ADS – 1º

Matemática Discreta

sábados – 09:50 ~ 13:20

Aula 01 - Teoria dos Conjuntos

Profª Carlota

EMENTA DA DISCIPLINA

Teoria dos conjuntos.
Indução matemática.
Análise combinatória.
Lógica formal.
Relações.
Funções.
Grafos e árvores.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

1) GARCIA LOPEZ, J; TOSCANI, L V; MENEZES, P. B. *Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios.* Coleção Livros Didáticos Informática UFRGS, V.19. Porto Alegre: Bookman, 2009. (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600252)

2) GERSTING, Judith L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.* 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

3) LIPSCHUTZ, Seymour, LIPSON, Marc. *Matemática Discreta.* Porto Alegre: Bookman, 2004.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1) SCHEINERMAN, E.R. *Matemática Discreta:* Uma Introdução. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

2) SULLIVAN, Michael; MIZRAHI, Abe. *Matemática Finita* – Uma abordagem Aplicada. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO

Provas (previsão):
P1: 29/09
P2: 01/12
P3: 15/12

Média Final:
média aritmética das melhores notas

Média para aprovação: 6,0

Presença obrigatória – 75%

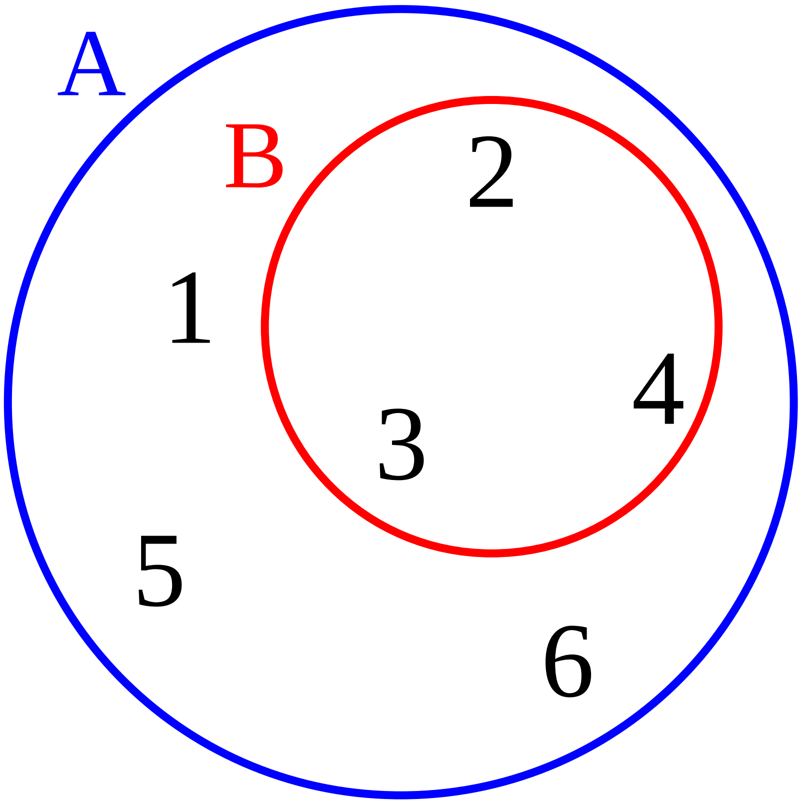
Matemática Discreta

"A matemática discreta possui como ênfase os estudos matemáticos baseados em conjuntos contáveis, finitos ou infinitos. Em oposição, a matemática do continuum possui como ênfase os estudos matemáticos baseados em conjuntos não contáveis."

Do livro: Menezes, Paulo Blauth. Matemática discreta para computação e informática. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600252/cfi/20!/4/4@0.00:58.2)

CONJUNTO: Coleção não-ordenada de “elementos”.

Exemplos: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $B = \{2,3,4\}$



$1 \in A$
1 pertence ao A

$1 \notin B$
1 não pertence ao B

$B \subseteq A$
B é subconjunto de A
ou B está contido em A

CONJUNTOS – algumas observações e notações

- $S =$ conjunto universo: aquele que contém todos os elementos em consideração.
- $\{\ \} = \emptyset =$ conjunto vazio
- Para qualquer conjuntos A, $\emptyset \subseteq A \subseteq A \subseteq S$.
- Igualdade de conjuntos: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.
- Se $B \subseteq A$ mas se existe $a \in A$ tal que $a \notin B$ então B é <u>subconjunto</u> <u>próprio</u> de A $(B \subset A)$

