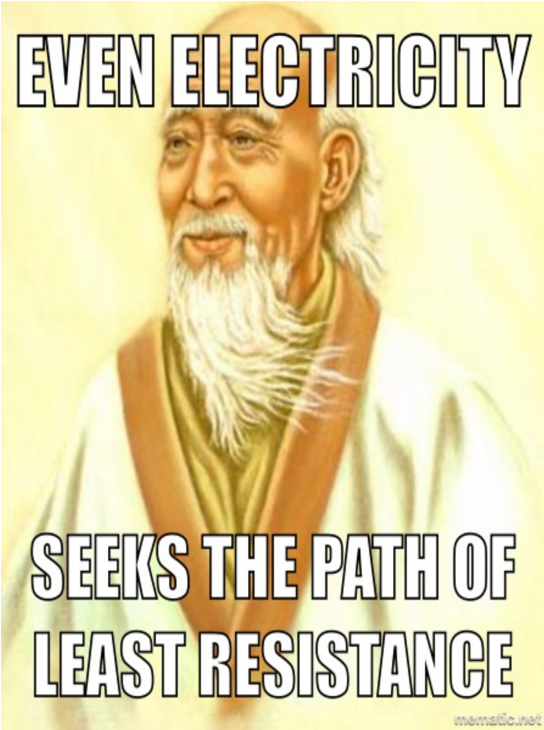


CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Problemas resolvidos

IV

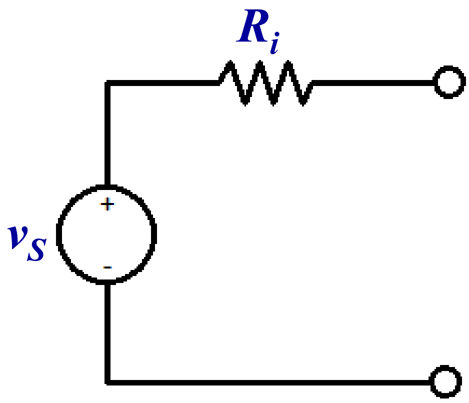
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

1 – Efectuaram-se as seguintes medições de tensão aos terminais de uma fonte de alimentação DC de laboratório:

- ***75V*, com a fonte em aberto;**
- ***60V*, tendo-se ligado previamente uma resistência de *20Ω* entre os terminais da fonte.**

Com base nestes dados, calcule o equivalente de Thévenin da fonte de alimentação.

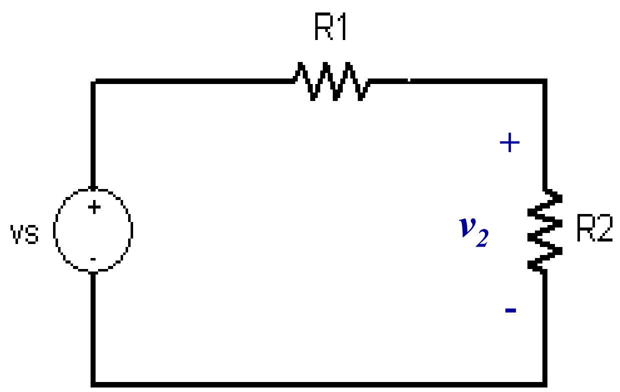
Como sabemos, uma fonte de tensão real pode representar-se pelo circuito…



… que tem, portanto, a mesma forma que o equivalente de Thévenin dessa fonte, com $v_T = v_S$ e $R_T = R_i$.

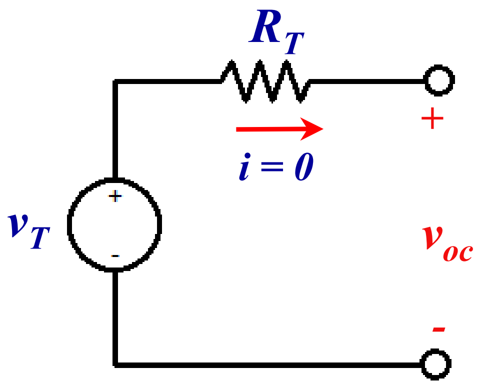
Antes de prosseguir, recordemos, mais um vez, o omnipresente e infinitamente recorrente, divisor de tensão ☺ …

Divisor de tensão



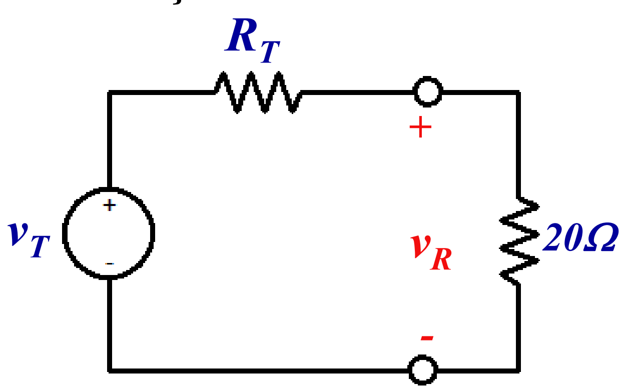
$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Medição em circuito aberto: *75V*



$$v_{oc} = 75V = v_T$$

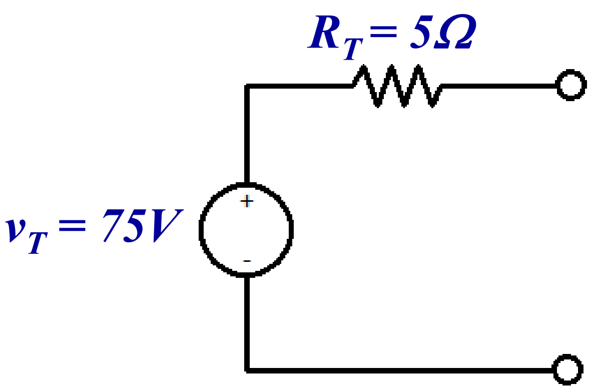
Medição com resistência de *20Ω*: *60V*



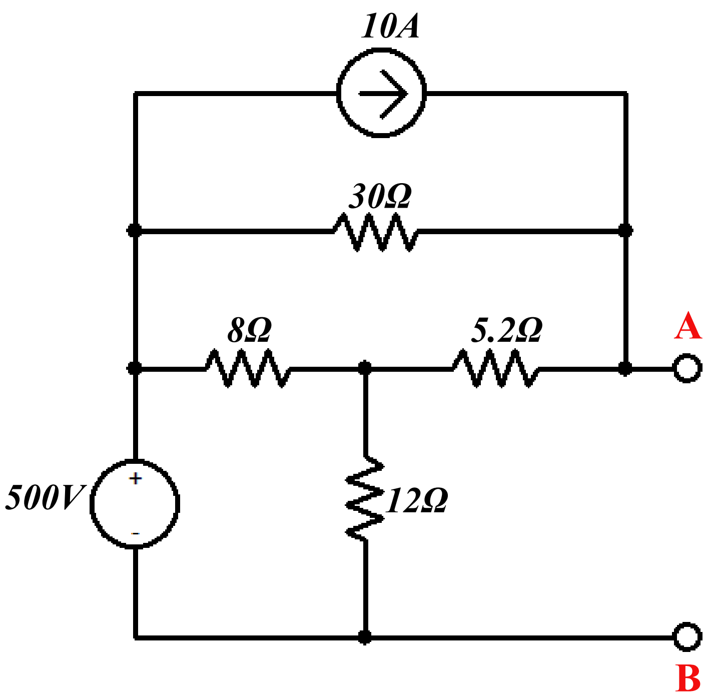
$$v_R = \frac{20}{R_T + 20} 75 = 60V$$

$$R_T = 5\Omega$$

O equivalente de Thévenin da fonte de alimentação é portanto.



2 – Calcule os equivalentes de Thévenin e de Norton entre os terminais A e B do circuito.

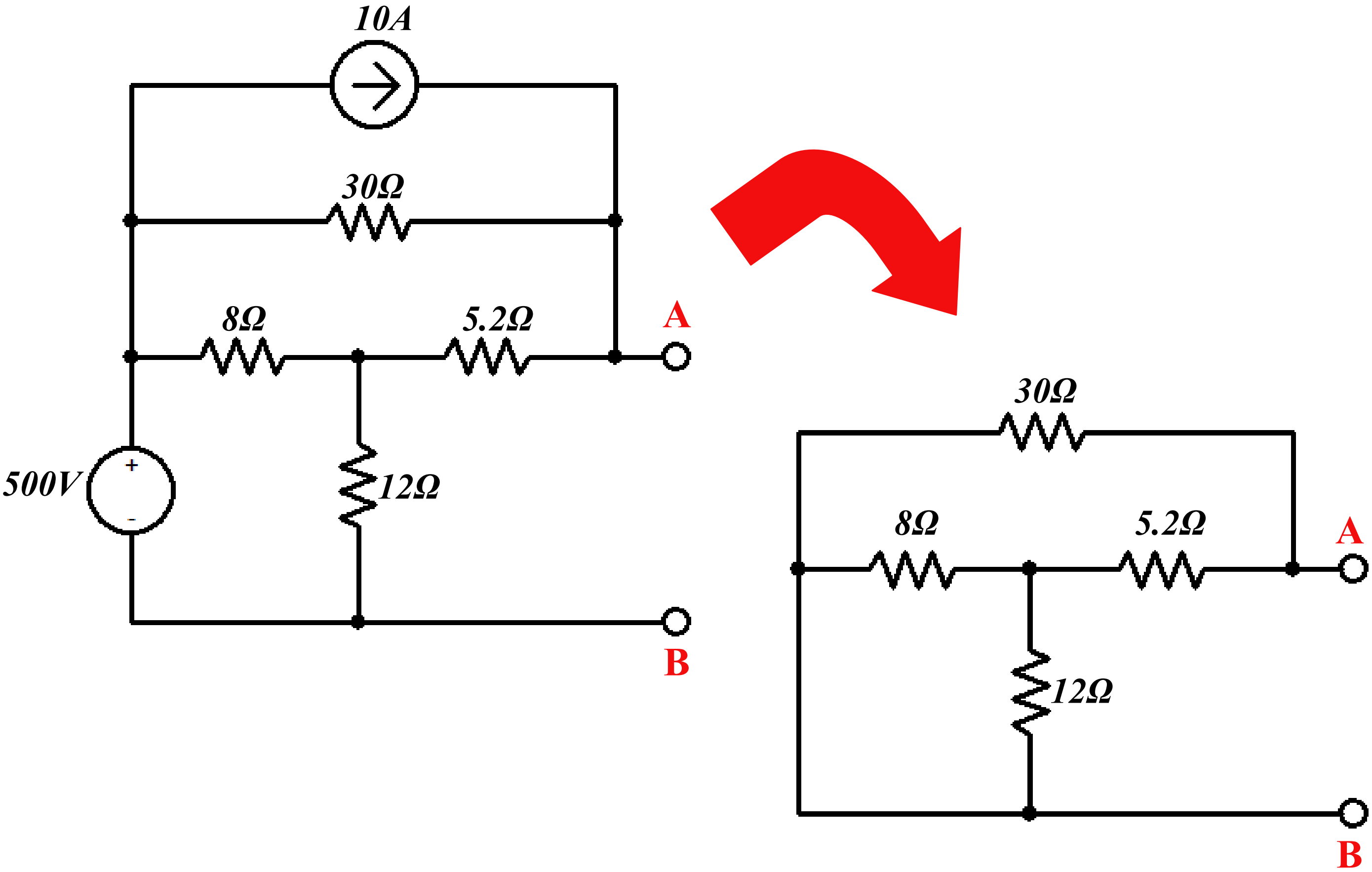


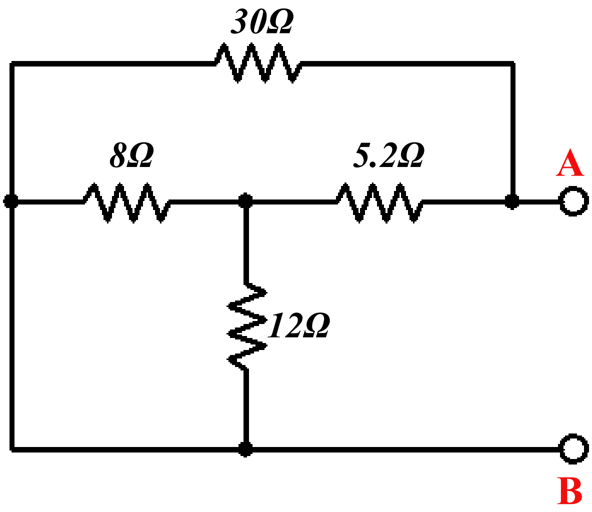
1º Passo: Comecemos por determinar a resistência de Thévenin (R_T) que é, como sabemos, igual à resistência de Norton (R_N).

