Lista 1

Bruno H. L. N. Peixoto Número USP: 7206666 E-mail USP: bruno.peixoto@usp.br

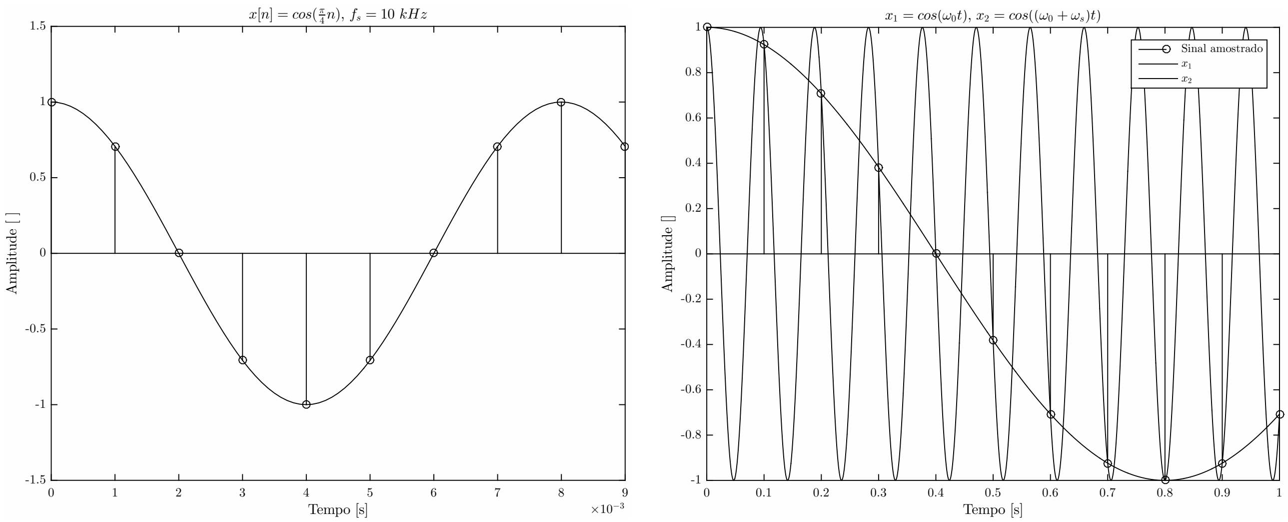
18 de outubro de 2018

Sumário

Lista de Figuras

Scripts em Matlab

Exercício 1



(a) (b)

Figura 1: (a) Curva original e série amostrada (b) Sinais com frequências diferentes e mesmo sinal amostrado

A. Por hipótese, a frequência de amostragem utilizada satisfaz o critério de Nyquist [1]. Como $t = kT_s = \frac{k}{f_s}$, temos que $x[k] = cos(k\frac{\omega}{f_s}) \stackrel{!}{=} cos(k\alpha) \iff \alpha = \frac{\omega}{f_s}$. Assim, $\omega = 250\pi\frac{rad}{s}$. A imagem (**??**) apresenta o sinal original e o amostrado.

B. Como no item anterior, conclui-se que $f_s = 12\ kHz$. Dada frequência do sistema de $4000\pi\frac{rad}{s}$ ou $2000Hz$, como a frequência utilizada para amostragem respeita o teorema de Nyquist, é possível reconstruir o sinal por meio de um filtro passa-baixas ideal.

C. Para sinais senoidais amostrados com frequência f_s, tem-se que, para uma mesma série $x[n] = cos(\alpha n)$, os possíveis sinais advindos deste são $x(t) = cos(2\pi(f_0+f_s)t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega = 2\pi f$. Temos que $\omega_0 = \frac{5\pi}{4}\frac{rad}{s}$. Assim, dois possíveis sinais para a série fornecida são $x_1(t) = cos(\frac{5\pi}{4}t)$ e $x_2(t) = cos(\frac{85\pi}{4}t)$, mostrado na imagem (**??**)

D. Para o caso presente na figura (**??**), o sinal reconstruido é distorcido. Em contrapartida, por respeitar o critério de Nyquist, o sinal reconstruido é o mesmo do sinal original, presente na figura (**??**).

[1] Essencialmente $\omega_s \geq 2\omega_0$, o qual ω_s corresponde a frequência de amostragem e ω_0 a máxima frequência do sinal amostrado.

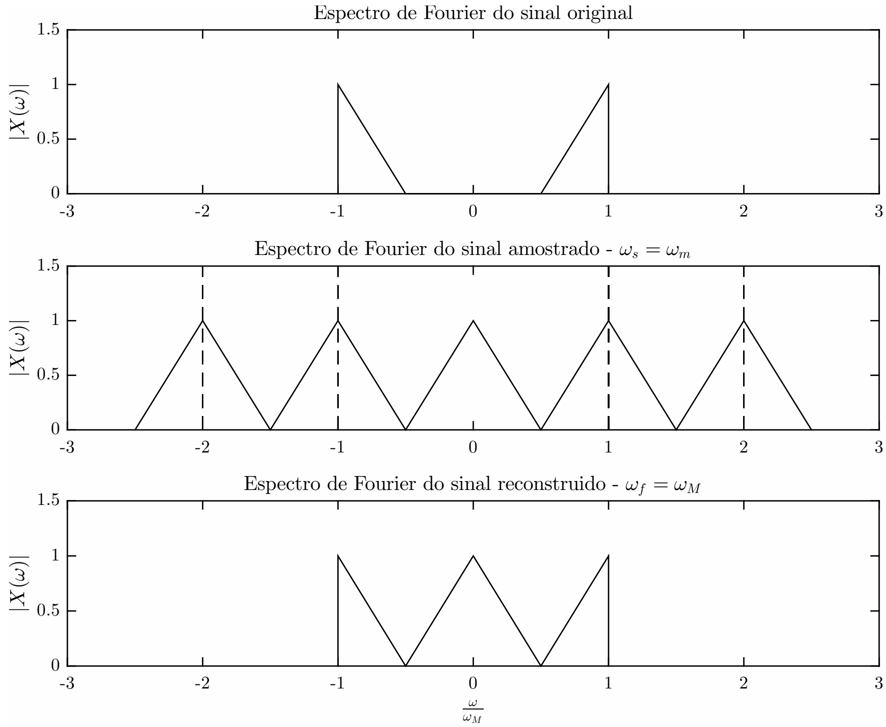


Figura 2: Espectro do sinal original. Frequência de amostragem e reconstrução $\omega_s = \omega_N$ e $\omega_f = \omega_N$

