ADS – 1º

Matemática Discreta

sábados – 09:50 ~ 13:20

Aula 03 – Lógica Proposicional
Tautologias

Profª Carlota

Proposições simples e compostas

Uma proposição é simples, se e somente se, contiver uma única afirmação.

As proposições compostas são constituídas de proposições simples, conectadas por palavras denominadas **conectivos lógicos**.

Exemplo de proposição composta:

Se relampejar **ou** chover à tarde, **então** eu fico em casa.

As proposições simples serão representadas por letras minúsculas (p, q, r, …) e as proposições compostas serão representadas por letras maiúsculas (P, Q, R,…).

Mais exemplos de proposições compostas:

Maria se matriculou no curso **e** vai estudar.

Se Maria se matriculou no curso **então** vai estudar.

Se chover amanhã, **então** Maria vai estudar.

Maria vai estudar amanhã **se, e somente se**, chover.

Maria **não** foi para praia.

Maria está estudando **ou** mergulhando no mar.

Maria é estudante **ou** Maria é mãe.

Conectivos e seus símbolos:

Conectivo	**Símbolo**	**Nome**
Não	$\sim$	Negação
E	$\wedge$	Conjunção
Ou	$\vee$	Disjunção Inclusiva
Ou ... Ou	$\underline{\vee}$	Disjunção Exclusiva
Se ... então ...	$\rightarrow$	Condicional
Se e somente se	$\leftrightarrow$	Bicondicional

Expressões associadas ao conectivo:

- Conjunção: e, mas, também, além disso.
- Negação: não, é falso que, não é verdade que.

Diferença entre as disjunções

Disjunção exclusiva – É verdadeira apenas uma das duas proposições simples é verdadeira.

Maria está almoçando ***ou*** *nadando na piscina.*

A temperatura mínima de hoje será 12^{o}C ***ou*** *14^{o}C.*

Marcelo é gaúcho ou paulistano.

Disjunção inclusiva – É verdadeira quando pelo menos uma das duas proposições simples é verdadeira; não desconsidera o fato de ambas serem verdadeiras simultaneamente.

Maria é estudante ***ou*** *Maria é mãe.*

Os alunos dessa turma gostam de cantar ***ou*** *dançar.*

Marcelo é dentista ***ou*** *professor.*

Obs: Utilizaremos apenas a disjunção inclusiva.

Representação simbólica

p: Maria foi para praia.
$\sim p$: Maria **não** foi para praia.

p: Maria se matriculou no curso.
q: Maria vai estudar.
$p \wedge q$: Maria se matriculou no curso **e** vai estudar.

p: Vai relampejar à tarde.
q: Vai chover à tarde.
r: Vou ficar em casa.
$(p \vee q) \rightarrow r$: **Se** relampejar **ou** chover à tarde, **então** vou ficar em casa.

EXERCÍCIO 1

Observe as proposições a seguir:

I. Daniel é professor e Isis é psicóloga.

II. O tigre corre se, e somente se, está caçando.

III. Diego gosta de matemática ou Michael anda de carro.

IV. Se Celina é avó, então Aline é sua neta.

A(s) frase(s) que utiliza(m) o conectivo condicional é (são):

a) I e II

b) III

c) III e IV

d) I

e) IV

EXERCÍCIO 2 Em cada uma das proposições compostas a seguir, identifique qual o conectivo usado.

a) *O pano está sujo e molhado.*

b) *Se estiver chovendo, então uso um guarda-chuvas.*

c) *2+2 = 4 ou 3.4 = 12*

d) *Ingrid joga vôlei se, e somente se, vai à quadra.*

e) *Aline estuda e trabalha.*

f) *Não está chovendo.*

EXERCÍCIO 3 Represente as proposições compostas na forma simbólica.

a) Adriana está feliz ou Ricardo é cozinheiro.

b) Faz calor em Diadema e o trânsito está intenso.

c) O cachorro late se, e somente se, o carteiro entrega a carta.

d) Maria não é farmacêutica.

EXERCÍCIO 4 Leia a frase a seguir:

"Se Antônio é mecânico então Cecília é dona de casa, ou Felipe joga bola."

A forma simbólica, com "p: Antônio é mecânico", "q: Cecília é dona de casa" e "r: Felipe joga bola", da frase acima é:

a) $(p \rightarrow q) \wedge r$
b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
c) $(p \rightarrow q) \vee r$
d) $(p \vee q) \wedge r$
e) $(p \wedge q) \rightarrow r$

EXERCÍCIO 5 Considere as seguintes proposições:

p: Luan vai surfar.

q: Cristina vai nadar na piscina.

r: Está calor.

