ADS – 1º

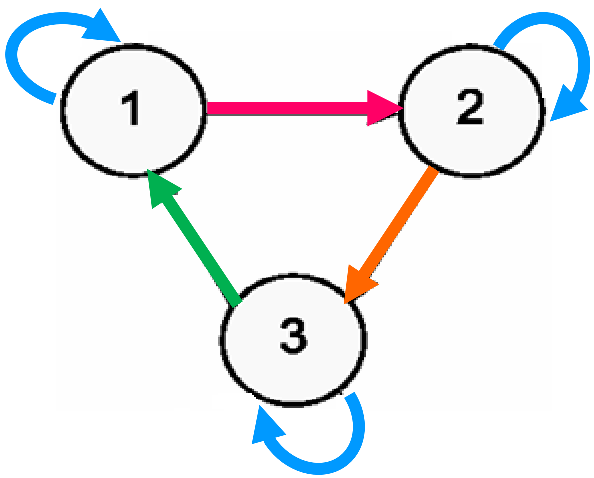
Matemática Discreta

Aula 08 – Relações: propriedades

Profª Carlota

Uma endorrelação em S é qualquer relação R em que o *domínio e contradomínio são iguais a S*. Dizemos que *R é uma relação em S*. As endorrelações podem ser representadas por um grafo orientado ou por uma matriz de adjacências.

Exemplo: Sendo $S = \{1, 2, 3\}$ e R: $S \rightarrow S$, definido pelos pares $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (3,1)\}$, podemos ter as seguintes representações:



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Tipos de endorrelações em S

Seja R uma relação binária em um conjunto S.

- R é REFLEXIVA se $\forall x \in S$ temos $(x, x) \in R$.

- R é SIMÉTRICA se $\forall x, y \in S$ temos
$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R.$$

- R é ANTISSIMÉTRICA se $\forall x, y \in S$ temos
$$(x, y) \in R \text{ e } (y, x) \in R \Rightarrow x = y.$$

- R é TRANSITIVA se $\forall x, y, z \in S$ temos
$$(x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$$

Em outras palavras:

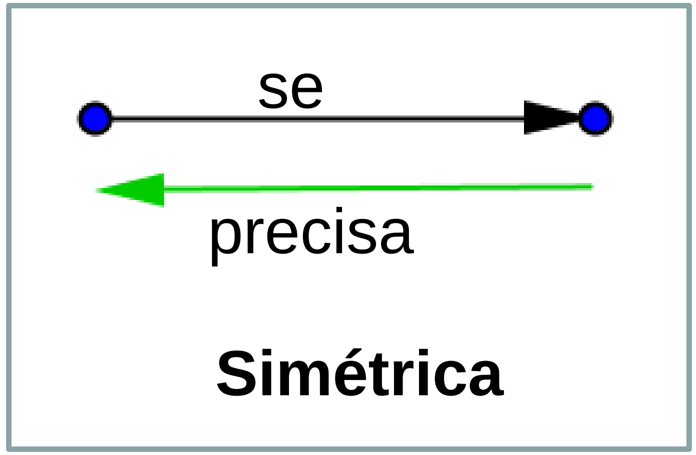
R <u>não</u> é reflexiva se $\exists x \in S$ tal que $(x, x) \notin R$.

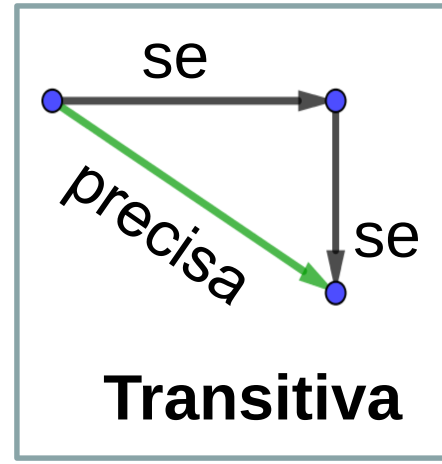
R <u>não</u> é simétrica se $\exists x, y \in S$ tais que
$(x, y) \in R$ mas $(y, x) \notin R$.

