begin{aligned} Z &= 37,5 \cdot 50 - 275 = 1600 \\ 1600 + 1000 &= 2600 \\ Z &= 37,5 \cdot 65 - 275 = 2162,5 \\ 2162,5 + 340 &= 2502,5 \end{aligned}$$

Habiendo realizado el análisis, podemos concluir que conviene aceptar ambas ofertas. De esta forma se estaría obteniendo un beneficio de \$2.600.000 en el primer caso sobre \$2.500.000. Respecto del segundo caso, se obtienen \$2.502.500, \$2.500 más que en el caso original.

2.1.2. Item b

Dado que los desarrolladores suelen compartir archivos entre ellos, la empresa decide contratar un servicio de archivos en la nube que le brinda 35GB. Se estima que los desarrolladores asignados a proyectos nacionales usarán 500MB mientras que los asignados a exterior usarán 1GB. ¿Cómo afecta esto a la solución óptima?

En este caso lo que nos están planteando es la introducción de una nueva restricción. Esta sería la siguiente:

$$0,5 \cdot X1 + 1 \cdot X2 \leq 35$$

Vemos si con los valores actuales seguimos en el óptimo. (22 nacionales, 26 del exterior)

$$0,5 \cdot 22 + 1 \cdot 26 = 37 > 35$$

Como nos da que no se cumple lo pedido, no se puede seguir asignando a los desarrolladores como se tenía, por lo que tenemos que analizar con más detalle.

Para poder agregar la restricción nueva, se pasa el problema al dual y actuamos como si quisiéramos agregar un nuevo producto premultiplicando por la matriz de cambio de base.

En el caso de nuestro problema, hallamos la matriz de cambio de base cuyas columnas son los vectores A8 y A9 cambiados de signo (pues en la primera tabla dual estos serían los asociados a los vectores canónicos):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y para saber cual es el valor de la columna A10 que agregaremos debemos multiplicar la matriz anterior por el vector $[0,5, 1]$ obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

La tabla dual óptima que teníamos:

			48	75	100	500	200	-22	-15		
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
48	Y1	75	1	2	3	10	1	0	-1	0	-1
-22	Y6	50	0	1	2	2	-1	1	-1	1	-1
Z = 2500			0	-1	0	-64	-130	0	-11	-22	-26

La tabla con la restricción agregada:

			48	75	100	500	200	-22	-15			35
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
48	Y1	75	1	2	3	10	1	0	-1	0	-1	1
-22	Y6	50	0	1	2	2	-1	1	-1	1	-1	0.5
Z = 2500			0	-1	0	-64	-130	0	-11	-22	-26	2

$$Z_{10} - c_{10} = 48 + (0,5) \cdot (-22) - 35 = 2$$

Como nos dio positivo (Y_{10}) no estamos en el óptimo, algo que ya habíamos visto previamente. Continuamos analizando con los tita para saber cual variable sale de la base.

$$\theta_1 = \frac{75}{1} = 75$$

$$\theta_6 = 50 \cdot 2 = 100$$

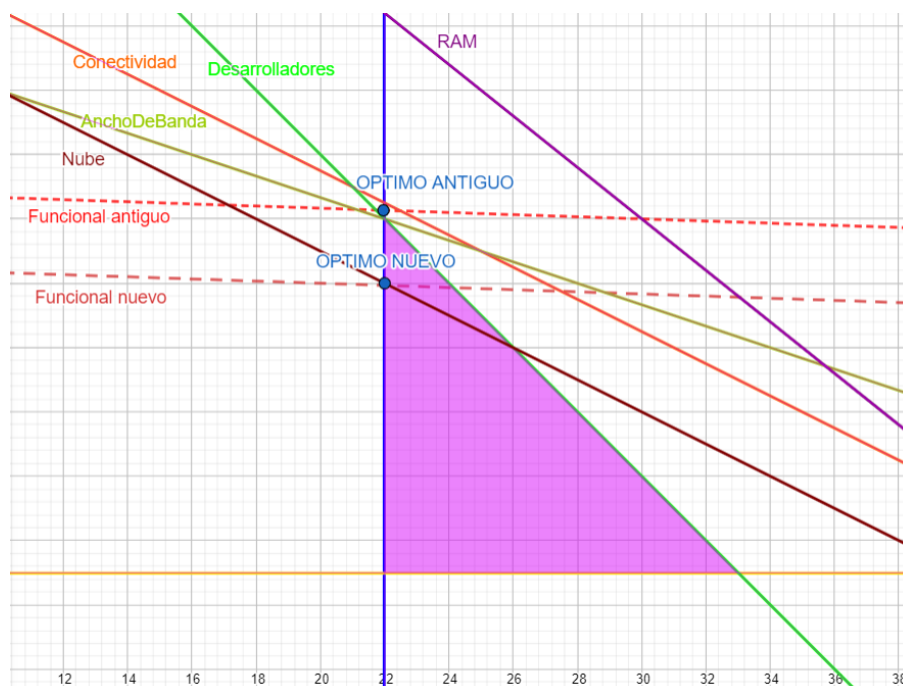
Sale Y1 y entra Y10.