Considere a frase:

"Luan vai surfar e Cristina vai nadar na piscina, se somente se, está calor".

A representação simbólica respectiva é:

a) $(p \wedge q) \vee r$

b) $(p \vee q) \leftrightarrow r$

c) $(p \leftrightarrow q) \wedge r$

d) $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

e) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$

EXERCÍCIO 6 Sejam as proposições:

p: Carlos fala francês.

q: Carlos fala inglês.

r: Carlos fala alemão.

Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Carlos fala francês ou inglês, mas não fala alemão.

b) Carlos fala francês e inglês, ou não fala francês e nem alemão.

c) É falso que Carlos fala francês mas que não fala alemão.

d) É falso que Carlos fala inglês ou alemão mas que não fala francês.

Conectivos e Tabela Verdade

Negação (NÃO): $\sim$

p	$\sim p$
V	F
F	V

Se "Ana é feliz" é verdadeiro, então "Ana não é feliz" é falso.

OBS.: $\sim(\sim p) = p$

Exemplo:

"Não é verdade que Ana não é feliz."

significa que "Ana é feliz.".

Disjunção (OU): ∨

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunção (E): ∧

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Associação Possível

Conta conjunta solidária: um cheque pode ser assinado só por um dos correntistas para ser aceito.

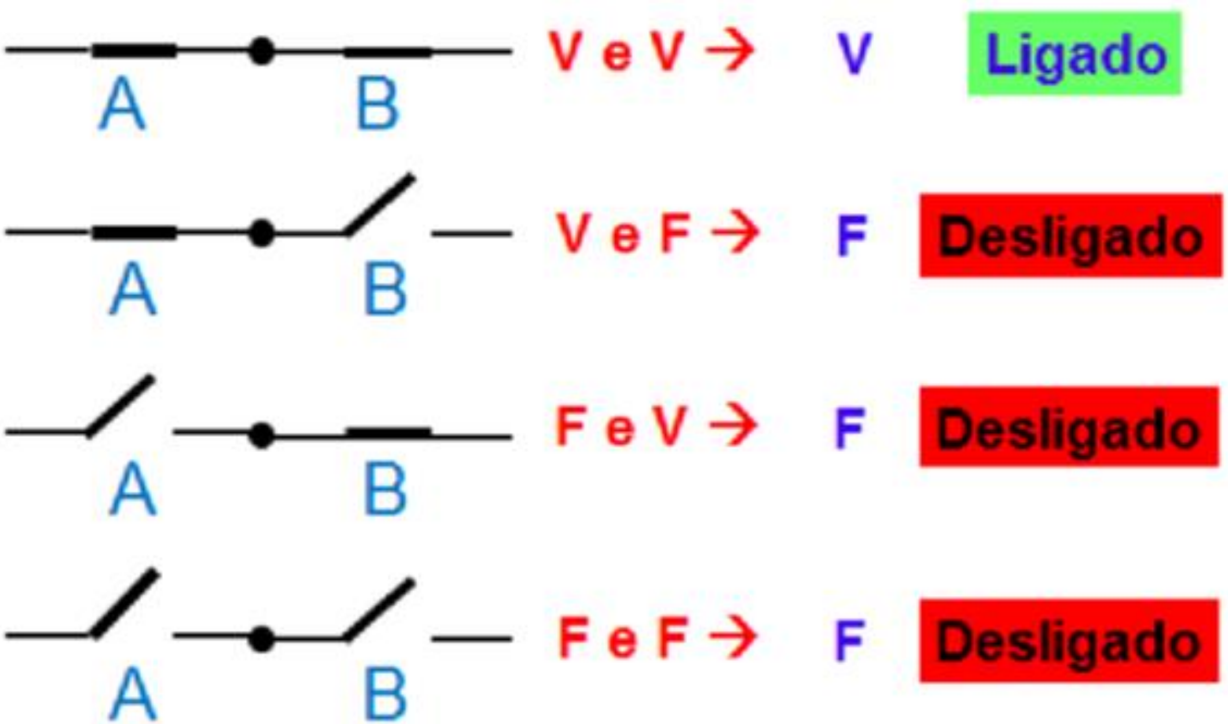
(Fulano **e/ou** ciclano)

Conta conjunta simples ou não-solidária: um cheque deve ser assinado pelos dois.

