Lista de exercícios 1

Bruno H. L. N. Peixoto Número USP: 7206666 E-mail USP: bruno.peixoto@usp.br

30 de setembro de 2018

Exercício 1

A. Por hipótese, a frequência de amostragem utilizada satisfaz o teorema de Nyquist [1]. Como $t = kT_s = \frac{k}{f_s}$, temos que.

$$x[k] = cos(k\frac{\omega}{f_s}) \stackrel{!}{=} cos(k\alpha) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\omega}{f_s} \tag{1}$$

Assim, $\omega = 250\pi\frac{rad}{s}$. A imagem (**??**) apresenta o sinal original e o amostrado.

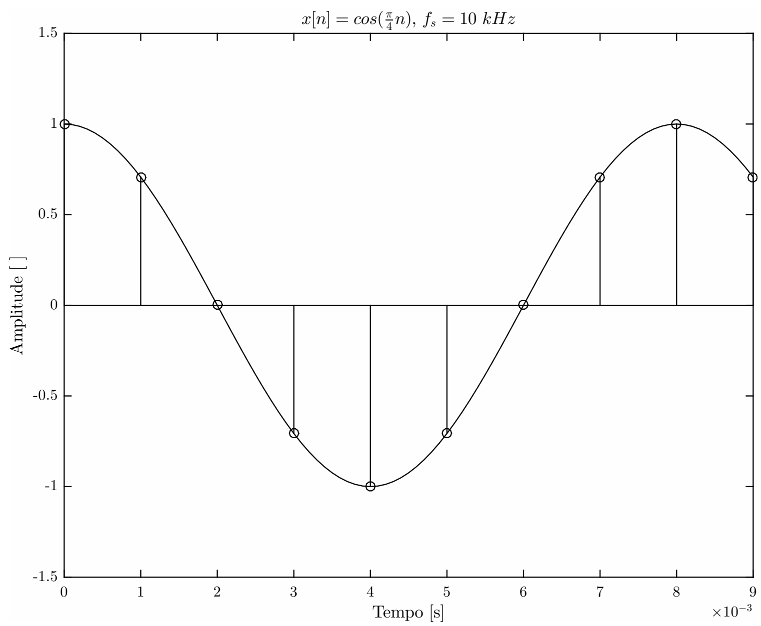


Figura 1: Curva original e série amostrada

B. Pela equação (**??**), conclui-se que $f_s = 12\ kHz$. Dada frequência do sistema de $4000\pi\frac{rad}{s}$, pelo teorema de Nyquist $\omega_s \stackrel{!}{>} 8000\pi\frac{rad}{s} \approx 24000\frac{rad}{s}$. Devido à violação, não é possível reconstruir o sinal por meio de um filtro passa-baixas ideal.

C. Para sinais senoidais amostrados com frequência f_s, tem-se que, para uma mesma série $x[n] = cos(\alpha n)$, os possíveis sinais advindos deste são $x(t) = cos(2\pi(f_0 + f_s)t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega = 2\pi f$. Por (**??**), tem-se que $\omega_0 = \frac{5\pi}{4}\frac{rad}{s}$. Assim, dois possíveis sinais para a série fornecida são $x_1(t) = cos(\frac{5\pi}{4}t)$ e $x_2(t) = cos(\frac{85\pi}{4}t)$.

D. Para o caso presente na figura (**??**), o sinal reconstruido é distorcido. Em contrapartida, por respeitar o critério de Nyquist, o sinal reconstruido é o mesmo do sinal original, presente na figura (**??**).

[1] Essencialmente $\omega_s \geq 2\omega_0$, o qual ω_s corresponde a frequência de amostragem e ω_0 a máxima frequência do sinal amostrado.