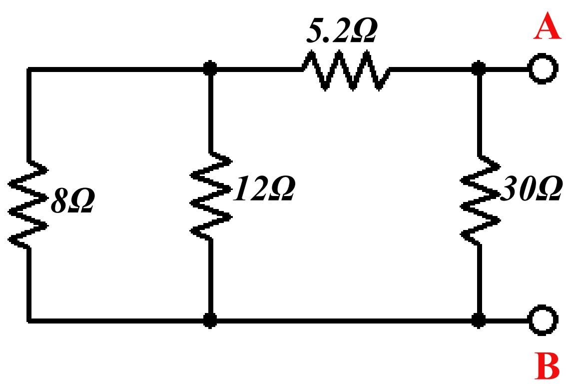
Segundo a definição, esta resistência é:

- ***a resistência equivalente vista aos terminais do circuito quando este é desativado, ou seja, quando todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).***

desactivando as fontes…







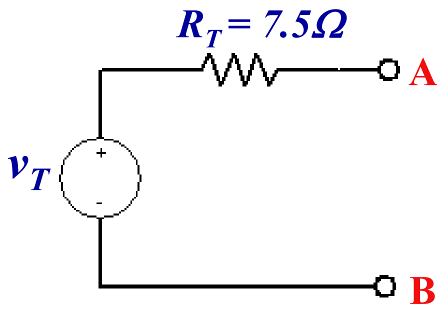
portanto

$$R_T = R_N = [(8//12)+5.2]//30$$

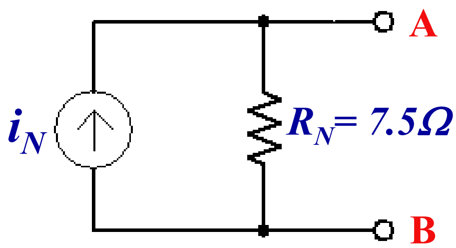
$$R_T = R_N = 7.5\Omega$$

2º Passo: calculo de ou v_T e i_N

Equivalente de Thévenin



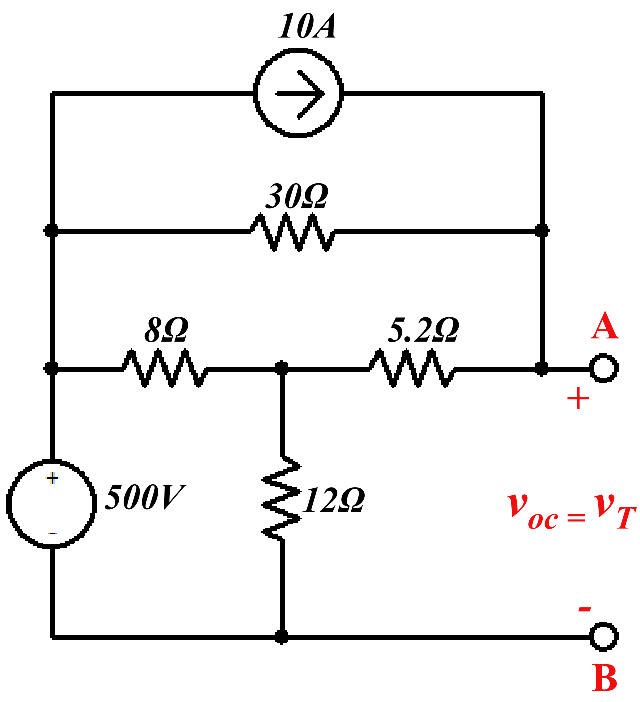
Equivalente de Norton



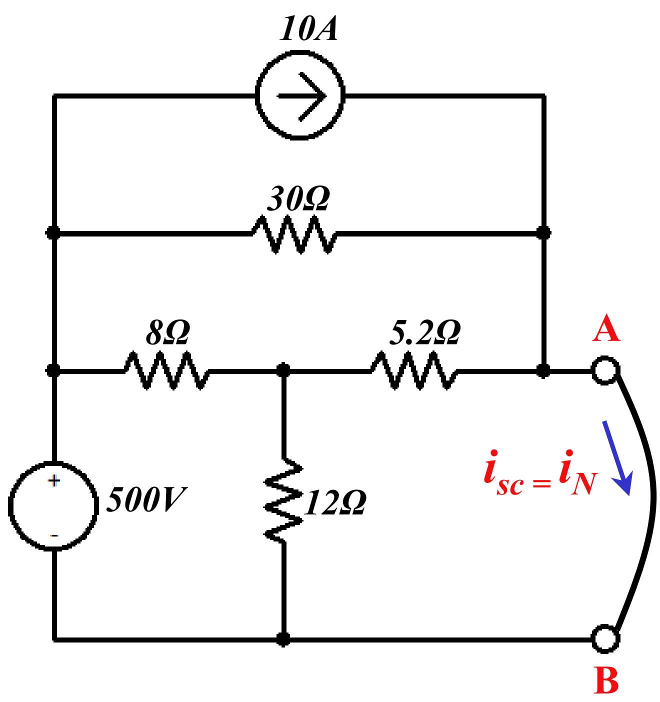
Sabemos que $i_N = v_T / R_T$

portanto, podemos optar por determinar ou v_T ou i_N … o que for mais fácil de obter!

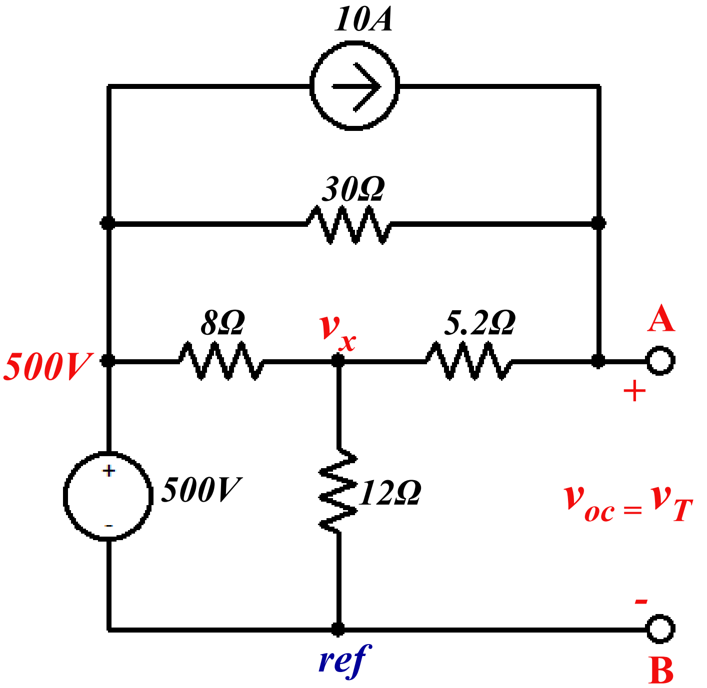
v_T é igual à tensão em circuito aberto



i_N é igual à corrente de curto-circuito



Calculemos a tensão em circuito aberto



Usando análise nodal

Nó v_x:

$$\frac{500 - v_x}{8} = \frac{v_x}{12} + \frac{v_x - v_T}{5.2}$$

Nó A:

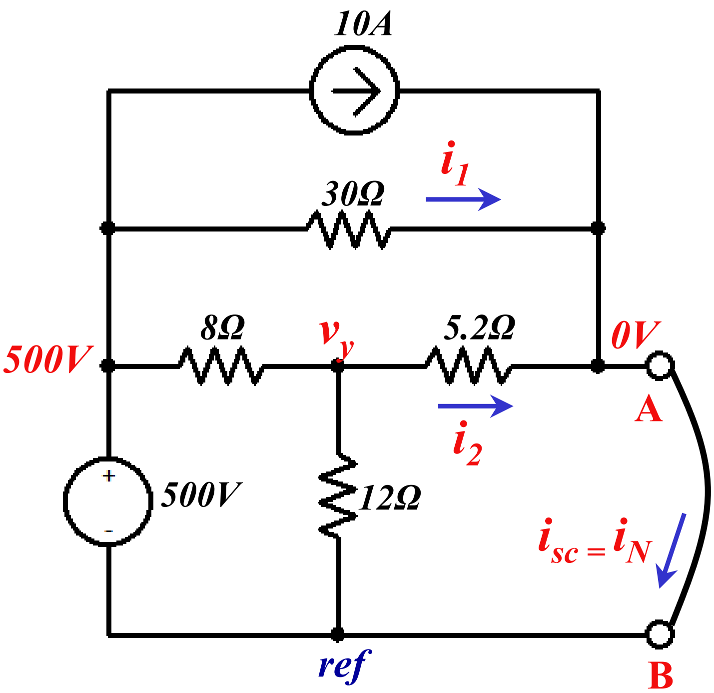
$$10 + \frac{500 - v_T}{30} + \frac{v_x - v_T}{5.2} = 0$$

Resolvendo…

$$v_x = 360V$$

$$v_T = 425V$$

O cálculo da corrente de curto-circuito seria, no entanto, mais fácil!…



$$i_N = 10 + i_1 + i_2$$

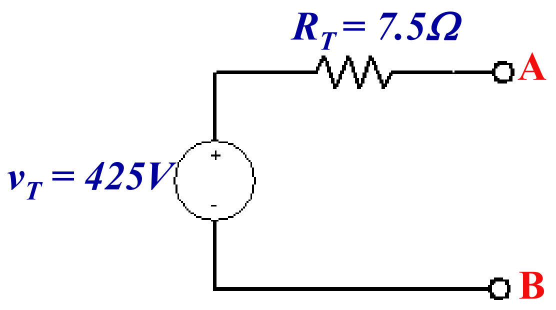
$$= 10 + \frac{500}{30} + \frac{v_y}{5.2}$$

$$v_y = \frac{5.2 // 12}{8 + (5.2 // 12)} 500 = 156.1V$$

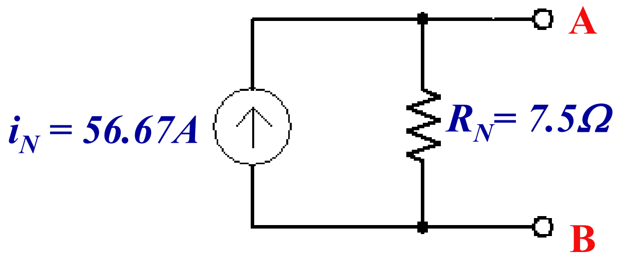
$$i_N = 56.67A$$

Os equivalentes de Thévenin e de Norton são portanto

Equivalente de Thévenin



Equivalente de Norton



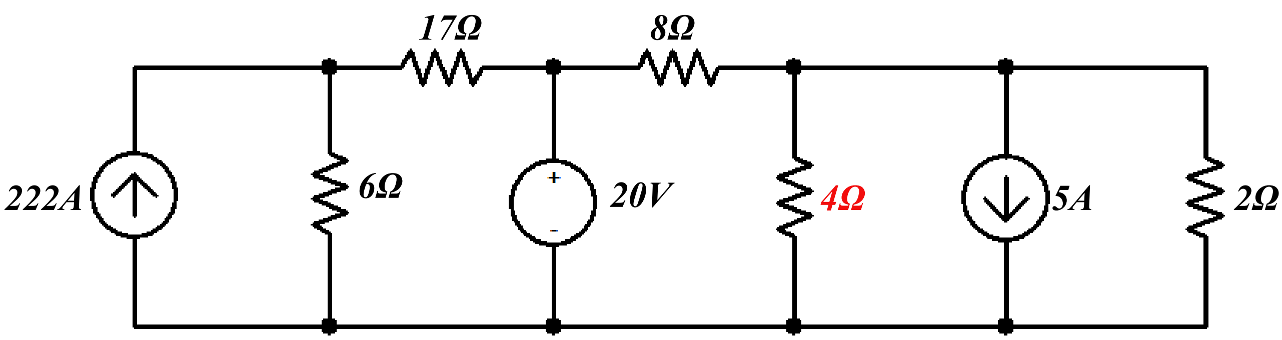
Notar que, como era de esperar, verifica-se $i_N = v_T / R_T$

Nota: Neste problema fizemos duas análises separadas para obter v_T e i_N mas em geral basta calcular um destes valores. O outro obtém-se usando a relação acima.

