Lista de exercícios 1

Bruno H. L. N. Peixoto Número USP: 7206666 E-mail USP: bruno.peixoto@usp.br

21 de setembro de 2018

Exercício 1

A. Por hipótese, a frequência de amostragem utilizada satisfaz o critério de Nyquist [1]. Como $t = kT_s = \frac{k}{f_s}$:

$$x[k] = cos(k\frac{\omega}{f_s}) \overset{!}{=} cos(k\alpha) \iff \alpha = \frac{\omega}{f_s} \tag{1}$$

$$\therefore \omega = 250\pi\frac{rad}{s} \tag{2}$$

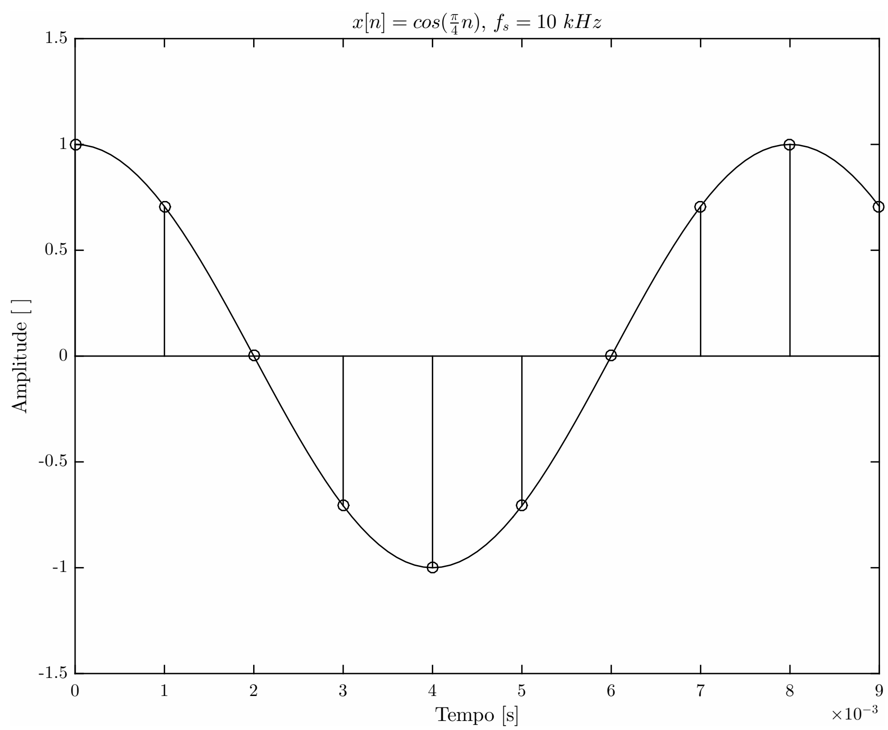

Figura 1: Curva original e série amostrada

B. Por (1), conclui-se que $f_s = 12\ kHz$. Dada frequência do sistema de $4000\pi\frac{rad}{s}$, pelo teorema de Nyquist $\omega_s \overset{!}{>} 8000\pi\frac{rad}{s} \approx 24000\frac{rad}{s}$. Devido à violação, não é possível reconstruir o sinal por meio de um passa-baixas ideal.

C. Para sinais senoidais amostrados com frequência f_s, tem-se que, para uma mesma série $x[n] = cos(\alpha n)$, os possíveis sinais advindos deste são $x(t) = cos(2\pi(f_0 + f_s)t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega = 2\pi f$. Por 1, tem-se que $\omega_0 = \frac{5\pi}{4}\frac{rad}{s}$. Assim, dois possíveis sinais para a série fornecida são $x_1(t) = cos(\frac{5\pi}{4}t)$ e $x_2(t) = cos(\frac{85\pi}{4}t)$.

[1] $\omega_s \geq 2\omega_0$

Exercício 2

A.

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i] \\
&= x[0] + z^{-1}\sum_{i=0}^{1} x[i] + z^{-2}\sum_{i=0}^{2} x[i] + \cdots \\
&= x[0]\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[1]\sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots + x[k]\underbrace{\sum_{i=k}^{\infty} z^{-i}}_{\frac{z^{-k}}{1-z^{-1}}} + \cdots \\
&= x[0]\frac{1}{1-z^{-1}} + x[1]\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{4}
$$

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}X(z)$

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i-1] \\
&= x[-1] + z^{-1}\sum_{i=0}^{1} x[i-1] + z^{-2}\sum_{i=0}^{2} x[i-1] + \cdots \\
&= \underbrace{x[-1]}_{:=0}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[0]\sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots \\
&= x[0]\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + x[1]\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{6}
$$