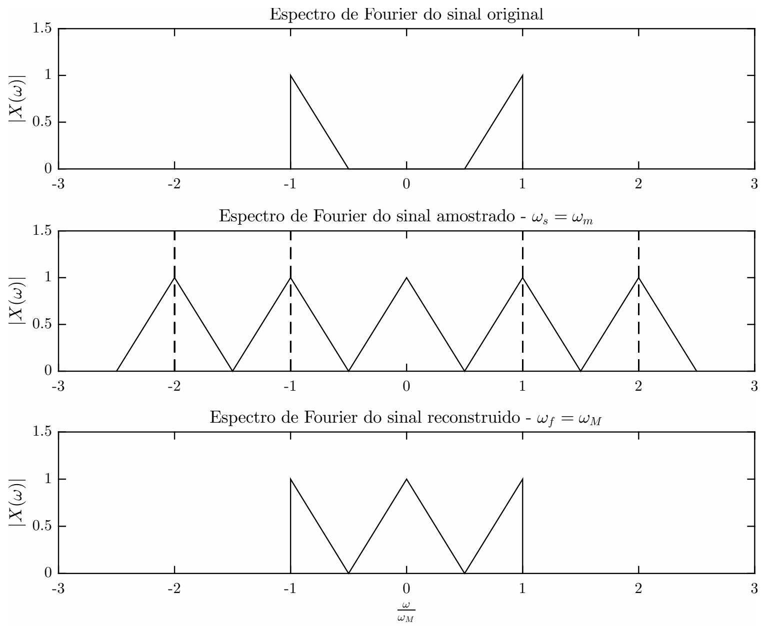


Figura 2: Espectro de Fourier do sinal original, amostrado com $\omega_s = \omega_N$, e reconstruído por filtro com $\omega_f = \omega_N$

Exercício 2

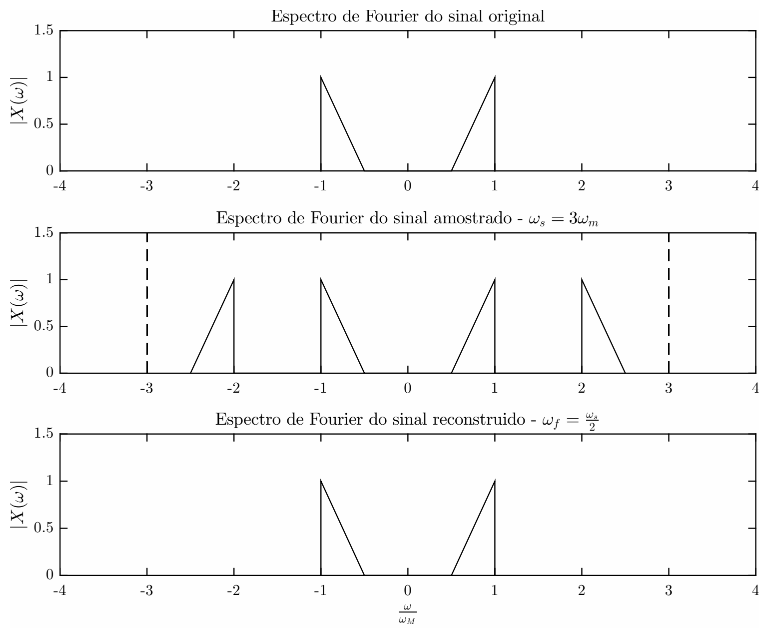
A. As demonstrações estão abaixo:

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i] \\
&= x[0] + z^{-1} \sum_{i=0}^{1} x[i] + z^{-2} \sum_{i=0}^{2} x[i] + \cdots \\
&= x[0] \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[1] \sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots + x[k] \underbrace{\sum_{i=k}^{\infty} z^{-i}}_{\frac{z^{-k}}{1-z^{-1}}} + \cdots \\
&= x[0] \frac{1}{1-z^{-1}} + x[1] \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{3}
$$

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} X(z)$



![!h]

Figura 3: Espectro em frequência do sinal original, amostrado com $\omega_s = 3\,\omega_N$ e reconstruído por filtro com $\omega_f = \frac{\omega_s}{2}$

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i-1] \\
&= x[-1] + z^{-1} \sum_{i=0}^{1} x[i-1] + z^{-2} \sum_{i=0}^{2} x[i-1] + \cdots \\
&= \underbrace{x[-1]}_{:=0} \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[0] \sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots \\
&= x[0] \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + x[1] \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{5}
$$

- $\lim\limits_{z \to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i]$

$$
\lim_{z \to 1} X(z) = \lim_{z \to 1} \sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \tag{6}
$$

$$
\therefore \lim_{z \to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \quad \blacksquare \tag{7}
$$

B. Dada função $x_1(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$, por definição, tem-se que:

$$\begin{aligned} Z\{x_1(t)\} = X_1(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_1(iTs).z^{-i} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1 - e^{-aT_s i}\right)z^{-i} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} - \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{e^{-aT_s i}.z^{-i}}_{(z.e^{aT_s})^{-i}} \end{aligned} \tag{8}$$

