ADS – 1º

Matemática Discreta

Aula 06 – Relações e funções

Profª Carlota

Relação Binária de A em B

Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma relação binária R de A em B é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

$$R \subset A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Notação: $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Exemplo: Sendo $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,6,8\}$, podemos definir $R = \{(x, y) \epsilon A \times B \; | y = 2x\}$. Neste caso,

$$R = \{(2,4), (3,6)\}.$$

Diagrama de Flechas de *R*

$R = \{(2,4),(3,6)\}$

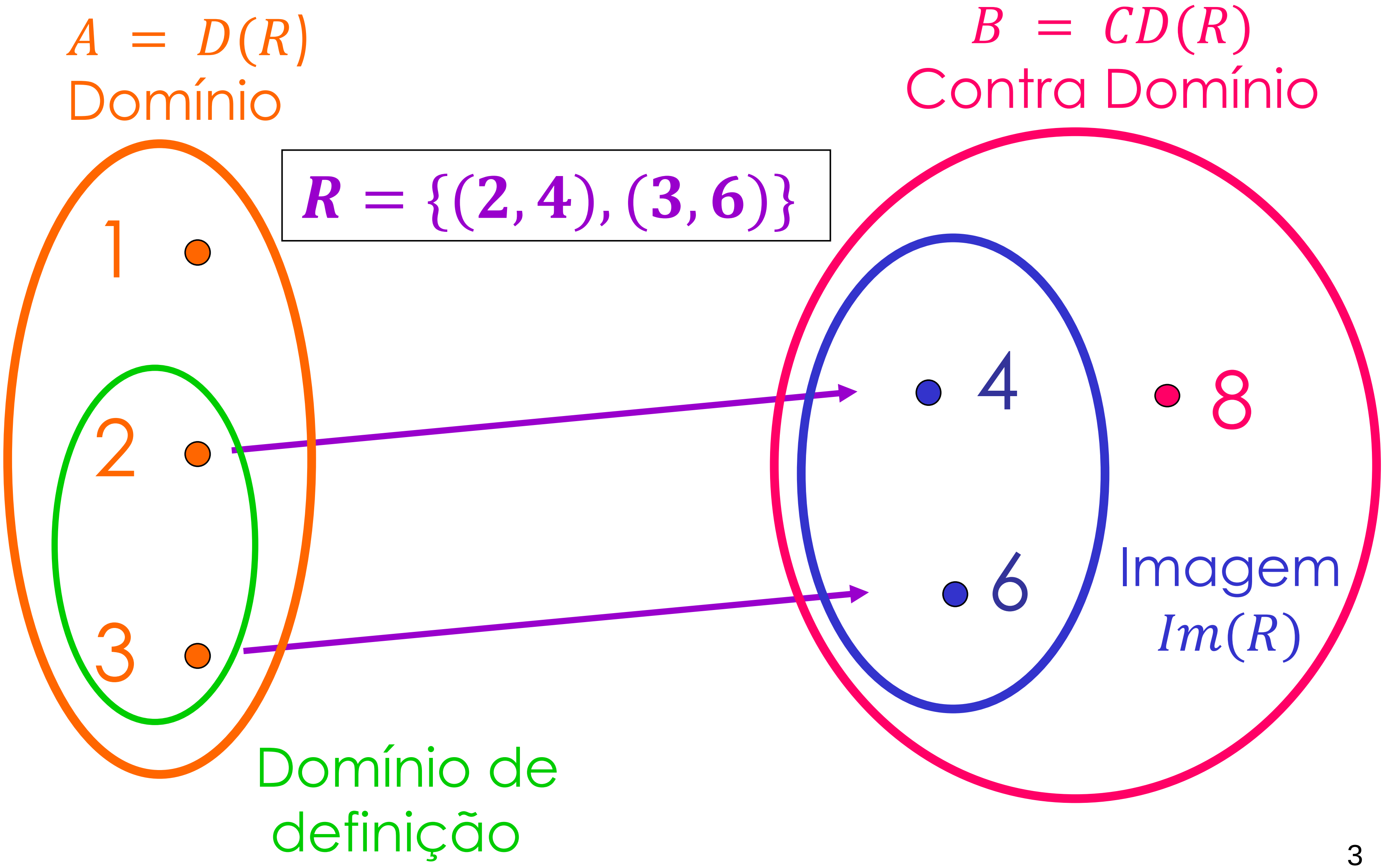
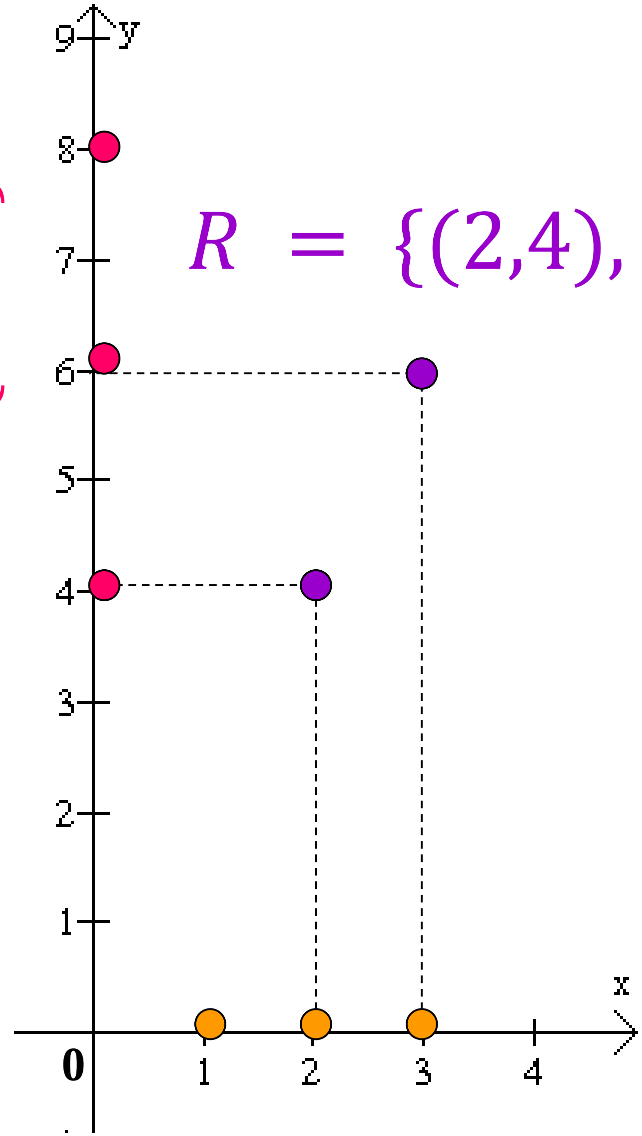