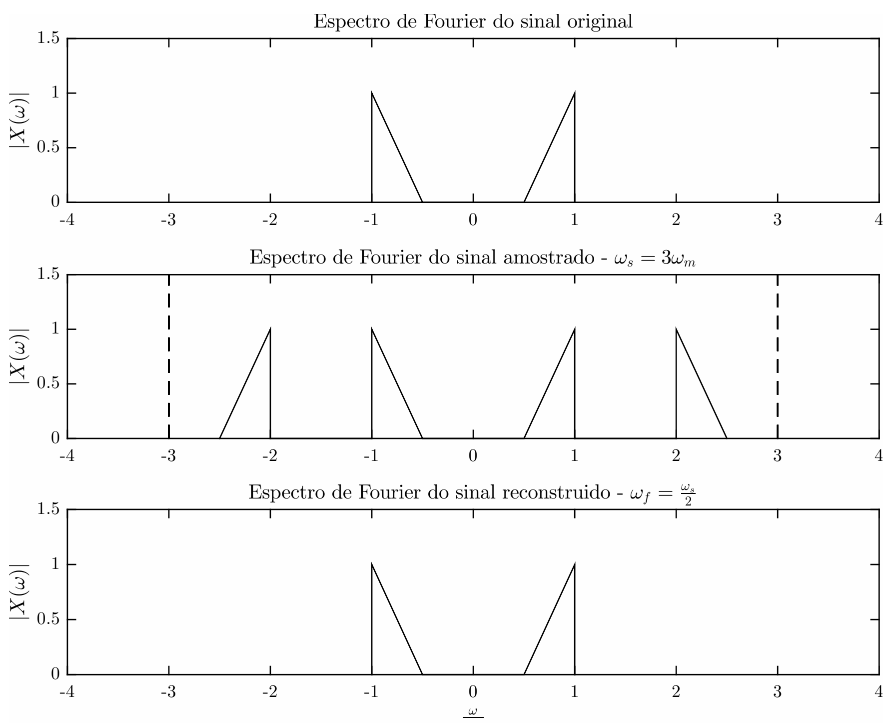


Figura 3: Espectro do sinal original. Frequência de amostragem e reconstrução $\omega_s = 3\,\omega_N$ e $\omega_f = \frac{\omega_s}{2}$

Exercício 2

A.

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i] \\
&= x[0] + z^{-1} \sum_{i=0}^{1} x[i] + z^{-2} \sum_{i=0}^{2} x[i] + \cdots \\
&= x[0] \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[1] \sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots + x[k] \underbrace{\sum_{i=k}^{\infty} z^{-i}}_{\frac{z^{-k}}{1-z^{-1}}} + \cdots \\
&= x[0] \frac{1}{1-z^{-1}} + x[1] \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{2}
$$

□

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} X(z)$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i-1] \\
&= x[-1] + z^{-1} \sum_{i=0}^{1} x[i-1] + z^{-2} \sum_{i=0}^{2} x[i-1] + \cdots \\
&= \underbrace{x[-1]}_{:=0} \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[0] \sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots \\
&= x[0] \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + x[1] \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{4}
$$

$\lim\limits_{z\to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i]$

$$\lim_{z\to 1} X(z) = \lim_{z\to 1} \sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \tag{5}$$

$$\therefore \lim_{z\to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \quad \blacksquare \tag{6}$$

$\square$

B. Dada função $x_1(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$, por definição, tem-se que:

$$\begin{aligned} Z\{x_1(t)\} = X_1(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_1(iTs).z^{-i} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - e^{-aT_s i}\right) z^{-i} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} - \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{e^{-aT_s i}.z^{-i}}_{(z.e^{aT_s})^{-i}} \end{aligned} \tag{7}$$

Se $|z| > 1$ e $|z| > e^{aT_s}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} - \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-aT_s i}.z^{-i} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT_s} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s} z^{-1})} \end{aligned} \tag{8}$$

Portanto

$$X_1(z) = \frac{1}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s} z^{-1})} \tag{9}$$

De mesma forma, dada função $x_2(t) = t^2 e^{-at}$, por definição tem-se que:

$$\begin{aligned} Z\{x_2(t)\} = X_2(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_2(iTs).z^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(i^2 T_s^2 e^{-aT_s i} z^{-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} T_s^2 i^2 e^{-aT_s i} z^{-i} \end{aligned} \tag{10}$$

Por meio da propriedade da transformada $\mathcal{Z}\{nX[n]\} \coloneqq -z\frac{d}{dz}X(z)$, segue

$$x[n] = e^{-an} \to -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} = \mathcal{Z}\{ne^{-an}\},\ n = T_s i,\ i \in \mathbb{N} \tag{11a}$$

$$x[n] = ne^{-an} \to -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} = \mathcal{Z}\{n^2e^{-an}\},\ n = T_s,\ i \in \mathbb{N} \tag{11b}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= \frac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}} \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= -e^{-aT_s}\frac{z^{-2}}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^2} \\ \mathcal{Z}\{ne^{-an}\} := -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-1}}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^2} \end{aligned} \tag{12}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{ne^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-1}}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^2} \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-2}(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^2 - 2(1 - e^{-aT_s}z^{-1})e^{-aT_s}z^{-2}}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^3} \\ &= -e^{-aT_s}\frac{z^{-2}(1 + e^{-aT_s}z^{-1})}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^3} \end{aligned} \tag{13}$$

Portanto

$$\mathcal{Z}\{n^2e^{-an}\} := -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} = e^{-aT_s}\frac{z^{-1}(1 + e^{-aT_s}z^{-1})}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{14}$$

Em ambos os casos, a região de convergência é dada pela condição $ROC = R_1 \cup R_2$, com $R_1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$ e $R_2 = \left\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq e^{-aT_s}\right\}$

C. Por definição, a equação das diferenças é da forma

$$\sum_{i=0}^{m} b_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{n} a_i x[n-i] \tag{15}$$

A função de transferência equivalente é

$$G(z) = \frac{Y(Z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_{m-i} z^{i}}{\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{i}} \tag{16}$$

Assim, com parâmetros dados por $m = n = 3$ e a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ dados por $a_0 = 1$, $a_1 = -0.9737$, $a_2 = 0.8101$, $a_3 = 0.8151$, $a_1 = -0.0515$, $b_0 = 0.4108$, $b_1 = -1.0094$, $b_2 = 1.0094$ e $b_3 = 0.4108$, as raízes do numerador e denominador, nomeadamente zeros e pólos, são respectivamente $z = \{1.38 \pm 1.18i, -0.3\}$ e $p = \{0.45 \pm 0.74i, 0.068\}$.

D. Ambos os sinais apresentam a mesma transformada $\mathcal{Z}$, apesar de um ser sinal causal (Caso 1), e o outro ser não-causal (Caso 2).

- $x[n] = a^n u[n]$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n \overset{|z|>|a|}{=} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\
&= \frac{1}{1-az^{-1}} \\
\therefore G(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

- $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-1} \\
&= -\sum_{n=-1}^{-\infty} a^n z^{-n} \\
&= -\left(a^{-1}z + a^{-2}z^2 + a^{-3}z^3 + \cdots\right) \\
&= -\frac{z}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{a})^n = -\frac{z}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \\
\therefore G(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\therefore G(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \tag{19}
$$

Exercício 3

Seja o pólo $s = 0$ numericamente mapeado, entretanto, para $s_0 = 0.01$ em espaço s, o respectivo pólo em z equivale a $z_0 = e^{T_s s_0}$, com $T_s = 0.01$ s. Assim $z_0 \approx 1.001$.

