ADS – 1º

Matemática Discreta

sábados – 09:50 ~ 13:20

Aula 04 – Regras de Inferência

Profª Carlota

Argumento válido

Argumentação consiste na utilização de uma sequência finita de proposições (premissas ou hipóteses) $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ para obter uma conclusão (ou tese) Q. As proposições utilizadas nas argumentações podem ser simples ou compostas.

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \mapsto Q$$

Para que um argumento seja <u>válido</u>, a condicional

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q$$

deve ser uma tautologia. Isto é, o argumento é válido se a verdade das premissas garantirem a verdade da tese.

Exemplo 1: $p \to q, p \mapsto q$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \to q$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Da última coluna, temos que o argumento é válido (tautologia).

Esta é uma das Regras de Inferência: *Modus Ponens*.

Exemplo 2:

Vamos verificar a validade do seguinte argumento:

$$(p \to q) \mapsto p \to (p \land q)$$

p	q	$p \to q$	$p \land q$	$p \to (p \land q)$	$(p \to q) \to (p \to (p \land q))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Obs: Esta é a *Regra da Absorção*.

Um argumento é <u>inválido</u> (ou falho, ilegítimo, mal construído, falacioso ou sofisma) quando a verdade das premissas não é suficiente para garantir a verdade da conclusão.

Exemplo de argumento inválido:

$$(p \rightarrow q) \wedge q \not\mapsto p$$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Da 3ª linha, concluímos que este argumento é <u>inválido</u>.

EXERCÍCIO 1

Considere a argumentação a seguir:

- Se Ricardo está doente então ele vai a um médico;
- Se Ricardo vai a um médico então ele toma remédio;
- Logo, se Ricardo está doente, ele toma remédio.

Verifique se a argumentação realizada é válida ou inválida por meio da tabela verdade.

EXERCÍCIO 2

Considere o seguinte argumento:

$$p \rightarrow q, \sim p \mapsto \sim q.$$

Através da análise da tabela-verdade, verifique e diga se o argumento é válido ou inválido.

EXERCÍCIO 3 (MP/ENAP-2015)

Considere que o argumento enunciado por Calvin na tirinha seja representado na forma: “P: Se for ignorante, serei feliz; Q: Se assistir à aula, não serei ignorante; R: Serei feliz; S: Logo, não assistirei à aula.” em que P, Q e R sejam as premissas e S seja a conclusão. É correto afirmar que essa representação constitui um argumento válido?

$$i \to f, a \to {\sim}i, f \mapsto^{?} {\sim}a.$$

Exercício 4 Na linha de produção da empresa onde você trabalha, existe um programa de manutenção preventiva nos equipamentos e máquinas da empresa. Você é responsável pela autorização de troca e compras das máquinas. Chegou até você uma situação na qual deveria tomar uma decisão importante. As informações de que possui são:

- Se a máquina passou por uma manutenção preventiva, então ela funciona corretamente.
- Uma máquina não passou pela manutenção preventiva.

Um funcionário que trabalha com as máquinas afirmou, com base nessas duas informações, que "a máquina não funciona corretamente" e, por isso, deveria ser trocada.

Você deve confiar no julgamento do funcionário? Ou deve fazer uma análise mais detalhada para descobrir o real motivo da máquina não estar funcionando corretamente?

Regras de Inferência $P_1, P_2, \ldots \mapsto Q$			
De ...	**Podemos deduzir ...**	**Nome**	**Abreviação**
p	$p \vee q$	Adição	AD
$p \wedge q$	p, q	Simplificação	SIMP
p, q	$p \wedge q$	Conjunção	CONJ
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow p \wedge q$	Absorção	ABS
$p \vee q, \sim p$	q	Silogismo disjuntivo	SD
$p \rightarrow q, p$	q	Modus Ponens	MP
$p \rightarrow q, \sim q$	$\sim p$	Modus Tollens	MT
$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	Contraposição	CONT
$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	Silogismo hipotético	SH

EXERCÍCIO 5 Leia as seguintes premissas:
"Se César andar de bicicleta então Marta ficará em casa. César foi andar de bicicleta."
Aplicando a regra de inferência *Modus Ponens*, o que podemos concluir destas premissas?

$$\text{MP: } p \rightarrow q, p \mapsto q$$

EXERCÍCIO 6 Leia as seguintes premissas:
"Se Henrique e seu irmão forem jogar videogame, então Nathália vai sair com a sua tia. Bem, Henrique e seu irmão jogaram videogame."
O que podemos concluir dessas premissas?