Se $|z| > 1$ e $|z| > e^{aT_s}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} - \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-aT_s i}.z^{-i} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s}z^{-1})} \end{aligned} \tag{9}$$

Portanto

$$X_1(z) = \frac{1}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{10}$$

De mesma forma, dada função $x_2(t) = \mathrm{t}^2 e^{-at}$, por definição tem-se que:

$$\begin{aligned} Z\{x_2(t)\} = X_2(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_2(iTs).z^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(i^2 T_s^2 e^{-aT_s i} z^{-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} T_s^2 i^2 e^{-aT_s i} z^{-i} \end{aligned} \tag{11}$$

Por meio da propriedade da transformada $\mathcal{Z}\{nX[n]\} \coloneqq -z\frac{d}{dz}X(z)$, segue

$$x[n] = e^{-an} \rightarrow -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} = \mathcal{Z}\{ne^{-an}\},\ n = T_s i,\ i \in \mathbb{N} \tag{12a}$$

$$x[n] = ne^{-an} \rightarrow -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} = \mathcal{Z}\{n^2 e^{-an}\},\ n = T_s,\ i \in \mathbb{N} \tag{12b}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= \frac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}} \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= -e^{-aT_s}\frac{z^{-2}}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^2} \\ \mathcal{Z}\{ne^{-an}\} \coloneqq -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-1}}{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})^2} \end{aligned} \tag{13}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-1}}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^2} \Rightarrow \\
\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-2}(1-e^{-aT_s}z^{-1})^2 - 2(1-e^{-aT_s}z^{-1})e^{-aT_s}z^{-2}}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^3} \\
&= -e^{-aT_s}\frac{z^{-2}(1+e^{-aT_s}z^{-1})}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^3}
\end{aligned} \tag{14}$$

Portanto

$$\mathcal{Z}\{n^2e^{-an}\} \coloneqq -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} = e^{-aT_s}\frac{z^{-1}(1+e^{-aT_s}z^{-1})}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{15}$$

C. Por definição, a equação das diferenças é da forma

$$\sum_{i=0}^{m} b_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{n} a_i x[n-i] \tag{16}$$

com parâmetros dados por $m = n = 3$ e a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ dados por $a_0 = 1$, $a_1 = -0.9737$, $a_2 = 0.8101$, $a_3 = 0.8151$, $a_1 = -0.0515$, $b_0 = 0.4108$, $b_1 = -1.0094$, $b_2 = 1.0094$ e $b_3 = 0.4108$. A função de transferência equivalente é

$$G(z) = \frac{Y(Z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_{m-i} z^{i}}{\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{i}} \tag{17}$$

Assim, as raízes do numerador e denominador, nomeadamente zeros e pólos, são respectivamente $z = \{1.38 \pm 1.18i, -0.3\}$ e $p = \{0.45 \pm 0.74i, 0.068\}$.

D.
- $x[n] = a^n u[n]$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n \overset{|z|>|a|}{=} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\
&= \frac{1}{1-az^{-1}} \\
\therefore G(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}}
\end{aligned} \tag{18}$$

- $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$\begin{aligned}
X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-1} \\
&= -\sum_{n=-1}^{-\infty} a^n z^{-n} \\
&= -\left(a^{-1}z + a^{-2}z^2 + a^{-3}z^3 + \cdots\right) \\
&= -\frac{z}{a}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{a})^n = -\frac{z}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \\
\therefore G(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}}
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\therefore G(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{20}$$

Exercício 3

Seja o pólo $s = 0$ numericamente mapeado, entretanto, para $s_0 = 0.01$ em espaço s, o respectivo pólo em z equivale a $z_0 = e^{T_s s_0}$, com $T_s = 0.01$ s. Assim $z_0 \approx 1.001$.

A. Ambas as funções de transferência, $G(s)$ e $G(z)$ devem ter o mesmo ganho em regime estacionário, ou seja,

$$\lim_{s \to 0} G(s) \approx \lim_{s \to s_0} G(s) \coloneqq \lim_{z \to 1} G(z) \Rightarrow \frac{1}{s_0} = \frac{1}{1 - e^{T_s s_0}} K \Rightarrow K \overset{N}{=} \frac{1 - e^{T_s s_0}}{s_0} = -0.01 \tag{21}$$

Portanto

$$G(z) = \frac{1 - e^{T_s s_0}}{s_0} \frac{1}{1 - e^{T_s s_0} z^{-1}} \overset{N}{=} -0.001 \frac{1}{1 - 1.01 z^{-1}} \tag{22}$$

Perceba que a função de transferência resultante é estritamente própria.