A. Ambas as funções de transferência, $G(s)$ e $G(z)$ devem ter o mesmo ganho em regime estacionário, ou seja,

$$\lim_{s\to 0} G(s) \approx \lim_{s\to s_0} G(s) \coloneqq \lim_{z\to 1} G(z) \Rightarrow \frac{1}{s_0} = \frac{1}{1-e^{T_s s_0}} K \Rightarrow K \overset{N}{=} \frac{1-e^{T_s s_0}}{s_0} = -0.01 \tag{20}$$

Portanto

$$G(z) = \frac{1-e^{T_s s_0}}{s_0} \frac{1}{1-e^{T_s s_0} z^{-1}} \overset{N}{=} -0.001 \frac{1}{1-1.01z^{-1}} \tag{21}$$

Perceba que a função de transferência resultante é estritamente própria.

B. A fim de que a função de transferência em espaço z seja biprópria, $m_z = n_z$, os quais m_z é o número de zeros e n_z é o número de zeros. Assim, o zero $s \to -\infty_{\mathbb{C}}$ é mapeado em $z = -1$. Assim como no item (**??**), o ganho em regime estacionário deve ser igual, ambos para espaço s ou z. Assim,

$$\lim_{s\to 0} G(s) \approx \lim_{s\to s_0} G(s) \coloneqq \lim_{z\to 1} G(z) \Rightarrow \frac{1}{s_0} = \frac{2}{1-e^{T_s s_0}} K \Rightarrow K = \frac{1-e^{T_s s_0}}{2s_0} \overset{N}{=} -0.005 \tag{22}$$

Portanto,

$$G(z) = \left(\frac{1-e^{T_s s_0}}{2s_0}\right) \frac{1-z^{-1}}{1-e^{T_s s_0} z^{-1}} \overset{N}{=} -0.005 \frac{1-z^{-1}}{1-1.001z^{-1}} \tag{23}$$

Exercício 4

A conversão sem aproximação do espaço contínuo para discreto com mantenedor de ordem zero (ZOH) satisfaz a seguinte equação:

$$G(z) := (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} \tag{24}$$

Desta forma

$$\frac{G(s)}{s} = H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \tag{25}$$

Pelo método de expansão de frações parciais, a equação (**??**) apresenta a seguinte forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)} \tag{26}$$

o qual

$$A = H(s)s\Big|_{s=0} = \frac{K}{a} \text{ e } B = H(s)(s+a)\Big|_{s=-a} = -\frac{K}{a} \tag{27}$$

Logo

$$H(s) = \frac{K}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) \tag{28}$$

A função de transferência acima exceto ao fator de escala j foi obtida no item (**??**). Desta forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{K}{a}\sigma(t)\left(1 + e^{-at}\right) \tag{29}$$

Portanto, a função $\mathcal{Z}$ da função (**??**) é dada por

$$G(z) = \frac{K}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{30}$$

Por fim, por meio da função de transefrência de uma malha fechada [2], após certa manipulação algébrica é dada por:

$$G_{MF}(z) = K'\frac{z}{z+b} \tag{31}$$

onde $K' = \frac{K}{a}(1 - e^{-aT_s})$ e $b = (1 + \frac{k}{a})\left[e^{-aT_s} - \frac{k}{a}\right]$.

[2]A equação em malha fechada de um sistema em tempo discreto ou contínuo é dado pela equação $G_{MF}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$

Exercício 5

A. Dados: Ts = 0,1 s

$$s = \frac{z-1}{T_s} \therefore X(z) = \frac{\frac{z+1}{T_s}+1}{\frac{z+1}{T_s}+10} = \frac{z-(1-T_s)}{z-(1-10T_s)} \overset{N}{=} \frac{z-0.9}{z} \tag{32}$$

B. Dados: Ts = 0,1 s

$$s = \frac{z-1}{T_s z} \therefore X(z) = \frac{\frac{z-1}{T_s z}+1}{\frac{z-1}{T_s z}+10} = \frac{(1+T_s)z-1}{(1+10T_s)z+1} \overset{N}{=} 0.45\frac{z-1.1}{z-0.5} \tag{33}$$

C. Dados: Ts = 0,1 s

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+1}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+10} = \frac{(2+T_s)z+(T_s-2)}{(2+10T_s)z+(10T_s-2)} \overset{N}{=} \frac{2.1z-1.9}{3z-1} = 0.7\frac{z-0.63}{z-0.33} \tag{34}$$

D. Dados: $\omega_c = 3\frac{rad}{s}$

$$s = \frac{\omega_c}{\tan\frac{\omega_c T_s}{2}}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1}+1}{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1}+10} = \frac{(\tan\frac{\omega_c T_s}{2}+\omega_c)z+(\tan\frac{\omega_c T_s}{2}-\omega_c)}{(10\tan\frac{\omega_c T_s}{2}+\omega_c)z+(10\tan\frac{\omega_c T_s}{2}-\omega_c)} \tag{35}$$

Como $\frac{\omega_c T_s}{2} \ll 1$ e $\tan\theta \approx \theta$, então $\tan\frac{\omega_c T_s}{2} \approx \frac{\omega_c T_s}{2}$. Assim

$$X(z) = \frac{3.15 \quad -2.85}{4.15z-1.5} = 0.76\frac{z-0.9}{z-0.36} \tag{36}$$

E. Todo pólo e zero da planta pode ser mapeado diretamente para o espaço $\mathcal{Z}$ pela relação $z = e^{sT_s}$. O ganho da função em regime estacionário devem ser ambos em espaço discreto quanto contínuo iguais.

$$\lim_{z\to 1} X(z) \overset{!}{=} \lim_{s\to 0} X(s) \tag{37}$$

Desta forma,

$$K_z\frac{1-e^{-Ts}}{1-e^{-10Ts}} = \frac{1}{10} \Rightarrow K_z = 10\frac{1-e^{-10T_s}}{1-e^{-T_s}} \approx 1.59$$

Portanto

$$X(z) = 1.59\frac{z-0.9}{z-0.37} \tag{38}$$

Exercício 6

Para os critérios de projeto fornecidos, o projeto de controle será feito em espaço s e o respectivo pólo deve pertencer ao lugar das raízes em malha fechada. O tempo de subida é dado por:

$$t_r^{0\%-100\%}(\omega_n,\zeta)=\frac{\pi-\theta(\zeta)}{\omega_d(\omega_n,\zeta)},\text{ com }\theta(\zeta)=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\text{ e }\omega_d(\omega_n,\zeta)=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{39}$$