(Fulano **e** ciclano)

Associação Possível: Circuitos em série (“E”)

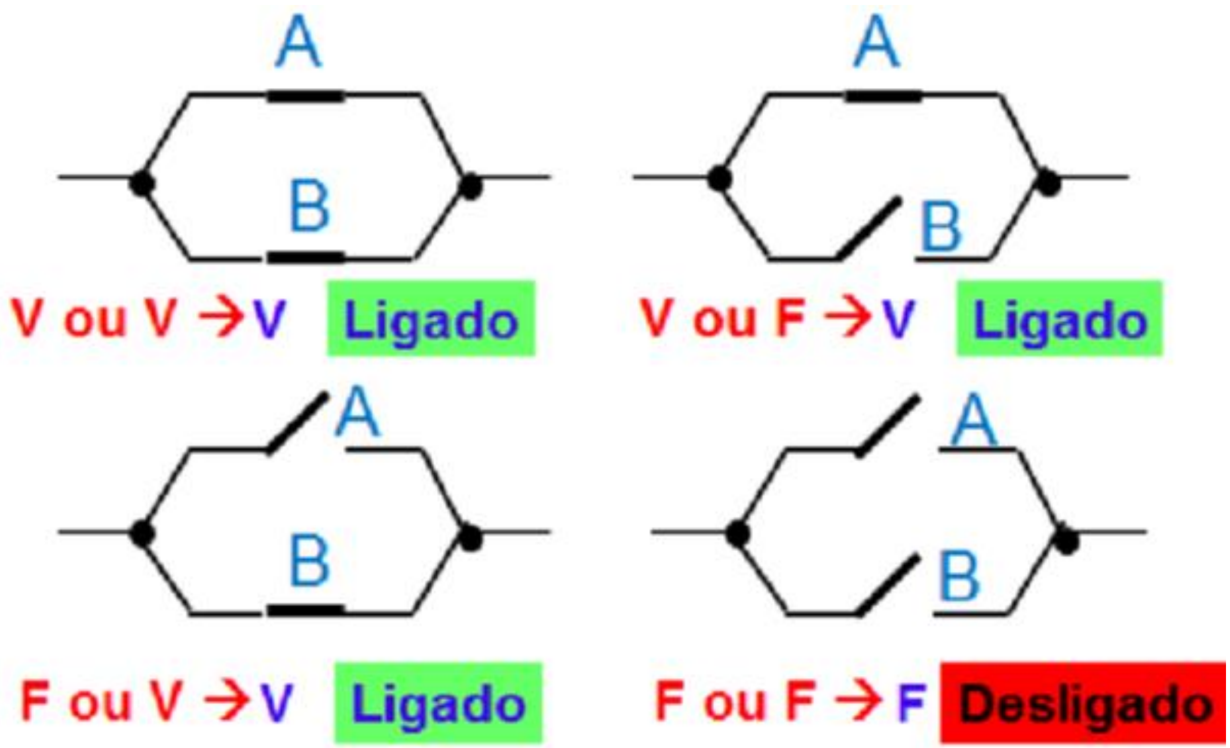
A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



UNIVESP

Associação Possível: Circuitos em paralelo (“OU”)

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



UNIVESP

Condicional (SE...ENTÃO): $\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional (...SE, E SOMENTE SE...): $\leftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De acordo com o contrato:
"**se** bater o carro, **então** a seguradora pagará indenização."

Bateu o carro?	O seguro pagou?	Resultado
Sim	Sim	Ok
Sim	Não	**X**
Não	Sim	Ok
Não	Não	Ok

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	**F**
F	V	V
F	F	V

"A seguradora pagará a indenização **se, e somente se,** bater o carro."

Bateu o carro?	O seguro pagou?	Resultado
Sim	Sim	**Ok**
Sim	Não	X
Não	Sim	X
Não	Não	**Ok**

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	**V**

RESUMO

Conjunção (E)
Para ser VERDADEIRA é preciso que todas as proposições sejam VERDADEIRAS.

Negação (NÃO)
O valor lógico é invertido.

Disjunção (OU)
Para ser VERDADEIRA basta que pelo menos uma das proposicões seja VERDADEIRA.

Condicional (Se…, então…)
Só é FALSA quando
$V \rightarrow F$

Bicondicional (Se…, e somente se…)
Para ser VERDADEIRA é preciso que as duas proposições tenham o MESMO VALOR LÓGICO.

