Lista de exercícios 1

Bruno H. L. N. Peixoto Número USP: 7206666 E-mail USP: bruno.peixoto@usp.br

30 de setembro de 2018

O leitor pode encontrar todos os scripts utilizados neste documento em `https://github.com/brunolnetto/Mestrado`.

Exercício 1

A. Por hipótese, a frequência de amostragem utilizada satisfaz o teorema de Nyquist [1]. Como $t = kT_s = \frac{k}{f_s}$, temos que.

$$x[k] = cos(k\frac{\omega}{f_s}) \overset{!}{=} cos(k\alpha) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\omega}{f_s} \tag{1}$$

Assim, $\omega = 250\pi\frac{rad}{s}$. A imagem (**??**) apresenta o sinal original e o amostrado.

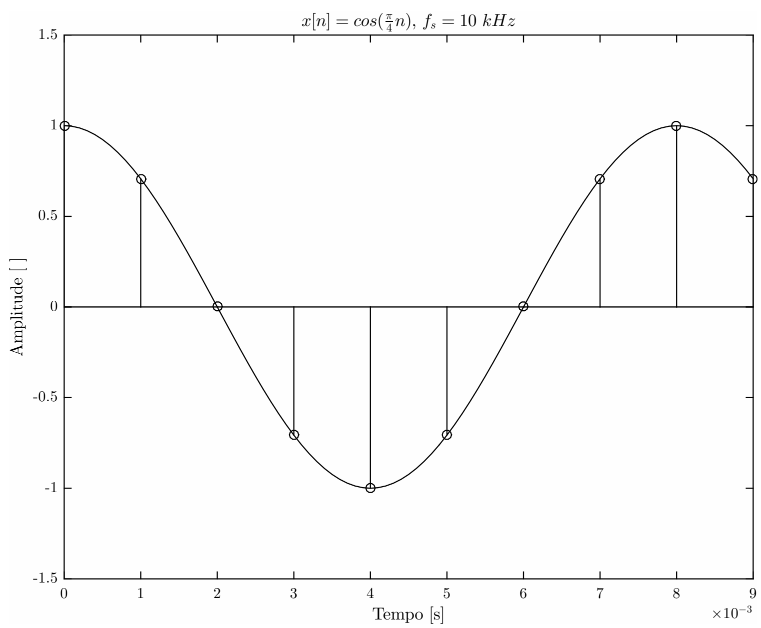


Figura 1: Curva original e série amostrada

B. Pela equação (**??**), conclui-se que $f_s = 12\ kHz$. Dada frequência do sistema de $4000\pi\frac{rad}{s}$, pelo teorema de Nyquist $\omega_s \overset{!}{>} 8000\pi\frac{rad}{s} \approx 24000\frac{rad}{s}$. Devido à violação, não é possível reconstruir o sinal por meio de um filtro passa-baixas ideal.

C. Para sinais senoidais amostrados com frequência f_s, tem-se que, para uma mesma série $x[n] = cos(\alpha n)$, os possíveis sinais advindos deste são $x(t) = cos(2\pi(f_0 + f_s)t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega = 2\pi f$. Por (**??**), tem-se que $\omega_0 = \frac{5\pi}{4}\frac{rad}{s}$. Assim, dois possíveis sinais para a série fornecida são $x_1(t) = cos(\frac{5\pi}{4}t)$ e $x_2(t) = cos(\frac{85\pi}{4}t)$.

[1]Essencialmente $\omega_s \geq 2\omega_0$, onde ω_s corresponde a frequência de amostragem e ω_0 a máxima frequência do sinal amostrado.

D. Para o caso presente na figura (**??**), o sinal reconstruido é distorcido. Em contrapartida, por respeitar o critério de Nyquist, o sinal reconstruido é o mesmo do sinal original, presente na figura (**??**).