B. A fim de que a função de transferência em espaço z seja biprópria, $m_z = n_z$, os quais m_z é o número de zeros e n_z é o número de zeros. Assim, o zero $s \to -\infty_{\mathbb{C}}$ é mapeado em $z = -1$. Assim como no item (**??**), o ganho em regime estacionário deve ser igual, ambos para espaço s ou z. Assim,

$$\lim_{s \to 0} G(s) \approx \lim_{s \to s_0} G(s) \coloneqq \lim_{z \to 1} G(z) \Rightarrow \frac{1}{s_0} = \frac{2}{1 - e^{T_s s_0}} K \Rightarrow K = \frac{1 - e^{T_s s_0}}{2 s_0} \overset{N}{=} -0.005 \tag{23}$$

Portanto,

$$G(z) = \left(\frac{1 - e^{T_s s_0}}{2 s_0} \right) \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{T_s s_0} z^{-1}} \overset{N}{=} -0.005 \frac{1 - z^{-1}}{1 - 1.001 z^{-1}} \tag{24}$$

Exercício 4

A conversão sem aproximação do espaço contínuo para discreto com mantenedor de ordem zero (ZOH) satisfaz a seguinte equação:

$$G(z) \coloneqq (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\} \tag{25}$$

Desta forma

$$\frac{G(s)}{s} = H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \tag{26}$$

Pelo método de expansão de frações parciais, a equação (**??**) apresenta a seguinte forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)} \tag{27}$$

Onde

$$A = H(s)s \Big|_{s=0} = \frac{K}{a} \text{ e } B = H(s)(s+a) \Big|_{s=-a} = -\frac{K}{a} \tag{28}$$

Logo

$$H(s) = \frac{K}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) \tag{29}$$

A função de transferência acima exceto ao fator de escala j foi obtida no item (**??**). Desta forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{K}{a}\sigma(t)\left(1 + e^{-at}\right) \tag{30}$$

Portanto, a função $\mathcal{Z}$ da função (**??**) é dada por

$$G(z) = \frac{K}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{31}$$

Por fim, por meio da função de transefrência de uma malha fechada [2], após certa manipulação algébrica é dada por:

$$G_{MF}(z) = K'\frac{z}{z+b} \tag{32}$$

onde $K' = \frac{K}{a}(1 - e^{-aT_s})$ e $b = \left[\left[(1 + \frac{k}{a})\right] e^{(} - aT_s) - \frac{k}{a}\right]$.

Exercício 5

A. Dados: Ts = 0,1 s

$$s = \frac{z-1}{T_s} \therefore X(z) = \frac{\frac{z+1}{T_s} + 1}{\frac{z+1}{T_s} + 10} = \frac{z - (1 - T_s)}{z - (1 - 10T_s)} \overset{N}{=} \frac{z - 0.9}{z} \tag{33}$$

B. Dados: Ts = 0,1 s

$$s = \frac{z-1}{T_s z} \therefore X(z) = \frac{\frac{z-1}{T_s z} + 1}{\frac{z-1}{T_s z} + 10} = \frac{(1 + T_s)z - 1}{(1 + 10T_s)z + 1} \overset{N}{=} 0.45\frac{z - 1.1}{z - 0.5} \tag{34}$$

C. Dados: Ts = 0,1 s

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} + 1}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} + 10} = \frac{(2 + T_s)z + (T_s - 2)}{(2 + 10T_s)z + (10T_s - 2)} \overset{N}{=} \frac{2.1z - 1.9}{3z - 1} = 0.7\frac{z - 0.63}{z - 0.33} \tag{35}$$

D. Dados: $\omega_c = 3\frac{rad}{s}$

$$s = \frac{\omega_c}{\tan\frac{\omega_c T_s}{2}}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1} + 1}{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1} + 10} = \frac{(\tan\frac{\omega_c T_s}{2} + \omega_c)z + (\tan\frac{\omega_c T_s}{2} - \omega_c)}{(10\tan\frac{\omega_c T_s}{2} + \omega_c)z + (10\tan\frac{\omega_c T_s}{2} - \omega_c)} \tag{36}$$