Gráfico Cartesiano de *R*

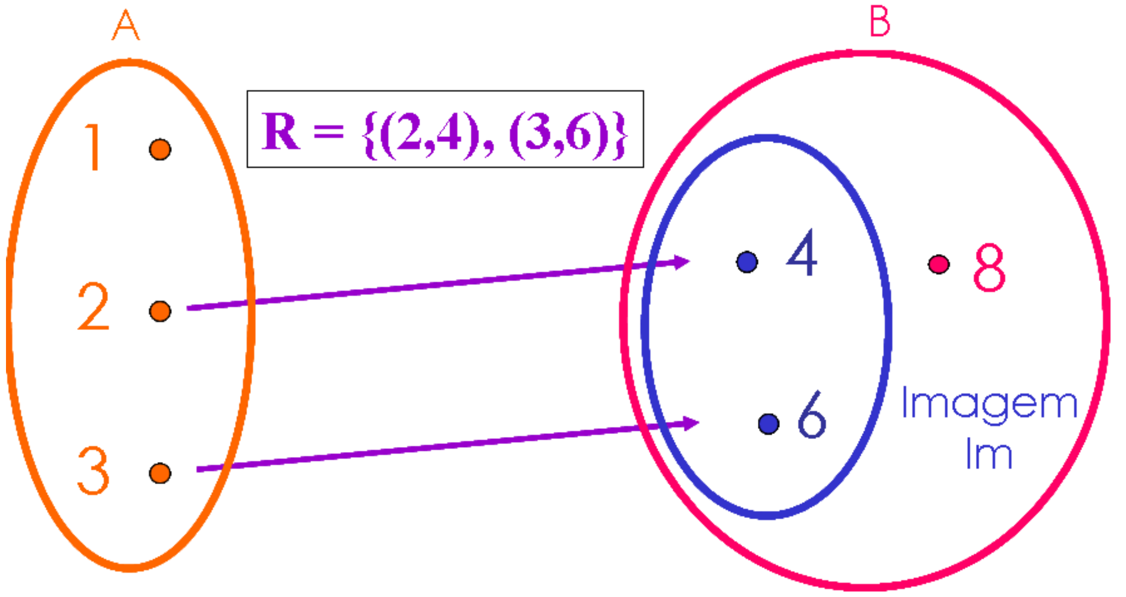
$B = \{4,6,8\}$

$R = \{(2,4),(3,6)\}$



$A = \{1,2,3\}$

Forma matricial de *R*



$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ou

R	4	6	8
1	0	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0

Relação Inversa de *R*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

A matriz de R^{-1} é a transposta da matriz de R.