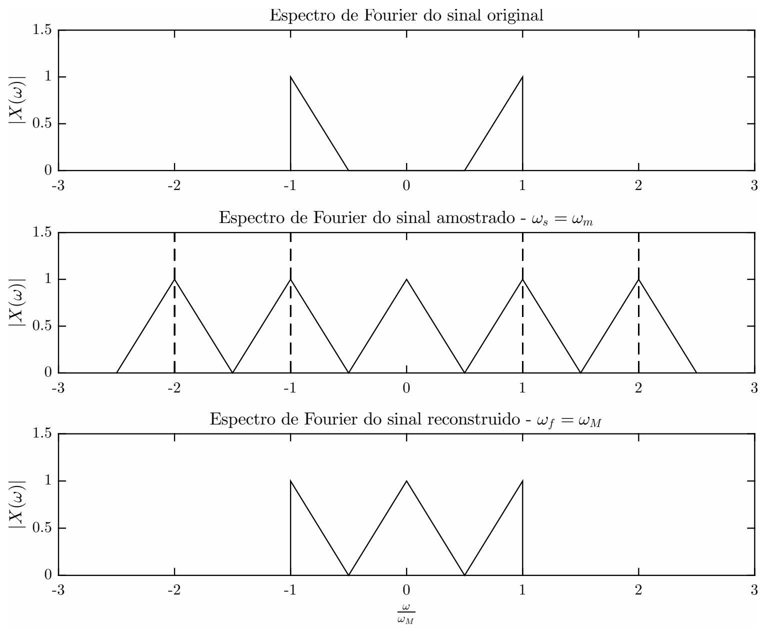


Figura 2: Espectro de Fourier do sinal original, amostrado com $\omega_s = \omega_N$, e reconstruído por filtro com $\omega_f = \omega_N$

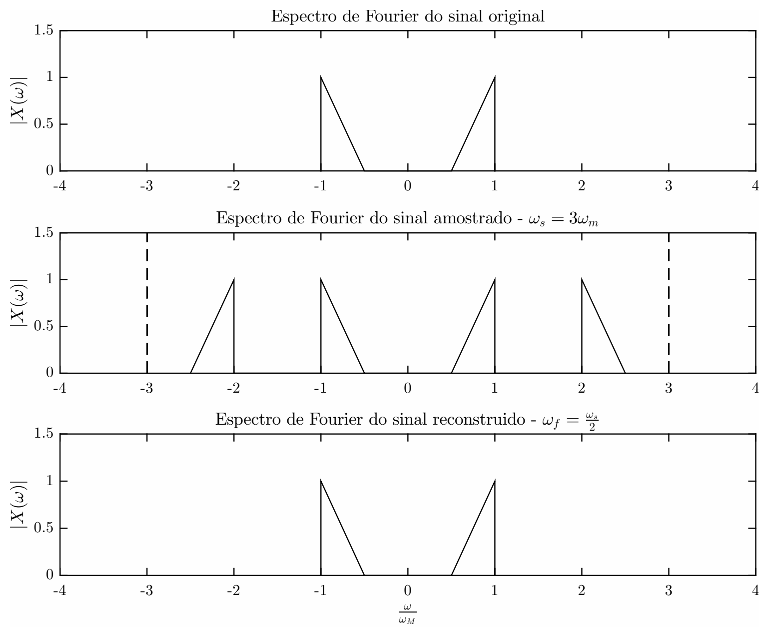
Exercício 2

A. As demonstrações estão enunciadas abaixo:

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i] \\
&= x[0] + z^{-1} \sum_{i=0}^{1} x[i] + z^{-2} \sum_{i=0}^{2} x[i] + \cdots \\
&= x[0] \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[1] \sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots + x[k] \underbrace{\sum_{i=k}^{\infty} z^{-i}}_{\frac{z^{-k}}{1-z^{-1}}} + \cdots \\
&= x[0] \frac{1}{1-z^{-1}} + x[1] \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{3}
$$



![!h]

