Proposta de projeto

Bruno Peixoto 7206666 bruno.peixoto@usp.br

12 de novembro de 2018

O modelo pendular emerge na natureza em diversas aplicações, entre outros, guindastes e sistemas de orientação de foguetes. Além disso, ele é amplamente utilizado na literatura por consistir em um sistema não-linear e apresentar conceitos fundamentais da teoria de controle.

A planta consiste em um sistema pendular sub-atuado bidimensional composto por um carro $\mathcal{B}_0$ de massa m_0 associado a um sistema de elos $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ com massas m_1 e m_2 respectivamente referentes ao sistema de coordenadas afixado aos centros de massa, solidários aos elos. Os elos $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ consistem respectivamente em uma barra retangular homogênea de comprimento ℓ_1, largura w_1 e espessura desprezível e uma barra cilíndrica homogênea de comprimento ℓ_2 e raio r_2 (Tabela 1).

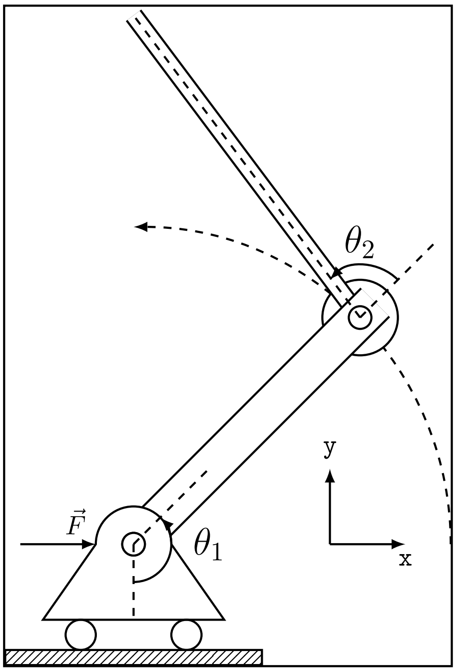

Figura 1: Desenho esquemático do modelo

Considere que o sistema apresenta excitação externa respectiva a uma força $\mathbf{F} = [F, 0, 0]^T$ aplicada ao corpo $\mathcal{B}_0$ (Figura 1) por meio de uma polia de diâmetro D de inércia desprezível ligada a um motor distante de correia estirada inextensível e um momento gerado por um motor balanceado $\mathbf{M} = [0, 0, \tau]^T$ aplicado ao primeiro elo na junta que conecta $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$. A correia de acionamento envolve a polia em um ângulo β e possui coeficiente de atrito seco μ. Para este projeto, não é necessário a modelagem do acionamento: a propoulsão é realizada pelo cabo e o sensoreamento é fornecido por x. O vínculo do carro permite deslocamento seja apenas horizontal.

Descrição	Unidade	Valor
m_0	g	440
m_1	g	153
m_e	g	8
m_2	g	7
b_0	Ns/m	1.950
b_1	Ns/rad	0.010
b_2	Ns/rad	0.010
ℓ_1	mm	180
w_1	mm	40
e_1	mm	40
ℓ_2	mm	215
r_2	mm	8

Tabela 1: Dados da planta

Descrição	Unidade	Valor
m	bits	10
n	-	5
f_s	Hz	100
$\mathbf{t}_s$	s	$3.\mathbf{1}^a$
$\mathbf{R}_w$	-	$0.02\ \mathbb{1}^b$
$\mathbf{R}_v$	-	$0.02\ \mathbb{1}$
σ_u	N	500
t_δ	s	10

Tabela 2: Dados do microcontrolador e sensores

[a] $\mathbf{1}$ consiste em uma matriz-coluna composta por 1's com dimensão adequada.

[b] $[\mathbb{1}]$ corresponde à matriz identidade

Sejam os estados do sistema apresentado na figura 1 $\mathbf{x} = [x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$, uma das posições de repouso (instável) definida por $\mathbf{x}_0 = [0, \pi, 0, 0, 0, 0]^T$ e região de convergência χ suficientemente próxima a $\mathbf{x}_0$ a fim de garantia linear do modelo [Ada09], a proposta consiste no projeto de um controlador LQG com frequência de amostragem f_s. O sistema controlado deve apresentar tempo de assentamento menor que $\mathbf{t}_s^{1\%}$ para cada um dos estados do sistema e desvio-padrão para a força aplicada igual a σ_u.

Os sensores disponíveis são um encoder rotativo para o motor de acionamento e um encoder rotativo para θ_1 acoplado à junta, considerado uma massa pontual m_e. As leituras dos sensores são decorrelacionadas e apresentam densidade espectral $\mathbf{R}_v$. A posição angulares θ_1 e θ_2 apresentam ruído branco e a densidade espectral de potência iguais a $\mathbf{R}_w$ [Ang18]. O microcontrolador escolhido apresenta, em média, atraso de cálculo de n períodos de amostragem, $n \in \mathbb{N}$, a depender do *hardware*, e resolução de quantização de m bits (Tabela 2).