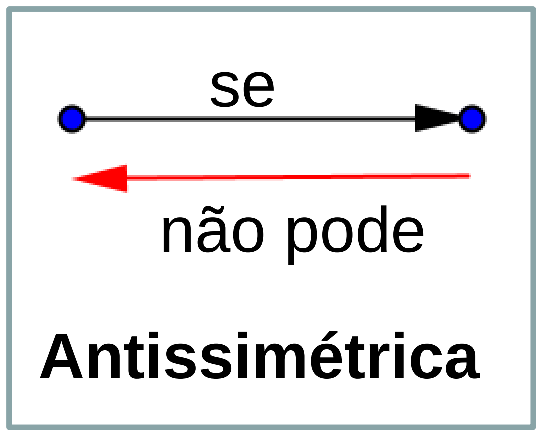
R <u>não</u> é antissimétrica se $\exists x, y \in S$ com
$x \neq y$ tais que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$.

R <u>não</u> é TRANSITIVA se $\exists x, y, z \in S$ tais que
$(x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R \text{ mas } (x, z) \notin R$.

RESUMO







Propriedades:

R é simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

R é antissimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \epsilon S\}$.

Exemplo A relação $\leq$ no conjunto $\mathbb{N}$ é:

- Reflexiva porque $\forall x \in \mathbb{N}, x \leq x$.
- Não é simétrica porque $3 \leq 4$ mas $4 \nleq 3$.
- Antissimétrica porque $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$.
- Transitiva porque $x \leq y$ e $y \leq z$ implica que $x \leq z$.

(Por exemplo: $3 \leq 4$ e $4 \leq 7$ e $3 \leq 7$.)

OBS: Uma relação pode ser simétrica e antissimétrica.

Exemplo:

Sendo $S = \{0,1\}$ e $xRy \leftrightarrow x = y^2$,

$$R = \{(0,0), (1,1)\}$$

Isto é, $\forall x \in S$, $(x, x) \in R$. Logo, S é simétrica.

R não possui elementos da forma (x, y) com $x \neq y$. Logo, S é automaticamente antissimétrica.

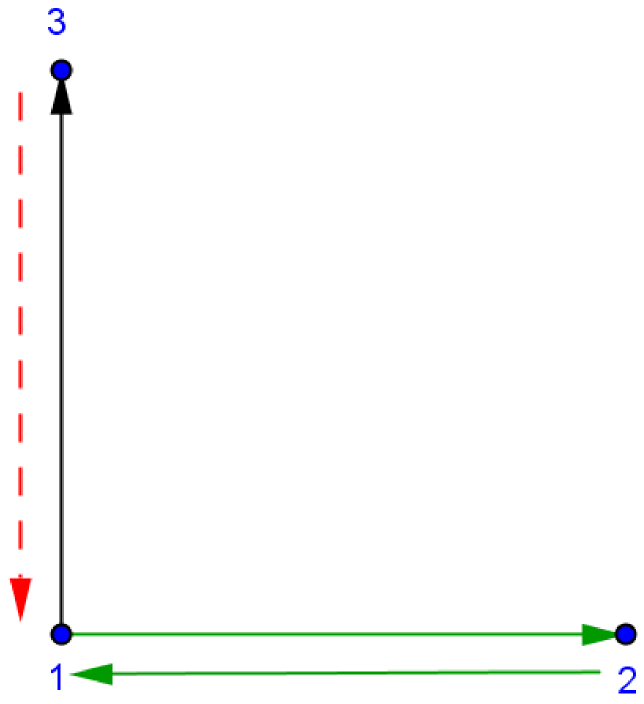
OBS: Uma relação pode não ser simétrica e nem antissimétrica.

Exemplo:

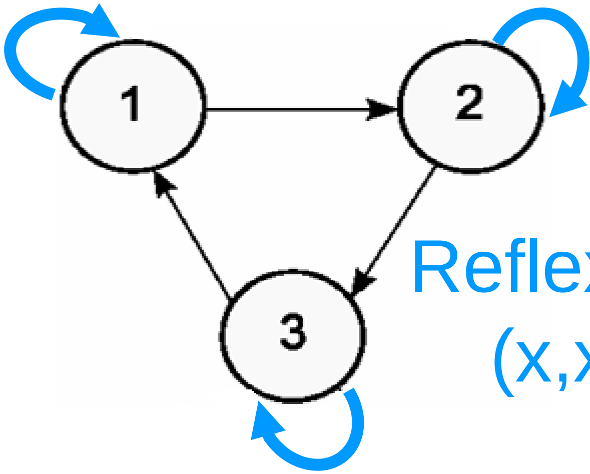
Sendo $S = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1,2), (2,1), (1,3)\}$

Não é simétrica: $(1,3) \in R$ mas $(3,1) \notin R$.