3 – Calcule:

a) **A potência dissipada na resistência de 4Ω;**

b) **O novo valor que esta resistência deve ter de forma a que dissipe, neste circuito, a potência máxima.**

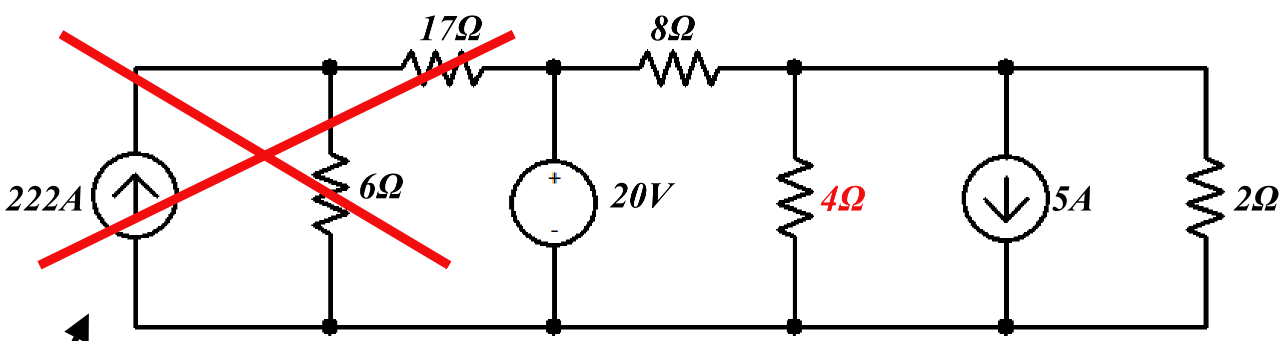


Dado que

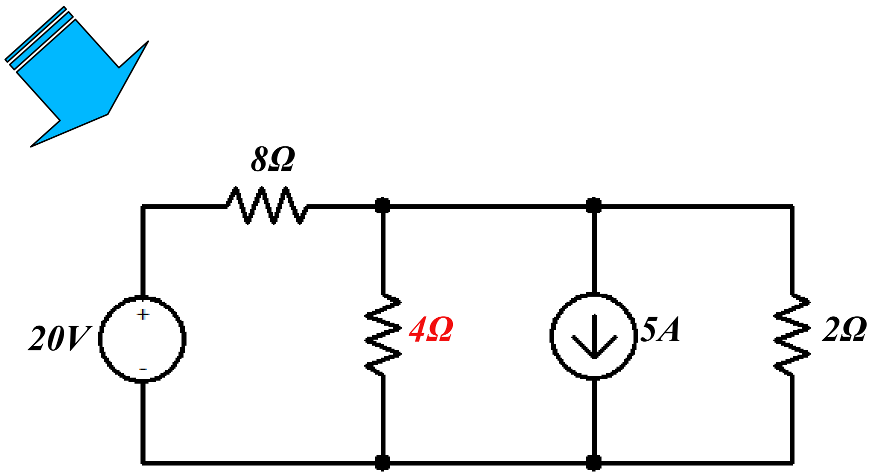
- ➢ **as duas alíneas do problema se referem à resistência de 4Ω;**
- ➢ **uma delas remete para o Teorema da Máxima Transferência de Potência…**

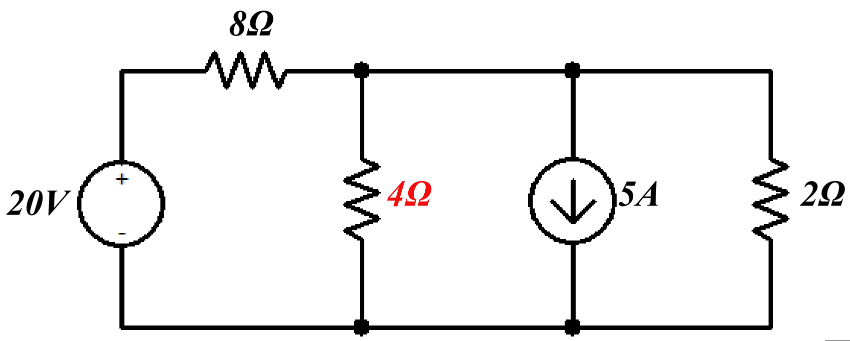
… a melhor estratégia passa por determinar primeiro o Equivalente de Thévenin visto por esta resistência.

Começemos por simplificar o circuito…

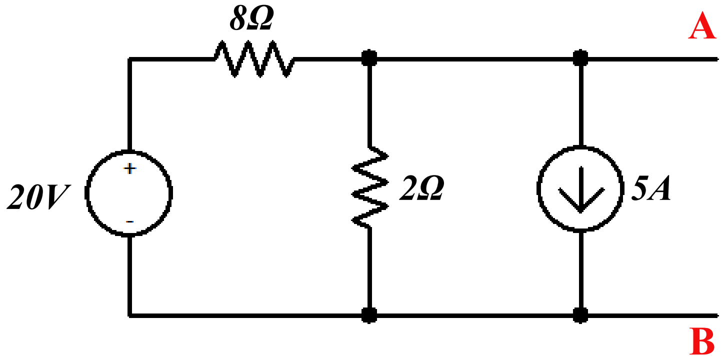


Elementos em paralelo com fontes de tensão não têm influência no resto circuito!



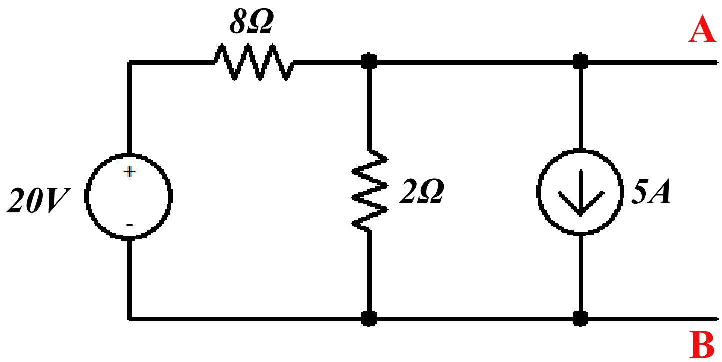


Este é o circuito *visto* pela resistência de 4Ω



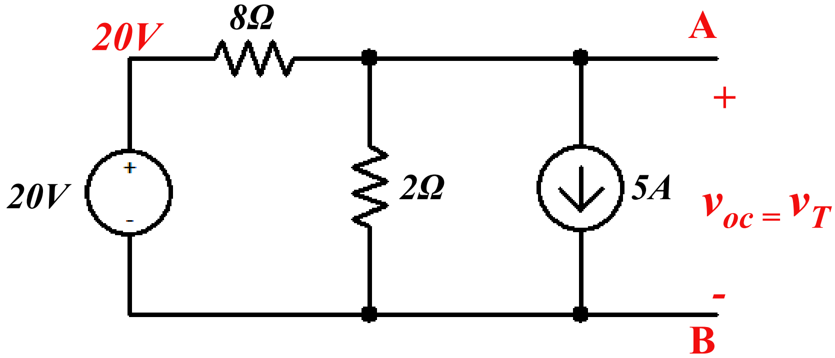
Vamos portanto calcular o Equivalente de Thévenin entre A e B

Resistência equivalente



$$R_T = 8 // 2 = 1.6\Omega$$

Tensão em circuito aberto



Nó *A*:

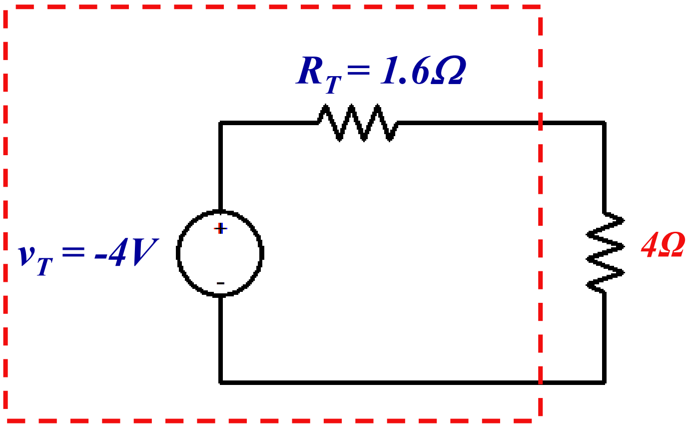
$$\frac{20 - v_T}{8} = \frac{v_T}{2} + 5$$

Resolvendo…

$$v_T = -4V$$

Com o Equivalente de Thévenin é agora muito fácil responder às questões:

Equivalente de Thévenin

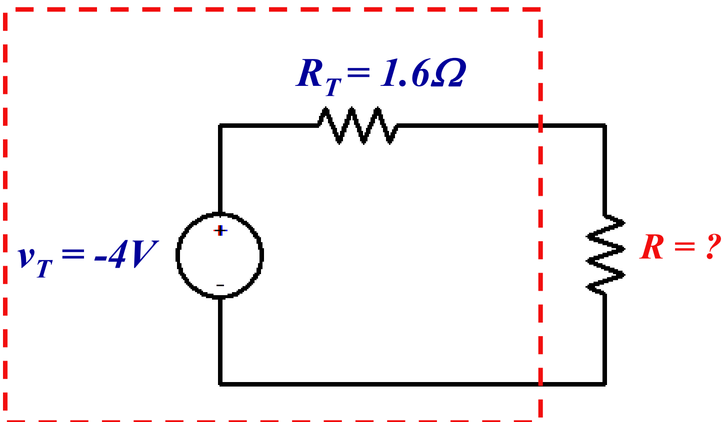


a) A potência dissipada na resistência de 4Ω ?

$$P = RI^2$$
$$= 4\left(\frac{-4}{4+1.6}\right)^2$$
$$= 2.04W$$

b) Novo valor da resistência de forma a que dissipe a potência máxima?

Equivalente de Thévenin



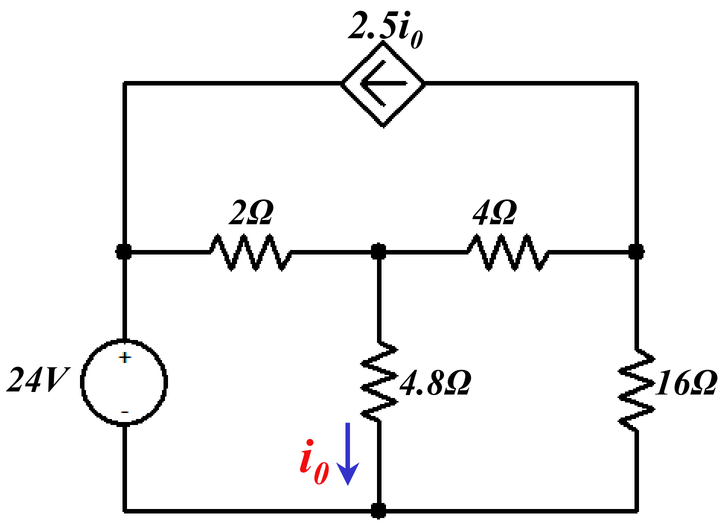
Teorema da máxima transferência de potência:
Uma fonte real de tensão com resistência interna R_S, fornece a potência máxima quando a resistência de carga tem o valor $R_L = R_S$.

Portanto, o novo valor da resistência deve ser *1.6Ω*.

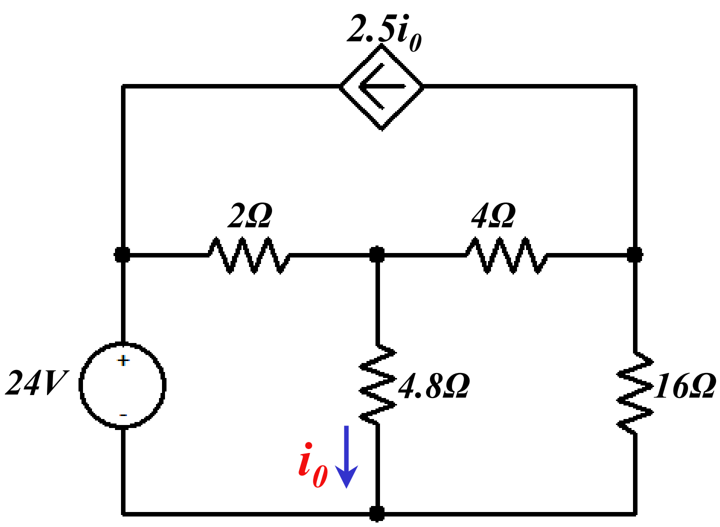
4 – Um amperímetro é usado para medir a corrente i_0, indicando o valor $2.1A$. Determine:

a) A resistência interna do amperímetro;

b) A percentagem de erro introduzida pelo amperímetro na medição.

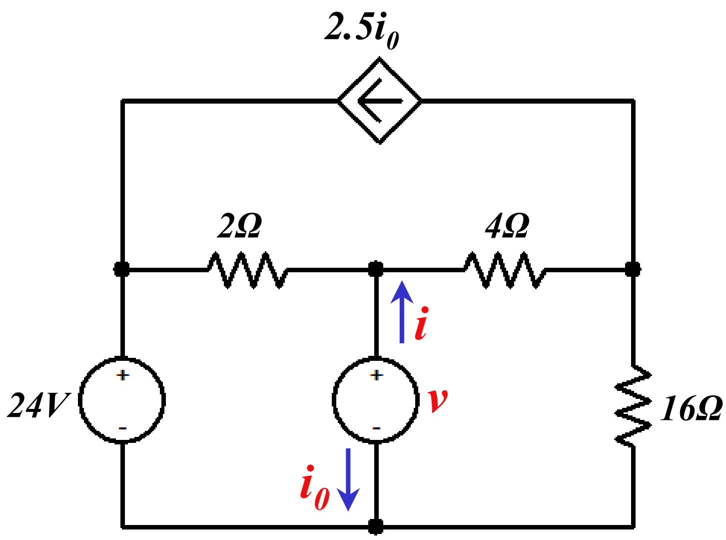


O problema diz respeito ao ramo onde está a resistência de 4.8Ω, portanto o melhor é começarmos por determinar o Equivalente de Thévenin visto por esta resistência.