Pertinência x Continência

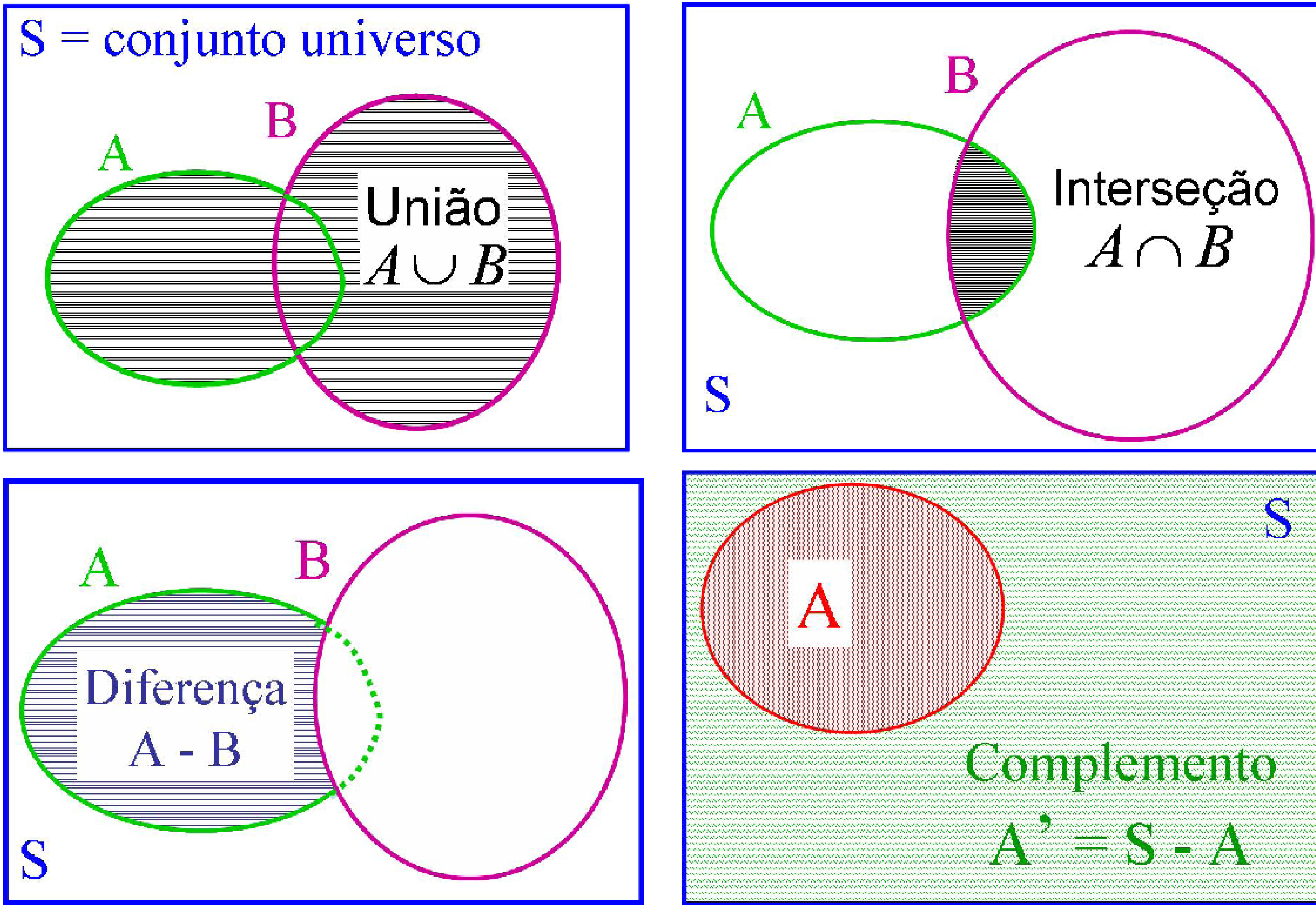
Se $A = \{1,2,3,\emptyset,\{a\},\{b,c\}\}$, então:

- $\{a\} \in A$ e $\{b,c\} \in A$
- $\emptyset \in A$ e $\emptyset \subseteq A$
- $1 \in A$ mas $\{1\} \notin A$. É verdade que $\{1\} \subseteq A$.
- $\{1,2,3\} \notin A$ e $\{1,2,3\} \subseteq A$

EXERCÍCIO Marque as afirmações corretas, sendo $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{\{1\}, 1\}$.

a) $A \subset B$	[ ]	h) $A = C$	[ ]
b) $A \subseteq B$	[ ]	i) $1 \in A$	[ ]
c) $A \in B$	[ ]	j) $1 \in C$	[ ]
d) $A = B$	[ ]	k) $\{1\} \in A$	[ ]
e) $A \subset C$	[ ]	l) $\{1\} \in C$	[ ]
f) $A \subseteq C$	[ ]	m) $\emptyset \notin C$	[ ]
g) $A \in C$	[ ]	n) $\emptyset \subseteq C$	[ ]

Operações com conjuntos



Estes diagramas são exemplos de Diagrama de Venn.