EXERCÍCIO 7

Considere a argumentação a seguir:

- Se Maria for para casa, então o seu filho vai para a escola;
- Maria foi para a sua casa.

Qual é a conclusão que podemos determinar aplicando a regra de inferência *Modus Ponens*?

EXERCÍCIO 8

Observe as seguintes informações:

"Se Marlene investir na bolsa, então no final do ano ela comprará um carro.

Mas no final do ano ela não comprou um carro."

O que podemos concluir dessas informações? Qual foi a regra utilizada para esta conclusão?

EXERCÍCIO 9

Você recebeu um documento do departamento de compras para autorizar ou não a compra de uma determinada matéria-prima de alto valor agregado. Por causa do valor da mercadoria não poderia haver o risco de este produto ficar parado no estoque.

De acordo com o gerente de produção, “se há a necessidade dessa determinada matéria-prima, então há algum pedido de peças para motores de caminhão".

Ao verificar junto à produção, você constatou que não houve pedido para a produção de peças para os motores de caminhões.

Você deve autorizar a compra da matéria-prima?

Regras de Equivalência $P \Leftrightarrow Q$			
P	Equivale a Q	Nome	Abrev.
p	$\sim(\sim p)$	Dupla negação	DN
$p \vee q$ $p \wedge q$	$q \vee p$ $q \wedge p$	Comutatividade	COM
$(p \vee q) \vee r$ $(p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r)$ $p \wedge (q \wedge r)$	Associatividade	ASS
$\sim(p \vee q)$ $\sim(p \wedge q)$	$\sim p \wedge \sim q$ $\sim p \vee \sim q$	Leis de Morgan	DM
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow p \wedge q$	Absorção	ABS
$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	Condicional	COND
$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Bicondicional	BI

Técnicas Dedutivas – Prova Direta

Exemplo 1: Vamos verificar a validade do argumento abaixo aplicando as regras de inferência e equivalência:

Carlos será reprovado se tiver frequência menor que 75% ou tiver média < 6. O professor verifica que Carlos teve frequência maior ou igual a 75% e média < 6. O professor afirma que Carlos está reprovado.

Sejam *f*: frequência menor que 75% (muitas faltas)
b: média menor que 6 (nota baixa)
r: reprovado

Premissa P_1: $f \lor b \rightarrow r$
Premissa P_2: $\sim f \land b$
Conclusão Q: r

Verificação pelas regras de equivalência e de inferência.

P_1: $f \vee b \rightarrow r$ P_2: $\sim f \wedge b$ C: r

1. $f \vee b \rightarrow r$ P_1
2. $\sim f \wedge b$ P_2
3. b 2, SIMP $p \wedge q \mapsto p, q$
4. $b \vee f$ 3, AD $p \mapsto p \vee q$
5. $f \vee b$ 4, COM $p \vee q \mapsto q \vee p$
6. r 1, 5, MP $p \rightarrow q, p \mapsto q$

Exemplo 2 $p \wedge q \rightarrow r \wedge s, \sim\sim p, q \mapsto s$

1.	$p \wedge q \rightarrow r \wedge s$	P_1
2.	$\sim\sim p$	P_2
3.	q	P_3
4.	p	$2, DN$
5.	$p \wedge q$	$3, 4, CONJ$
6.	$r \wedge s$	$1, 5, MP$
7.	s	$6, SIMP$

Exemplo 3 $s \wedge q, t \rightarrow \sim q, \sim t \rightarrow r \mapsto r \vee \sim s$

1.	$s \wedge q$	P_1
2.	$t \rightarrow \sim q$	P_2
3.	$\sim t \rightarrow r$	P_3
4.	q	$1, SIMP$
5.	$\sim\sim q$	$4, DN$
6.	$\sim t$	$2, 5, MT$
7.	r	$3, 6, MP$
8.	$r \vee \sim s$	$7, AD$

Exemplo 4 $\sim a \rightarrow c, c \rightarrow \sim m, m \vee r, \sim r \mapsto a$

1.	$\sim a \rightarrow c$	P_1
2.	$c \rightarrow \sim m$	P_2
3.	$m \vee r$	P_3
4.	$\sim r$	P_4
5.	m	$3, 4, SD$
6.	$\sim\sim m$	$5, DN$
7.	$\sim c$	$2, 6, MT$
8.	$\sim\sim a$	$1, 7, MT$
9.	a	$8, DN$