Figura 3: Espectro em frequência do sinal original, amostrado com $\omega_s = 3\,\omega_N$ e reconstruído por filtro com $\omega_f = \frac{\omega_s}{2}$

- $Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} X(z)$

$$
\begin{aligned}
Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{i=0}^{n} x[i-1] \\
&= x[-1] + z^{-1} \sum_{i=0}^{1} x[i-1] + z^{-2} \sum_{i=0}^{2} x[i-1] + \cdots \\
&= \underbrace{x[-1]}_{:=0} \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} + x[0] \sum_{i=1}^{\infty} z^{-i} + \cdots \\
&= x[0] \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + x[1] \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \cdots \\
&= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i}}_{:=X(z)}
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\therefore Z\{\sum_{i=0}^{n} x[i-1]\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}.X(z) \quad \blacksquare \tag{5}
$$

- $\lim\limits_{z \to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i]$

$$
\lim_{z \to 1} X(z) = \lim_{z \to 1} \sum_{i=0}^{\infty} x[i].z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \tag{6}
$$

$$
\therefore \lim_{z \to 1} X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \quad \blacksquare \tag{7}
$$

B. Dada função $x_1(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$, por definição, tem-se que:

$$\begin{aligned} Z\{x_1(t)\} = X_1(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_1(iTs).z^{-i} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1 - e^{-aT_s i}\right)z^{-i} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} - \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{e^{-aT_s i}.z^{-i}}_{(z.e^{aT_s})^{-i}} \end{aligned} \tag{8}$$

Se $|z| > 1$ e $|z| > e^{aT_s}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} - \frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-aT_s i}.z^{-i} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{a}\frac{(1-e^{-aT_s})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT_s}z^{-1})} \end{aligned} \tag{9}$$

Portanto

$$X_1(z) = \frac{1}{a}\frac{(1-e^{-aT_s})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{10}$$

De mesma forma, dada função $x_2(t) =$t$^2 e^{-at}$, por definição tem-se que:

$$\begin{aligned} Z\{x_2(t)\} = X_2(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_2(iTs).z^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(i^2 T_s^2 e^{-aT_s i} z^{-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} T_s^2 i^2 e^{-aT_s i} z^{-i} \end{aligned} \tag{11}$$

Por meio da propriedade da transformada $\mathcal{Z}\{nX[n]\} \coloneqq -z\frac{d}{dz}X(z)$, segue

$$x[n] = e^{-an} \rightarrow -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} = \mathcal{Z}\{ne^{-an}\},\ n = T_s i,\ i \in \mathbb{N} \tag{12a}$$

$$x[n] = ne^{-an} \rightarrow -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} = \mathcal{Z}\{n^2 e^{-an}\},\ n = T_s,\ i \in \mathbb{N} \tag{12b}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= \frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}} \Rightarrow \\ \frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= -e^{-aT_s}\frac{z^{-2}}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^2} \\ \mathcal{Z}\{ne^{-an}\} \coloneqq -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{e^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-1}}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^2} \end{aligned} \tag{13}$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-1}}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^2} \Rightarrow \\
\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} &= e^{-aT_s}\frac{z^{-2}(1-e^{-aT_s}z^{-1})^2 - 2(1-e^{-aT_s}z^{-1})e^{-aT_s}z^{-2}}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^3} \\
&= -e^{-aT_s}\frac{z^{-2}(1+e^{-aT_s}z^{-1})}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})^3}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Portanto

$$
\mathcal{Z}\{n^2e^{-an}\} \coloneqq -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{ne^{-an}\} = e^{-aT_s}\frac{z^{-1}(1+e^{-aT_s}z^{-1})}{(1-e^{-aT_s}z^{-1})}
\tag{15}
$$