Dado que o circuito inclui uma fonte dependente, vamos usar aqui o Método Universal, substituindo a resistência de 4.8Ω por uma fonte de tensão de teste, de valor v.

Aplicação do Método Universal



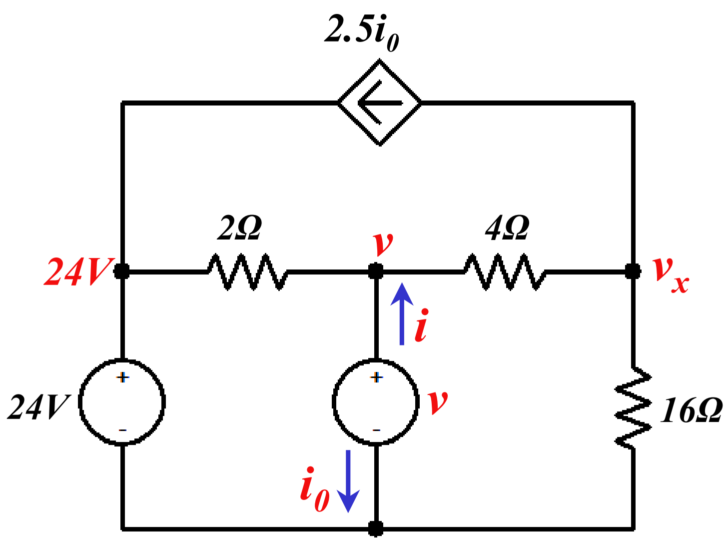
- Vamos então analisar o circuito de forma a obter uma expressão de v em função de i, com a forma

$$v = ai + b$$

- Dos coeficientes a e b concluiremos

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

Usando análise nodal…



Nó v: $$\frac{24-v}{2} + i = \frac{v-v_x}{4}$$

Nó v_x: $$\frac{v-v_x}{4} = 2.5i_0 + \frac{v_x}{16}$$

Sabendo que $i_0 = -i$ obtém-se

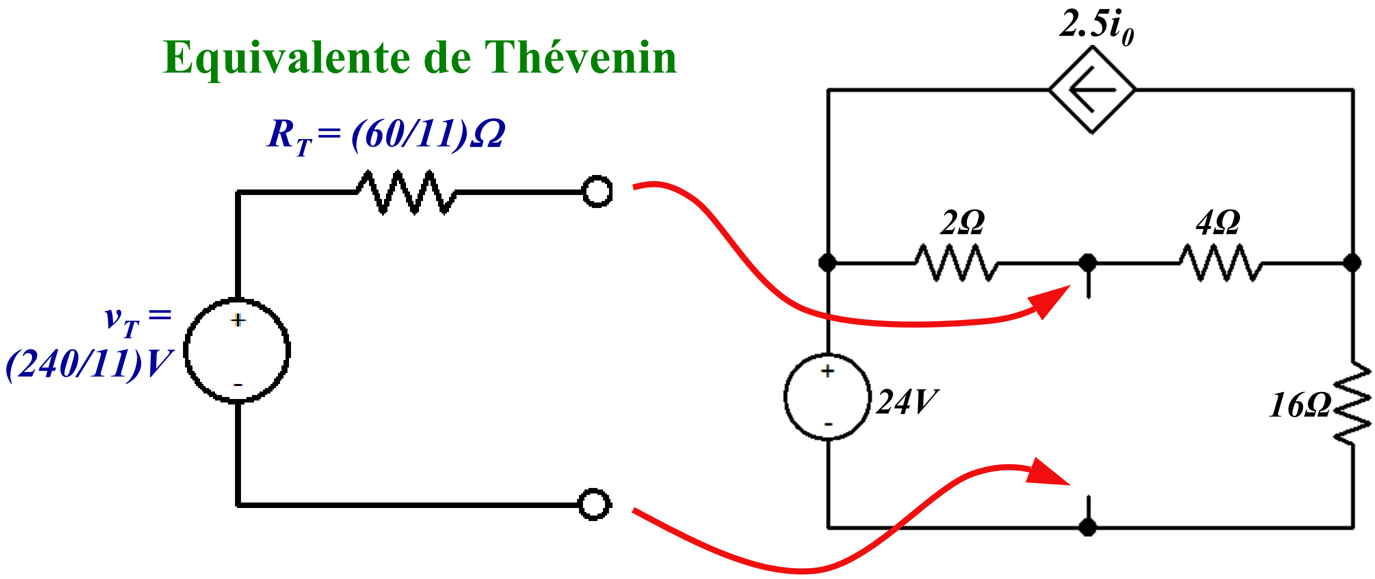
$$\begin{cases} v + 10i = \dfrac{5}{4}v_x \\ -3v + 4i = -v_x - 48 \end{cases}$$

Eliminando v_x, obtemos…

$$v = \frac{60}{11} i + \frac{240}{11}$$

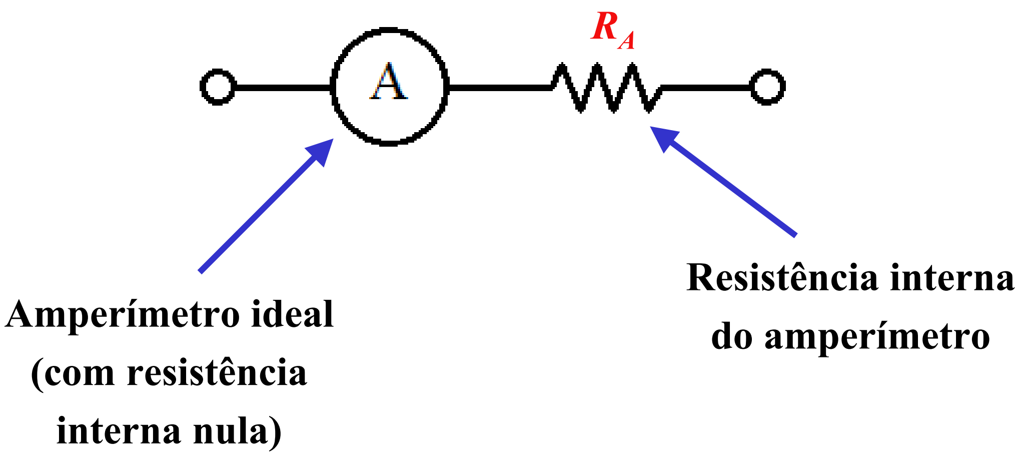
$$\boxed{\begin{array}{c} v = ai + b \\ R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b \end{array}}$$

Equivalente de Thévenin

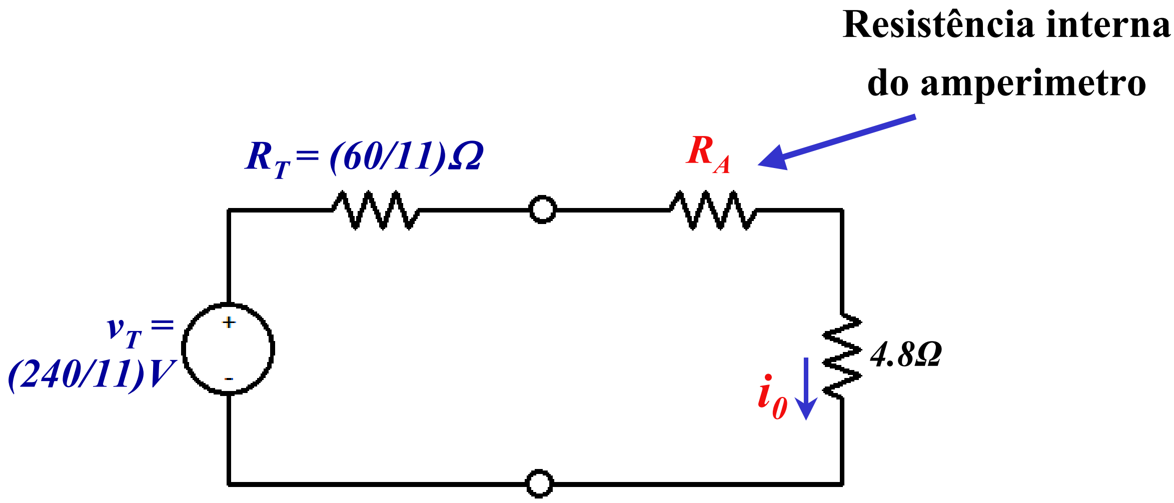


Modelo do amperímetro

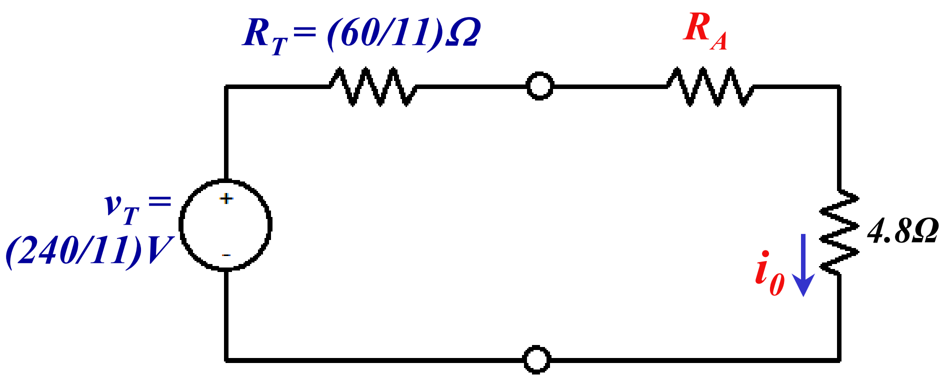
Podemos considerar que o amperímetro usado na medição é constituído por um amperímetro ideal em série com uma resistência.



Ligar o amperimetro em série com a resistência de *4.8Ω* no circuito original, é o mesmo que ligar este conjunto ao Equivalente de Thévenin determinado:



a)

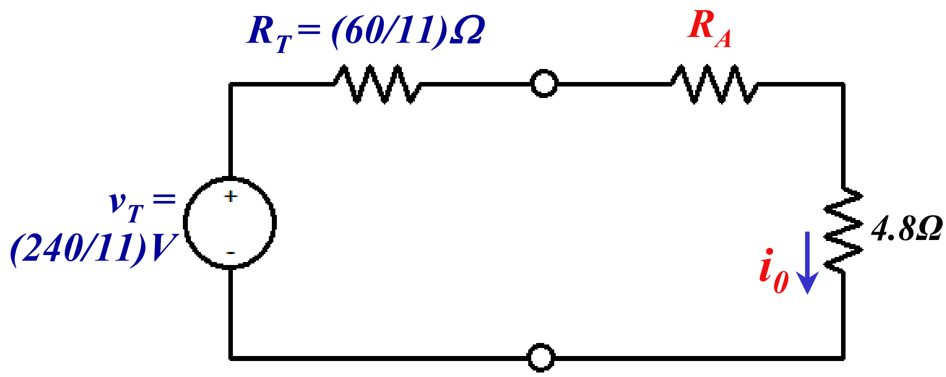


Nestas condições o valor medido de i_0 foi *2.1A*, portanto

$$\frac{240/11}{(60/11) + R_A + 4.8} = 2.1$$

$$R_A = 135m\Omega$$

b)

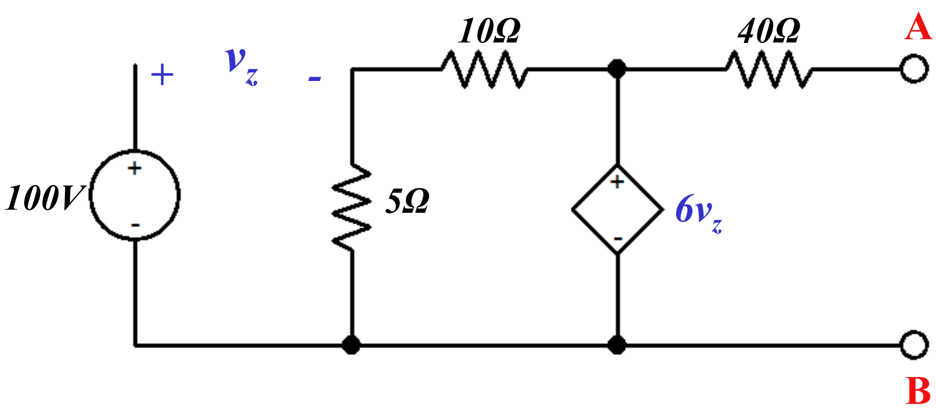


Sem o amperímetro presente no circuito o valor de i_0 seria

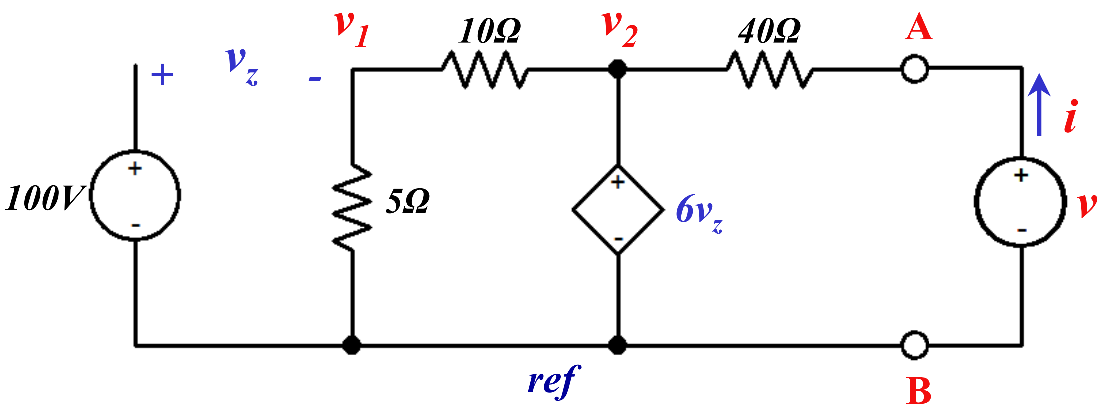
$$\frac{240/11}{(60/11)+4.8} = 2.13A$$

O erro introduzido pelo amperímetro é portanto $\frac{2.1-2.13}{2.13} = -0.014 \quad \rightarrow -1.4\%$

5 – Determine o equivalente de Thévenin entre os terminais A e B do circuito.