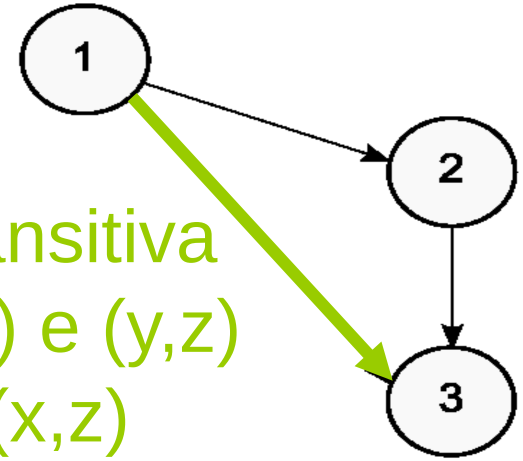
Não é antissimétrica: $(1,2), (2,1) \in R$ mas $1 \neq 2$.



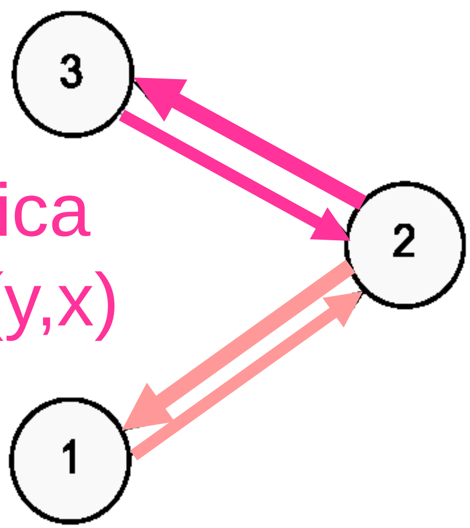
Exercício 1: Sendo S = {1, 2, 3} e R: S → S, construa a matriz de cada relação.



Reflexiva
(x,x)

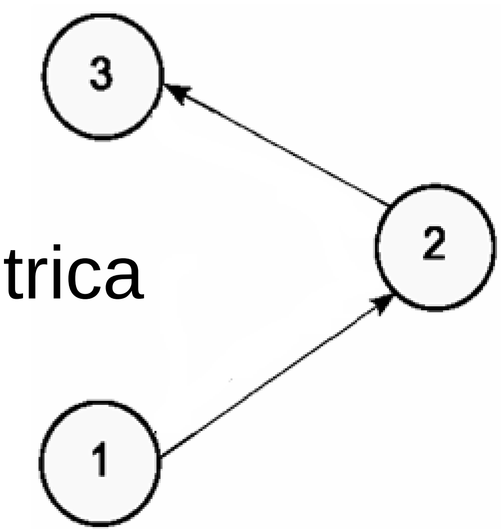


Transitiva
(x,y) e (y,z)
(x,z)



Simétrica
(x,y) e (y,x)

Antissimétrica



EXERCÍCIO 2 Seja $S = \{0,1,2,4,6\}$. Teste se as relações binárias em S a seguir são reflexivas, simétricas, antissimétricas ou transitivas. Construa a matriz da relação de cada relação e represente-as por meio de um grafo.

a) $R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6), (0,1), (1,2), (2,4), (4,6)\}$

b) $R = \{(0,1), (1,0), (2,4), (4,2), (4,6), (6,4)\}$

c) $R = \{(0,1), (1,2), (0,2), (2,0), (2,1), (1,0), (0,0), (1,1), (2,2)\}$

d) $R = \emptyset$

EXERCÍCIO 3 Seja $S = \mathbb{Z}_+$ e R, a relação de divisibilidade $xRy \leftrightarrow x \mid y$. Mostre que esta relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva, mas não é simétrica.

Definição: Seja *R* uma relação num conjunto *S*.