C. Por definição, a equação das diferenças é da forma

$$
\sum_{i=0}^{m} b_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{n} a_i x[n-i]
\tag{16}
$$

com parâmetros dados por $m = n = 3$ e a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ dados por $a_0 = 1$, $a_1 = -0.9737$, $a_2 = 0.8101$, $a_3 = 0.8151$, $a_1 = -0.0515$, $b_0 = 0.4108$, $b_1 = -1.0094$, $b_2 = 1.0094$ e $b_3 = 0.4108$. A função de transferência equivalente é

$$
G(z) = \frac{Y(Z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_{m-i} z^{i}}{\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^{i}}
\tag{17}
$$

Assim, as raízes do numerador e denominador, nomeadamente zeros e pólos, são respectivamente $z = \{1.38 \pm 1.18i, -0.3\}$ e $p = \{0.45 \pm 0.74i, 0.068\}$.

Exercício 3

Dado sinal discreto $a[n]$ resultado da primeira soma à esquerda no diagrama de blocos, temos que:

$$
A(z) = 2X(z) - 2z^{-1}X(z)0.3 - 0.5z^{-2}Y(z)
\tag{18}
$$

De mesma forma,

$$
Y(z) = -z^2X(z) + A(z) - z^{-1}Y(z)
\tag{19}
$$

Substituindo-se (**??**) em (**??**), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
-z^{-2}X(z) + 2X(z) - 0.6z^{-1}X(z) - 0.5z^{-2}Y(z) - z^{-1}Y(z) \\
\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-z^{-2} - 0.6z^{-1} + 2}{0.5z^{-}2 + z^{-1} + 1} = \frac{2z^2 - 0.6z - 1}{z^2 + z + 0.5}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Os pólos do sistema são estáveis pois $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ encontram-se no interior do circulo unitário, região estável em tempo discreto.

A imagem (**??**) refere-se à simulação do diagrama fornecido e a função de transferência encontrada e a imagem (**??**) referem-se ao diagrama utilizado no MatLab/Simulink. Perceba que, em (**??**), ambos os sinais sobrepõem-se nos instantes múltiplos do tempo de amostragem.