Exemplo:

Se $R = \{(2,4), (3,6)\}$, então $R^{-1} = \{(4,2),(6,3)\}$ e

$$M_{R^{-1}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{T} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

EXERCÍCIO 1

Decida quais dos pares dados satisfazem a relação.

a) $xRy \leftrightarrow x = y + 1$ $(2,2), (2,3), (3,3), (3,2)$

b) $xRy \leftrightarrow x$ divide y $(2,4), (2,5), (2,6)$

c) $xRy \leftrightarrow x > y^2$ $(1,2), (2,1), (5,2), (6,4), (4,3)$

d) $xRy \leftrightarrow x = -y$ $(1,-1), (2,2), (-3,3), (-4,-4)$

e) $xRy \leftrightarrow x$ é primo $(19,7), (21,4), (33,13), (41,16)$

f) $xRy \leftrightarrow x \leq 1/y$ $(1,2), (-3,-5), \left(-4, \frac{1}{2}\right), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

EXERCÍCIO 2

Dados $M = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, $N = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in M \times N \mid y = x^2 + 1\}$, determinar:

(a) Os pares ordenados da relação R;

(b) Os pares ordenados da relação inversa R^{-1};

(c) O conjunto imagem de R;

(d) O diagrama de flechas;

(e) O gráfico cartesiano;

(f) A matriz da relação R e da sua inversa R^{-1}.

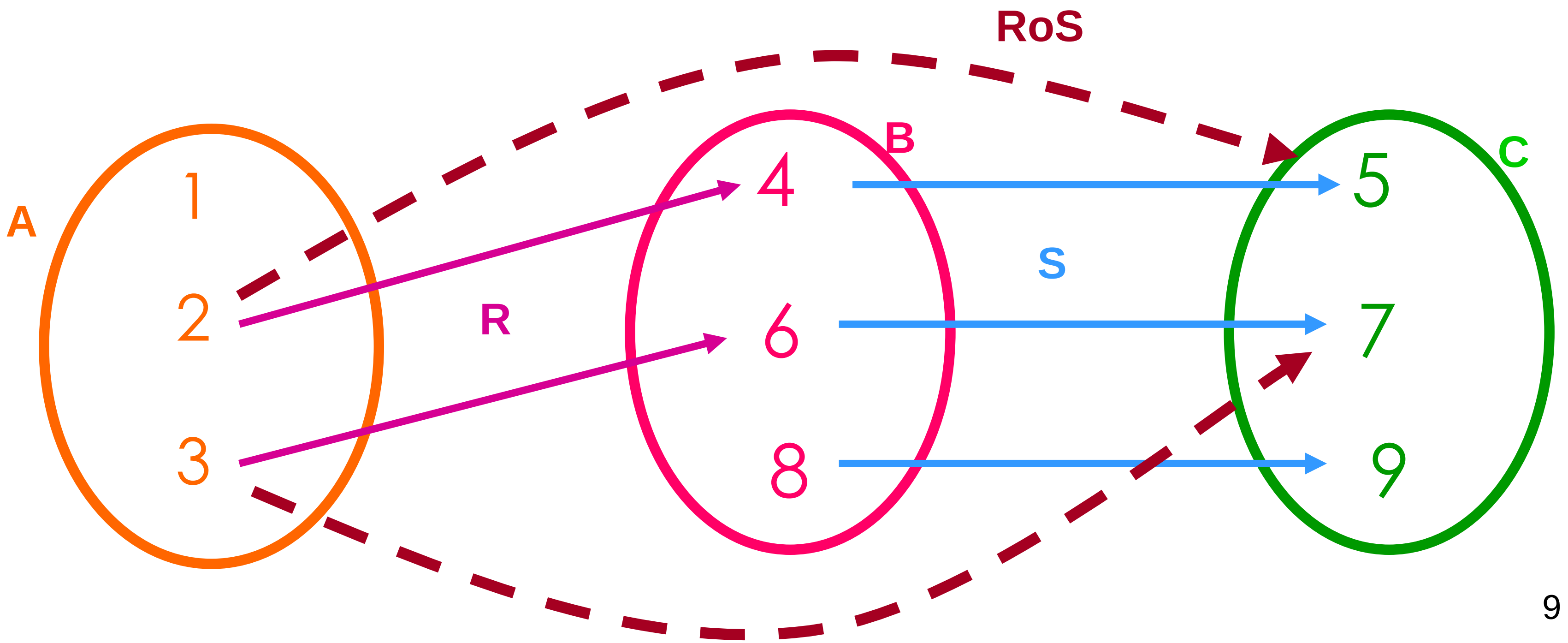
Composição de relações – Exemplo

Sendo $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,6,8\}$ e $C = \{5,7,9\}$, nos quais