- $\lim\limits_{z\to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i]$

$$
\lim_{z\to 1} X(z) = \lim_{z\to 1}\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i} \tag{7}
$$

$$
\therefore \lim_{z\to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \quad \blacksquare \tag{8}
$$

B. Dada função $x_1(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$, por definição tem-se que:

$$
\begin{aligned}
Z\{x_1(t)\} = X_1(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_1(iTs).z^{-i} \\
&= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1 - e^{-aT_s i}.z^{-i}\right) \\
&= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} - \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{e^{-aT_s i}.z^{-i}}_{(z.e^{aT_s})^{-i}} \\
&\overset{|z|>1 \wedge |z|>e^{aT_s}}{=} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}\right) \\
&\frac{1}{a}\frac{(1-e^{-aT_s})z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-e^{-aT_s}z^{-1})}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\therefore X_1(z) = \frac{1}{a}\frac{(1-e^{-aT_s})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{10}
$$

C. A equação das diferenças pode ser colocada da seguinte forma:

$$
\sum_{i=0}^{m} b_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{n} a_i x[n-i] \tag{11}
$$

com parâmetros dados por $m = n = 3$ e a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ dados por $a_0 = 1$, $a_1 = -0.9737$, $a_2 = 0.8101$, $a_3 = 0.8151$, $a_1 = -0.0515$, $b_0 = 0.4108$, $b_1 = -1.0094$, $b_2 = 1.0094$ e $b_3 = 0.4108$.

Após aplicar a transformada Z no sistema, temos que

$$
G(z) = \frac{Y(Z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_{m-i} z^{i}}{\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{i}} \tag{12}
$$

Assim, as raízes do numerador e denominador, nomeadamente zeros e pólos, são respectivamente $z = \{1.38 \pm 1.18i, -0.3\}$ e $p = \{0.45 \pm 0.74i, 0.068\}$.

Exercício 3

Dado sinal discreto $a[n]$ resultado da soma à esquerda, temos que:

$$
A(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z)0.3 - 0.5z^{-2}Y(z) \tag{13}
$$

De mesma forma,

$$
Y(z) = -z^2X(z) + A(z) - z^{-1}Y(z) \tag{14}
$$

Substituindo-se (13) em (14), obtém-se:

$$
\begin{gathered}
-z^2X(z) + X(z) + 0.6z^{-1}X(z) - 0.5z^{-2}Y(z) \\
\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-z^{-2} + 0.6z^{-1} + 1}{1 - 0.5z^{-}2} = \frac{z^2 + 0.6z - 1}{z^2 - 0.5}
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Os pólos do sistema é estável pois seus pólos $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ encontram-se no interior do circulo unitário, região estável em tempo discreto.

Exercício 4

A conversão sem aproximação do espaço contínuo para discreto com mantenedor de ordem zero (ZOH) satisfaz a seguinte equação:

$$G(z) \coloneqq (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} \tag{16}$$

Desta forma

$$\frac{G(s)}{s} = H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \tag{17}$$

Pelo método de expansão de frações parciais, a equação (17) apresenta a seguinte forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)} \tag{18}$$

Onde

$$A = H(s)s\Big|_{s=0} = \frac{K}{a} \text{ e } B = H(s)(s+a)\Big|_{s=-a} = -\frac{K}{a} \tag{19}$$

Logo

$$H(s) = \frac{K}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) \tag{20}$$

A função de transferência acima exceto ao fator de escala j foi obtida no item (**B**). Desta forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{K}{a}\sigma(t)\left(1 + e^{-at}\right) \tag{21}$$

Portanto, a função $\mathcal{Z}$ da função (21) é dada por

$$G(z) = \frac{K}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{22}$$

Por fim, por meio da função de transefrência de uma malha fechada [2], após certa manipulação algébrica é dada por:

$$G_{MF}(z) = K'\frac{z}{z+b} \tag{23}$$

onde $K' = \frac{K}{a}(1 - e^{-aT_s})$ e $b = \left[\left[(1 + \frac{k}{a})\right] e^(- aT_s) - \frac{k}{a}\right]$.