Como $\frac{\omega_c T_s}{2} \ll 1$ e $\tan\theta \approx \theta$, então $\tan\frac{\omega_c T_s}{2} \approx \frac{\omega_c T_s}{2}$. Assim

$$X(z) = \frac{3.15\ \ - 2.85}{4.15z - 1.5} = 0.76\frac{z - 0.9}{z - 0.36} \tag{37}$$

[2] A equação em malha fechada de um sistema em tempo discreto ou contínuo é dado pela equação $G_{MF}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$

E. Todo pólo e zero da planta pode ser mapeado diretamente para o espaço $\mathcal{Z}$ pela relação $z = e^{sT_s}$. O ganho da função em regime estacionário devem ser ambos em espaço discreto quanto contínuo iguais.

$$\lim_{z \to 1} X(z) \stackrel{!}{=} \lim_{s \to 0} X(s) \tag{38}$$

Desta forma,

$$K_z \frac{1 - e^{-Ts}}{1 - e^{-10Ts}} = \frac{1}{10} \Rightarrow K_z = 10 \frac{1 - e^{-10T_s}}{1 - e^{-T_s}} \approx 1.59$$

Portanto

$$X(z) = 1.59 \frac{z - 0.9}{z - 0.37} \tag{39}$$

Exercício 6

Para os critérios de projeto fornecidos, o projeto de controle será feito em espaço s e o respectivo pólo deve pertencer ao lugar das raízes em malha fechada. O tempo de subida é:

$$t_r^{0\%-100\%}(\omega_n, \zeta) = \frac{\pi - \theta(\zeta)}{\omega_d(\omega_n, \zeta)}, \text{ com } \theta(\zeta) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \text{ e } \omega_d(\omega_n, \zeta) = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{40}$$

De mesma forma, o sobressinal é dado por:

$$M(\zeta) = e^{-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{41}$$

Como (**??**) é bijetora, $\exists g(M) = \zeta$, $g : M \to g(M)$, $M \circ g(M) = M$. De fato $g(M) = \sqrt{\frac{\log^2 M}{\pi^2 - \log^2 M}}$. Assim, $\zeta \approx 0.672$. De mesma forma, para ζ fixo, analogamente, $\exists h(t_r) = \zeta$, $h : t_r \to h(t_r)$, $t_r(\zeta) \circ h = t_r$. De fato, $g(t_r) = \frac{\pi - \theta}{\omega_d(\zeta, t_r)}$. Assim, para $\zeta = 0.672$, então $\omega_n = 4.46$.

Como $\forall s \in \mathbb{C},\ s = \omega_n(\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})$, logo a seguinte malha satisfaz os critérios estabelecidos em projeto:

$$C(s) = K \frac{s + 0.7}{s + 2\zeta\omega_n} \tag{42}$$

Ao considerar o projeto em tempo contínuo, o controlador acima casa o pólo da planta com o zero do controlador. Para o caso de casamento perfeito de pólo e zero, o novo lugar das raízes permite que o pólo estabelecido pertença a este. Ademais, $K = \omega_n^2$. Assim, a função de transferência fornecida é:

$$C(s) = \omega_n^2 \frac{s + 0.7}{s + 2\zeta\omega_n} \stackrel{N}{=} 19.89 \frac{s + 0.7}{s + 5.33} \tag{43}$$

Dedução dos exercício 7

Em caso geral, a fim da conversão de uma função de transferência $G(z)$ em sua respectiva função de diferenças e assim ação de controle do instante atual kT_s, seja essa em sua forma matricial

$$G(z) = \frac{b^T \mathbf{z}_m}{a^T \mathbf{z}_n} \tag{44}$$

Os quais $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{Z}_k = \left[z^k, \cdots, 1\right]^T$. Após manipulação algébrica, $\mathbf{z}_p = z^p\, \mathbf{v}_p$, $\mathbf{v}_p = [1, \cdots, z^{-p}]$. A fim de manter a convenção para z^{-1} dada por $\mathbf{w}_p = [z^{-p}, \cdots, 1]$, $\mathbf{w}_p = \mathbf{J}_p \mathbf{v}_p \Leftrightarrow \mathbf{v}_p = \mathbf{J}_p \mathbf{w}_p$, com $\mathbf{J}_p$ a matriz de permuta, descrita em (**??**).