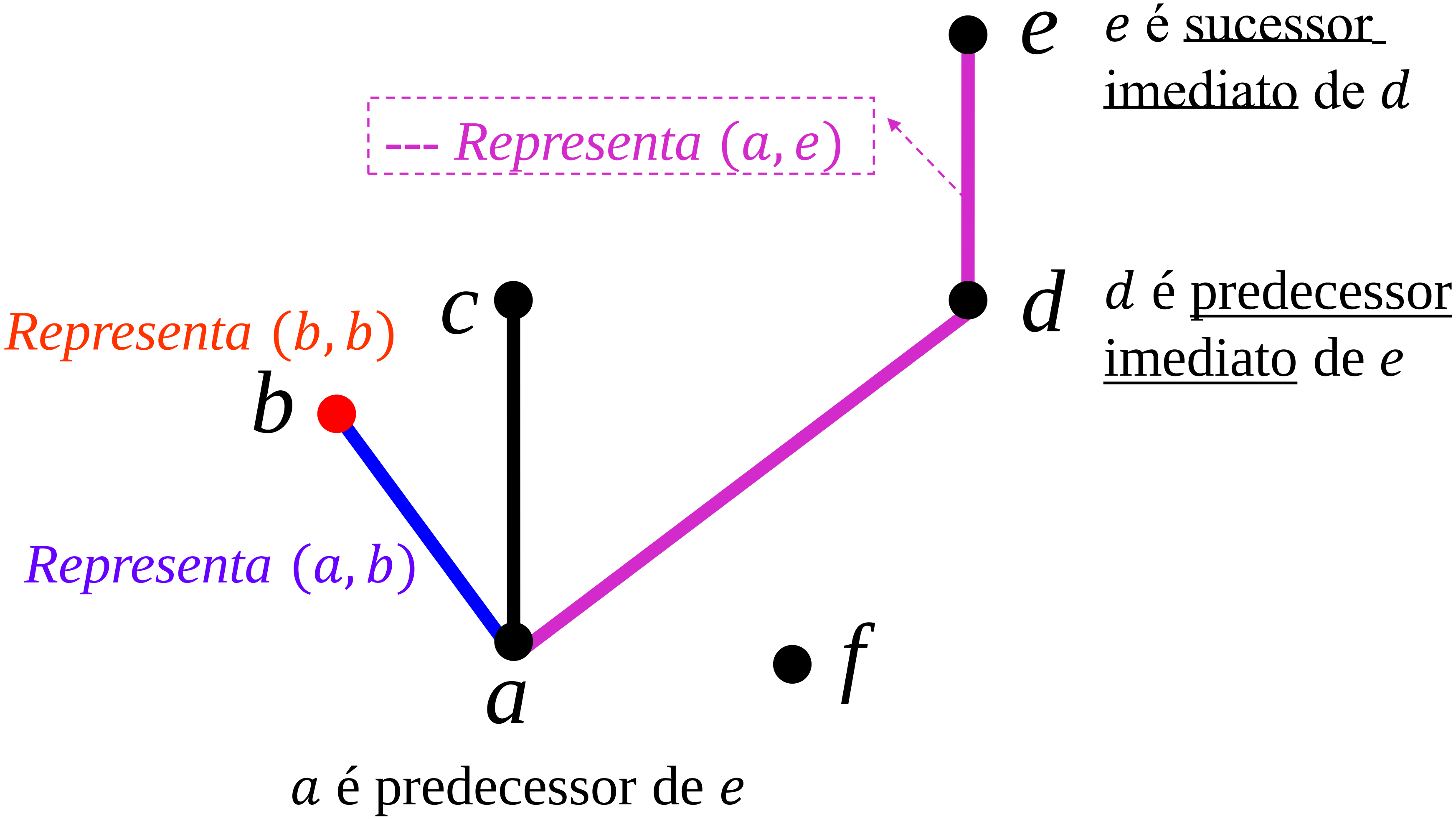
- Se *R* é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva (RST) então *R* é uma relação de equivalência.

- Se *R* é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva (RAT) então *R* é uma relação de ordem parcial em *S* e *S* é chamado conjunto parcialmente ordenado (PO).
- Estas relações podem ser representados por um diagrama de Hasse.