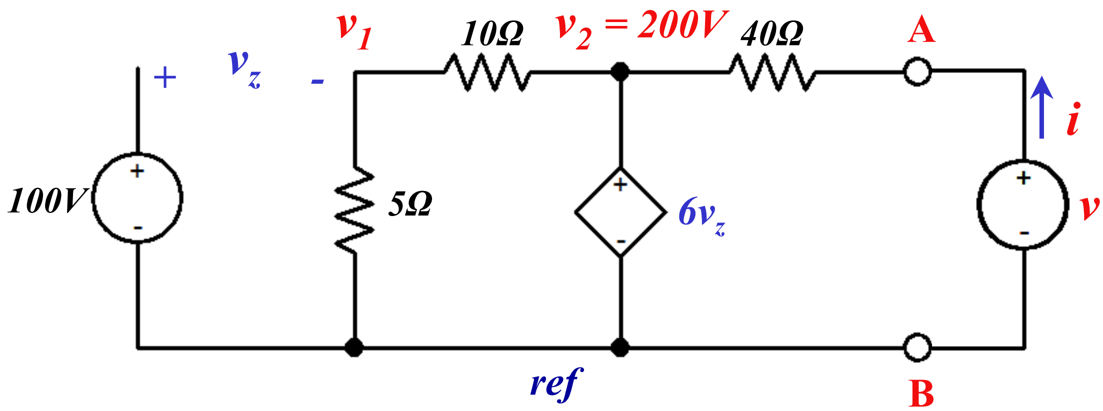
Como o circuito contém uma fonte dependente, vamos usar o Método Universal.



Por um lado: $$v_1 = \frac{5}{5+10} v_2 = \frac{v_2}{3}$$

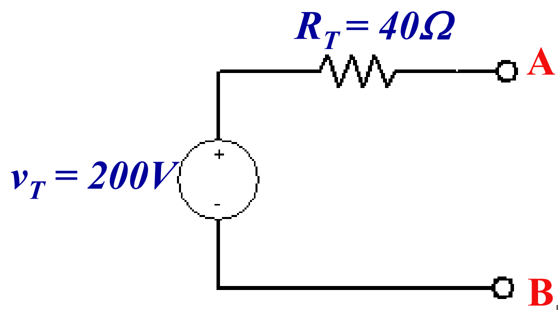
… e por outro: $$v_2 = 6v_z = 6(100 - v_1)$$

Conjugando as duas equações obtemos $v_2 = 200V$



$$i = \frac{v - 200}{40} \Leftrightarrow v = 40i + 200$$

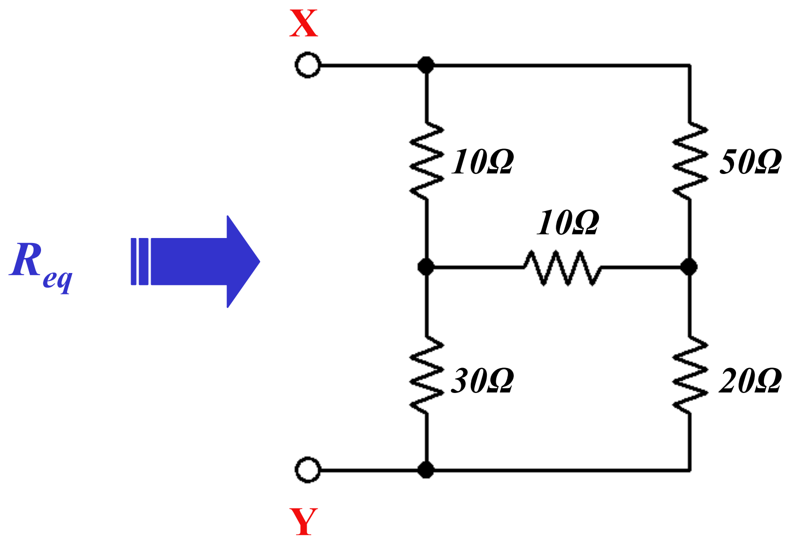
Equivalente de Thévenin



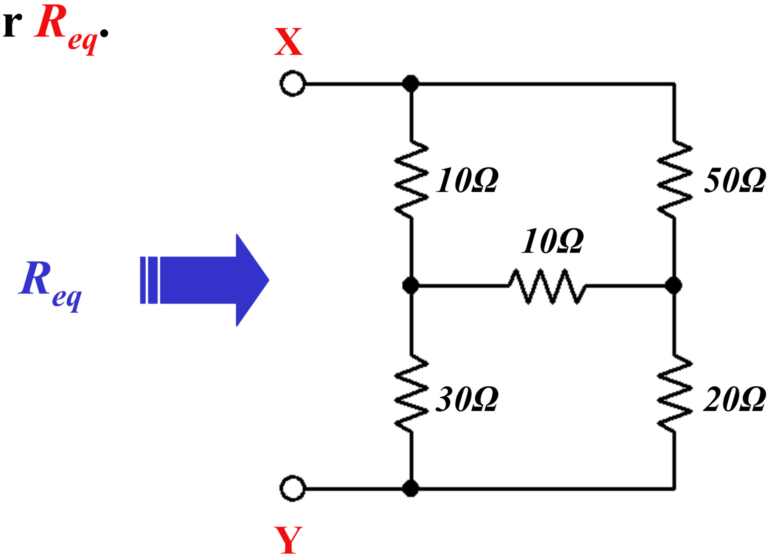
Portanto

$$v_T = 200V \quad R_T = 40\Omega$$

6 – Determine a resistência equivalente entre os terminais X e Y.



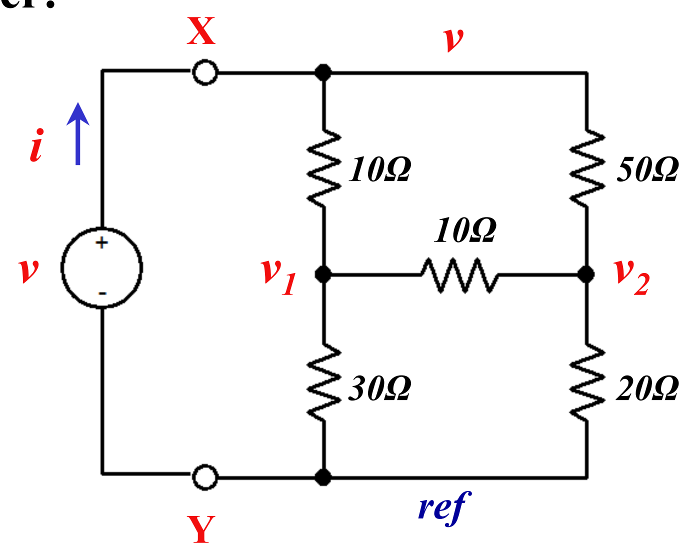
Note-se, antes de mais, que este circuito não permite associação de resistências em série ou em paralelo para obter R_{eq}.



Na prática, se tivéssemos que medir esta resistência, aplicaríamos uma tensão v entre os terminais X e Y, mediamos a corrente i e, finalmente, calcularíamos R_{eq} fazendo $R_{eq} = v/i$.

É isso mesmo que podemos fazer!

Usando análise nodal…



Nó v_1:

$$\frac{v_1}{30}+\frac{v_1-v_2}{10}+\frac{v_1-v}{10}=0$$

Nó v_2:

$$\frac{v_2}{20}+\frac{v_2-v_1}{10}+\frac{v_2-v}{50}=0$$

Usando KCL no nó inferior…

$$\frac{v_1}{30}+\frac{v_2}{20}=i$$

Eliminando as incógnitas v_1 e v_2 obtemos…

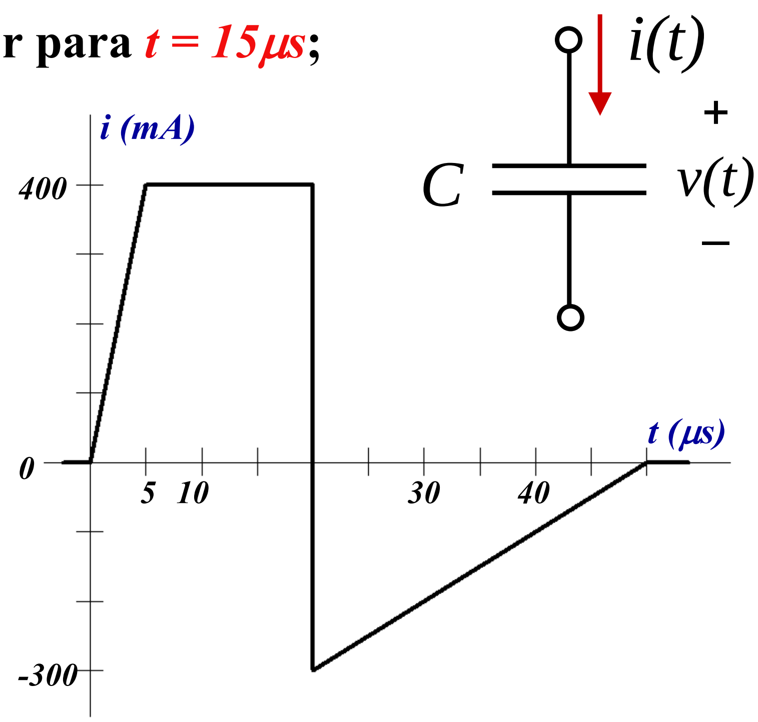
$$\frac{v}{i}=21.7\Omega=R_{eq}$$

7 – Um condensador de $0.25\mu F$ é percorrido pela corrente i do gráfico abaixo. Sabendo que $v(0) = 0$, calcule

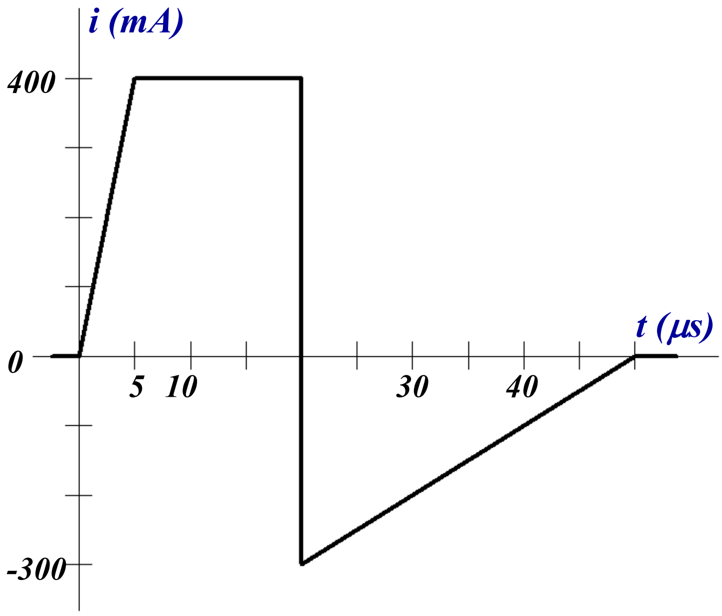
a) A carga no condensador para $t = 15\mu s$;

b) A tensão no condensador para $t = 30\mu s$;

c) A energia armazenada no condensador para $t > 50\mu s$.