De mesma forma, o sobressinal é dado por:

$$M(\zeta)=e^{-\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{40}$$

Como (**??**) é bijetora, $\exists g(M)=\zeta,\ g: M\longmapsto g(M),\ M\circ g(M)=M$. De fato $g(M)=\sqrt{\frac{\log^2 M}{\pi^2-\log^2 M}}$. Assim, $\zeta\approx 0.672$. De mesma forma, para ζ fixo, analogamente, $\exists h(t_r)=\zeta,\ h: t_r\longmapsto h(t_r),\ t_r(\zeta)\circ h=t_r$. De fato, $g(t_r)=\frac{\pi-\theta}{\omega_d(\zeta,t_r)}$. Assim, para $\zeta=0.672$, então $\omega_n=4.46$. Por fim, $\forall s\in\mathbb{C},\ s=\omega_n(\zeta+i\sqrt{1-\zeta^2})$, logo a seguinte malha satisfaz os critérios estabelecidos em projeto

$$C(s)=K\frac{s+0.7}{s+2\zeta\omega_n} \tag{41}$$

O polinômio característico do sistema para (**??**) em malha fechada é

$$P(s)=s^2+2\zeta\omega_n+K\coloneqq 0 \tag{42}$$

Ao considerar o projeto em tempo contínuo, o controlador acima "casa"o pólo da planta com o zero do controlador. Para o caso de casamento perfeito de pólo e zero, o novo lugar das raízes permite que o pólo estabelecido pertença a este. Ademais, para casamento perfeito de pólo e zero, por inspeção, o polinômio característico (**??**) fornece o valor K para os pólos em projeto i.e., $K=\omega_n^2$. Assim, a função de transferência fornecida é:

$$C(s)=\omega_n^2\frac{s+0.7}{s+2\zeta\omega_n} \tag{43}$$

Para projeto de controle por meio da aproximação do mantenedor de primeira ordem por transformação de Padé, utilizaremos a fórmula de Padé de primeira ordem seguinte:

$$e^x\approx\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} \tag{44}$$

Desta forma, por meio de (**??**), a aproximação de padé exata pode ser aproximada por

$$G_{zoh}(s)=\frac{1-e^{-T_s s}}{sT_s}\approx\frac{1}{\frac{T_s}{2}s+1} \tag{45}$$

A função de transferência em malha aberta do sistema é $G'(s)=C(s)*G_{zoh}(s)*G(s)$. De mesma forma ao projeto acima, o projeto de controlador em tempo discreto "casará"o pólo da planta com um zero do controlador. Para um controlador da forma (**??**), o pólo encontrado para projeto pertence a curva $1+G'(s)\coloneqq 0$. Com auxílio de software de manipulação numérica, encontramos K e p tal que o sistema satisfaça os critérios de projeto.

A aproximação de Padé para o mantenedor de ordem zero no projeto do controlador aproxima o sinal em tempo discreto da ação contínua tanto para a saída, erro e ação de controle do sistema como representa as imagens **??**, **??** e **??** respectivamente. Os diagramas de blocos utiliazdos para a simulação estão nas imagens **??** e **??**.

$$C(s) = K\frac{s+0.7}{s+p} \tag{46}$$

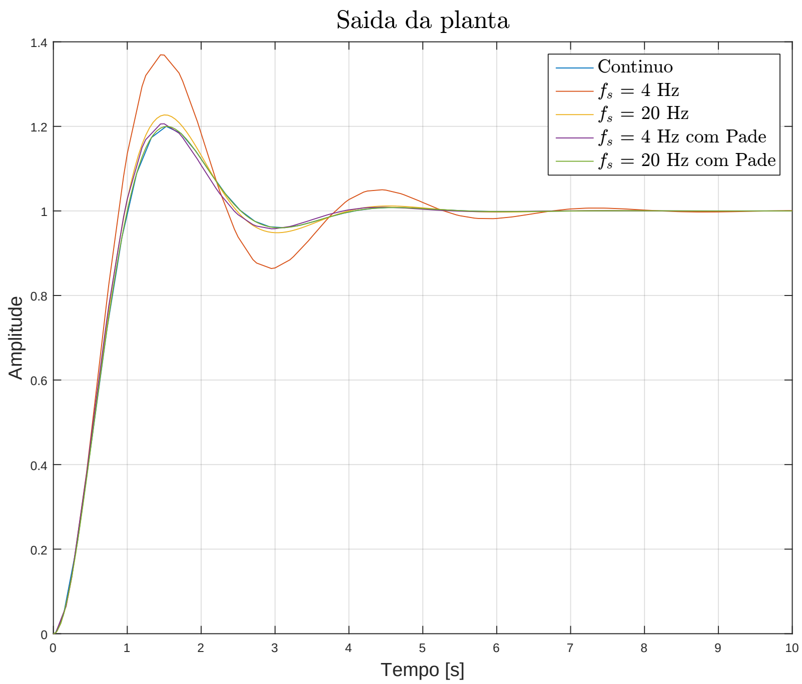


Figura 4: Ação de controle para controle contínuo e discreto com $f_s = 4Hz$ e $f_s = 20Hz$.