Diagrama de Hasse - Exemplo

$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$

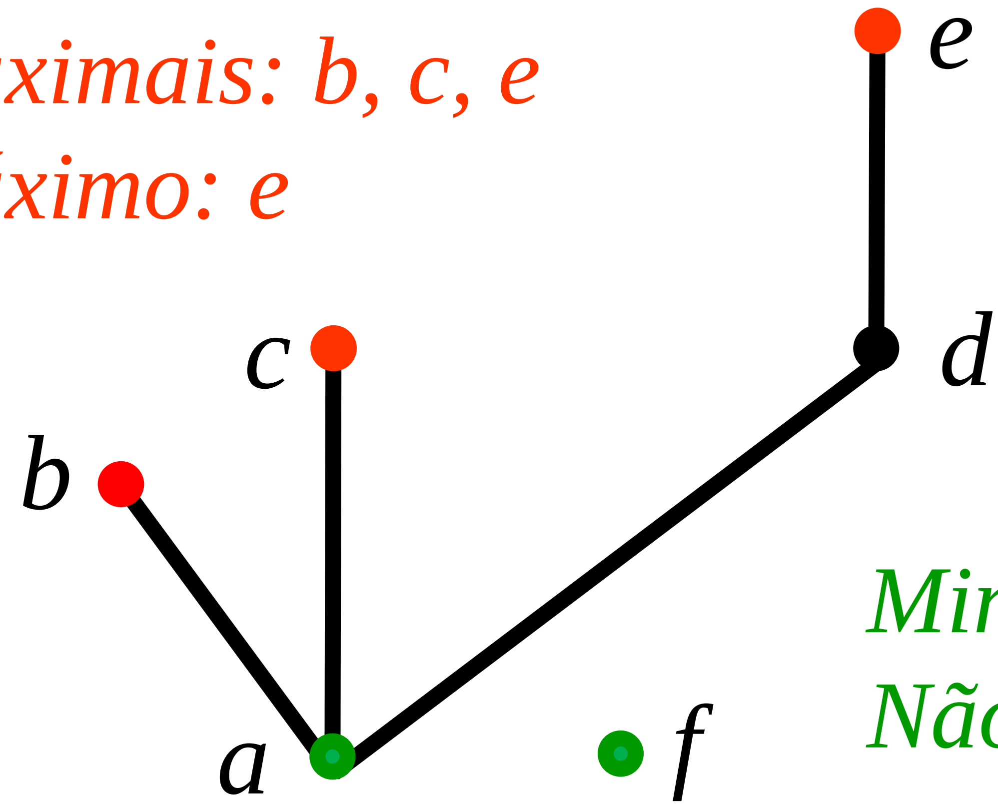
$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f),$$
$$(a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (d,e)\}$$



Elementos Maximais / Minimais

Maximais: b, c, e

Máximo: e



Minimais: a, f

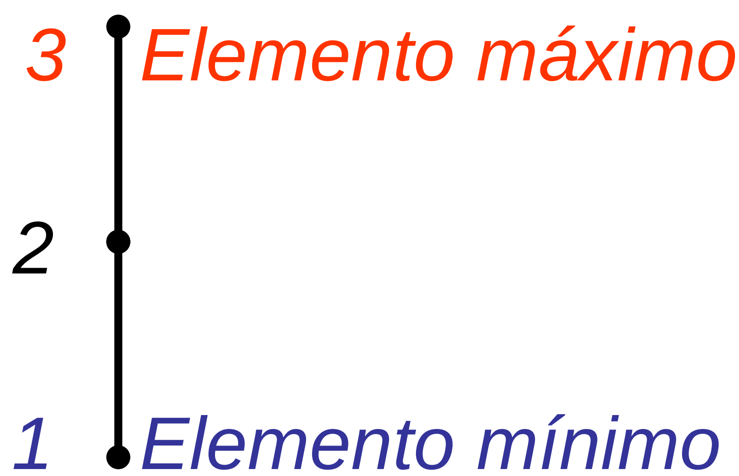
Não existe mínimo

Hasse para Ordem Total ou Cadeia

$$S = \{1,2,3\} \qquad\qquad xRy \leftrightarrow x \leq y$$

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

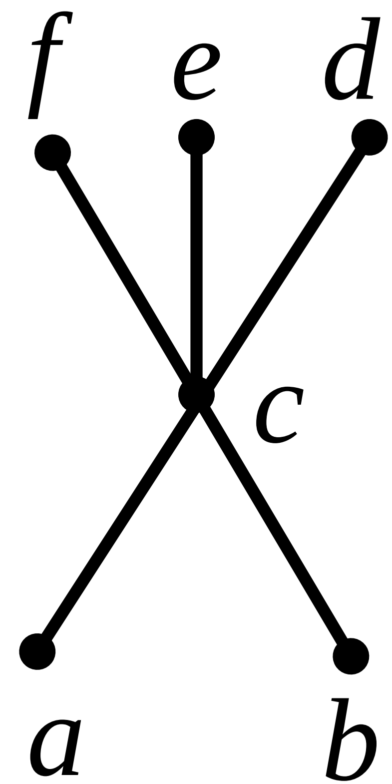
Já foi visto que esta relação é RAT.