$$R: \mathrm{A} \to B \qquad S: \mathrm{B} \to C$$

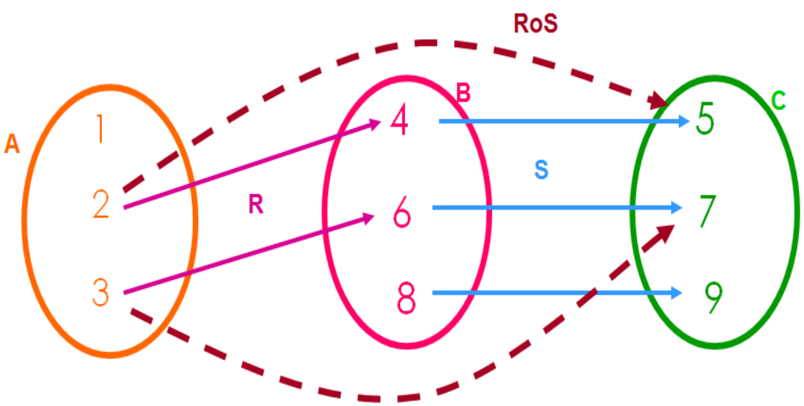
$$R = \{(2,4), (3,6)\} \qquad S = \{(4,5), (6,7), (8,9)\}$$

$$R \circ S = \{(2,5), (3,7)\}$$



A matriz da composta é o produto das matrizes.

$$M_R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$M_{R \circ S} = M_R \times M_S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 5 & 7 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

EXERCÍCIO 3

Sejam $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a, b, c, d\}$ e $C = \{x, y, z\}$. Sendo:

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$$

$$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$$

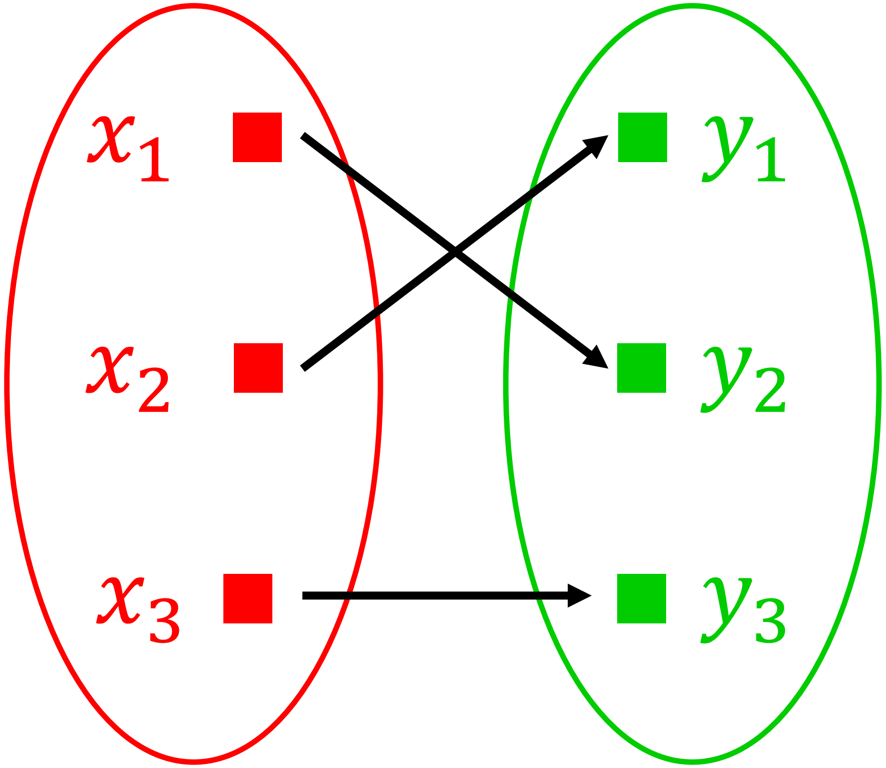
Determinar

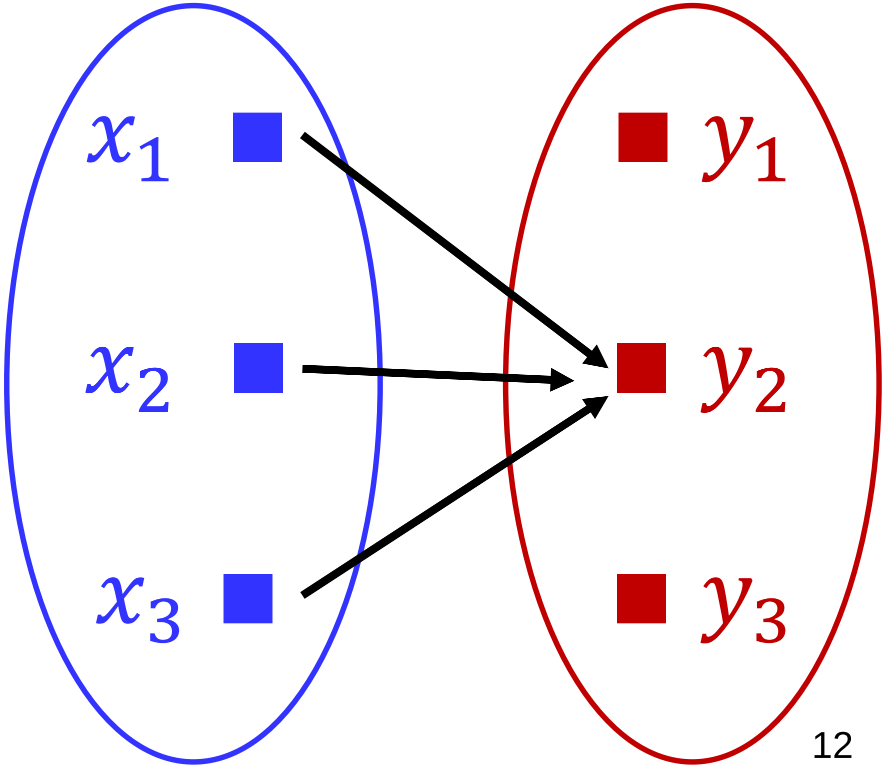
a) O diagrama de flechas de R, S e $R \circ S$.

b) Os pares ordenados de $R \circ S$.

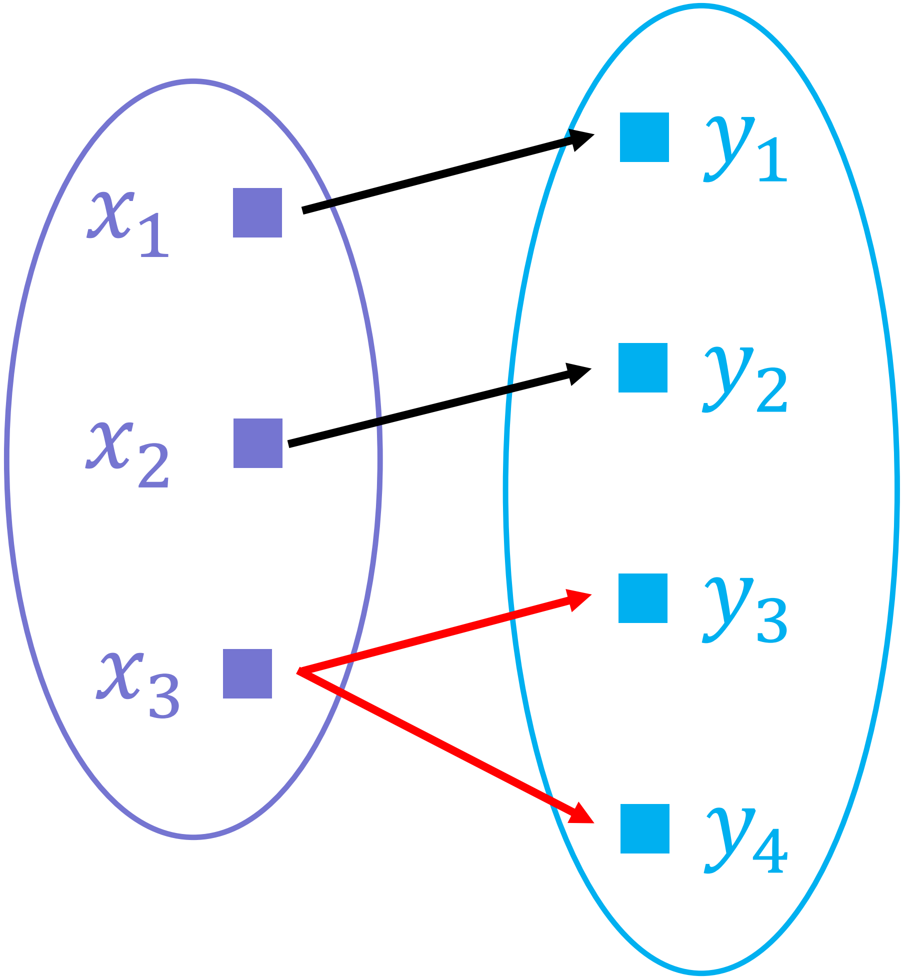
c) A matriz das relações R, S e $R \circ S$.