- **A partir do gráfico dado poderíamos começar por exprimir algebricamente *i(t)*, integrando depois as equações correspondentes a cada intervalo de tempo, de forma a responder às questões pedidas.**



- **… mas uma maneira mais expedita de chegar lá é calculando áreas.**

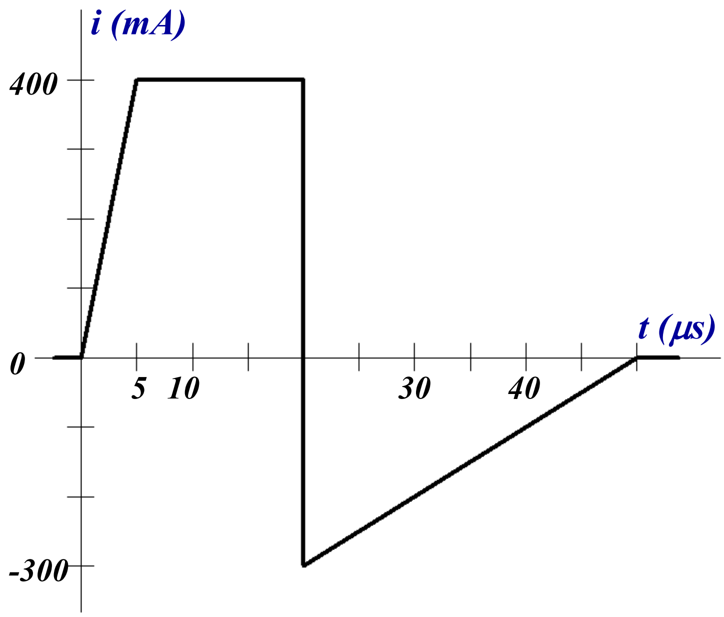
Vejamos:

a) $q(t = 15\mu s) = ?$

Num qualquer instante t_1 a carga no condensador pode ser calculada por

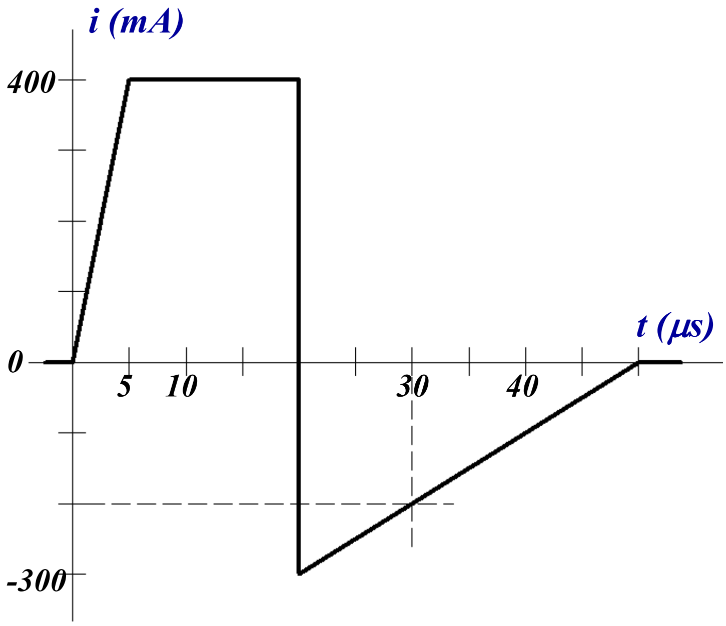
$$q(t_1) = \int_0^{t_1} i(t)dt + q(0)$$

Como $v(0) = 0$, então $q(0) = 0$ e a carga pode ser obtida calculando a área:



$$Área_{[0,15]} = \frac{5\text{x}400}{2} + (15-5)\text{x}400 = 5000nC = 5\mu C$$

b) $v(t = 30\mu s) = ?$



Num qualquer instante *t_1* a tensão no condensador é dada por

$$v(t_1) = \frac{1}{C}\int_0^{t_1} i(t)dt + v(0)$$

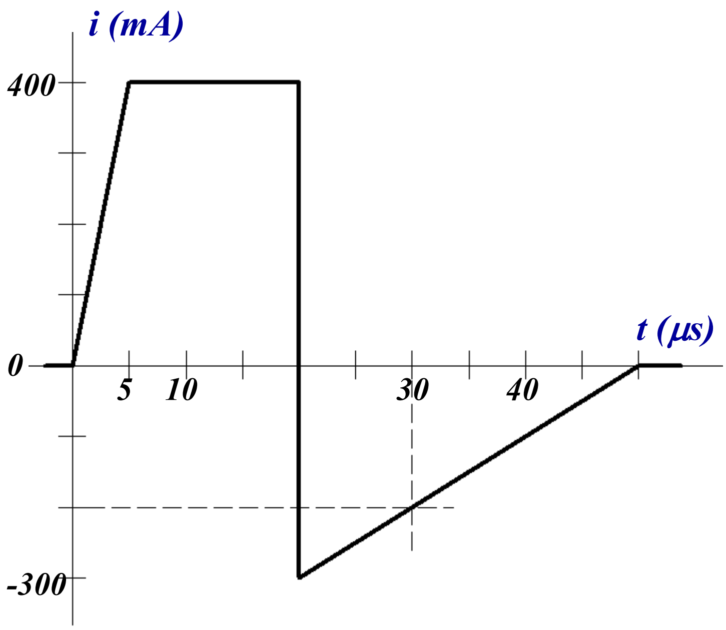
Calculamos então a *área de 0 a 30μs* :

$$Área_{[0,30]} = Área_{[0,15]} + (20-15)x400 - \left[(30-20)x200 + \frac{(30-20)x100}{2}\right]$$

$$Área_{[0,30]} = 4.5\mu C \qquad \rightarrow \qquad v(30\mu s) = \frac{4.5\mu C}{0.25\mu F} = 18V$$

Circuitos Eléctricos – 2019/2020

c) $E_C(t = 50\mu s) = ?$



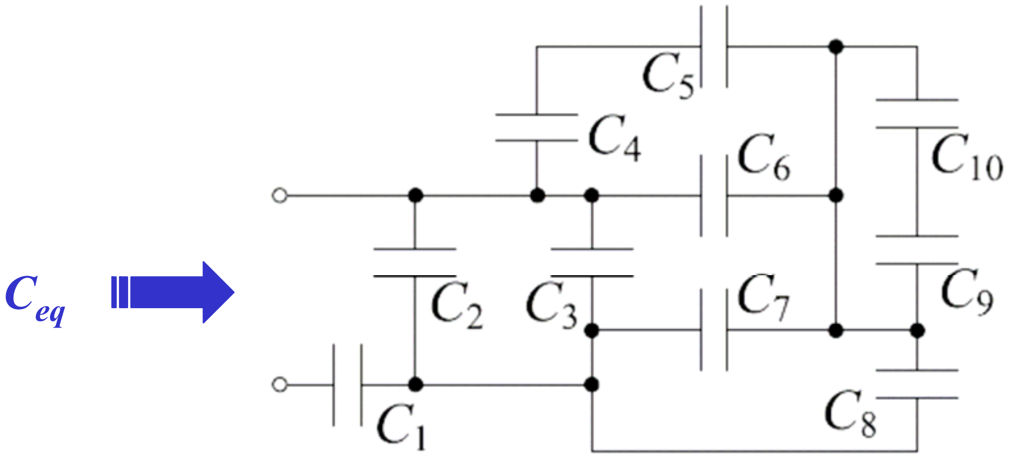
Calculamos *v(50μs)* pela área total

$$Área_{[0,50]} = Área_{[0,30]} - \frac{(50-30)x200}{2} = 2.5\mu C$$

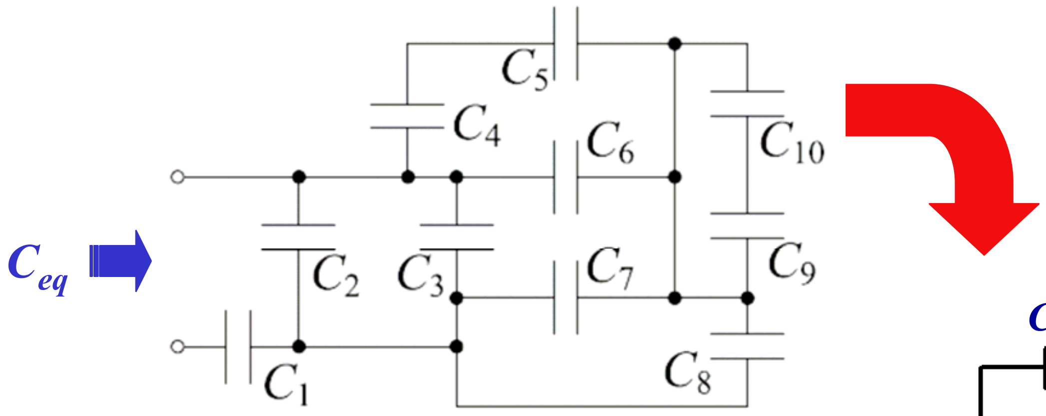
$$v(50\mu s) = \frac{2.5\mu C}{0.25\mu F} = 10V$$

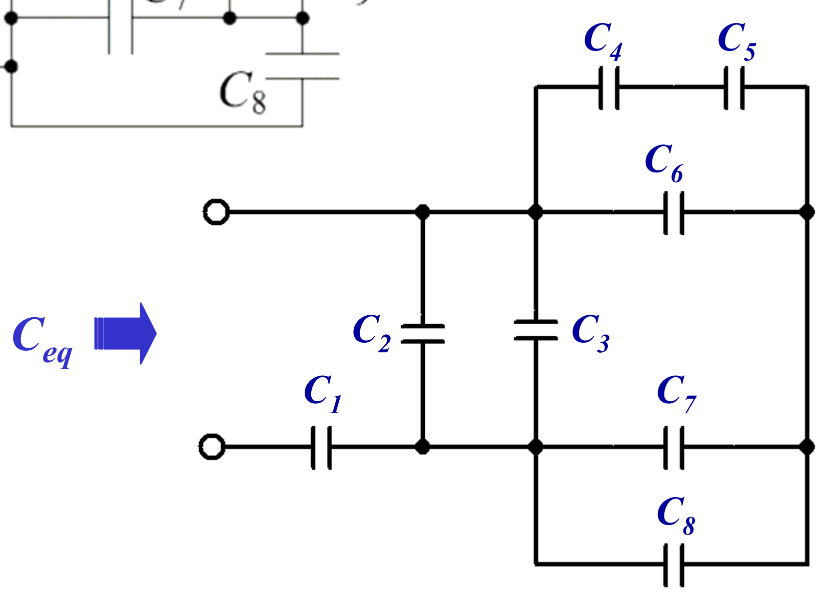
$$\rightarrow \qquad E_C(50\mu s) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}x0.25x10^2 = 12.5\mu J$$

8 – Determine o valor da capacidade equivalente no circuito abaixo. Todos os condensadores são de 1μF.

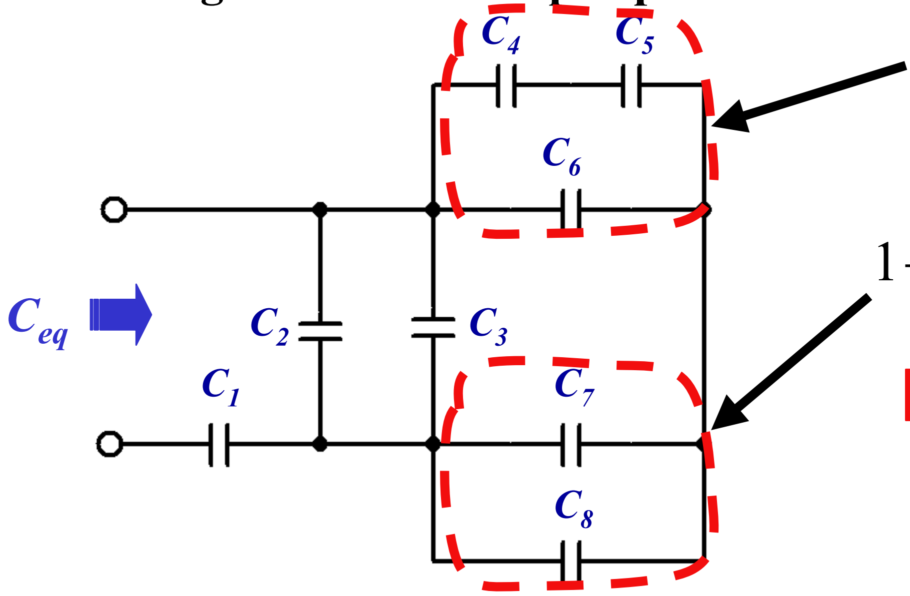


Como sempre, começamos por redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos…



