



ADS – 1º

Matemática Discreta

Aula 05 – Análise Combinatória

Prof^a Carlota

Preliminares

$$\text{FATORIAL: } \begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n \times (n - 1)! \end{cases}$$

ou $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$

$$\text{Exemplos: } \begin{cases} 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! \\ \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42 \end{cases}$$

Números binomiais

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (n, p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p)$$

Exemplos

$$\binom{5}{0} = \frac{\cancel{5}!}{0!\cancel{5}!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!6!} = \frac{7 \times \cancel{6}!}{1!\cancel{6}!} = 7$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}!}{2!\cancel{3}!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}!}{\cancel{3}!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

CONTAGEM – “Quantos?”

Problemas de contagem são importantes sempre que temos recursos finitos.

Exemplos:

- Quantos cálculos são efetuados por um determinado algoritmo?
- Quantos usuários uma determinada configuração de computador pode suportar?

Começemos estudando os princípios básicos
Princípios da Adição e da Multiplicação.

Exemplo

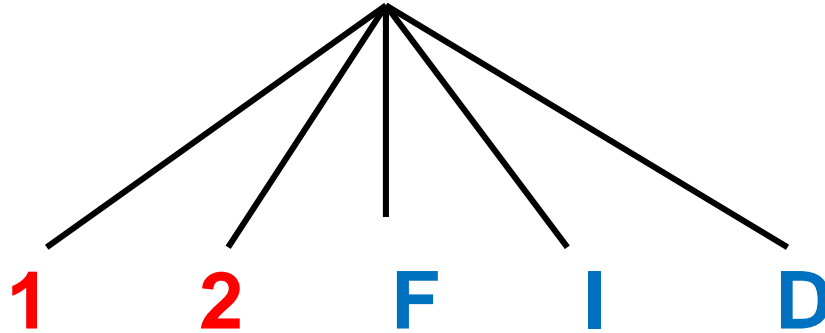
Um jogo de computador, tem as seguintes opções:

- Número de jogadores: 1 e 2
- Dificuldade: Fácil (F), Intermediário (I) e Difícil (D)

Quantas e quais são as possibilidades de escolha de um jogador, se ele vai selecionar:

- A) Apenas o número de jogadores ou apenas a dificuldade.
- B) As duas opções: número de jogadores e também a dificuldade.

Situação A: O jogador vai selecionar apenas o número de jogadores ou apenas a dificuldade do jogo.



Possibilidades:

$$\frac{2}{\text{Jogadores}} + \frac{3}{\text{Dificuldade}} = \frac{5}{\text{Possibilidades}}$$

Princípio da Adição

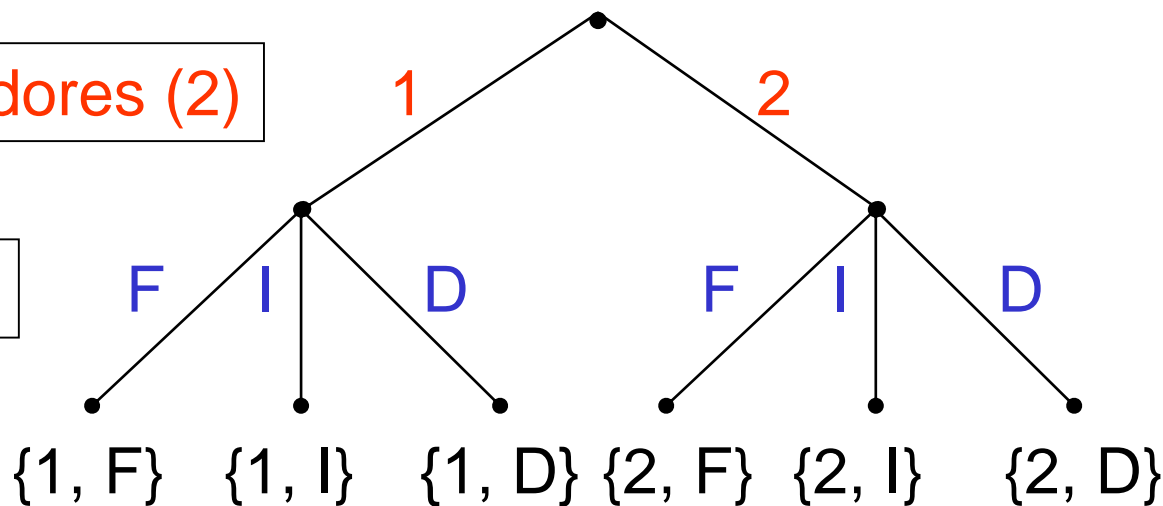
Se A e B possuem m e n resultados possíveis, respectivamente, então o número total de possibilidade para “A ou B” é $m + n$.

Situação B: O jogador vai selecionar o número de jogadores e a dificuldade do jogo.