Exercício 5

Dados: Ts = 0,1 s

A.

$$s = \frac{z-1}{T_s} \therefore X(z) = \frac{\frac{z+1}{T_s} + 1}{\frac{z+1}{T_s} + 10} = \frac{z - (1 - T_s)}{z - (1 - 10T_s)} = \frac{z - 0.9}{z} \tag{24}$$

B.

$$s = \frac{z-1}{T_s z} \therefore X(z) = \frac{\frac{z-1}{T_s z} + 1}{\frac{z-1}{T_s z} + 10} = \frac{(1 + T_s)z - 1}{(1 + 10T_s)z + 1} = 0.45\frac{z - 1.1}{z - 0.5} \tag{25}$$

[2] A equação em malha fechada de um sistema em tempo discreto ou contínuo é dado pela equação $G_{MF}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$

C.

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+1}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+10} = \frac{(2+T_s)z+(T_s-2)}{(2+10T_s)z+(10T_s-2)} = \frac{2.1z-1.9}{3z-1} = 0.7\frac{z-0.63}{z-0.33} \quad (26)$$

D. Dados: $\omega_c = 3\frac{rad}{s}$

$$s = \frac{\omega_c}{\tan\frac{\omega_c T_s}{2}}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1}+1}{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1}+10} = \frac{(\tan\frac{\omega_c T_s}{2}+\omega_c)z+(\tan\frac{\omega_c T_s}{2}-\omega_c)}{(10\tan\frac{\omega_c T_s}{2}+\omega_c)z+(10\tan\frac{\omega_c T_s}{2}-\omega_c)} \quad (27)$$

Como $\frac{\omega_c T_s}{2} \ll 1$ e $\tan\theta \approx \theta$, então $\tan\frac{\omega_c T_s}{2} \approx \frac{\omega_c T_s}{2}$. Assim

$$X(z) = \frac{3.15 \ \ -2.85}{4.15z-1.5} = 0.76\frac{z-0.9}{z-0.36} \quad (28)$$

E. Todo pólo e zero da planta pode ser mapeado diretamente para o espaço $\mathcal{Z}$ pela relação $z = e^{sT_s}$. O ganho da função em regime estacionário devem ambos em espaço discreto quanto contínuo iguais.

$$\lim_{z\to1}(1-z^{-1})X(z) \overset{!}{=} \lim_{s\to0} sX(s) \quad (29)$$

Desta forma.

$$K_z\frac{1-e^{-Ts}}{1-e^{-10Ts}} = \frac{1}{10} \Rightarrow K_z = 10\frac{1-e^{-10T_s}}{1-e^{-T_s}} \approx 1.59$$

Portanto

$$X(z) = 1.59\frac{z-0.9}{z-0.37} \quad (30)$$

Exercício 6

Para que a função de transferência em malha fechada do sistema seja de segunda ordem, o controlador deve ser proporcional.O polinômio característico da função de transferência é:

$$P(s) = s^2 + 7s + k \overset{!}{=} s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 \quad (31)$$

O tempo de subida é dada pela identidade:

$$t_r^{0\%-100\%}(\omega_n,\zeta) = \frac{\pi-\theta(\zeta)}{\omega_d(\omega_n,\zeta)}, \text{ com } \theta(\zeta) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \text{ e } \omega_d(\omega_n,\zeta) = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (32)$$

De mesma forma, o sobressinal é dado por:

$$M(\zeta) = e^{-\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (33)$$

Caso (33) for bijetora, $\exists g(M) = \zeta$, $g : \zeta \to g(zeta)$, $M \circ g = M$. De fato $g(M) = \sqrt{\frac{\log^2 M}{\pi^2 - \log^2 M}}$. Assim, $\zeta \approx 0.672$

Para ζ fixo, analogamente, $\exists h(t_r) = \zeta$, $h : t_r \to h(zeta)$, $t_r(\zeta) \circ h = t_r$. De fato, $g(t_r) = \frac{\pi-\theta}{\omega_d(\zeta,t_r)}$. Assim, para $\zeta = 0.672$, então $\omega_n = 4.46$. Como $\omega_n^2 = k$, então $k = 19.96$.

Exercício 7

Função de transferência de controlador PID:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{34}$$

A. Seja a aproximação retangular para trás dada por $s = \frac{1-z^{-1}}{2T_s}$, com auxílio do MATLAB para manipulação simbólica, a função de transferência do controlador PID é dada por:

$$C(z) = K_p \frac{b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0} \tag{35}$$

com $b_2 = T_i(T_d - T_s) + 4T_s^2$, $b_1 = 2T_i(T_s - T_d)$, $b_0 = T_i T_d$, $a_2 = -2T_i T_s$, $a_1 = 2T_i T_s$ e $a_0 = 0$.
SIMULAÇÃO!

B. SIMULAÇÃO!

C. SIMULAÇÃO!

Exercício 7

Exercício 8

Exercício 9

asdasd