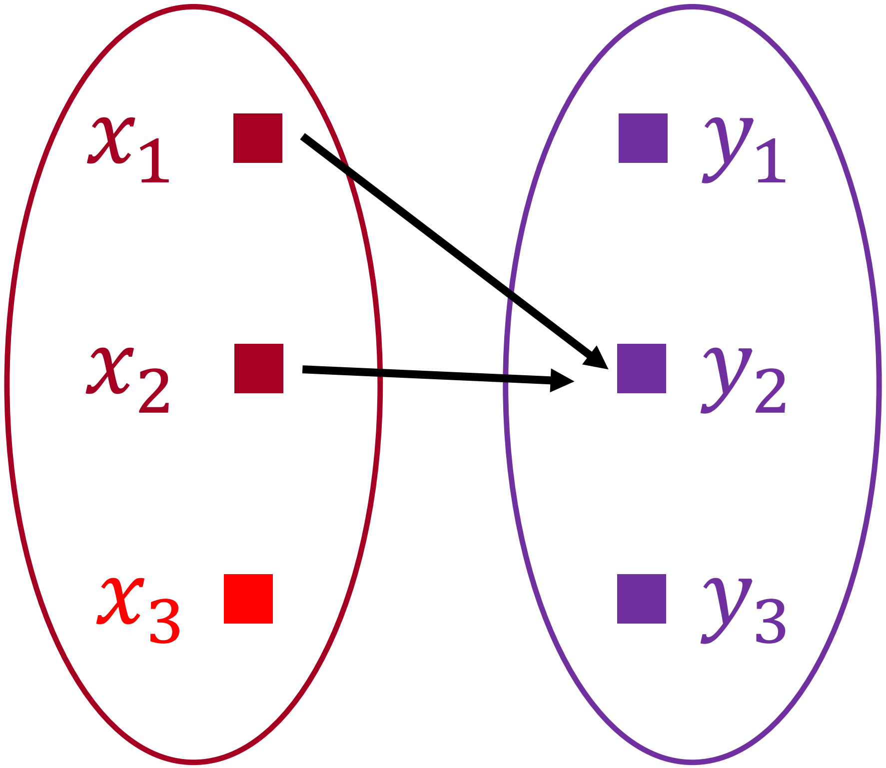
Função é uma relação que associa cada x a um único y.