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$
$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$
$$A' = \{x \in S \text{ e } x \notin A\} = S - A$$

Exemplo:

$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{c, e\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$
$$A \cap B = \{c\}$$
$$A - B = \{a, b, d\} = \complement_B^A$$
$$B - A = \{e\} = \complement_A^B$$
$$A' = S - A = \{e, f\}$$

Identidades envolvendo conjuntos

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap S = A$
$A \cup A' = S$	$A \cap A' = \emptyset$

Estas identidades referem-se, respectivamente, a

1) comutatividade
2) associatividade
3) distribuitividade
4) existência do elemento neutro
5) propriedades do complemento

Observações:

1) $A \subseteq A$

2) $\emptyset \subseteq A$

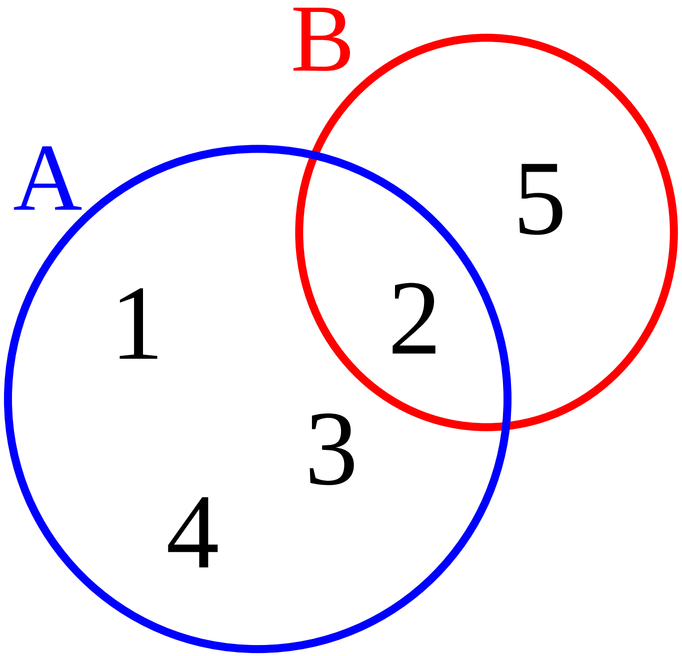
3) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS FINITOS

(Número de elementos do conjunto)

Exemplo:

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$|A| = 4$$
$$B = \{2,5\}$$
$$|B| = 2$$

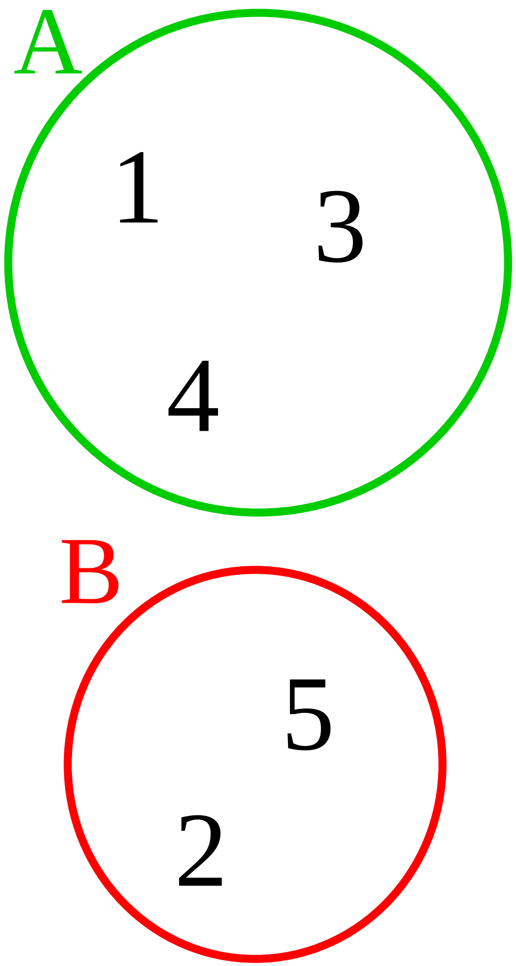


$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow |A \cup B| = 5$$
$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow |A \cap B| = 1$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

CONJUNTOS DISJUNTOS

A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.