			48	75	100	500	200	-22	-15			35
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
48	Y1	75	1	2	3	10	1	0	-1	0	-1	1
-22	Y6	50	0	1	2	2	-1	1	-1	1	-1	1/2
Z = 2500			0	-1	0	-64	-130	0	-11	-22	-26	2

			48	75	100	500	200	-22	-15			35
C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
35	Y10	75	1	2	3	10	1	0	-1	0	-1	1
-22	Y6	12.5	-1/2	0	1/2	-3	-3/2	1	-1/2	1	-1/2	0
Z = 2350			-2	-5	-6	-69	-132	0	-9	-22	-24	0

Llegamos al óptimo, ya que los $Z_j - c_j$ son todos menores o iguales a 0. Como se esperaba se obtuvo un menor valor del funcional al ser \$2.350.000.

Gráficamente se puede ver como sigue:



2.2. Problema 2

2.2.1. Item a

Graficar la curva de oferta del producto entregado a Migueletes, la variación del valor marginal de la disponibilidad del maíz tipo 5 y la variación del valor del funcional al variar la disponibilidad del maíz tipo 2 entre 40.000 y 52.000. Realizar (sólo está permitido para este punto) sucesivas corridas de software, incluyendo la sección de análisis de sensibilidad. Justificar la cantidad de corridas necesarias para completar el rango solicitado. Justificar los límites elegidos

Para empezar el análisis, vimos los valores del análisis de sensibilidad de la solución actual. En este caso se vio el valor de los rangos de la disponibilidad del trigo de tipo 2.

No.	Row name	St	Activity	Slack Marginal	Lower bound Upper bound	Activity range
24	maximaCantidadPorTipo[T2]					
		NU	45000.00000	.	-Inf	45000.00000
				56.00000	45000.00000	50000.00000

En este caso, el rango es de 45.000 a 50.000 con un marginal de 56, por lo que al movernos a 50.000 se va a estar en la solución óptima con una ganancia adicional de \$280.000.

En el caso correspondiente a los valores menores a 45.000, lo que hicimos es probar con 44.999 para obtener valores en el rango anterior. En este caso obtuvimos que no se tenía solución, por lo que no es necesario continuar el análisis para ese lado.

Respecto de lo que sucede avanzando el rango de 50.000, probamos el análisis esta vez con 52.000.

No. Row	name	St	Activity	Slack Marginal	Lower bound Upper bound	Activity range
24	maximaCantidadPorTipo[T2]					
		NU	52000.00000	.	-Inf	50000.00000
				46.00000	52000.00000	54000.00000

Lo que se esperaba es que el valor del marginal baje, esto es exactamente lo que paso, paso de \$56 a \$46, por lo que a partir de este punto cada unidad extra de grano de tipo 2 genera \$46. El rango del mismo cubre de 50.000 a 54.000, por lo que no es necesario realizar otra corrida.

Con estos 2000 adicionales de este tipo se genera una ganancia adicional de \$92.000.

A continuación se presentan los gráficos realizados:

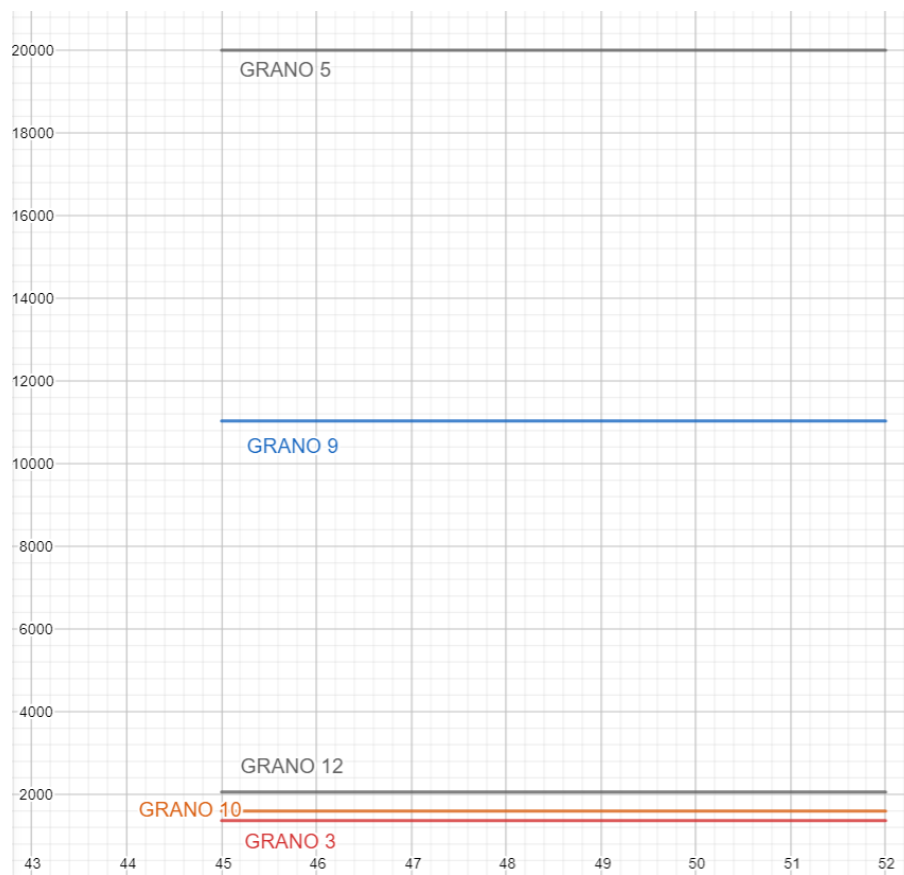


Figura 1: Curva de oferta del producto entregado a Migueletes

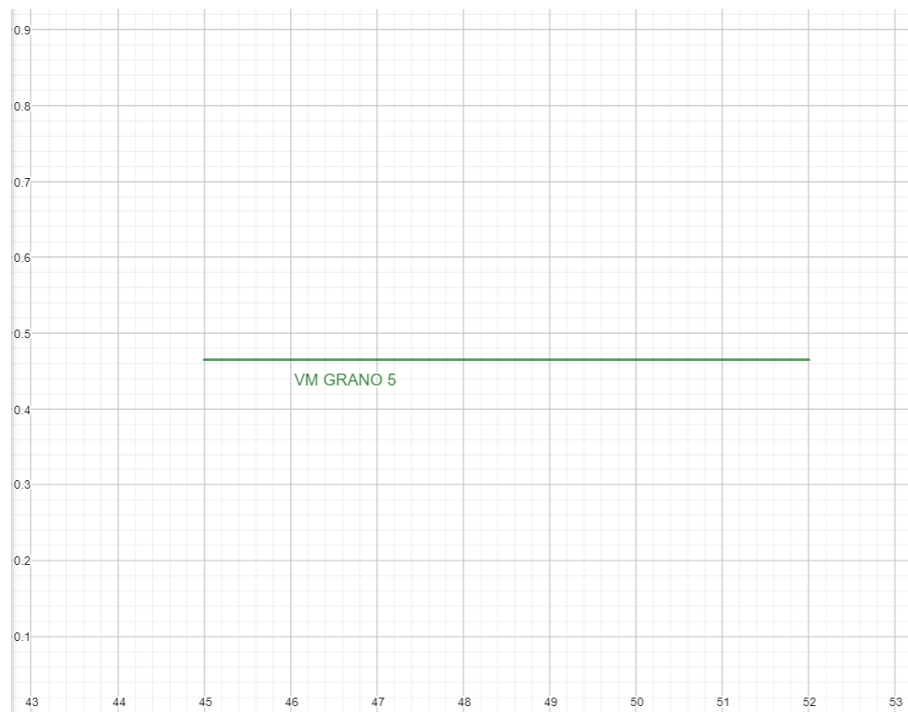


Figura 2: Variación del valor marginal de la disponibilidad del maíz tipo 5

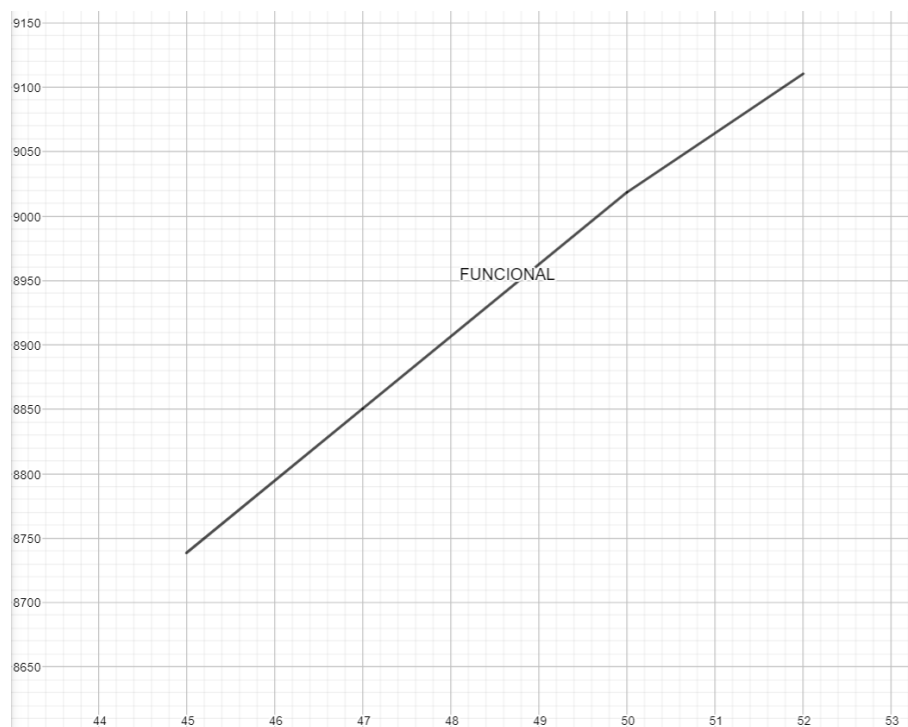


Figura 3: Variación del funcional

2.2.2. Item b

Existe la posibilidad de que Blasco Hnos. compre 20.000 tn menos de grano si Granolliers le ofrece una compensación comercial de USD 19.000. Otra alternativa sería conseguir 6.000 tn más de maíz del tipo 2 por un valor de USD 34.000. Comparar ambas alternativas e indicar cuál de las dos sería más conveniente sin realizar nuevas corridas.

Vemos la primera alternativa, lo que sucede es que se modifica la restricción de la demanda mínima de granos para Blasco Hnos.

Para analizar esto, vemos la siguiente tabla:

No.	Row name	St	Activity	Slack Marginal	Activity range
16	minimaCantidadPorEmpresa[B]				
		NL	50000.00000	.	50000.00000
				-10.00000	+Inf

Como se puede ver, la demanda mínima se puede disminuir de 50.000 a 45.000 y por lo tanto sabemos que en ese rango, el valor marginal se mantendrá constante e igual a 10 (los 10 dolares de diferencia con el precio de Talbot, que es a donde puede ir el grano).