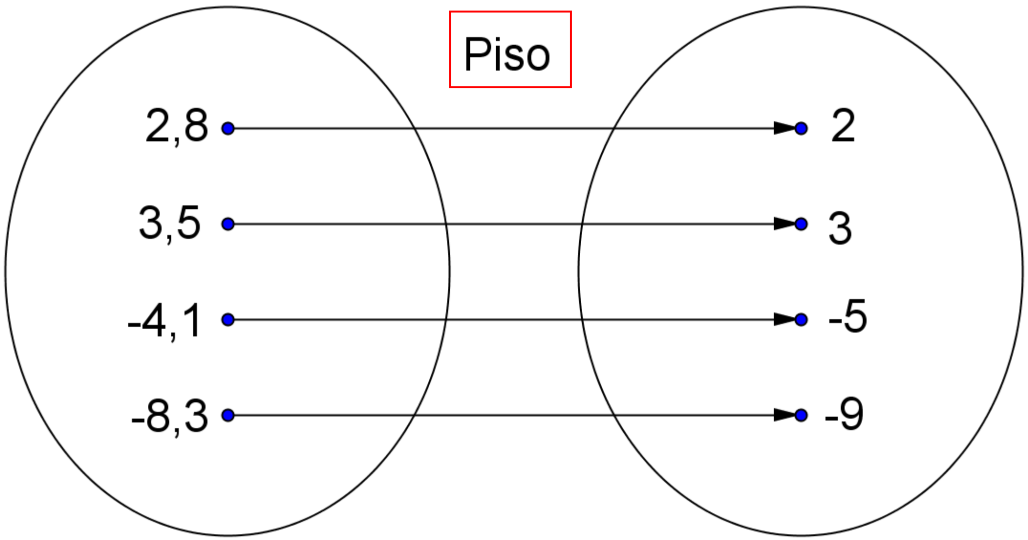
Contra - exemplos

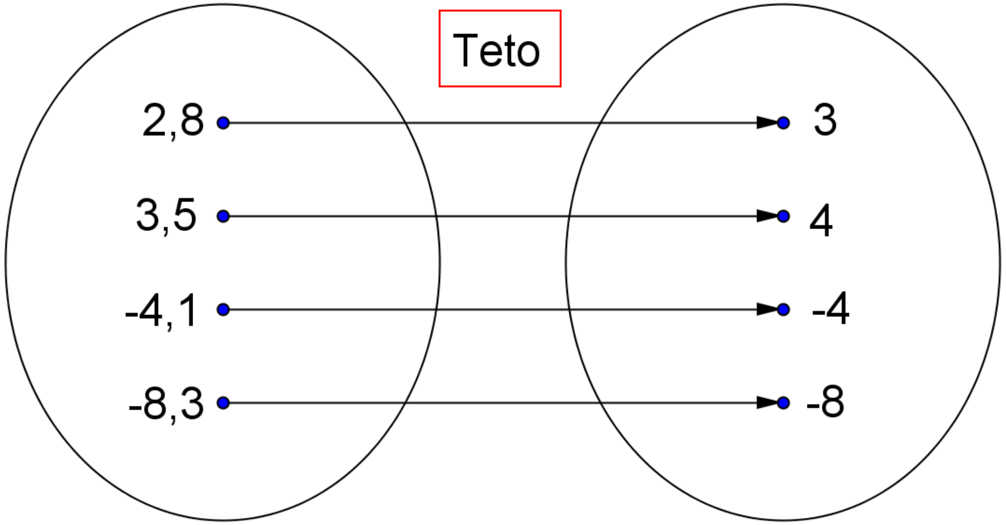




Exemplos Seja x um número real.

- A função <u>piso</u> $\lfloor x \rfloor$ associa a cada x, o maior inteiro $\leq x$.
- A função <u>teto</u> $\lceil x \rceil$ associa a cada x, o menor inteiro $\geq x$.





Seja $n \in \mathbb{N}^*$. A função módulo n associa a cada $x \in \mathbb{Z}$, o resto r da divisão $x \div n$, onde $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} \leq n$.

Notação: $x \bmod n$.

Exemplos:

$25 \bmod 2 = 1$

$21 \bmod 7 = 0$

$15 \bmod 4 = 3$

$-17 \bmod 5 = 3$ (o resto deve ser positivo)

$$
\begin{array}{r|l}
-17 & \;\;5 \\ \hline
\underline{\;\;20} & -4 \\
3 &
\end{array}
$$

Função Injetora (ou injetiva)

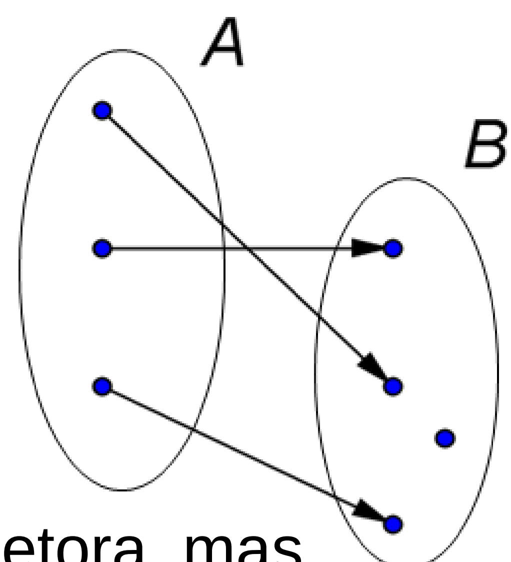
$f: A \to B$ onde $\forall y \in B, \exists$ no máximo um $x \in A \mid (x, y) \in f$

Função Sobrejetora (ou sobrejetiva)

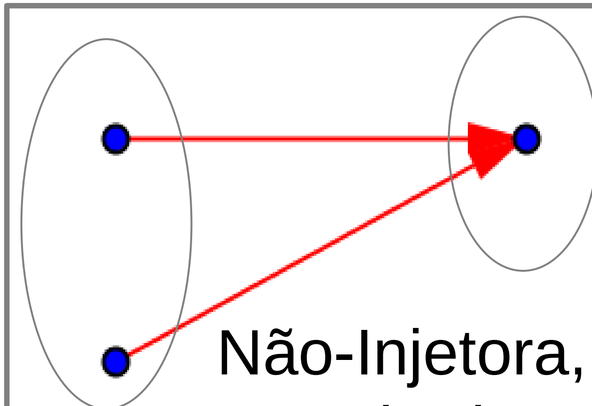
$$f: A \to B \text{ onde } \forall y \in B, \exists\, x \in A \mid (x, y) \in f$$

Função Bijetora (ou bijetiva)

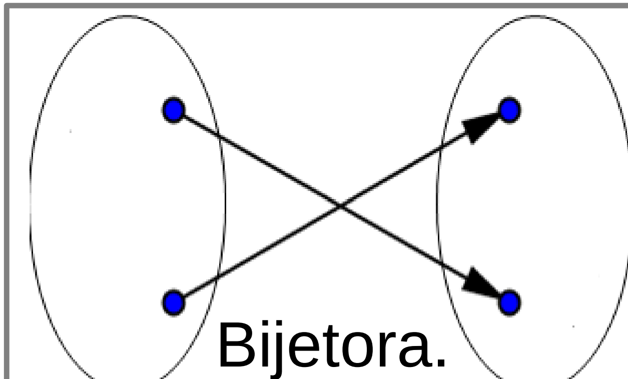
Injetora e sobrejetora, simultaneamente.