Em geral:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Se *A* e *B* são disjuntos:

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow |A \cap B| = 0$$

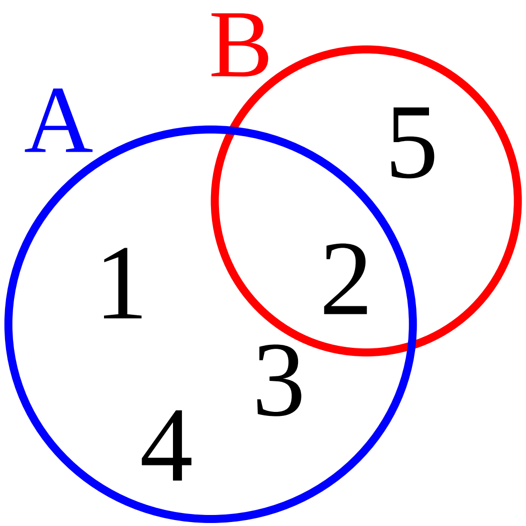
Então

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

PRODUTO CARTESIANO

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

<u>Exemplo</u>:



$$A = \{1,2,3,4\} \quad B = \{2,5\}$$

$$A \times B = \{(1,2), (1,5), (2,2), (2,5),$$
$$(3,2), (3,5), (4,2), (4,5)\}$$

$$B \times A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B| = |B \times A|$$

EXERCÍCIOS

1) Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4\}$. Determine:

$a)\ A \times B$

$b)\ B \times A$

$c)\ A^2$

2) Sejam:

$A = \{1,2,3,5,10\}$, $B = \{2,4,7,8,9\}$ e $C = \{5,8,10\}$, subconjuntos de $S = \{1,2,3, \dots, 9,10\}$. Encontre:

$a)\ A \cup B$

$b)\ A - C$

$c)\ B' \cap (A \cup C)$

CONJUNTO DAS PARTES

$\wp(A) = \{\text{subconjuntos de } A\}$ e $|\wp(A)| = 2^{|A|}$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\} \Rightarrow |\wp(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

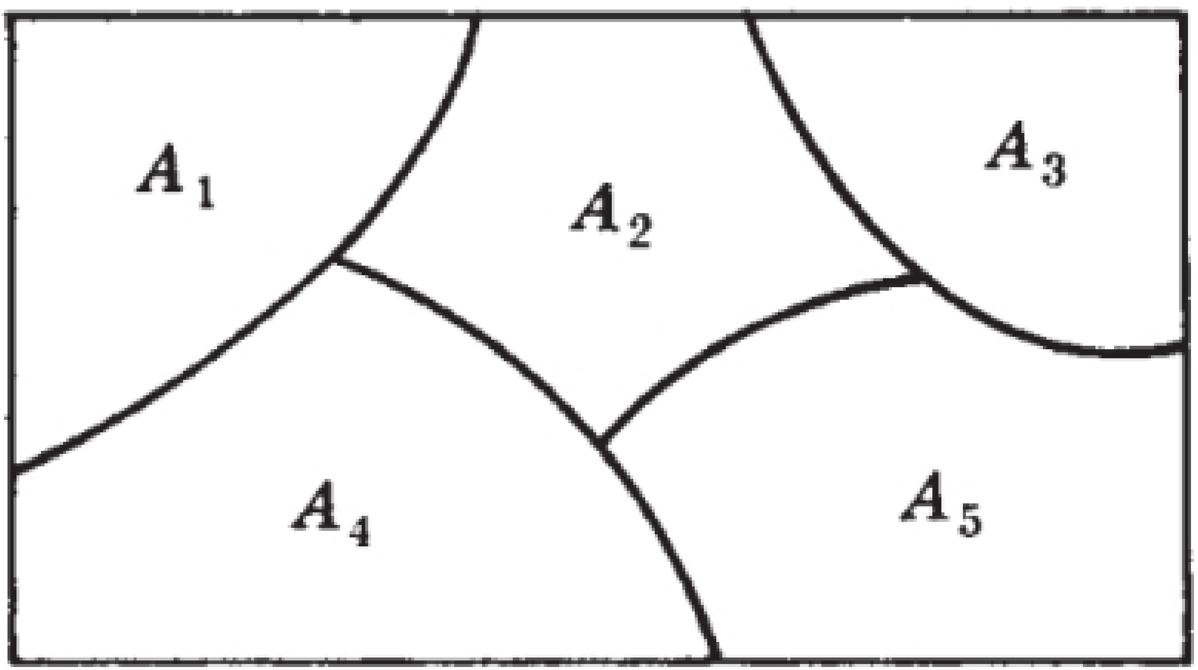
Nº de elementos	Subconjuntos	Quantidade
0	$\emptyset$	1
1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	3
2	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	3
3	$\{a, b, c\}$	1
	Total:	$8 = 2^3$