EXERCÍCIO 10 Nas sequências dedutivas a seguir, completar osespaços colocando a fórmula apropriada:

1. $p \vee q$ — P_1
2. $p \vee q \rightarrow r$ — P_2
3. $r \rightarrow \sim(s \vee t)$ — P_3
4. ________________ 1, 2, MP
5. ________________ 3, 4, MP

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ — P_1
2. $r \rightarrow \sim t$ — P_2
3. $p \wedge q$ — P_3
4. ________________ 1, 3, MP
5. ________________ 2, 4, MP

EXERCÍCIO 11 Justifique cada passo da demonstração.

1.	$(a \vee b) \rightarrow c \wedge (e \wedge d)$	P_1
2.	b	P_2
3.	$b \vee a$	
4.	$a \vee b$	
5.	$c \wedge (e \wedge d)$	
6.	$(c \wedge e) \wedge d$	
7.	$c \wedge e$	

EXERCÍCIO 12 Demonstre.

a) $\sim a \to b,\ b \to c,\ \sim c \mapsto a$

b) $b \to \sim c,\ \sim(d \wedge \sim b),\ c \mapsto \sim d$

c) $p \to (q \wedge r),\ p \mapsto p \wedge r$

d) $a \wedge b,\ (a \vee c) \to d \mapsto a \wedge d$

e) $w \to x,\ (w \to y) \to (z \vee x),\ (w \wedge x) \to y \mapsto x$

Prova Indireta - Redução ao absurdo

Para demonstrar a validade dos argumentos através da redução ao absurdo, devemos considerar como premissa verdadeira a negação do que queremos demonstrar ($\sim Q$) e chegarmos num absurdo (ou contradição) da forma $Q \wedge \sim Q$, utilizando as regras de inferência e equivalência.

Exemplo 1: Vamos verificar a validade do argumento do professor por absurdo:

Carlos será reprovado se tiver frequência menor que 75% (f) ou tiver média < 6 (b). O professor verifica que Carlos teve frequência maior ou igual a 75% (~f) e média < 6 (b). O professor afirma que Carlos está reprovado (r).

1.	$f \vee b \rightarrow r$	P_1
2.	$\sim f \wedge b$	P_2
3.	$\sim r$	*Adicional*
4.	$\sim (f \vee b)$	$1, 3, MT$
5.	$\sim f \wedge \sim b$	$4, DM$
6.	$\sim b$	$5, SIMP$
7.	b	$2, SIMP$
8.	$\sim b \wedge b$	$6, 7, CONJ\ (Absurdo)$

Exemplo 2 Use lógica proposicional para provar que o seguinte argumento do advogado de defesa é válido.

O advogado de defesa apresentou o seguinte argumento:

"Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro, segue que Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente."

Exemplo 2 (continuação)

"Se meu cliente fosse culpado (c), a faca estaria na gaveta (g).

Ou a faca não estava na gaveta (~g) ou Jason Pritchard viu a faca (v).

Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro (~f) , segue que Jason Pritchard não viu a faca (~v).

Além disso, se a faca estava lá (f) no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta (g) e o martelo estava no celeiro (m). Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro (~m).

Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente (~c)."

$$c \rightarrow g,\ \sim g \vee v,\ \sim f \rightarrow \sim v,\ f \rightarrow g \wedge m,\ \sim m \mapsto \sim c$$

Exemplo 2 (continuação)

1.	$c \to g$	P_1
2.	$\sim g \vee v$	P_2
3.	$\sim f \to \sim v$	P_3
4.	$f \to g \wedge m$	P_4
5.	$\sim m$	P_5
6	c	$Adic.$

7.	g	$1, 6, SIMP$
8.	$\sim m \vee \sim g$	$5, AD$
9.	$\sim (m \wedge g)$	$8, DM$
10.	$\sim (g \wedge m)$	$9, COM$
11.	$\sim f$	$4, 10, MT$
12.	$\sim v$	$11, 3, MT$
13.	$\sim g$	$2, 12 SD$
14.	$g \wedge \sim g$	$7, 13, CONJ$

EXERCÍCIO (Vestibular FATEC – 2018-2 – modificado)

Um grupo de quatro amigos — Ana, Beto, Caio e Denise — deseja participar do vestibular da FATEC optando por cursos distintos.