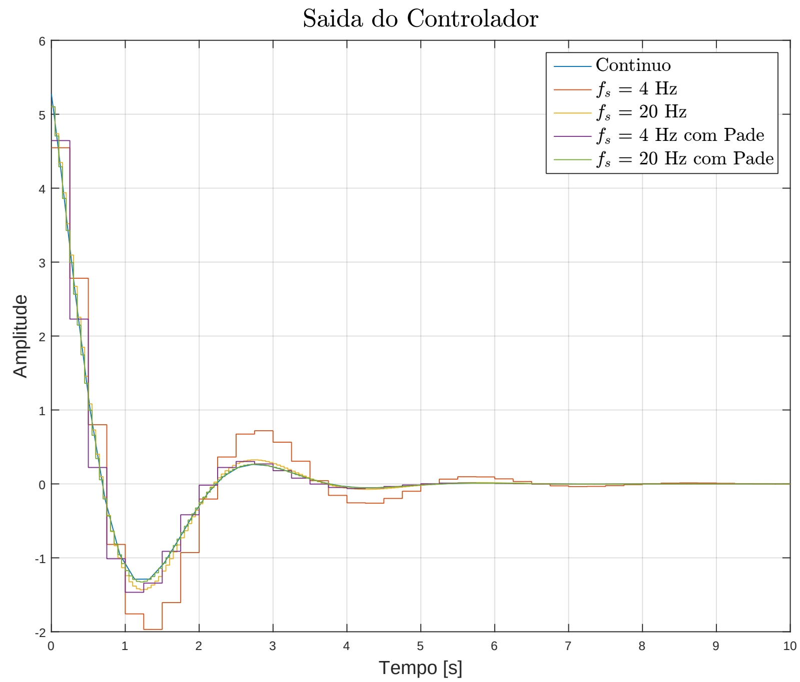


Figura 5: Curva original e série amostrada

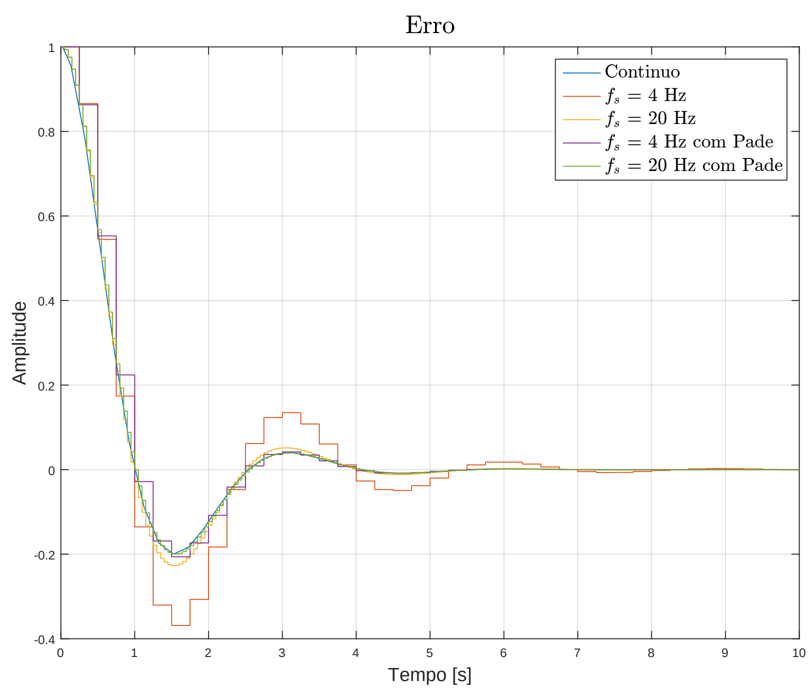


Figura 6: Curva original e série amostrada

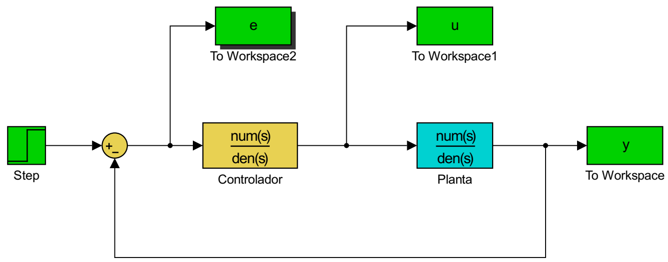


Figura 7: Diagrama de blocos em malha fechada com controle contínuo

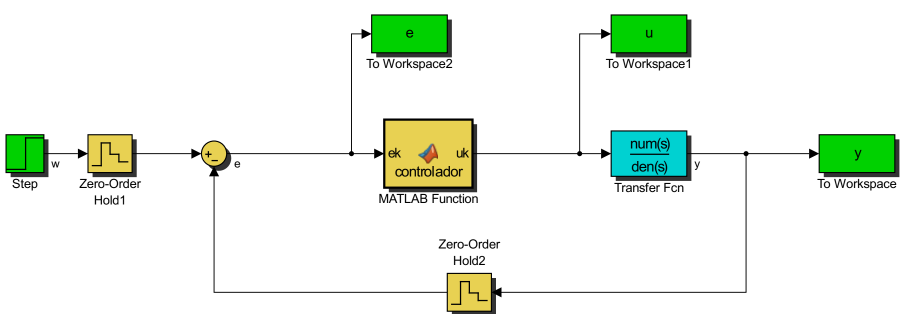


Figura 8: Diagrama de blocos em malha fechada com controle discreto

Dedução do exercício 7

O objetivo é encontrar uma função de transferência $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ em sua respectiva função de diferenças e assim saída $y[k]$ no instante kT_s. Considere a função de transferência a seguir em sua forma matricial

$$G(z) = \frac{b^T \mathbf{z}_m}{a^T \mathbf{z}_n} \tag{47}$$

os quais $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{Z}_k = \left[z^k, \cdots, 1\right]^T$. Após manipulação algébrica, $\mathbf{z}_p = z^p\, \mathbf{v}_p$, $\mathbf{v}_p = [1, \cdots, z^{-p}]$. A fim de manter a convenção para z^{-1} dada por $\mathbf{w}_p = [z^{-p}, \cdots, 1]$, $\mathbf{w}_p = \mathbf{J}_p\mathbf{v}_p \Leftrightarrow \mathbf{v}_p = \mathbf{J}_p\mathbf{w}_p$, com $\mathbf{J}_p$ a matriz de permuta, descrita em (**??**).

$$G(z) = z^{m-n}\frac{b^T \mathbf{v}_m}{a^T \mathbf{v}_n} = z^{m-n}\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{J}_{m+1}\mathbf{w}_m}{\mathbf{a}^T \mathbf{J}_{n+1}\mathbf{w}_n} \tag{48}$$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

O termo z^{m-n} em (**??**) deve integrar a função a fim de chegarmos à equação de diferenças. Por meio de manipulação matricial, chegamos à seguinte equação

$$G(z) = \frac{\mathbf{b'}^T \mathbf{w}_{m'}}{\mathbf{a'}^T \mathbf{w}_{n'}} \tag{50}$$

com $\mathbf{a'} = \begin{cases} \mathbf{a} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{n+1}\mathbf{a} \end{bmatrix}_{m+1} \end{cases}$ e $\mathbf{b'} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{m+1}\mathbf{b} \end{bmatrix}_{n+1} & , n \geq m \\ \mathbf{b} & , n < m \end{cases}$. Perceba que n' e m' são $\begin{cases} n+1, & n \geq m \\ m+1, & n < m \end{cases}$, i.e. $\forall z^p \in \mathbf{w}$, $p \leq 0$.

A equação de diferenças de $G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{w}_m}{\mathbf{a}^T\mathbf{w}_n}$ é, por definição, descrita por $\mathbf{a}^T\mathbf{y}_m[k] = \mathbf{b}^T\mathbf{u}_n[k]$. Por inspeção, $a' = a$ e $b' = b$. O vetor $\mathbf{y}_{n'}[k]$ pode ser escrito como $\mathbf{y}_{n'}[k] = \left(\mathbf{I}_{n'+1} - \boldsymbol{\Delta}_{n'+1,n'+1}\right)\mathbf{y}_{n'}[k] + \boldsymbol{\Delta}_{n'+1,n'+1}\mathbf{y}_{n'}[k]$. A matriz $\boldsymbol{\Delta}_{ij}$ é definida por

$$\boldsymbol{\Delta}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{em (i, j)} \\ 0 & \text{ademais} \end{cases} \tag{51}$$

Desta forma, a equação

$$\mathbf{a'}^T \underbrace{\Delta_{n'+1,n'+1}\mathbf{y}_{n'}[k]}_{\mathbf{e}_{n'+1}y[k]} = \mathbf{b'}\mathbf{u}_{m'}[k] - \mathbf{a'}^T(\mathbf{I}_{n'+1} - \Delta_{n'+1})\mathbf{y}_{n'}[k] \tag{52}$$

com $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^{m'+1}$ o vetor canônico. Portanto

$$y[k] = \left(\mathbf{a'}^T\mathbf{e}_{n'+1}\right)^{-1}\left(\mathbf{b'}^T\mathbf{u}_{m'}[k] - \mathbf{a'}^T(\mathbf{I}_{n'+1} - \Delta_{n'+1,n'+1})\mathbf{y}_{n'}[k]\right) \tag{53}$$

A equação (**??**) tem implementação relativamente custosa por questões de requisitos de projeto. Os requisitos sã0 obter uma função `tf2diff(G, u, y)`, com `G` a função de transferência G, `y` os n valores anteriores da saída y e `u` os m valores anteriores da entrada u e o valor atual $u[k]$.