EXERCÍCIO 1 Leia as seguintes afirmações:

I. O cachorro mia ou o pássaro pia se, e somente se, o sapo tem asa.

II. Regina é professora e não é professora.

III. $2/4 = 0{,}5$ e $2^0 = 1$.

A(s) proposição(ões) que possui(em) valor lógico falso é (são):

a) I

b) II

c) III

d) I e III

e) I e II

A tabela-verdade lista todas as possíveis combinações de valores-verdade (ou valores lógicos) V ou F para as componentes simples envolvidas na proposição composta.

Quando uma proposição é composta de n proposições simples, sua tabela-verdade contém 2^n linhas.

Por exemplo, na tabela-verdade da proposição composta $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ contém $2^3 = 8$ linhas porque ela é composta de 3 proposições simples (p, q e r).

Tabela-verdade de $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow p$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow p$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Tabela-verdade de $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

Tabela-verdade de $p \rightarrow (q \vee r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

Ordem para agrupamento (Prioridade):

$$(\ )$$
$$\sim$$
$$\vee \quad \wedge$$
$$\rightarrow$$
$$\leftrightarrow$$

$p \rightarrow q \vee r$ equivale a $p \rightarrow (q \vee r)$

$\sim (p \vee \sim q)$ equivale a $\sim (p \vee (\sim q))$

$p \wedge q \rightarrow \sim p \leftrightarrow q$ equivale a

$((p \wedge q) \rightarrow (\sim p)) \leftrightarrow q$

EXERCÍCIO 2

Em cada caso a seguir, determine o número de linhas necessárias para se construir a tabela-verdade.

- Cinco proposições simples.

- Sete proposições simples.

- Nove proposições simples.

EXERCÍCIO 3

Construa tabela-verdade para cada fórmula lógica:

a) $(\sim p) \wedge (\sim q)$

b) $\sim (p \vee \sim q)$

c) $p \wedge (\sim p)$

d) $p \vee \sim p$

e) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

f) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \rightarrow p \wedge q$

g) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

h) $p \rightarrow (\sim q \vee r) \wedge \sim \left(q \vee (p \leftrightarrow \sim r)\right)$

EXERCÍCIO 4

Usando tabela-verdade, mostre que $\sim(p \wedge q)$ é logicamente equivalente a $\sim p \vee \sim q$.

Regras de Equivalência $P \Leftrightarrow Q$			
P	Equivale a Q	Nome	Abrev.
p	$\sim(\sim p)$	Dupla negação	DN
$p \vee q$ $p \wedge q$	$q \vee p$ $q \wedge p$	Comutatividade	COM
$(p \vee q) \vee r$ $(p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r)$ $p \wedge (q \wedge r)$	Associatividade	ASS
$\sim(p \vee q)$ $\sim(p \wedge q)$	$\sim p \wedge \sim q$ $\sim p \vee \sim q$	Leis de Morgan	DM
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow p \wedge q$	Absorção	ABS
$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	Condicional	COND
$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Bicondicional	BI

EXERCÍCIO 4

Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente V e F, determinar o valor lógico da proposição $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

EXERCÍCIO 5

Sabendo que o valor lógico de q é V, determinar o valor lógico da proposição

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p).$$

EXERCÍCIO 6

Sabendo que o valor lógico de p, q e r são respectivamente V, F e F, determinar o valor lógico da proposição

$$(q \leftrightarrow (r \rightarrow \sim p)) \vee ((\sim q \rightarrow p) \leftrightarrow r).$$

EXERCÍCIO 7

Sabendo que os valores lógicos das proposições p, q, r e s são respectivamente V, F, V e F, determinar o valor lógico da proposição

$$\sim (p \rightarrow \sim q \leftrightarrow (p \vee r) \wedge s)$$

EXERCÍCIO 8

Utilizando as Leis de Morgan:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

escreva a negação das sentenças:

(a) Chove hoje ou faz frio.

(b) Carlos é um bom profissional e será promovido.

EXERCÍCIO 9 (TRT 1ª Reg/CESPE/2008)

Considerando todos os possíveis valores lógicos V ou F atribuídos às proposições p e q, assinale a opção correspondente à proposição composta que tem sempre valor lógico F.

(a) $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

(b) $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(c) $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

(d) $(p \wedge \sim q) \vee p$

(e) $p \wedge (\sim q \vee p)$