Considere verdadeiras as proposições:

I. Caso Ana se inscreva em Soldagem, então Beto se inscreverá para Eventos.
II. Se Denise fizer a inscrição para Polímeros, então Caio se inscreverá em Cosméticos.
III. Ana fará sua inscrição em Soldagem ou Denise em Polímeros.

Demonstre por Redução ao Absurdo que a afirmação: “Caio se inscreverá em Cosméticos ou Beto se inscreverá em Eventos.” é verdadeira.

EXERCÍCIO 13

Em um dia de muito movimento na linha de produção da empresa onde você trabalha, uma urgência surgiu e por isso o gerente de produção recorreu a sua ajuda para solucionar um problema. Produtos estão saindo com problema das máquinas e o gerente não sabe dizer o motivo, pois são vários os motivos envolvidos nesta ocorrência. As informações que o gerente possui são:

- *Se a matéria-prima é de qualidade (p), então o produto final tem qualidade (q).*
- *O funcionário cometeu um erro (r), ou o produto final não tem qualidade.*
- *O funcionário não cometeu erro.*

O gerente da produção afirma que, baseado nestes fatos, a causa dos problemas é que a matéria-prima utilizada na produção não é boa.

Você pode confiar no julgamento do gerente baseando-se nos fatos apresentados?

Resolva por Redução ao Absurdo.

Exercício 14 Considere a seguinte argumentação:

$$p \to (q \vee r), \sim r, p \mapsto q$$

Utilize a redução ao absurdo para demonstrar esta argumentação.

Exercício 15

Nos jogos escolares, ocorridos em uma cidade, o técnico responsável de uma escola participante misturou os crachás de alguns atletas com a ficha de inscrição das modalidades em que eles vão participar. Para que não corra o risco de inscrever o atleta na categoria que ele não pratica, precisou utilizar de informações da qual se lembrava com o intuito de associar corretamente cada atleta ao seu esporte. Assim, ele teve as seguintes lembranças:

"Se Natália joga vôlei, então Marcos joga futebol. É fato que Natália joga vôlei e Felipe pratica tênis." E a partir disso, concluiu que: "Marcos realmente joga futebol".

Como podemos ter certeza de que o técnico realmente acertou em sua conclusão?

Utilize a técnica de dedução redução por absurdo para demonstrar a validade desta argumentação.

Quantificadores

- **Quantificador universal**, simbolizado por ∀

$(\forall x \in A)\ \ p(x)$ significa: para todo x, $p(x)$

- **Quantificador existencial**, simbolizado por ∃

$(\exists x \in A)\ \ p(x)$ significa: existe x tal que $p(x)$

- ∃! é símbolo de "existe um único".

Valor lógico de quantificadores

Exemplos:

$(\forall n \in \mathbb{N})(n < 1)$ é falsa.

$(\exists n \in \mathbb{N})(n < 1)$ é verdadeira.

$(\exists!\, n \in \mathbb{N})(n < 1)$ é verdadeira.

$(\forall n \in \mathbb{N})(n! < 10)$ é falsa.

$(\exists n \in \mathbb{N})(n! < 10)$ é verdadeira.

Para o conjunto universo $\mathbb{N}$:

$(\forall n)(\exists m)(n < m)$ é verdadeira.

$(\exists m)(\forall n)\ (n < m)$ é falsa.

Negação de proposições quantificadas

$$\forall \longrightarrow \ \exists$$

$$\exists \longrightarrow \forall$$

$$p \longrightarrow \ {\sim}p$$

Exemplos:

$$\sim((\forall n \in \mathbb{N})(n < 1)) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n \geq 1) \Leftrightarrow \mathrm{V}$$

$$\sim((\exists n \in \mathbb{N})(n < 1)) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 1) \Leftrightarrow F$$

$$\sim((\forall n \in \mathbb{N})(n! < 10)) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n! \geq 10) \Leftrightarrow V$$

$$\sim((\exists n \in \mathbb{N})(n! < 10)) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(n! \geq 10) \Leftrightarrow F$$

Referências

BISPO, C. A. F. et al. Introdução à Lógica Matemática. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DAGHLIAN, J. Lógica e álgebra de Boole. São Paulo: Atlas, 1995.

MENEZES, P B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Coleção Livros Didáticos, V.16. São Paulo: Bookman, 2008.

GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

ZANIN, V. L. Raciocínio lógico matemático. Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.