Matematicamente, o vetor de entrada $\mathtt{u} = \mathbf{u}_0^T[k] = [u[k-m], \cdots, u[k]]$ e saídas $\mathtt{y} = \mathbf{y}_0^T[k] = [y[k-n], \cdots, y[k-1]]$. A saída $y[k]$ não existe antecipadamente como enunciado em (**??**). Além disso, $\dim(\mathtt{y}) = n$ e $\dim(\mathtt{u}) = m+1$. Assim, reescrevemos a equação (**??**) a fim de obter uma forma computável. Por fim

$$y[k] = (\mathbf{a'}^T \mathbf{e}_{n'+1})^{-1} (\mathbf{b'}^T \mathbf{u}[k] - \mathbf{a'}^T \mathbf{F} \mathbf{y}[k]) \tag{54}$$

com $\mathbf{a'} = \begin{cases} \mathbf{a} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{n+1}\mathbf{a} \end{bmatrix}_{m+1} \end{cases}$, $\mathbf{b'} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{m+1}\mathbf{b} \end{bmatrix}_{n+1} & , n \geq m \\ \mathbf{b} & , n < m \end{cases}$ e $\mathbf{F} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}_{n+1,n} & , n \geq m \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m+1,n} & , n < m \end{cases}$

Exercício 7

O controlador PID com possibilidades de controle anti-wind-up e pólo adicional para a parte derivativa apresenta esquematicamente a seguinte estrutura:

$$U(s) = P(s) + I(s) + D(s) \tag{55}$$

com

$$P(s) = K_p E(s), \tag{56}$$

,

$$I(s, E(s), U(s), U_{sat}(s)) = \begin{cases} \frac{K_p}{T_i s} E(s) & \text{sem anti-windup} \\ \frac{K_p}{T_i s} E(s) - \frac{K_p}{T_t s} \left(U(s) - U_{sat}(s) \right) & \text{com anti-windup} \end{cases} \tag{57}$$

,

$$D(s, E(s)) = \begin{cases} K_p T_d s E(s), & \text{sem filtro} \\ K_p T_d s \frac{1}{\frac{T_d}{N} s + 1} E(s), & \text{com filtro} \end{cases} \tag{58}$$

Por meio da definição de $a, f \in \{0, 1\}$, para a caso haja anti-windup e f para pré-filtro, reescrevemos as equações (**??**) e (**??**) como

$$I(s, E(s)) = \frac{K_p}{T_i s} E(s) - a \frac{K_p}{T_t s} \left(U(s) - U_{sat}(s) \right) \tag{59}$$

,

$$\begin{aligned} D(s, E(s)) &= K_p T_d s E(s) \left((1 - f) + f \frac{1}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) \\ &= K_p T_d s E(s) + f \left(\frac{s}{\frac{T_d}{N} s + 1} - s \right) E(s) \\ &= K_p T_d s E(s) + f \frac{\frac{T_d}{N} s^2}{\frac{T_d}{N} s + 1} E(s) \end{aligned} \tag{60}$$

Ao substituirmos as expressões (**??**), (**??**), (**??**), a expressão geral (**??**) consequentemente segue

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s + f \frac{\frac{T_d}{N} s^2}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) E(s) + a \frac{K_p}{T_t s} U_{sat}(s) - a \frac{K_p}{T_t s} U(s) \tag{61}$$

Perceba que para $f = 0$, o termo referente ao pré-filtro é nulo e para $a = 0$, o termo anti-windup é nulo. A fim de implementá-la, a expressão segue

$$\begin{aligned} U(s) &= K_p \left(\frac{T_t s}{T_t s + a} + \frac{T_t s}{T_t s + a} + \frac{T_d T_t s^2}{T_t s + a} + f \frac{\frac{T_d}{N} T_t s^3}{\left(\frac{T_d T_t}{N} s^2 + \left(\frac{T_d}{N} + T_t \right) s + a \right)} \right) E(s) + \frac{a K_p}{T_t s + a} U_{sat}(s) \\ &\coloneqq \left(P'(s) + I'(s) + D'(s) + f F(s) \right) E(s) + a W(s) U_{sat}(s) \end{aligned} \tag{62}$$

Como já explicitado na seção **??**, convertemos cada uma das expressões $P'(s)$, $I'(s)$, $D'(s)$, $F(s)$ e $F(s)$ associadas aos termos dados pela sobreposição linear (**??**).

Dedução dos exercícios 8 e 9

O objetivo dos exercícios (8) e (9) é encontrar $G(z)$ dada transformação $s = F(z)$. Em geral, as transformações aplicadas em engenharia respeitam a relação $s = \frac{c^T \mathcal{Z}}{d^T \mathcal{Z}}$, $c, d \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Z}^T = [z, 1]$. Para a função de transferência dada por $G(s) = \frac{b^T \mathcal{S}_m}{a^T \mathcal{S}_n}$, tal que $\mathcal{S}_k^T = [s^k, \cdots, 1] \in \mathbb{R}^{k+1}$, $m = \dim(b)$ e $n = \dim(a)$ e $s \in \mathbb{C}$, segue

$$s^i = \frac{c^T \mathcal{Z}\, c^T\, \mathcal{Z}\, \cdots c^T\, \mathcal{Z}}{d^T\, \mathcal{Z}\, d^T\, \mathcal{Z}\, \cdots d^T\, \mathcal{Z}}\, i \in \mathbb{N} \tag{63}$$

Por definição, $ab^T = M\ M \in \mathbb{R}^{2x2}$, $M = V \Lambda V^{-1}$, $\forall M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com V a matriz direita de autovetores de M e Λ a matriz de autovalores de M, diagonal por definição. Além disso, $f(M) = V f(\Lambda) V^{-1}$. Em especial, $M^i = V \Lambda^i V^{-1}$. Assim, a equação (**??**) reduz-se a:

$$s^i = \frac{c^T V_c \Lambda_c^{i-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{i-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}} \tag{64}$$

Perceba que o expoente de Λ deve ser $k - 1$ por questão construtiva. Além disso, para uma matriz Λ_c e Λ arbitrárias, para $k = 0$, $\Lambda_c^{-1} = \Lambda_c^{+}$. Construtivamente

$$\mathcal{S}_k^T = \left[\frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}}, \cdots, \frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}} \right] \tag{65}$$

Deste modo, a função convertida pela função de transformação $s = \frac{c^T \mathcal{Z}}{d^T \mathcal{Z}}$ é dada por

$$G(z) = \frac{b^T \mathcal{S}_m}{c^t \mathcal{S}_n} \tag{66}$$

$$\mathcal{S}_k^T = \left[\frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}}, \cdots, \frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}} \right] \tag{67}$$

Exercício 8

A transformação para trás tem parâmetros $c^T = [1, -1]$ e $d^T = [T_s, 0]$ e a transformação para frente $c^T = [1, -1]$ e $d^T = [0, T_s]$. A implementação em MatLab encontra-se em anexo.

Exercício 9

A transformação de Tustin tem parâmetros $c^T = [2, 2]$ e $d^T = [T_s, -T_s]$. A implementação em MatLab encontra-se em anexo.