Al permitir una demanda mínima de 45.000 obtenemos una ganancia de $10 * 5000 = 50,000$. Estos son 5.000 tn de granos que pasarían a venderse en Talbot, llegando a su limite máximo (45.000 tn), con Migueletes también en su tope, no hay más rango para que mejore, por lo que relajar más esta restricción no altera la solución.

Por lo tanto, en esta primera alternativa se tienen ganancias adicionales de:

$$\$50,000 - \$19,000 = \$31,000$$

Viendo la otra alternativa, nos proponen que podemos conseguir 6.000 tn mas de maíz de tipo 2 por un valor de USD 34.000. Para analizar esto vemos el valor del marginal obtenido y su rango.

No.	Row name	St	Activity	Slack Marginal	Activity range
24	maximaCantidadPorTipo[T2]				
		NU	45000.00000	.	-Inf
				56.00000	45000.00000

Podemos ver que tenemos un valor del marginal de 56 con un rango hasta 50.000 tn, por lo que si aumentamos hasta esa cantidad estaríamos teniendo ingresos de 280.000 ($56 * 5000$). Respecto de que pasaría luego con los 1.000 restantes, si quisiéramos ver el valor exacto hay que analizar la siguiente tabla, pero para este caso ya tenemos una cota mínima con 280.000 como para determinar si convendría.

Con esta alternativa se estaría hablando de una ganancia de por lo menos:

$$\$280,000 - \$34,000 = \$246,000$$

Viendo los valores obtenidos, conviene la segunda alternativa ya que proporciona mayores ingresos que la primera. De esta forma se obtiene un ingreso adicional de \$246.000.