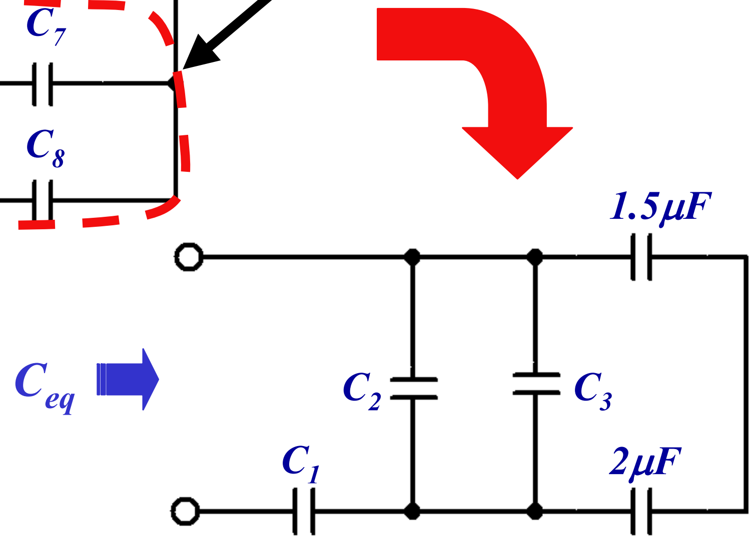


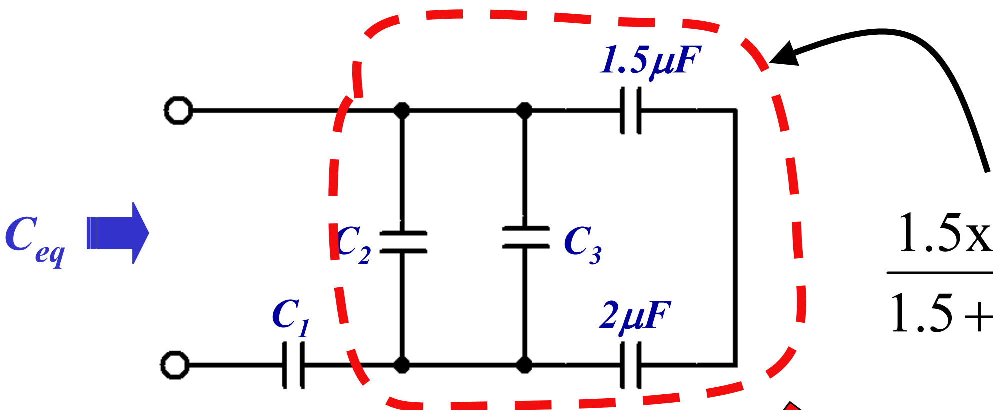
… e agora associamos por partes.



$$\frac{1\text{x}1}{1+1}+1=1.5\mu F$$

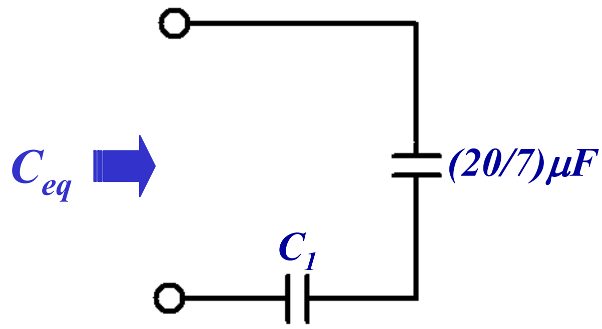
$$1+1=2\mu F$$





$$\frac{1.5\text{x}2}{1.5+2}+1+1=\frac{20}{7}\mu F$$

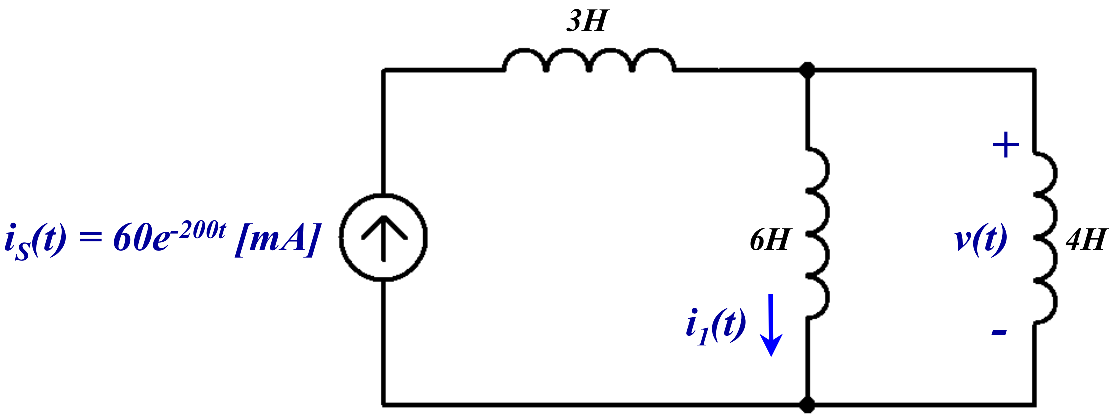
$$C_{eq}=\frac{(20/7)\text{x}1}{(20/7)+1}=\frac{20}{27}\mu F$$



9 – No circuito abaixo considere $i_1(0) = 20mA$. Calcule

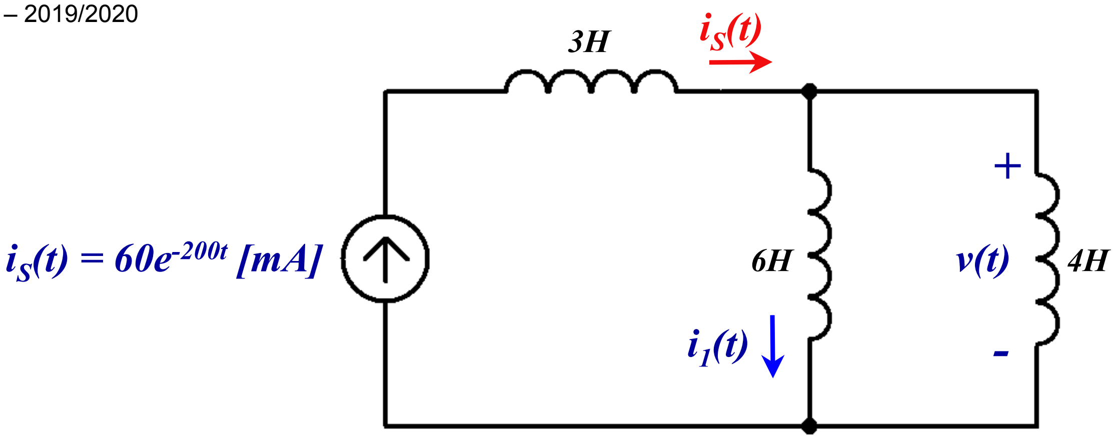
a) A tensão $v(t)$;

b) A energia armazenada na bobina de $6H$ em $t = 5ms$.



Circuitos Eléctricos – 2019/2020

a)



$$v(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_S(t) = 2.4 \frac{d}{dt}\left(60e^{-200t}\right)$$

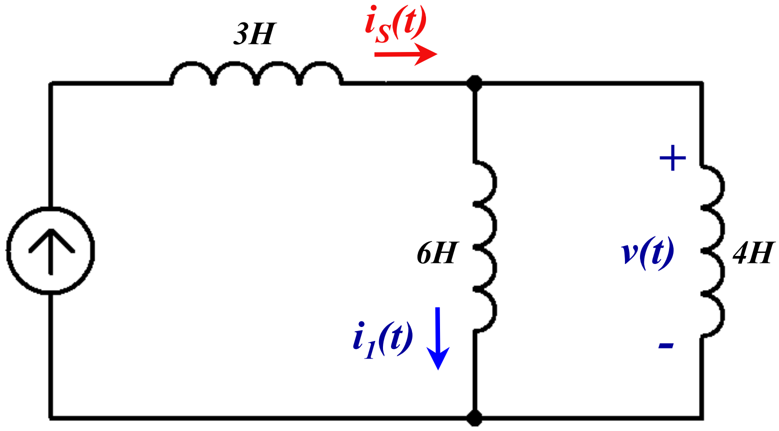
$$L_1 = \frac{6\text{x}4}{6+4} = 2.4H$$

$$= 2.4\text{x}(-200)\text{x}60e^{-200t}$$

$$v(t) = -28.8e^{-200t}\,[V] \quad t \geq 0$$

b)

$$v(t) = -28.8e^{-200t}$$



$$i_1(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + i_1(0) \;\; = \frac{1}{6}\int_0^t -28.8e^{-200t}dt + 0.02$$

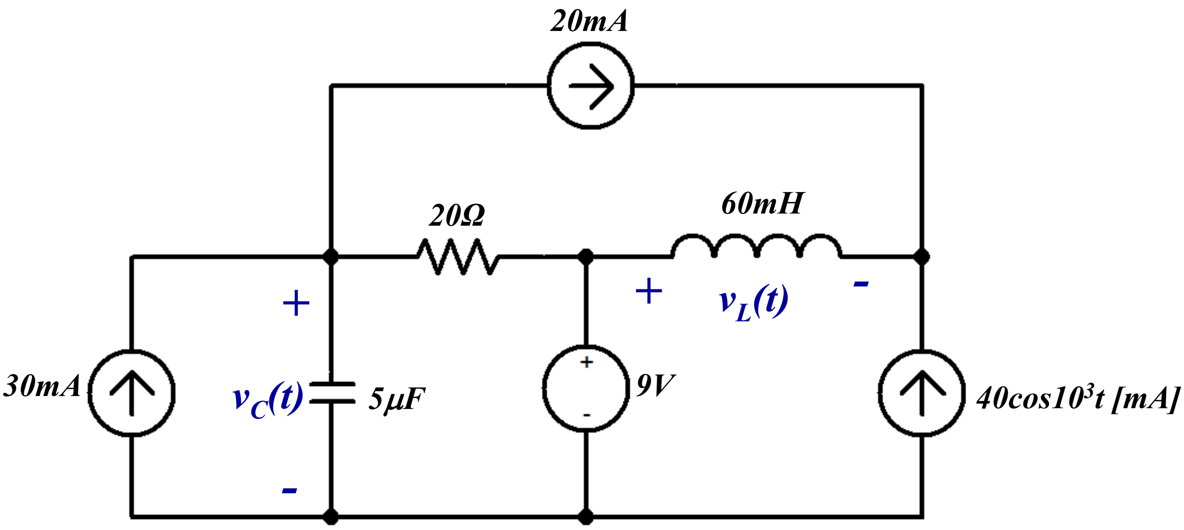
$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{200}\right)(-28.8)e^{-200t}\Big|_0^t + 0.02 \;\; = 24e^{-200t} - 4 \quad [mA]$$

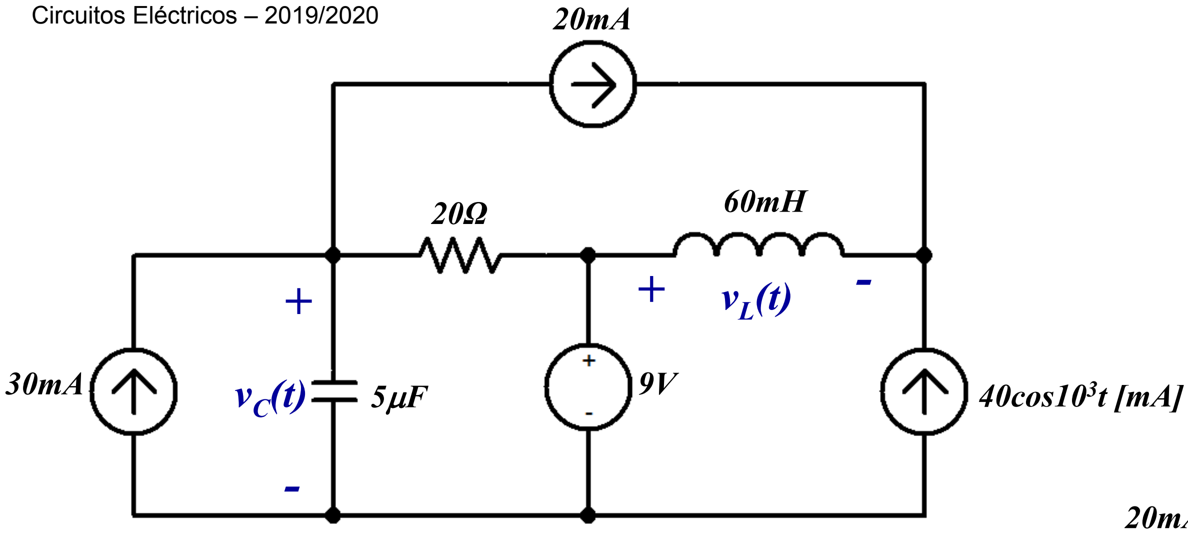
$$i_1(5ms) = 4.83mA \qquad\qquad W = \frac{1}{2}Li_1^{\,2} = 70\mu J$$

10 – Usando o Principio da Sobreposição, calcule no circuito abaixo

a) $v_C(t)$;

b) $v_L(t)$.