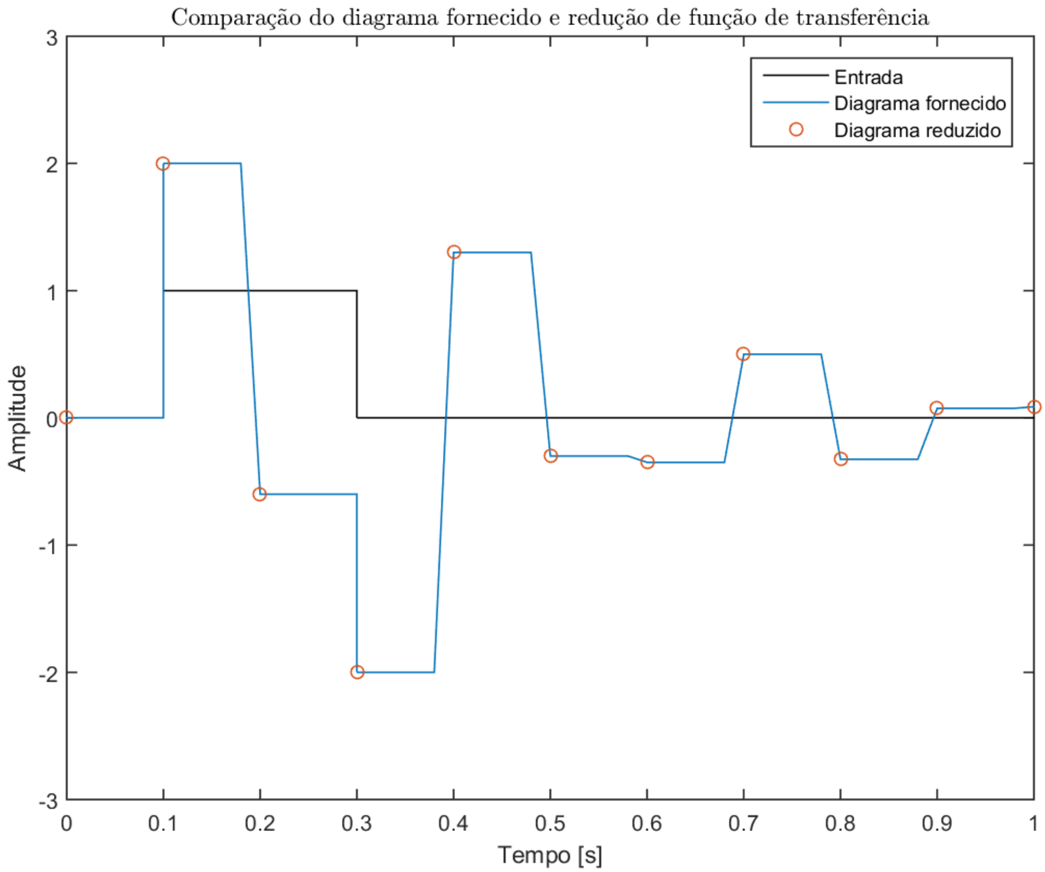


Figura 4: Entrada do sistema amostrado e saídas do diagrama amostrado e função de transferência equivalente

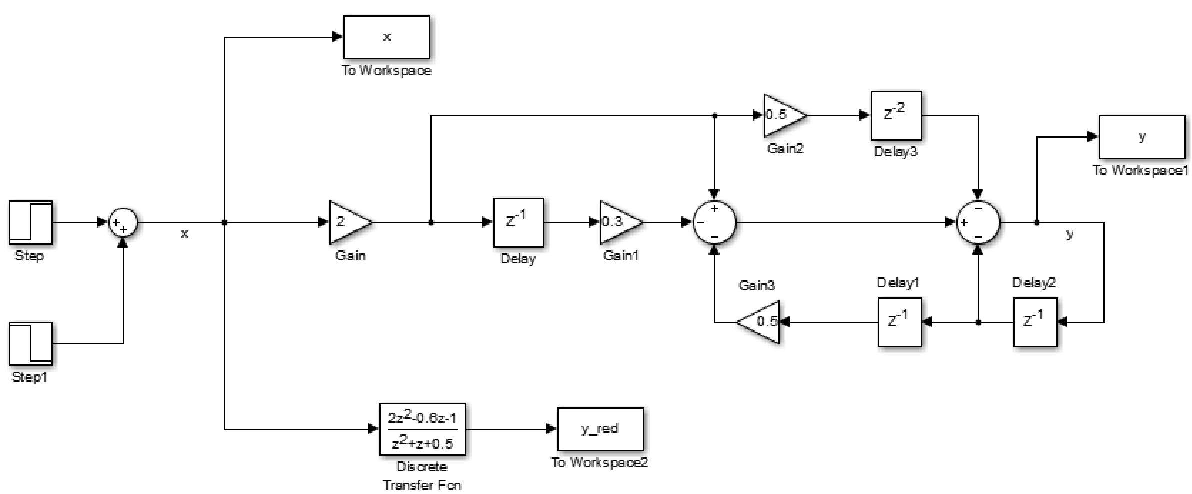


Figura 5: Diagrama de blocos do sistema simulado

Exercício 4

A conversão sem aproximação do espaço contínuo para discreto com mantenedor de ordem zero (ZOH) satisfaz a seguinte equação:

$$G(z) := (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} \tag{21}$$

Desta forma

$$\frac{G(s)}{s} = H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \tag{22}$$

Pelo método de expansão de frações parciais, a equação (**??**) apresenta a seguinte forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)} \tag{23}$$

Onde

$$A = H(s)s\Big|_{s=0} = \frac{K}{a} \text{ e } B = H(s)(s+a)\Big|_{s=-a} = -\frac{K}{a} \tag{24}$$

Logo

$$H(s) = \frac{K}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) \tag{25}$$