$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Partição de um conjunto

Uma partição de um conjunto não vazio S é uma subdivisão de S em conjuntos $[A_1, A_2, \ldots, A_K]$, não vazios disjuntos. Isto é:

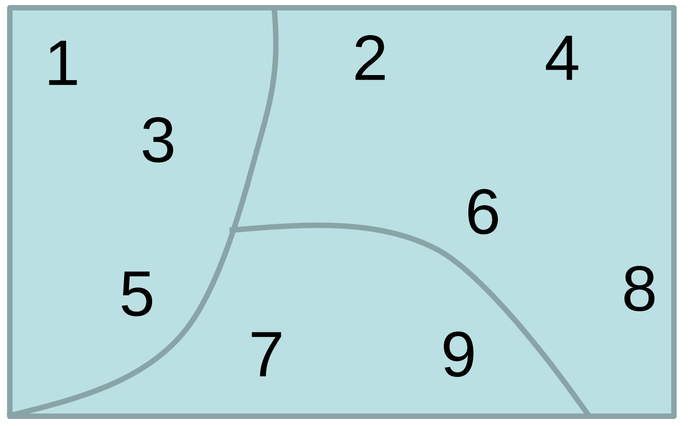
1) Se $a \in S$, então $a \in A_i$, para algum $i = 1, \ldots, k$.
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.



Partição de um conjunto - Exemplo

Se $S = \{1,2,3, \ldots, 9\}$, então:

a) $[\{1,3,5\},\{2,4,6,8\},\{7,9\}]$ é uma partição de S.



b) $[\{1,3,5\},\{2,4,6,8\},\{5,7,9\}]$ <u>não</u> é partição de S porque 5 pertence a dois dos subconjuntos.

c) $[\{1,3,5\},\{2,6\},\{4,8,9\}]$ <u>não</u> é partição de S porque $7 \in S$ mas 7 não pertence a nenhum dos subconjuntos.

Conjuntos Numéricos

1) Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

2) Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

3) Conjunto dos Números Racionais

(números que podem ser expressos na forma de fração)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z} \text{ com } b \neq 0 \right\}$$

Inteiros

$$2 = \frac{2}{1}$$

$$-2 = -\frac{2}{1}$$

$$0 = \frac{0}{2}$$

$$\cancel{\frac{2}{0}}$$

Os inteiros, decimais exatos e decimais periódicos são números racionais.

Decimais Exatos

$$0{,}03 = \frac{3}{10}$$

$$0{,}33 = \frac{33}{100}$$

$$1{,}5 = \frac{15}{10}$$

Decimais Periódicos

$$1{,}23456456\ldots = \frac{123456 - 123}{99900}$$

$$0{,}333\ldots = \frac{03 - 0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

4) Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)

(aqueles que <u>não</u> podem ser expressos na forma de fração)