Injetora, mas
não sobrejetora.



Não-Injetora,
mas sobrejetora.



Bijetora.

Exercício 1 Quais das relações abaixo são funções do domínio e no contradomínio indicado? Para as que não são, por que não são?

a) $f: A \to A$ onde $A = \{1,2,3\}$

$$f = \{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1)\}$$

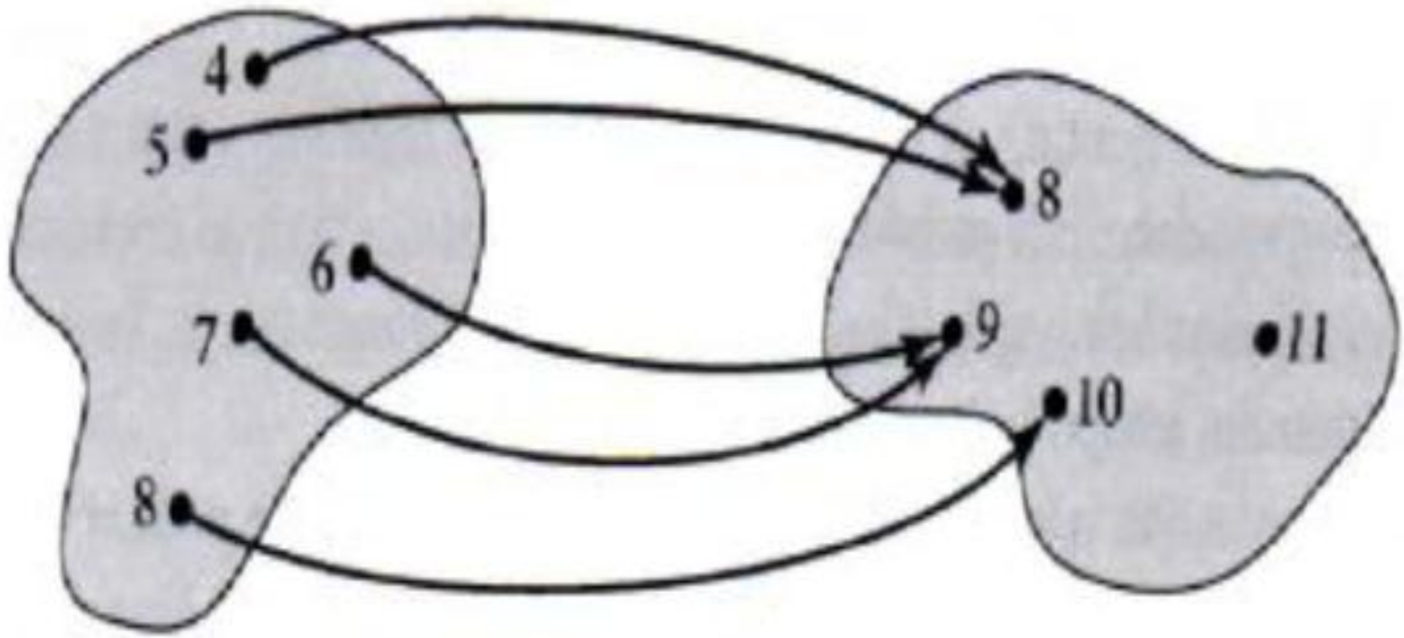
b) $\text{g}: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad g(x) = |x|$ (módulo)

c) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad h(x) = x - 4$

d) $\text{g}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x+3, \text{se } x \geq 5 \\ x, \text{se } x \leq 5 \end{cases}$

Exercício 2 A figura abaixo representa uma função.

Essa função é sobrejetora? É injetora? É bijetora?



Exercício 3 Calcule:

$a)\ \lceil 2{,}1 \rceil$

$b)\ \lfloor 2{,}1 \rfloor$

$c)\ \lceil -2{,}1 \rceil$

$d)\ \lfloor -2{,}1 \rfloor$

$e)\ 16\ mod\ 8$

$f)\ 22\ mod\ 6$

$g)\ -7\ mod\ 3$

$h)\ -47\ mod\ 4$

Referências

- LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. Matemática Discreta. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.(https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837781)
- MENEZES, Paulo Blauth. Matemática Discreta para Computação e Informática. Col. Livros Didáticos, V.16. Bookman, 2008. (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600252)
- GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MENEZES, Paulo Blauth et. al. **Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios.** Vol. 19. São Paulo: Artmed Editora S.A., 2009. (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577805105)

Rosen, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicações.** 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda. , 2009 (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788563308399)