Número de jogadores (2)

Dificuldade (3)

Possibilidades (6)



$$\frac{2}{\text{Jogadores}} \times \frac{3}{\text{Dificuldade}} = \frac{6}{\text{Possibilidades}}$$

Princípio da Multiplicação

Se A e B possuem m e n resultados possíveis, respectivamente, então existem $m \times n$ resultados possíveis para a sequência dos dois.

Exemplos

a) Quantos números de quatro dígitos existem se os dígitos podem ser repetidos?

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$$

b) Quantos números de quatro dígitos existem se os dígitos não podem ser repetidos?

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$$

c) Numa senha deve conter exatamente 9 números. Em cada senha, cada número deve ser usado apenas uma vez e o zero não pode ser utilizado. Quantas senhas diferentes com estas características podemos criar?

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9! = 362.880$$

Exercício 1 Começa-se um jogo de computador fazendo uma seleção em cada um de três menus. O primeiro menu (número de jogadores) tem quatro opções, o segundo (nível de dificuldade) tem oito e o terceiro (velocidade) tem seis. Quantas configurações diferentes tem este jogo?

R: 192

Exercício 2 Um palíndromo é uma cadeia de caracteres que é lida da mesma forma normalmente ou de trás para frente. Quantos palíndromos (que fazem sentido ou não) de cinco letras são possíveis? Considere as 26 letras do alfabeto.

R: 17.576

Exemplo de palíndromo:

SOCORRAMMESUBINOONIBUSEMMARROCOS

Exercício 3 Um homem tem 3 pares de sapatos, 8 pares de meias, 4 calças compridas e 9 suéteres. Quantos trajes ele pode compor com estas peças?

R: 864

Exercício 4 Se uma mulher tem sete camisas, cinco saias e nove vestidos, de quantas maneiras diferentes ela pode vestir? (Suponha que quando ela usar vestido, usará apenas vestido.) R: 44

Exercício 5 A, B, C e D são nós em uma rede de computadores. Existem dois caminhos entre A e C, dois entre B e D, três entre A e B e quatro entre C e D. Por quantas rotas diferentes é possível mandar uma mensagem de A para D? R: 14

Combinações, Arranjos e Permutações

Combinação

A ordem **não** é relevante

$$\{1,2\} = \{2,1\}$$

$$C_{n,p} = \binom{n}{p}$$

Arranjo

A ordem **é** relevante

$$21 \neq 12$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutação

É um arranjo no qual $n = p$.

$$P_n = A_{n,n} = n!$$

porque

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutação com repetição

$$P_n^{\alpha, \beta, \gamma, \dots} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ são as quantidades de repetições.

Exemplo 1) No 1º dia de aula, 20 alunos estavam presentes. Para se conhecerem melhor, foi sugerido que cada aluno cumprimentasse o outro com um aperto de mão e uma breve apresentação. Qual foi o total de apertos de mão?

A ordem é relevante \Rightarrow Combinação

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} = 190$$

2) Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números diferentes de dois algarismos podemos escrever? A ordem é relevante \Rightarrow Arranjo

$$A_{9,2} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 72 \qquad \underline{9} \cdot \underline{8} = 72$$

Exemplo 3) Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números distintos de 9 algarismos podemos escrever? $A_{9,9} = P_9 = 9!$

Exemplo 4) Quantos são os anagramas da palavra:

a) SIM $SIM \quad SMI \quad ISM \quad IMS \quad MSI \quad MIS$
 $P_3 = 3! = 6$

b) ANA $ANA \quad NAA \quad AAN$

A letra “A” ocorre duas vezes \Rightarrow Permutação com repetição $\Rightarrow P_3^{2A} = \frac{3!}{2!} = 3$

a) BATATA $P_6^{3A,2T} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 60$

EXERCÍCIOS

6) Quantas permutações distintas existem das letras da palavra HAVAÍANO? Quantas delas começam com H? R: 6.720 / 840

7) Quantas permutações distintas existem das letras na palavra APALACHICOLA? Quantas delas têm os dois L juntos? R: 4.989.600 / 831.600

Referências

GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 5. ed. LTC, 2004.

SCHEINERMAN, E.R. Matemática Discreta: Uma Introdução. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

LIPSCHUTZ, Seymour, LIPSON, Marc. Matemática Discreta. Porto Alegre: Bookman, 2004.

GARCIA LOPEZ, J; TOSCANI, L V; MENEZES, P B. Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios. Coleção Livros Didáticos Informática UFRGS, V.19. Bookman, 2009.

SULLIVAN, Michael; MIZRAHI, Abe. Matemática Finita – Uma abordagem Aplicada. LTC, 2006.

Referências

- <https://www.youtube.com/watch?v=a1FtCh6Snm0>
- <https://www.youtube.com/watch?v=4zMFrPhCkbE>
- https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=TE-QGzBM5I0