ADS – 1º

Matemática Discreta

sábados – 09:50 ~ 13:20

Aula 05 – Análise Combinatória

Profª Carlota

Preliminares

$$\textbf{FATORIAL}: \begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$$

$$\text{Exemplos:} \begin{cases} 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! \\ \dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42 \end{cases}$$

Números binomiais

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad (n, p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p)$$

Exemplos

$$\binom{5}{0} = \frac{\cancel{5}!}{0!\cancel{5}!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!6!} = \frac{7 \times \cancel{6}!}{1!\cancel{6}!} = 7$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}!}{2!\cancel{3}!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}!}{\cancel{3}!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

CONTAGEM – “Quantos?”

Problemas de contagem são importantes sempre que temos recursos finitos.

Exemplos:

- Quantos cálculos são efetuados por um determinado algoritmo?
- Quantos usuários uma determinada configuração de computador pode suportar?

Comecemos estudando os princípios básicos Princípios da Adição e da Multiplicação.

Exemplo

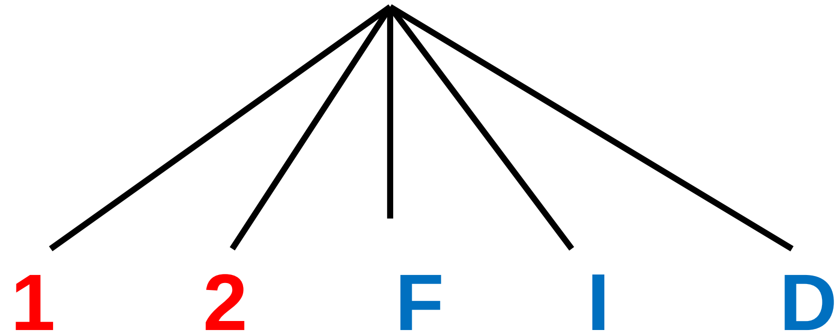
Um jogo de computador, tem as seguintes opções:

- Número de jogadores: 1 e 2
- Dificuldade: Fácil (F), Intermediário (I) e Difícil (D)

Quantas e quais são as possibilidades de escolha de um jogador, se ele vai selecionar:

A) Apenas o número de jogadores ou apenas a dificuldade.
B) As duas opções: número de jogadores e também a dificuldade.

Situação A: O jogador vai selecionar apenas o número de jogadores ou apenas a dificuldade do jogo.



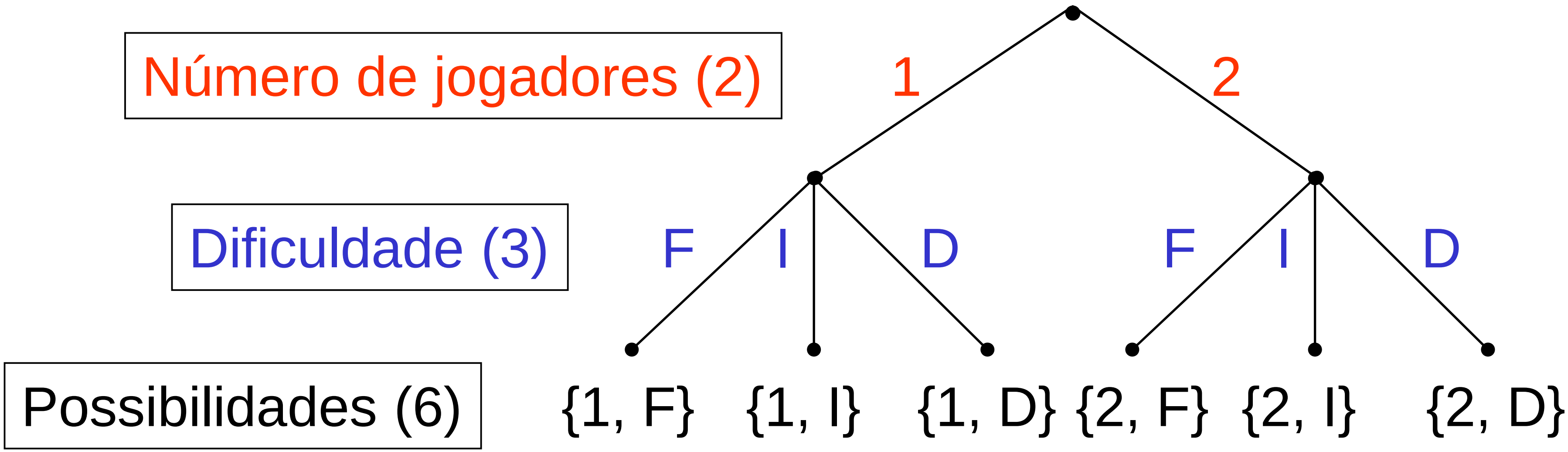
Possibilidades:

$$\frac{2}{\text{Jogadores}} + \frac{3}{\text{Dificuldade}} = \frac{5}{\text{Possibilidades}}$$

Princípio da Adição

Se A e B possuem *m* e *n* resultados possíveis, respectivamente, então o número total de possibilidade para “A ou B” é $m + n$.