A função de transferência acima exceto ao fator de escala j foi obtida no item (**??**). Desta forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{K}{a}\sigma(t)\left(1 + e^{-at}\right) \tag{26}$$

Portanto, a função $\mathcal{Z}$ da função (**??**) é dada por

$$G(z) = \frac{K}{a}\frac{(1 - e^{-aT_s}z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT_s}z^{-1})} \tag{27}$$

Por fim, por meio da função de transefrência de uma malha fechada [2], após certa manipulação algébrica é dada por:

$$G_{MF}(z) = K'\frac{z}{z+b} \tag{28}$$

onde $K' = \frac{K}{a}(1 - e^{-aT_s})$ e $b = \left[\left[(1 + \frac{k}{a})\right] e^{(} - aT_s) - \frac{k}{a}\right]$.

Exercício 5

Dados: Ts = 0,1 s

A.

$$s = \frac{z-1}{T_s} \therefore X(z) = \frac{\frac{z+1}{T_s} + 1}{\frac{z+1}{T_s} + 10} = \frac{z - (1 - T_s)}{z - (1 - 10T_s)} = \frac{z - 0.9}{z} \tag{29}$$

B.

$$s = \frac{z-1}{T_s z} \therefore X(z) = \frac{\frac{z-1}{T_s z} + 1}{\frac{z-1}{T_s z} + 10} = \frac{(1 + T_s)z - 1}{(1 + 10T_s)z + 1} = 0.45\frac{z - 1.1}{z - 0.5} \tag{30}$$

[2] A equação em malha fechada de um sistema em tempo discreto ou contínuo é dado pela equação $G_{MF}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$

C.

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+1}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+10} = \frac{(2+T_s)z+(T_s-2)}{(2+10T_s)z+(10T_s-2)} = \frac{2.1z-1.9}{3z-1} = 0.7\frac{z-0.63}{z-0.33} \quad (31)$$

D. Dados: $\omega_c = 3\frac{rad}{s}$

$$s = \frac{\omega_c}{\tan\frac{\omega_c T_s}{2}}\frac{z-1}{z+1} \therefore X(z) = \frac{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1}+1}{\frac{\omega_c}{\tan(\frac{\omega_c T_s}{2})}\frac{z-1}{z+1}+10} = \frac{(\tan\frac{\omega_c T_s}{2}+\omega_c)z+(\tan\frac{\omega_c T_s}{2}-\omega_c)}{(10\tan\frac{\omega_c T_s}{2}+\omega_c)z+(10\tan\frac{\omega_c T_s}{2}-\omega_c)} \quad (32)$$

Como $\frac{\omega_c T_s}{2} \ll 1$ e $\tan\theta \approx \theta$, então $\tan\frac{\omega_c T_s}{2} \approx \frac{\omega_c T_s}{2}$. Assim

$$X(z) = \frac{3.15 \ -2.85}{4.15z-1.5} = 0.76\frac{z-0.9}{z-0.36} \quad (33)$$

E. Todo pólo e zero da planta pode ser mapeado diretamente para o espaço $\mathcal{Z}$ pela relação $z = e^{sT_s}$. O ganho da função em regime estacionário devem ser ambos em espaço discreto quanto contínuo iguais.

$$\lim_{z\to 1} X(z) \overset{!}{=} \lim_{s\to 0} X(s) \quad (34)$$

Desta forma.

$$K_z\frac{1-e^{-Ts}}{1-e^{-10Ts}} = \frac{1}{10} \Rightarrow K_z = 10\frac{1-e^{-10T_s}}{1-e^{-T_s}} \approx 1.59$$

Portanto

$$X(z) = 1.59\frac{z-0.9}{z-0.37} \quad (35)$$

Exercício 6

Para que a função de transferência em malha fechada do sistema seja de segunda ordem, o controlador deve ser proporcional.O polinômio característico da função de transferência é:

$$P(s) = s^2+7s+k \overset{!}{=} s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2 \quad (36)$$