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

A função de transferência resultante é (**??**).

$$G(z) = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{J}_{m+1} \mathbf{w}_m}{\mathbf{a}^T \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{w}_n} := \frac{\mathbf{b'}^T \mathbf{w}_{m'}}{\mathbf{a'}^T \mathbf{w}_{n'}} \tag{46}$$

A fim de manter unicidade na solução, os parâmetros **a'** e **b'** são:

$$\mathbf{a'} = \begin{cases} [\mathbf{0}_{m-n,1}, \mathbf{a}^T \mathbf{J}_{n+1}]^T] & , n < m \\ \mathbf{a} & , n \geq m \end{cases} \tag{47a}$$

$$\mathbf{b'} = \begin{cases} \mathbf{b} & , n < m \\ [\mathbf{0}_{m-n,1}, \mathbf{b}^T \mathbf{J}_{m+1}]^T & , n \geq m \end{cases} \tag{47b}$$

Ademais, $n' = \dim \mathbf{a'}$ e $m' = \dim \mathbf{b'}$. A equação de diferenças de (**??**), é por definição:

$$G(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{w}_m}{\mathbf{a}^T \mathbf{w}_n} \Rightarrow a^T \mathbf{y}[k] = b^T \mathbf{u}[k] \tag{48}$$

Por inspeção, os parâmetros da equação de diferenças seguem de (**??**) e (**??**). O vetor **u** pode ser escrito como $\mathbf{u}[k] = (\mathbf{I}_{m'+1} - \mathbf{\Delta}_{m'+1,m'+1})\, \mathbf{u}[k] + \mathbf{\Delta}_{m'+1,m'+1} \mathbf{u}[k]$. A matriz $\mathbf{\Delta}_{ij}$ é definida por

$$\mathbf{\Delta}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{em (i, j)} \\ 0 & \text{ademais} \end{cases} \tag{49}$$

Desta forma, a equação

$$\mathbf{b'}^T \underbrace{\Delta_{m'+1,m'+1} \mathbf{u}[k]}_{\mathbf{e}_{m'+1} u[k]} = \mathbf{a'}\mathbf{y}[k] - \mathbf{b'}^T (\mathbf{I}_{m'+1} - \Delta_{m'+1,\, m'+1}) \mathbf{u}[k] \tag{50}$$

Sendo $\mathbf{e}_{m'+1} \in \mathbb{R}^{m'+1}$ definido por

$$\mathbf{e}_{m'+1} = \begin{cases} 1 & \text{em m'+1} \\ 0 & \text{ademais} \end{cases} \tag{51}$$

Portanto

$$u[k] = (\mathbf{b'}^T \mathbf{e}_{m'+1})^{-1} (\mathbf{a'}^T \mathbf{y}[k] - \mathbf{b'}^T (\mathbf{I}_{m'+1} - \Delta_{m'+1,\, m'+1}) \mathbf{u}[k]) \tag{52}$$

Exercício 7

A função de transferência de um controlador PID é dada por:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K \, \frac{s^2 + bs + c}{s} \tag{53}$$

Os quais $K = K_p T_d$, $b = \frac{1}{T_d}$ e $c = \frac{1}{T_i T_d}$. Com auxílio da equação do exercício (**??**), conclui-se que, por meio da transformação para trás, a função de transferência de um controlador PID segue

$$G(s) = \tag{54}$$

Dedução dos exercícios 8 e 9

O objetivo dos exercícios (8) e (9) é encontrar $G(z)$ dada transformação $s = F(z)$. Em geral, as transformações aplicadas em engenharia respeitam a relação $s = \frac{c^T \mathcal{Z}}{d^T \mathcal{Z}}$, $c, d \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Z}^T = [z, 1]$. Para a função de transferência dada por $G(s) = \frac{b^T \mathcal{S}_m}{a^T \mathcal{S}_n}$, tal que $\mathcal{S}_k^T = [s^k, \cdots, 1] \in \mathbb{R}^{k+1}$, $m = \dim(b)$ e $n = \dim(a)$ e $s \in \mathbb{C}$, segue

$$s^i = \frac{c^T \mathcal{Z}\, c^T\, \mathcal{Z}\, \cdots\, c^T\, \mathcal{Z}}{d^T\, \mathcal{Z}\, d^T\, \mathcal{Z}\, \cdots d^T\, \mathcal{Z}}\; i \in \mathbb{N} \tag{55}$$