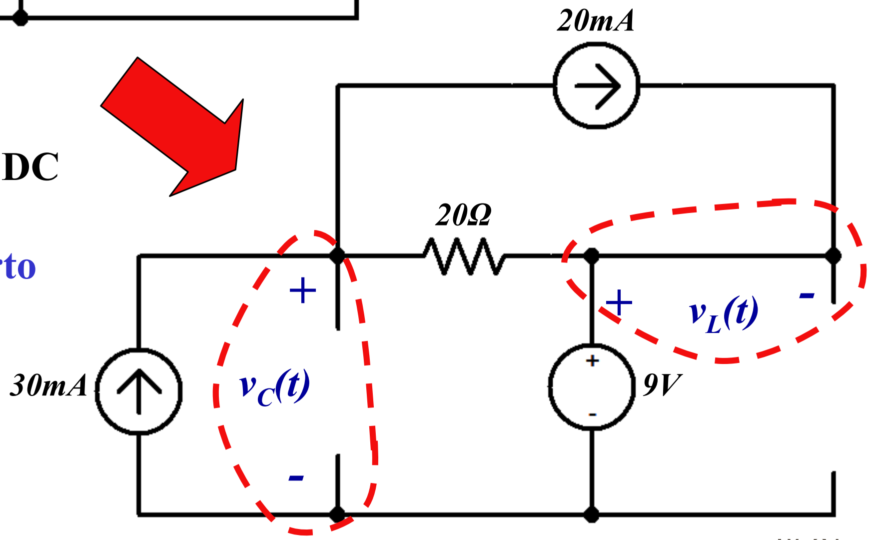




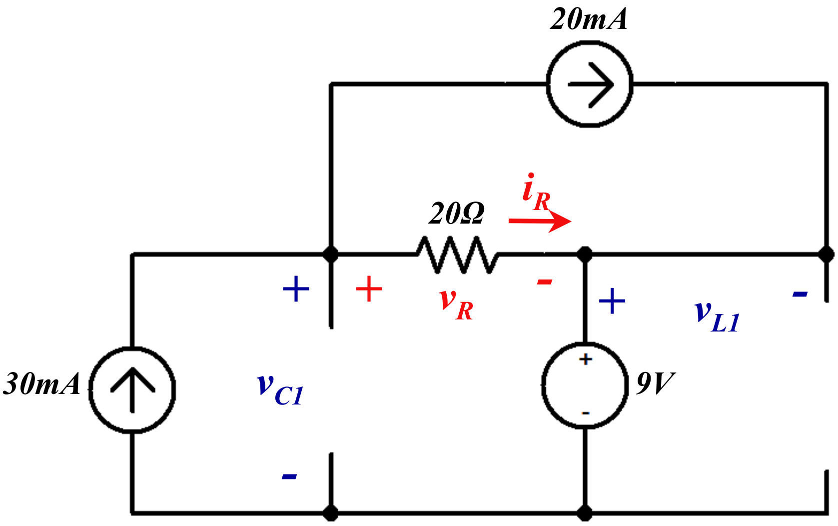
1) Considerando só as fontes DC

condensador ⇔ circuito aberto

bobina ⇔ curto-circuito



1) Considerando só as fontes DC

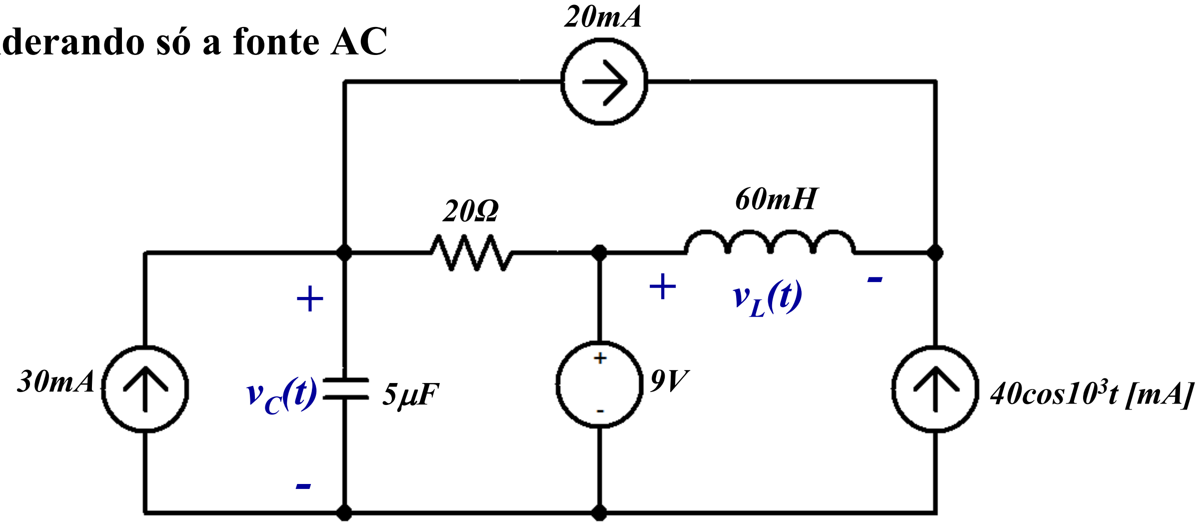


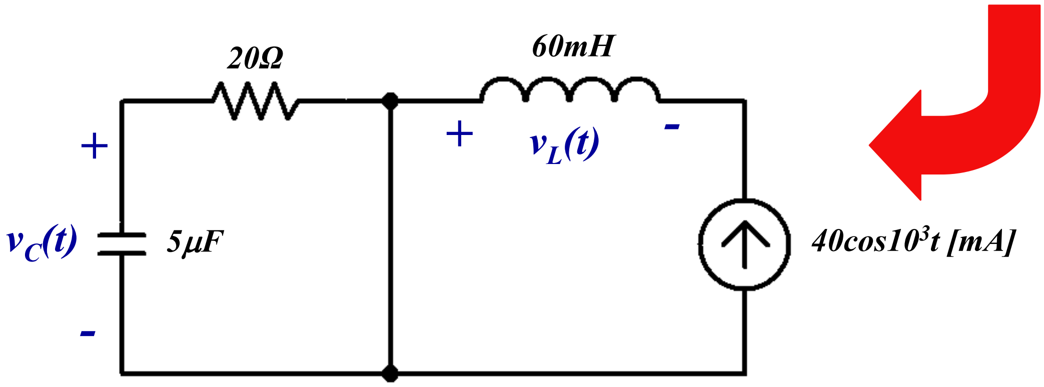
Do circuito tiramos: $v_{L1} = 0V$

$$i_R + 20 = 30 \quad \Leftrightarrow i_R = 10mA$$

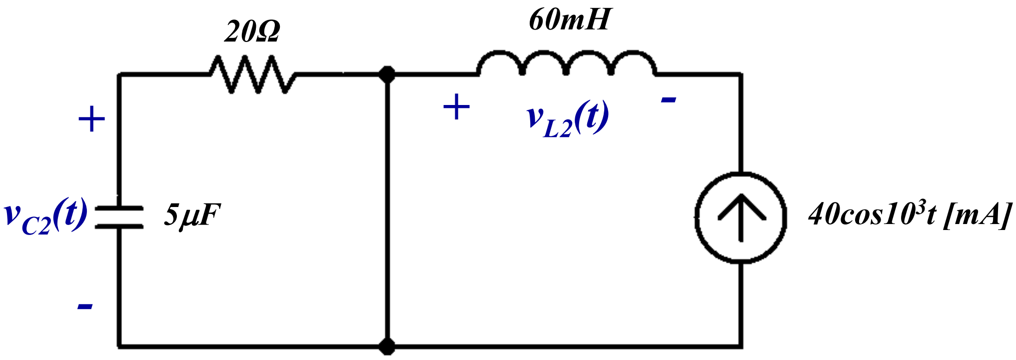
$$-v_{C1} + v_R + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow v_{C1} = 9 + (20\text{x}0.01) = 9.2V$$

2) Considerando só a fonte AC





2) Considerando só a fonte AC



Do circuito tiramos: $v_{C2} = 0V$

$$v_{L2}(t) = -L\frac{d}{dt}i(t) = -0.06\frac{d}{dt}\left(0.04\cos 10^3 t\right) = 2.4\sin 10^3 t \quad [V]$$

Aplicando o Teorema da Sobreposição:

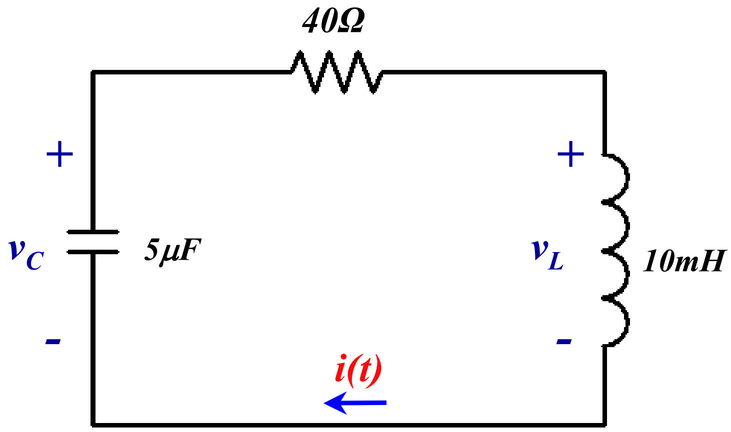
$$v_C(t) = v_{C1} + v_{C2} = 9.2 + 0 = 9.2V$$

$$v_L(t) = v_{L1} + v_{L2} = 0 + 2.4\sin 10^3 t = 2.4\sin 10^3 t \quad [V]$$

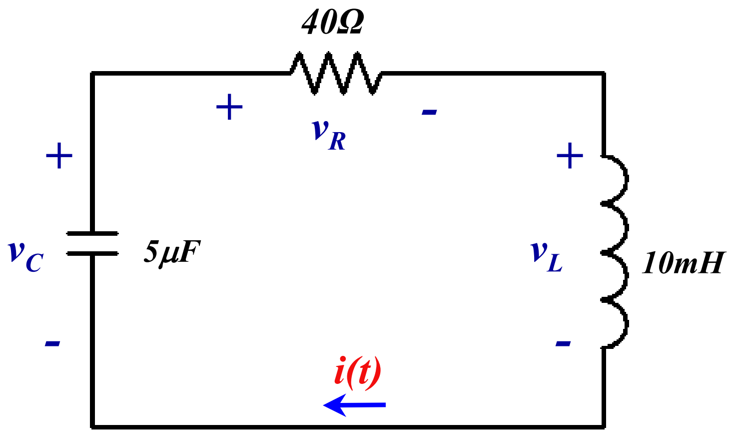
11 – Sabendo que, no circuito abaixo, *i(t)* é dada por

$$i(t)=5e^{-2000t}\cos 4000t \quad [A] \qquad t \geq 0$$

Calcule $v_L(0)$ e $v_C(0)$.



Começamos por calcular a tensão na bobina



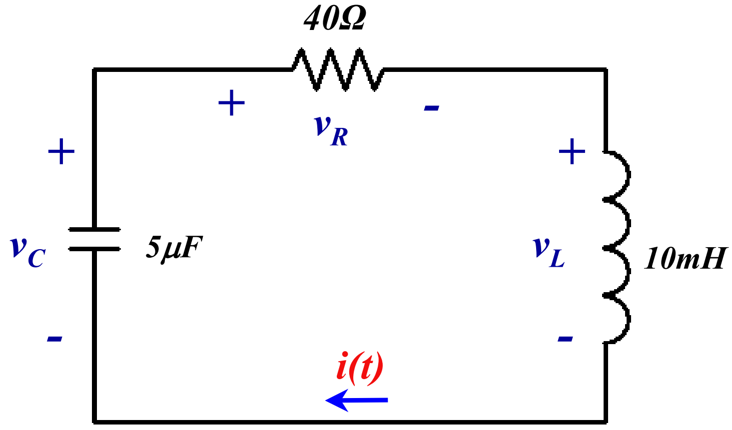
$$v_L = L\frac{d}{dt}i(t)$$

$$=0.01\frac{d}{dt}\left(5e^{-2000t}\cos 4000t\right)$$

$$=0.01\left[5(-2000)e^{-2000t}\cos 4000t + 5e^{-2000t}(-4000\sin 4000t)\right]$$

$$v_L = -100e^{-2000t}\left(\cos 4000t + 2\sin 4000t\right) \quad [V]$$

Calculamos agora os valores para $t = 0$



$$v_L = -100e^{-2000t}(\cos 4000t + 2\sin 4000t)$$

$$v_L(0) = -100V$$

Aplicando KVL:

$$-v_C(0) + v_R(0) + v_L(0) = 0$$

$$v_C(0) = 40i(0) - 100$$

$$v_C(0) = 40\text{x}5 - 100 = 100V$$

$$i(t) = 5e^{-2000t}\cos 4000t$$

$$i(0) = 5A$$