O tempo de subida é dada pela identidade:

$$t_r^{0\%-100\%}(\omega_n,\zeta) = \frac{\pi-\theta(\zeta)}{\omega_d(\omega_n,\zeta)}, \text{ com } \theta(\zeta) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \text{ e } \omega_d(\omega_n,\zeta) = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (37)$$

De mesma forma, o sobressinal é dado por:

$$M(\zeta) = e^{-\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (38)$$

Como (**??**) é bijetora, $\exists g(M) = \zeta$, $g : M \to g(M)$, $M \circ g(M) = M$. De fato $g(M) = \sqrt{\frac{\log^2 M}{\pi^2-\log^2 M}}$. Assim, $\zeta \approx 0.672$. De mesma forma, para ζ fixo, analogamente, $\exists h(t_r) = \zeta$, $h : t_r \to h(t_r)$, $t_r(\zeta)\circ h = t_r$. De fato, $g(t_r) = \frac{\pi-\theta}{\omega_d(\zeta,t_r)}$. Assim, para $\zeta = 0.672$, então $\omega_n = 4.46$. Como $\omega_n^2 = k$, então $k = 19.96$.

Exercício 7

A função de transferência de um controlador PID é dada por:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = K\,\frac{s^2 + bs + c}{s} \tag{39}$$

Os quais $K = K_p T_d$, $b = \frac{1}{T_d}$ e $c = \frac{1}{T_i T_d}$. Com auxílio da equação do exercício (**??**), conclui-se que, por meio da transformação para trás, a função de transferência de um controlador PID segue

$$G(s) = \tag{40}$$

Em caso geral, a fim da conversão de uma função de transferência $G(z)$ em sua respectiva função de diferenças e assim ação de controle do instante atual kT_s, seja essa em sua forma matricial

$$G(z) = \frac{b^T \mathbf{z}_m}{a^T \mathbf{z}_n} \tag{41}$$

Os quais $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{Z}_k = \left[z^k, \cdots, 1\right]^T$. Após manipulação algébrica, $\mathbf{z}_p = z^p\,\mathbf{v}_p$, $\mathbf{v}_p = [1, \cdots, z^{-p}]$. A fim de manter a convenção para z^{-1} dada por $\mathbf{w}_p = [z^{-p}, \cdots, 1]$, $\mathbf{w}_p = \mathbf{J}_p^{-1}\mathbf{v}_p$ com $\mathbf{J}_p$ a matriz de permuta, descrita em (**??**).

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$G(z) = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{J}_{m+1}^{-1} \mathbf{w}_m}{\mathbf{a}^T \mathbf{J}_{n+1}^{-1} \mathbf{w}_n} := \frac{\mathbf{b'}^T \mathbf{w}_{m'+1}}{\mathbf{a'}^T \mathbf{w}_{n'+1}} \tag{43}$$

Os parâmetros **a'** e **b'** acima estão a seguir

$$\mathbf{a'} = [\mathbf{0}_{m-n,1}, \mathbf{a}^T \mathbf{J}_{n+1}]^T] n < m \tag{44}$$

$$\mathbf{b'} = [\mathbf{0}_{m-n,1}, \mathbf{b}^T \mathbf{J}_{m+1}]^T, n \geq m \tag{45}$$

Ademais, $n' = \dim(\mathbf{a'})$ e $m' = \dim(\mathbf{b'})$. A equação de diferenças de (**??**), é, por definição:

$$G(z) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{w}_{m+1}}{\mathbf{a}^T \mathbf{w}_{n+1}} \Rightarrow a^T \mathbf{y}[k] = b^T \mathbf{u}[k] \tag{46}$$