Exemplos: $\pi = 3{,}141592654...$

$e = 2{,}71828182...$

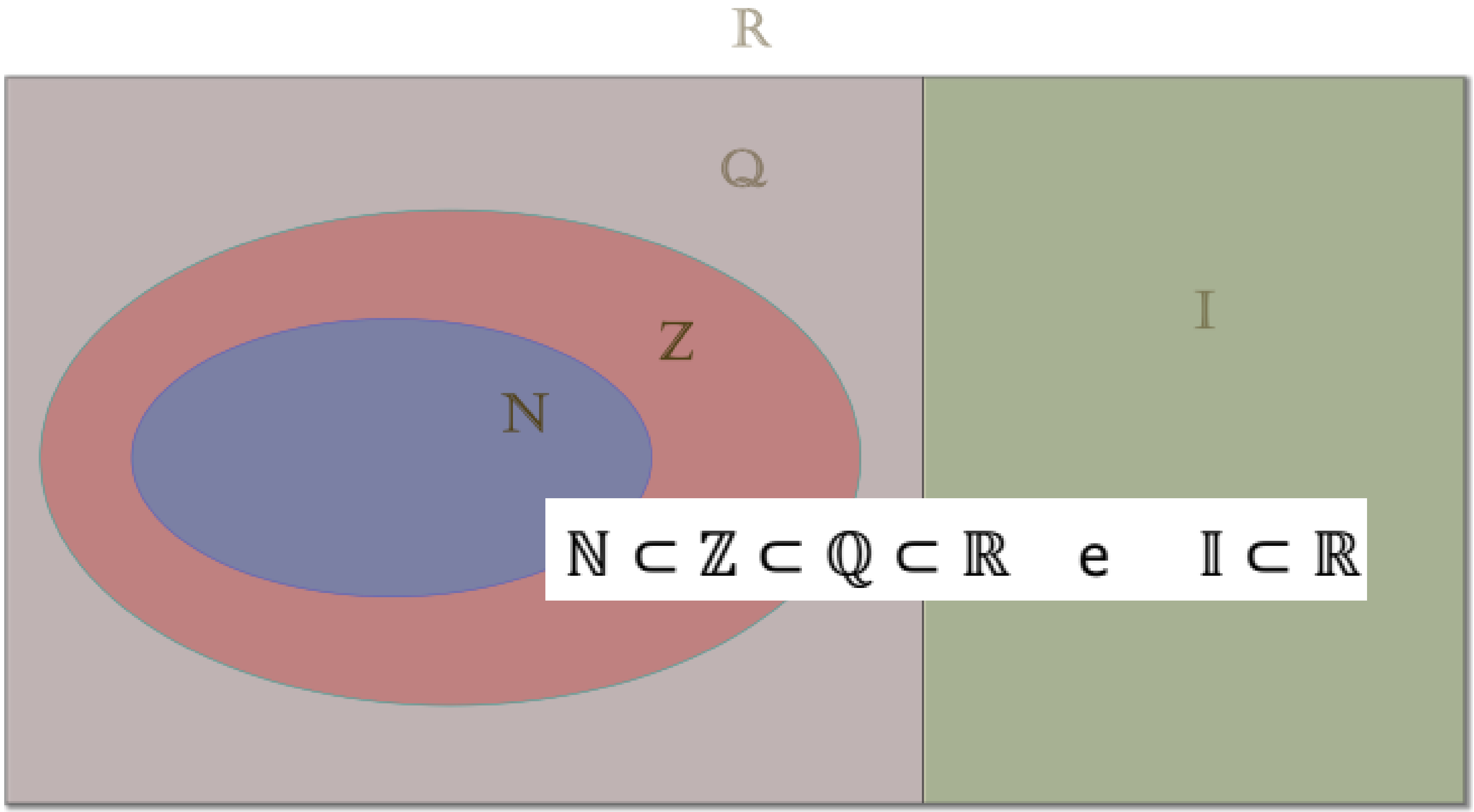
5) Conjunto dos Números Reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Notações: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

$$\mathbb{Z}_-^* = \{..., -3, -2, -1\}$$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Exercícios

1) Para $A = \{1,3,0\}$, qual é $\wp(A)$?

2) Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z}: 3 < x \leq 7\}$

$B = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 10 \text{ e } 3|x\}$ 3 divide *x*

$C = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 5\}$

$D = \{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x^2 \leq 2\}$

Exercício Sejam:

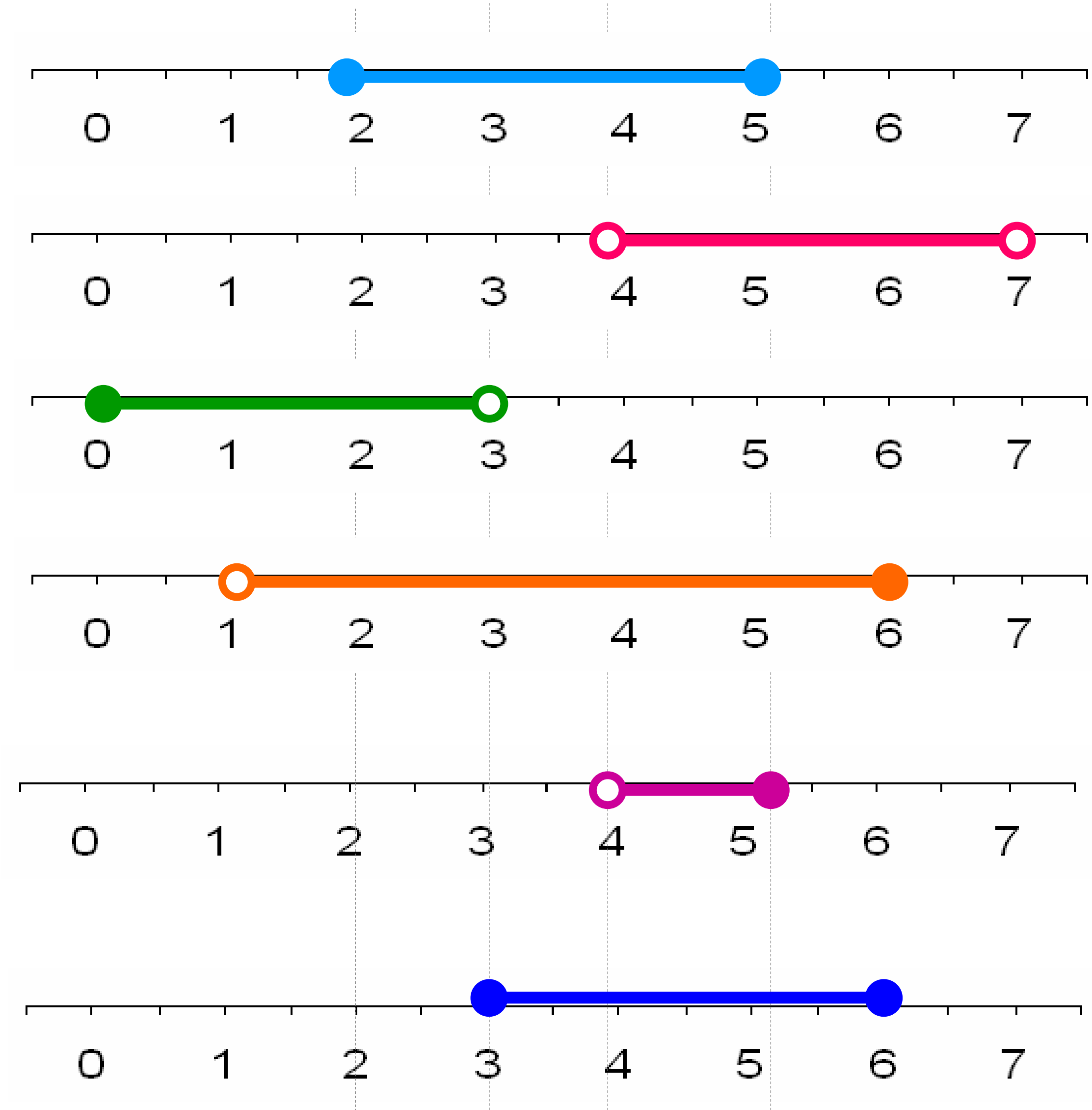
$$A = \{x | x \in R \text{ e } x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