Considere ademais que o sistema seja submetido a um impulso $I = k\delta(t)$ [Bee03], com $\delta(t)$ a função delta de Dirac, no instante t_δ na extremidade da segunda barra após sua estabilização. Propõe-se a determinação empírica de k tal que que o sistema não saia da região de estabilização.

Apêndice

A equação do pêndulo apresenta a forma $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\nu(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{U}\mathbf{u}$ tal que $q = [x,\, \theta_1,\, \theta_2]^T$ e as matrizes $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\nu(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ respecticamente a matriz de massa acoplada, termos giroscópicos, atrito do sistema e termos gravitacionais.

A matriz $\mathbf{U}$ advém do princípio dos trabalhos virtuais [Bee03] e satisfaz a relação $\mathbf{F_q}\delta\mathbf{q} + \mathbf{F}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{W} \overset{def}{=} 0$, para $\mathbf{q}$ os estados do sistema e $\mathbf{x}$ os delocamentos infinitesimais das excitações externas aplicadas.

A representação em espaço de estados $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})(\nu(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{g}(\mathbf{q}))\end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{U}\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})}\mathbf{u} \\
&= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Para um ponto de operação $\mathbf{x}_0$, existe $\mathbf{u_0}$ tal que $0 = a(\mathbf{x}_0) + b(\mathbf{x}_0)\mathbf{u_0}$, o sistema linearizado é dado por

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x_0}) + \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x_0})\mathbf{u}_0)}_{\mathbf{A}(\mathbf{x_0})}\Delta\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{x_0})}_{\mathbf{B}(\mathbf{x_0})}\Delta\mathbf{u} \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{x_0})\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x_0})\Delta\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Sendo $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$ e $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u_0}$. Para o sistema representado na figura 1 seguem as matrizes.

$$
M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{11} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{23} & M_{33}\end{bmatrix} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \mathrm{m}_0 + \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 \\
M_{33} &= \mathrm{m}_2\, {\ell_2^g}^2 + \mathrm{I}_2 \\
M_{22} &= \mathrm{m}_2\, {\ell_1}^2 + 2\,\mathrm{m}_2\, \cos(\theta_2)\ \ell_1\, \ell_2^g + \mathrm{m}_1\, {\ell_1^g}^2 + \mathrm{m}_2\, {\ell_2^g}^2 + \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \\
M_{12} = M_{21} &= \mathrm{m}_2\, \ell_2^g\, \cos(\theta_1 + \mathrm{m}_2\, \theta_2) + \ell_1\, \cos(\theta_1) + \ell_1^g\, \mathrm{m}_1\, \cos(\theta_1) \\
M_{13} = M_{31} &= \mathrm{m}_2\, \ell_2^g\, \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
M_{23} = M_{32} &= \mathrm{m}_2\, {\ell_2^g}^2 + \ell_1\, \mathrm{m}_2\, \cos(\theta_2)\ \ell_2^g + \mathrm{I}_2
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\nu(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{bmatrix} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu_1 =& - \ell_2^g \, \mathrm{m}_2 \, \sin(\theta_1 + \theta_2) \, \dot{\theta}_1^2 - \ell_2^g \, \mathrm{m}_2 \, \sin(\theta_1 + \theta_2) \, \dot{\theta}_2^2 - \ell_1 \, \mathrm{m}_2 \, \sin(\theta_1) \, \dot{\theta}_1^2 - \\
& \ell_1^g \, \mathrm{m}_1 \, \sin(\theta_1) \, \dot{\theta}_1^2 - 2 \, \ell_2^g \, \mathrm{m}_2 \, \sin(\theta_1 + \theta_2) \, \dot{\theta}_1 \, \dot{\theta}_2 \\
\nu_2 =& - \mathrm{m}_2 \, \dot{\theta}_2 \left(2 \, \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) \ell_2^g \, \ell_1 \, \sin(\theta_2) \\
\nu_3 =& \mathrm{m}_2 \, \dot{\theta}_1^2 \, \ell_2^g \, \ell_1 \, \sin(\theta_2)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_0 \, \dot{\mathrm{x}} \\ \mathrm{b}_1 \, \dot{\theta}_1 \\ \mathrm{b}_2 \, \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{7}
$$

$$
\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}
$$

$$
\mathbf{u} = F \tag{9}
$$

As matrizes linearizadas do sistema proposto não será representada neste documento por questões de brevidade.

Referências

[Ada09] Jürgen Adamy. *Nichtlineare Regelungen*. Springer, 2009. ISBN: 978-3-642-00793-4. DOI: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-00794-1`.

[Ang18] Bruno Augusto Angélico. *Controle Digital de Sistemas Dinâmicos*. Disciplina PTC5611. Out. de 2018.

[Bee03] Ferdinand P. Beer. *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2003. ISBN: 007230491X.