Situação B: O jogador vai selecionar o número de jogadores e a dificuldade do jogo.



$$\frac{2}{\text{Jogadores}} \times \frac{3}{\text{Dificuldade}} = \frac{6}{\text{Possibilidades}}$$

Princípio da Multiplicação

Se A e B possuem m e n resultados possíveis, respectivamente, então existem $m \times n$ resultados possíveis para a sequência dos dois.

Exemplos

a) Quantos números de quatro dígitos existem se os dígitos podem ser repetidos?

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$$

b) Quantos números de quatro dígitos existem se os dígitos não podem ser repetidos?

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$$

c) Numa senha deve conter exatamente 9 números. Em cada senha, cada número deve ser usado apenas uma vez e o zero não pode ser utilizado. Quantas senhas diferentes com estas características podemos criar?

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9! = 362.880$$

Exercício 1 Começa-se um jogo de computador fazendo uma seleção em cada um de três menus. O primeiro menu (número de jogadores) tem quatro opções, o segundo (nível de dificuldade) tem oito e o terceiro (velocidade) tem seis. Quantas configurações diferentes tem este jogo? R: 192

Exercício 2 Um palíndromo é uma cadeira de caracteres que é lida da mesma forma normalmente ou de trás para frente. Quantos palíndromos (que fazem sentido ou não) de cinco letras são possíveis? Considere as 26 letras do alfabeto. R: 17.576

Exemplo de palíndromo:

SOCORRAMMESUBINOONIBUSEMMARROCOS

Exercício 3 Um homem tem 3 pares de sapatos, 8 pares de meias, 4 calças compridas e 9 suéteres. Quantos trajes ele pode compor com estas peças?

R: 864

Exercício 4 Se uma mulher tem sete camisas, cinco saias e nove vestidos, de quantas maneiras diferentes ela pode vestir? (Suponha que quando ela usar vestido, usará apenas vestido.) R: 44

Exercício 5 A, B, C e D são nós em uma rede de computadores. Existem dois caminhos entre A e C, dois entre B e D, três entre A e B e quatro entre C e D. Por quantas rotas diferentes é possível mandar uma mensagem de A para D? R: 14

Combinações, Arranjos e Permutações

Combinação	Arranjo	Permutação
A ordem **não é** relevante	A ordem **é** relevante	É um arranjo no qual $n = p$.
$\{1,2\} = \{2,1\}$	$21 \neq 12$	$P_n = A_{n,n} = n!$
$C_{n,p} = \binom{n}{p}$	$A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	porque $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Permutação com repetição

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,...} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!...}$$

onde α, β, γ, ... são as quantidades de repetições.

Exemplo 1) No 1º dia de aula, 20 alunos estavam presentes. Para se conhecerem melhor, foi sugerido que cada aluno cumprimentasse o outro com um aperto de mão e uma breve apresentação. Qual foi o total de apertos de mão?

A ordem é relevante ⟹ Combinação

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{20.19.18!}{2.18!} = 190$$

2) Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números diferentes de dois algarismos podemos escrever? A ordem é relevante ⟹ Arranjo

$$A_{9,2} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 72 \qquad \underline{\;9\;} \cdot \underline{\;8\;} = 72$$

Exemplo 3) Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números distintos de 9 algarismos podemos escrever? $A_{9,9} = P_9 = 9!$

Exemplo 4) Quantos são os anagramas da palavra:

a) SIM *SIM SMI ISM IMS MSI MIS*

$$P_3 = 3! = 6$$

b) ANA *ANA NAA AAN*

A letra "A" ocorre duas vezes $\Rightarrow$ Permutação com repetição $\Rightarrow$ $P_3^{2A} = \frac{3!}{2!} = 3$

a) BATATA $P_6^{3A,2T} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 60$

EXERCÍCIOS

6) Quantas permutações distintas existem das letras da palavra HAVAIANO? Quantas delas começam com H? R: 6.720 / 840

7) Quantas permutações distintas existem das letras na palavra APALACHICOLA? Quantas delas têm os dois L juntos? R: 4.989.600 / 831.600

Referências

GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 5. ed. LTC, 2004.

SCHEINERMAN, E.R. Matemática Discreta: Uma Introdução. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

LIPSCHUTZ, Seymour, LIPSON, Marc. Matemática Discreta. Porto Alegre: Bookman, 2004.

GARCIA LOPEZ, J; TOSCANI, L V; MENEZES, P B. Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios. Coleção Livros Didáticos Informática UFRGS, V.19. Bookman, 2009.

SULLIVAN, Michael; MIZRAHI, Abe. Matemática Finita – Uma abordagem Aplicada. LTC, 2006.

Referências

- https://www.youtube.com/watch?v=a1FtCh6Snm0

- https://www.youtube.com/watch?v=4zMFrPhCkbE

- https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=TE-QGzBM5I0