e

$$B = \{x | x \in N \text{ e } 1 \leq x \leq 4\}.$$

Prove que $A \subset B$.

INTERVALOS



$$A = [2, 5]$$

$$B =]4, 7[$$

$$C = [0, 3[$$

$$D =]1, 6]$$

$$A \cap B =]4, 5]$$

$$D - C = [3, 6]$$

Outra notação

$$\left[2, 5\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\right\}$$

$$\left]2, 5\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\right\}$$

$$\left[2, 5\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\right\}$$

$$\left]2, 5\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\right\}$$

Exercício Dados os conjuntos A, B e C, responda, representando na reta real, os seguintes conjuntos:

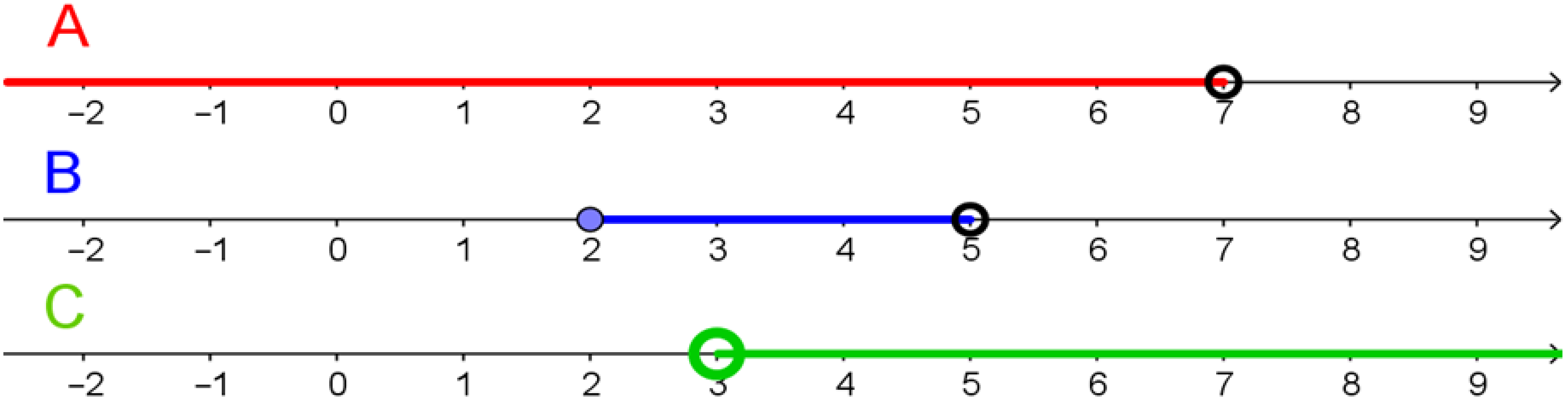
1) $A \bigcup B$

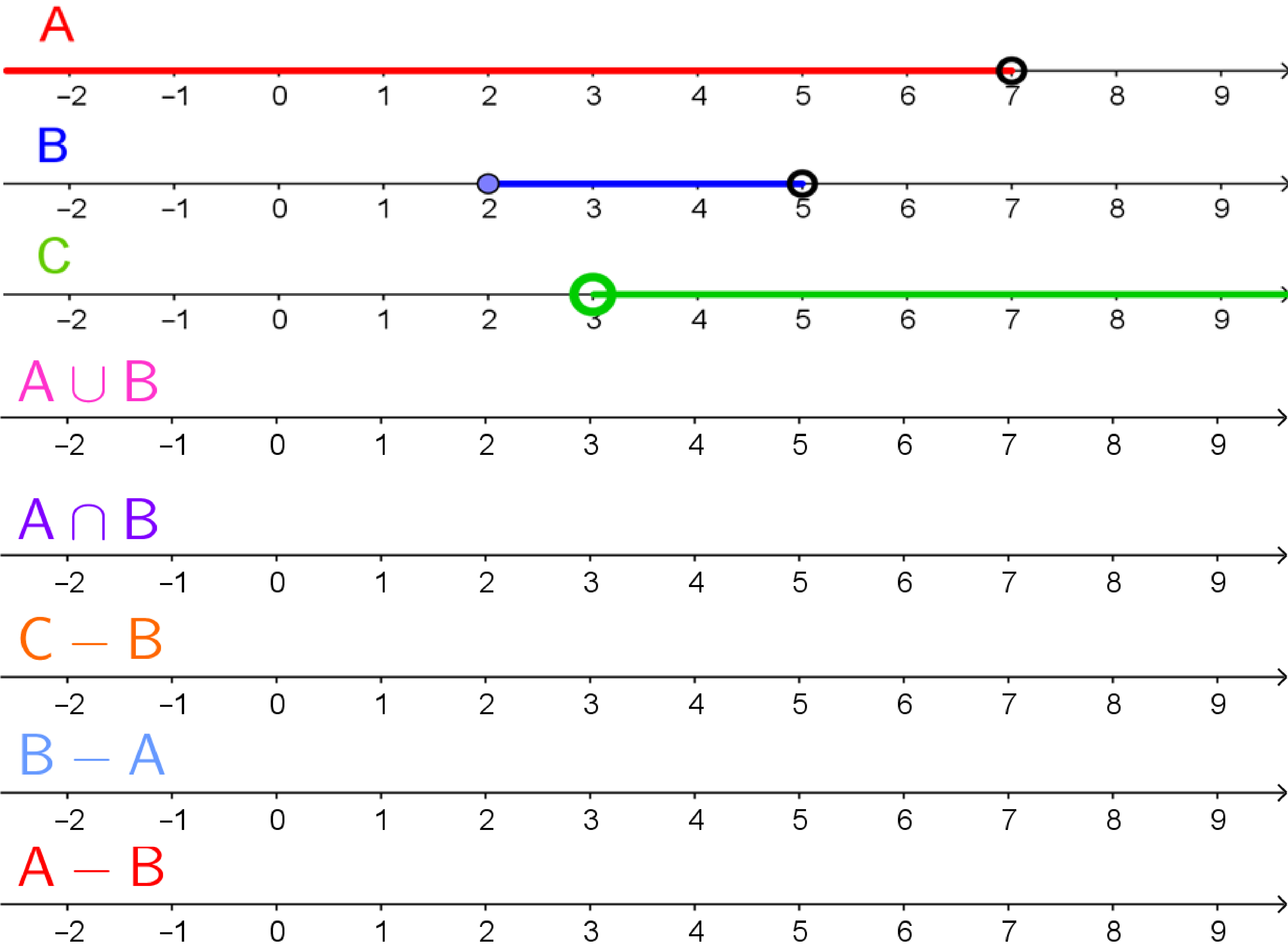
2) $A \bigcap B$

3) $C - B$

4) $B - A$

5) $\complement_B^A$





A
B
C
A ∪ B
A ∩ B
C − B
B − A
A − B
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Símbolos Matemáticos:

$=$: igual

$\neq$: diferente

| : tal que

{ .... } : chaves

$\in$: pertence a

$\notin$: não pertence a

∞: infinito

$\emptyset$ ou { } : conjunto vazio

$\mathbb{N}$: Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos Números Racionais

$\mathbb{I}$: Conjunto dos Números Irracionais

$\mathbb{R}$: Conjunto dos Números Reais

$<$ menor que

$>$ maior que

$\leq$ menor ou igual a

$\geq$ maior ou igual a