Exercício 10

Solução 1

Seja $P(z) = 1 + KG(z)$, o polinômio característico de $G(z)$ em malha fechada, para $K \in \mathbb{R}_+^*$ e W o lugar geométrico das raízes do polinômio. O polinômio apresenta $N-1$ pólos em $z = 0$ e 1 pólo em $z = 1$. No caso em estudo, $G(z) = \frac{1}{z^N - z^{N-1}}$.

Seja $\forall N \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $S \in W$, $S = \{z \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}, \sigma \in [0,1] \mid z = (\omega, \sigma)\}$. Assim, por inspeção geométrica, $\inf K = 0$ para assegurar estabilidade. Para K crescente em $M = W \backslash S$, as ramificações resultantes divergem da origem e passam pela circunferência unitária i.e. $\exists K$, $K_{max} = \sup K$. e, assim, $0 \leq K \leq K_{max}$

Para o limite de estabilidade i.e. $|z| \stackrel{!}{=} 1$ ou $z = e^{j\theta}$, tal que a malha fechada do sistema seja estável, tem-se que

$$P(z = e^{j\theta}) \coloneqq 0 = e^{j(N-1)\theta} - e^{jN\theta} \tag{68}$$

Seja a transformação de Euler $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ e as relações trigonométricas $\cos a - \cos b = -2\sin a + b \sin\frac{a-b}{2}$ e $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, para $K \in \mathbb{R}$, a equação (**??**) torna-se:

$$K = -2\sin\left((2N-1)\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \tag{69a}$$

$$0 = 2\cos\left((2N-1)\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \tag{69b}$$

Da equação (**??**), $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 = \left\{\theta \in [0, 2\pi] \;\middle|\; \theta = 0\right\}$, $S_2 = \left\{k \in \mathbb{Z},\ \theta \in [0, 2\pi] \;\middle|\; \theta = \frac{\pi}{2N-1} + \frac{2\pi}{2N-1}k\right\}$. Para S_1, $L_1 = \left\{K \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; K = 0\right\}$. Para S_2, $L_2 = \left\{K \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; 2\,\sin\left(\frac{\pi}{2N-1} + \frac{2\pi}{2N-1}k\right)\right\}$. Por verificação, $k \in [0, 2N-1]$, e a função seno no intervalo dado é estritamente crescente. Assim,

$$K_{max} = K(k) = K(2N-1) = 2\sin\left(\frac{\pi}{(2N-1)2}\right) \tag{70}$$

Por fim, como $\sin(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ Assim,

$$0 \leq K \leq \sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)\right)} \quad \blacksquare \tag{71}$$

Solução 2

Seja $P(z) = 1 + KG(z)$, o polinômio característico de $G(z)$ em malha fechada, para $K \in \mathbb{R}_+^*$ e W o lugar geométrico das raízes do polinômio. O polinômio apresenta $N-1$ pólos em $z = 0$ e 1 pólo em $z = 1$. No caso em estudo, $G(z) = \frac{1}{z^N - z^{N-1}}$. Assim $K = z^{N-1} - z^N$. Para o limite de estabilidade $z = e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
K(z) &= e^{jN\theta}\left(1 - e^{-j\theta}\right) \\
&= e^{jN\theta}\left(1 - e^{-j\theta}\right)\frac{e^{\frac{j\theta}{2}}}{e^{\frac{j\theta}{2}}}\frac{2j}{2j} \\
&= 2je^{\frac{j(2N-1)\theta}{2}}\underbrace{\left(\frac{e^{\frac{j\theta}{2}} - e^{\frac{-j\theta}{2}}}{2j}\right)}_{\sin(\frac{\theta}{2})} \\
&= -2je^{j\frac{(2N-1)\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{72}$$

Como $K \in \mathbb{R}_+^*$, temos que

$$\begin{aligned} K &\coloneqq |2|.|e^{j\frac{(2N-1)\theta}{2}}|.|\sin(\frac{\theta}{2})||\frac{1}{j}| \\ &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \tag{73a}$$

$$0 \coloneqq \angle(2) + \angle\left(e^{\frac{(2N+1)\theta}{2}}\right) + \angle\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \angle(\left(\frac{1}{j}\right)) \qquad = \frac{(2N-1)}{2}\theta - \frac{\pi}{2} \tag{73b}$$

Por (**??**), obtemos que $\theta = \frac{\pi}{2N-1}$. Ao substituir em (**??**), temos que $K = 2\sin\left(\frac{\pi}{2(2N-1)}\right)$. Como $sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$, por fim

$$0 \leq K \leq \sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2N-1}\right)\right)} \quad \blacksquare \tag{74}$$

Scripts

sim_ex6.m

Script 1: Script utilizado para simulação das imagens do exercício 6

```
% @author: Bruno Peixoto
% Simula Os controladores projetado no exercicio 6 da lista 1
% da disciplina PTC5611
function [e, u, y, u_direto] = sim_ex6(G, C, mdlnome, Tf)
    % Caso discreto
    if (C.Ts ~= 0)
        % Tempo de amostragem
        Ts = C.Ts;
        C.Variable = 'z^-1';

        % Parametros do controlador
        params.b0 = C.num{1}(1);
        params.b1 = C.num{1}(2);
        params.a0 = C.den{1}(1);
        params.a1 = C.den{1}(2);
        paramname = sprintf('params%d', 1/Ts);
        assignin('base', paramname, params);
    end

    % Simulacao
    open_system(mdlnome);
    save_system;
    set_param(mdlnome, 'SaveOutput', 'on');
    stdOut = sim(mdlnome, 'StopTime', num2str(Tf), ...
                          'SrcWorkspace', 'current', ...
                          'AbsTol', '1e-6');
    close_system

    % Acao de controle e saida da planta
    u_direto = stdOut.get('u_direto');
    u = stdOut.get('u');
    y = stdOut.get('y');
    e = stdOut.get('e');
end
```

plot_ex6.m

Script 2: Script utilizado para visualização das imagens do exercício 6

```
function hfigs = plot_ex6(Y, U, E, legends)
    n = length(legends);

    % Propriedades uteis
    set(groot, 'defaultTextInterpreter', 'latex');

    titSize = 20;
    xlabSize = 15;
    ylabSize = 15;
    lgdSize = 15;