Por inspeção, os parâmetros da equação de diferenças seguem de (**??**) e (**??**). O vetor **u** pode ser escrito como $\mathbf{u}[k] = \mathbf{I}_{m'+1} - \Delta_{m',m'}\mathbf{u}[k] + \Delta_{m',m'}\mathbf{u}[k]$. Assim

$$\mathbf{b'}^T \underbrace{\Delta_{m'+1\times m'+1}\mathbf{u}[k]}_{\mathbf{e}_{m'+1}} = \mathbf{a'}\mathbf{y}[k] - \mathbf{b'}^T(\mathbf{m} - \Delta_{m'+1\times m'+1})\mathbf{u}[k] \tag{47}$$

Portanto

$$u[k] = (\mathbf{b'}^T \mathbf{e}_{m'+1})^{-1}(\mathbf{a'}^T \mathbf{y}[k] - \mathbf{b'}^T(\mathbf{I}_{m'+1} - \Delta_{m'+1\times m'+1})\mathbf{u}[k]) \tag{48}$$

Para o caso em estudo, $n = 2$ e $m = 1$. Logo, $n < m$ e $\mathbf{a'} = [\mathbf{0}_{m-n,1}, \mathbf{a}^T \mathbf{J}_{n+1}^{-1}]^T]$

Exercício 7

Exercício 8

O objetivo é encontrar $G(z)$ dada transformação $s = F(z)$. Em geral, as transformações aplicadas em engenharia respeitam a relação $s = \frac{c^T \mathcal{Z}}{d^T \mathcal{Z}}$, $c, d \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Z}^T = [z, 1]$. Para a função de transferência dada por $G(s) = \frac{b^T \mathcal{S}_m}{a^T \mathcal{S}_n}$, tal que $\mathcal{S}_k^T = [s^k, \cdots, 1] \in \mathbb{R}^{k+1}$, $m = \dim(b)$ e $n = \dim(a)$ e $s \in \mathbb{C}$, segue

$$s^i = \frac{c^T \mathcal{Z}\, c^T\, \mathcal{Z}\, \cdots\, c^T\, \mathcal{Z}}{d^T\, \mathcal{Z}\, d^T\, \mathcal{Z}\, \cdots d^T\, \mathcal{Z}}\, i \in \mathbb{N} \tag{49}$$

Por definição, $ab^T = M$ $M \in \mathbb{R}^{2x2}$ e $M = W\Lambda V$, com V a matriz de autovetores de M, a matriz de autovalores de M e $W = V^{-1}$ e $f(M) = Wf(\Lambda)V$. Em especial, $M^i = W\Lambda^i V$. Assim, a equação (**??**) reduz-se a:

$$s^i = \frac{c^T W_c \Lambda_c^{i-1} V_c \mathcal{Z}}{d^T W_d \Lambda_d^{i-1} V_d \mathcal{Z}} \tag{50}$$

Perceba que o expoente de Λ deve ser $i - 1$. Assim,

$$\mathcal{S}_k^T = \left[\frac{c^T W_c \Lambda_c^{k-1} V_c \mathcal{Z}}{d^T W_d \Lambda_d^{i} V_d \mathcal{Z}}, \cdots, \frac{c^T W_c \Lambda_c^{-1} V_c \mathcal{Z}}{d^T W_d \Lambda_d^{i} V_d \mathcal{Z}} \right] \tag{51}$$

$\mathcal{S}_k$

Deste modo, a função convertida pela função de transformação $s = \frac{c^T \mathcal{Z}}{d^T \mathcal{Z}}$ é dada por

$$G(z) = \frac{b^T \mathcal{S}_m}{c^t \mathcal{S}_n} \tag{52}$$

$$\mathcal{S}_k^T = [\frac{c^T W_c \Lambda_c^{k-1} V_c \mathcal{Z}}{d^T W_d \Lambda_d^{i} V_d \mathcal{Z}}, \cdots, \frac{c^T W_c \Lambda_c^{-1} V_c \mathcal{Z}}{d^T W_d \Lambda_d^{i} V_d \mathcal{Z}}] \tag{53}$$

A implementação em MatLab encontra-se no apêndice

Exercício 9