ADS – 1º

Matemática Discreta

sábados – 09:50 ~ 13:20

Aula 02 – Indução Matemática e Sequências Recursivas

Profª Carlota

Sentenças Abertas

Uma sentença aberta, $P(n)$, é uma sentença definida sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ que tornará verdadeira ou falsa quando substituímos n por algum número natural.

Exemplos:

1) $P(n)$: "n *é* ímpar." Esta afirmação é verdadeira para alguns valores de n e falsa para outros.

- $P(1)$ é verdadeira, pois 1 é ímpar.
- $P(4)$ é falsa, pois 4 não é ímpar.

2) $P(n)$: "$2n+6$ é par."

Como $2n+6=2(n+3)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

3) $P(n)$: "$1+3+\ 5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$."

$P(0)$: $1 \ = \ 1^2$ (V)

$P(1)$: $1 \ + \ 3 \ = \ 4 \ = \ 2^2$ (V)

$P(2)$: $1 \ + \ 3 \ + \ 5 \ = \ 9 \ = \ 3^2$ (V)

$P(3)$: $1 \ + \ 3 \ + \ 5 \ +7 \ = \ 16 = 4^2$ (V)

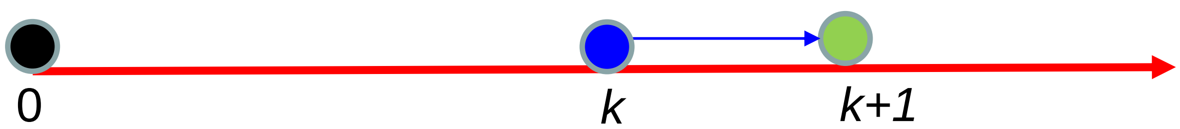
É possível encontrar algum m tal que $P(m)$ seja falso? Se $P(n)$ é verdadeiro para todo n, como poderíamos provar isso?

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:

1. $P(0)$ é verdadeira, e
2. $P(k+1)$ é verdadeira sempre que $P(k)$ é verdadeira, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.



Exemplo de demonstração por indução

Provar que, para todo $n \geq 0$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

1) Base da Indução: $P(0)$ é verdade: $1 = (0 + 1)^2$.

2) *Hipótese de indução (HI)*: Suponhamos que para algum k, $P(k)$ é verdade, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

3) Tese: Precisamos provar que $P(k + 1)$ é verdade, isto é temos que mostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1]$$
$$= [(k + 1) + 1]^2$$

<u>Continuação</u>: Falta mostrar que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1]$$
$$= [(k + 1) + 1]^2$$

A hipótese de indução é:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Então:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1]$$
$= (k + 1)^2 + [2(k + 1) + 1]$ pela Hipótese de Indução
$$= (k + 1)^2 + 2(k + 1) + 1$$
$= [(k + 1) + 1]^2$ *por* Produtos Notáveis

Portanto, pelo PIM, a fórmula é válida para todo número natural *n*.

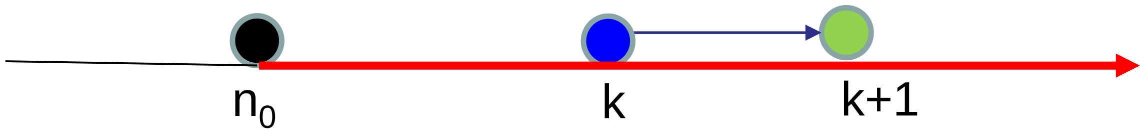
Generalização da Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$.

Se

1. $P(n_0)$ é verdade, e
2. $P(k + 1)$ é verdade sempre que $P(k)$ é verdade, para todo $k \geq n_0$.

Então, $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.



Exemplo: Prove que $n^2 > 3n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.

1) Para $n = 4$ é verdade pois $4^2 = 16 > 3 \times 4 = 12$.
2) HI: Suponhamos que para algum $k \geq 4$, $k^2 > 3k$.
3) Precisamos provar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$.

$(k+1)^2$	
$= k^2 + 2k + 1$	Produtos Notáveis
$> 3k + 2k + 1$	HI
$\geq 3k + 8 + 1$	porque se $k \geq 4k \geq 4$ então $2k \geq 8$
$= 3k + 9$	
$> 3k + 3$	porque $9 > 3$
$= 3(k+1)$	Lei distributiva

Portanto, $n^2 > 3n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.

Exercício 1 Prove que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

b) $2^n > n$

c) $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} \leq 2$

Exercício 2 Prove que $2^n < n!$ $(\forall n \geq 4)$

Exercício 3 Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9\alpha \ \ (\alpha \in \mathbb{Z})$$

Exercício 4 Prove que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ 9^n - 1$ é divisível por 8.

Exercício 5 Prove que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, vale:

a) $n^2 > n + 1$

b) $1 + 2 + \cdots + n < n^2$

Exercício – Sequência 1 Escreva os oito primeiros valores da sequência de Fibonacci.

$$F(1) = 1, F(2) = 1 \quad \text{e}$$
$$F(n) = F(n-2) + F(n-1), \forall n > 2$$

Exercício – Sequência 2 Escreva os cinco primeiros valores de cada sequência.

a) $A(1) = 2$ e $A(n) = \frac{1}{A(n-1)}$, para $n \geq 2$

b) $D(1) = 3, D(2) = 5$ e

$$D(n) = (n-1)D(n-1) + (n-2)D(n-2), n > 2$$

Lista de exercícios (em grupo ou individual)

Prove que

1. $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2, \forall\, n \geq 1.$
2. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1), \forall n \geq 1.$
3. $4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1), \forall n \geq 1.$
4. $7^n - 2^n$ é divisível por 5, $\forall n \geq 1$

Exercício 5 Considere os números de Fibonacci:

$$F(1) = 1,$$
$$F(2) = 1 \quad \text{e}$$
$$F(n) = F(n-2) + F(n-1), \forall n > 2$$

Prove as propriedades a seguir, diretamente da definição:

a) $F(n+1) + F(n-2) = 2F(n)$, para $n \geq 3$.

b) $F(n+6) = 4F(n+3) + F(n)$, para $n \geq 1$.