```

```
    for i = 1:n
        hfig1 = figure(1);
        % Saida da planta
        plot(Y(i).time, Y(i).signals.values);

        ylab = ylabel('Amplitude');
        xlab = xlabel('Tempo [s]');
        tit = title('Saida da planta', 'interpreter', 'latex');
        lgd = legend(legends{1:i});

        set(lgd, 'interpreter', 'latex');
        lgd.FontSize = lgdSize;
        tit.FontSize = titSize;
        ylab.FontSize = ylabSize;
        xlab.FontSize = xlabSize;
        grid

        hold on

        % Acao de controle
        hfig2 = figure(2);

        if i == 1
            plot(U(i).time, U(i).signals.values);
        else
            stairs(U(i).time, U(i).signals.values);
        end

        ylab = ylabel('Amplitude');
        xlab = xlabel('Tempo [s]');
        tit = title('Saida do Controlador', 'interpreter', 'latex');
        lgd = legend(legends{1:i});

        set(lgd, 'interpreter', 'latex');
        lgd.FontSize = lgdSize;
        tit.FontSize = titSize;
        ylab.FontSize = ylabSize;
        xlab.FontSize = xlabSize;
        grid

        hold on

        % Erro da saida e entrada
        hfig3 = figure(3);

        if i == 1
            plot(E(i).time, E(i).signals.values);
        else
            stairs(E(i).time, E(i).signals.values);
        end

        ylab = ylabel('Amplitude');
        xlab = xlabel('Tempo [s]');
        tit = title('Erro');
```

```

        lgd = legend(legends{1:i});

        set(lgd, 'interpreter', 'latex');
        lgd.FontSize = lgdSize;
        tit.FontSize = titSize;
        ylab.FontSize = ylabSize;
        xlab.FontSize = xlabSize;
        grid

        hold on

    end

    hold off

    orient(hfig1,'landscape')
    orient(hfig2,'landscape')
    orient(hfig3,'landscape')

    hfigs = [hfig1, hfig2, hfig3];

end
```

mfunctioncontent.m

Script 3: Conteúdo da função MatLab no diagrama de blocos com controle discreto

```
% @author: Bruno Peixoto
% Efetua o controle de posicao de um motor DC
% por transformacao de tustin
function uk = controlador(ek, params)
    persistent e_ant;
    persistent u_ant;

     % Primeira execucao
     if(isempty(e_ant))
         e_ant = [0, 0];
     end

     if(isempty(u_ant))
         u_ant = 0;
     end

    % Parametros do controlador
    b0 = params.b0;
    b1 = params.b1;
    a0 = params.a0;
    a1 = params.a1;

    % Atualizacao do erro
    e_ant(1) = e_ant(2);
    e_ant(2) = ek;

    % Valores para controle
```

```
    ek_1 = e_ant(1);
    ek = e_ant(2);
    uk_1 = u_ant;

    % Acao de controle
    uk = (b0/a0)*ek + (b1/a0)*ek_1 - (a1/a0)*uk_1;

    % Atualizacao da acao de controle
    u_ant = uk;
end
```

syms2tfz.m

Script 4: Conversão de simbólico fracionário em função de transferência discreta

```
% Convert Symbolic Transfer Function to ZPK Transfer Function
% Crystal Nassouri 2009
% Allows for substitution/manipulation that can only be done with syms
%
% Ex: Gs = syms2tf(G)
% Where G is a symbolic equation and Gs is a zpk transfer function
% Source: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27302-syms-
   to-tf-conversion

function[ans] = syms2tfz(G, Ts)
[symNum,symDen] = numden(G); %Get num and den of Symbolic TF
TFnum = sym2poly(symNum);    %Convert Symbolic num to polynomial
TFden = sym2poly(symDen);    %Convert Symbolic den to polynomial

ans = tf(TFnum,TFden, Ts);
```

s2z.m

Script 5: Conversão de função de transferência por transformação $T(z)$

```
% Transforma a funcao de tranferencia G em discreto
% com numerador e denominador da transformacao linear
% fornecida
% Bruno Peixoto 2018
%
% Ex.: Discretizacao para frente de uma PT1
%  >> c = [-1, 1];
%  >> d = [Ts, 0];
%  >> G = s2z(Gs, Ts, c, d);
%    ans =
%
%    1
%    -
%    z
%
%  Sample time: 1 seconds
%  Discrete-time transfer function.

function[ans] = s2z(G, Ts, c, d)

syms z;
```

```
% Numerador e denomador da tf
num = G.num{1}';
den = G.den{1}';

% Grau do numerador e denominador
m = length(num);
n = length(den);

% Base do espaco z polinomial
Z = [z; 1];

% Matriz quadrada do numerador
C = Z*c';
[Vc, Dc] = eig(C);
Vcinv = inv(Vc);

% Matriz quadrada do denominador
D = Z*d.';
[Vd, Dd] = eig(D);
Vdinv = inv(Vd);

% Conversao do vetor base do numerador em S em Z
Sm = [];
for i = 1:m
    k = i-1;

    if(k == 0)
        Dc_k_1 = pinv(Dc);
        Dd_k_1 = pinv(Dd);
    else
        Dc_k_1 = Dc^(k-1);
        Dd_k_1 = Dd^(k-1);
    end

    numi = c'*Vc*Dc_k_1*Vcinv*Z;
    deni = d'*Vd*Dd_k_1*Vdinv*Z;
    Sm = [numi/deni; Sm];
end

% Conversao do vetor base do denominador em S em Z
Sn = [];
for i = 1:n
    k = i-1;
    if(k == 0)
        Dc_k_1 = pinv(Dc);
        Dd_k_1 = pinv(Dd);
    else
        Dc_k_1 = Dc^(k-1);
        Dd_k_1 = Dd^(k-1);
    end

    numi = c'*Vc*Dc_k_1*Vcinv*Z;
    deni = d'*Vd*Dd_k_1*Vdinv*Z;
```

```

    Sn = [numi/deni; Sn];
end

Gz = (num.'*Sm)/(den.'*Sn);
Gz = simplify(Gz);

tfdsymed = syms2tfz(Gz, Ts);
ans = minnreal(tfdsymed);
```

backward.m

Script 6: Transformação de conversão para trás

```
% Transforma a funcao de transferencia G em discreto
% pela transformacao para tras
% Bruno Peixoto 2018
%
% Ex.: Discretizacao para frente de uma PT1
%  >> G = tf([1], [1, 1]);
%  >> Ts = 1;
%  >> Gz = forward(G, Ts);
%    ans =
%
%       1
%    -------
%    2 z - 1
%
% Sample time: 1 seconds
% Discrete-time transfer function.

function[ans] = backward(G, Ts)

c = [1; -1];
d = [Ts; 0];
ans = s2z(G, Ts, c, d);
```

forward.m

Script 7: Transformação de conversão para frente

```
% Transforma a funcao de tranferencia G em discreto
% pela transformacao para frente
% Bruno Peixoto 2018
%
% Ex.: Discretizacao para frente de uma PT1
%  >> G = tf([1], [1, 1]);
%  >> Ts = 1;
%  >> Gz = forward(G, Ts);
%    ans =
%
%     1
%    ----
%     z
%
% Sample time: 1 seconds
```

```
% Discrete-time transfer function.
function[ans] = forward(G, Ts)

c = [1; -1];
d = [0; Ts];
ans = s2z(G, Ts, c, d);
```

tustin_prop.m

Script 8: Transformação de conversão tustin própria

```

% Transforma a funcao de tranferencia G em discreto
% por Tustin
% Bruno Peixoto 2018
%
% Ex.: Discretizacao para frente de uma PT1
%  >> G = tf([1], [1, 1]);
%  >> Ts = 1;
%  >> Gz = forward(G, Ts);
%  Gz =
%
%     z + 1
%    -------
%    3 z - 1
% Sample time: 1 seconds
% Discrete-time transfer function.
function [ans] = tustin_prop(G, Ts)

c = [2; -2];
d = [Ts; Ts];
ans = s2z(G, Ts, c, d);
```