Todo elemento está relacionado a todos os outros. Então R é relação de ordem total ou cadeia.

Exercício 4

Seja $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ e a relação definida pelo diagrama de Hasse ao lado.

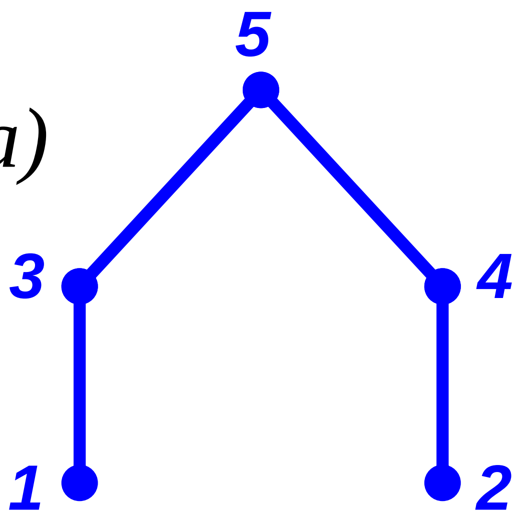


a) Verificar a existência de máximo, mínimo e elementos maximais e minimais.

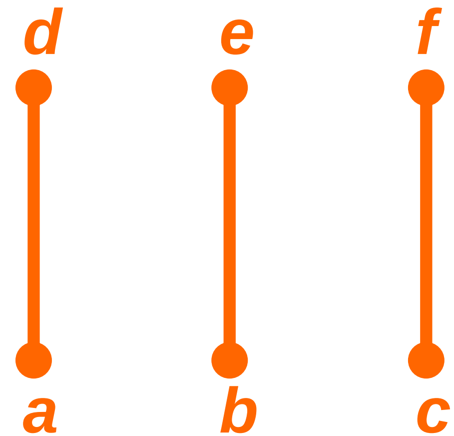
b) Determinar os subconjuntos de S com três elementos totalmente ordenados.

Exercício 5 Para cada um dos diagramas de Hasse abaixo, liste os pares ordenados que pertencem à relação de ordem correspondente.

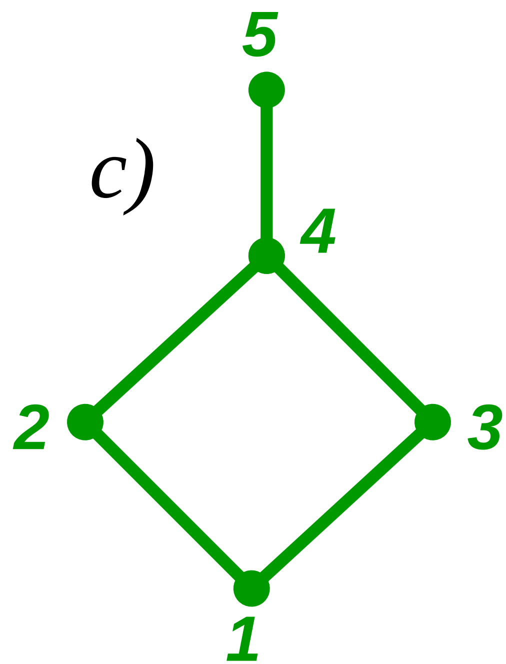
a)



b)



c)



Referências

- LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. Matemática Discreta. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.(https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837781)
- MENEZES, Paulo Blauth. Matemática Discreta para Computação e Informática. Col. Livros Didáticos, V.16. Bookman, 2008. (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600252)
- GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MENEZES, Paulo Blauth et. al. **Aprendendo Matemática Discreta com Exercícios.** Vol. 19. São Paulo: Artmed Editora S.A., 2009. (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577805105)

Rosen, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicações.** 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda. , 2009 (https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788563308399)