Por definição, $ab^T = M\;\, M \in \mathbb{R}^{2x2}$, $M = V\Lambda V^{-1}$, $\forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com V a matriz direita de autovetores de M e a matriz de autovalores de M, diagonal por definição. Além disso, $f(M) = V f(\Lambda) V^{-1}$. Em especial, $M^i = V\Lambda^i V^{-1}$. Assim, a equação (**??**) reduz-se a:

$$s^i = \frac{c^T V_c \Lambda_c^{i-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{i-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}} \tag{56}$$

Perceba que o expoente de Λ deve ser $k-1$ por questão construtiva. Além disso, para uma matriz Λ_c e Λ arbitrárias, para $k = 0$, $\Lambda_c^{-1} = \Lambda_c^{+}$. Construtivamente

$$\mathcal{S}_k^T = \left[\frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}}, \cdots, \frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}}\right] \tag{57}$$

Deste modo, a função convertida pela função de transformação $s = \frac{c^T \mathcal{Z}}{d^T \mathcal{Z}}$ é dada por

$$G(z) = \frac{b^T \mathcal{S}_m}{c^t \mathcal{S}_n} \tag{58}$$

$$\mathcal{S}_k^T = \left[\frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}}, \cdots, \frac{c^T V_c \Lambda_c^{k-1} V_c^{-1} \mathcal{Z}}{d^T V_d \Lambda_d^{k-1} V_d^{-1} \mathcal{Z}}\right] \tag{59}$$

Exercício 8

A transformação para trás tem parâmetros $c^T = [1, -1]$ e $d^T = [T_s, 0]$ e a transformação para frente $c^T = [1, -1]$ e $d^T = [0, T_s]$. A implementação em MatLab encontra-se em anexo.

Exercício 9

A transformação de Tustin tem parâmetros $c^T = [2, 2]$ e $d^T = [T_s, -T_s]$. A implementação em MatLab encontra-se em anexo.

Exercício 10

Seja $P(z) = 1 + KG(z)$, o polinômio característico de $G(z)$ em malha fechada, para $K \in \mathbb{R}_+^*$ e W o lugar geométrico das raízes do polinômio. O polinômio apresenta $N-1$ pólos em $z = 0$ e 1 pólo em $z = 1$. No caso em estudo, $G(z) = \frac{1}{z^N - z^{N-1}}$ e $G_c(z) = K\frac{G(z)}{1+KG(z)}$. A imagem REF_IMAGEM apresenta o lugar das raízes para $N = 5$.

IMAGEM

Seja $\forall N \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $S \in W$, $S = \{z \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}, \sigma \in [0,1] \mid z = (\omega, \sigma)\}$. Assim, por inspeção geométrica, $\inf K = 0$ para assegurar estabilidade. Para K crescente em $M = W\backslash S$, as ramificações resultantes divergem da origem e passam pela circunferência unitária i.e. $\exists K$, $K_{max} = \sup K$. e, assim, $0 \leq K \leq K_{max}$ Para o limite de estabilidade i.e. $|z| \overset{!}{=} 1$ ou $z = e^{j\theta}$, tal que a malha fechada do sistema seja estável, tem-se que

$$P(z = e^{j\theta}) \coloneqq 0 = e^{j(N-1)\theta} - e^{jN\theta} \tag{60}$$

Seja a transformação de Euler $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ e as relações trigonométricas $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ e $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, para $K \in \mathbb{R}$, a equação (**??**) torna-se:

$$K = -2\cos\left((2N-1)\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \tag{61a}$$

$$0 = 2\sin\left((2N-1)\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \tag{61b}$$

Da equação (**??**), $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 = \left\{\theta \in [0, 2\pi] \;\middle|\; \theta = 0\right\}$, $S_2 = \left\{k \in \mathbb{Z},\; \theta \in [0, 2\pi] \;\middle|\; \theta = \frac{\pi}{2N-1} + \frac{2\pi}{2N-1}k\right\}$. Para S_1, $L_1 = \left\{K \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; K = 0\right\}$. Para S_2, $L_2 = \left\{K \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; 2\sin\left(\frac{\pi}{2N-1} + \frac{2\pi}{2N-1}k\right)\right\}$. Por verificação, $k \in [0, 2N-1]$, e a função seno no intervalo dado é estritamente crescente. Assim,

$$K_{max} = K(k) = K(2N-1) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}\right) \tag{62}$$

Assim,

$$0 \geq K \leq 2\sin\left(\frac{\pi}{2N-1}\right) \quad \blacksquare \tag{63}$$