

Notas de Aula

PTC5611

Controle Digital de Sistemas Dinâmicos

Bruno A. Angélico

Escola Politécnica da USP

PTC - Depto. de Engenharia de Telecomunicações e Controle

LAC - Laboratório de Automação e Controle

---

## **Sobre o Material do Curso**

Este é um material de apoio para a disciplina PTC5611 - Controle Digital de Sistemas Dinâmicos.  
As instruções e observações sobre seu uso são listadas abaixo:

- Esta é a versão V3.0 deste material, referente ao curso oferecido no segundo período de 2017;
- Não distribuir este material sem a anuênciâa do professor responsável pela disciplina;
- Devido ao curto tempo de revisão, o texto está sujeito a erros;
- Este material não deve ser utilizado como única fonte de consulta da disciplina.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
1.1	Tipos de Sinais . . . . .	7
1.2	Amostragem Periódica . . . . .	8
1.3	Conversor A/D e D/A . . . . .	10
1.4	Segurador de Ordem Zero . . . . .	14
1.5	Introdução ao Controle Digital . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Amostragem e Reconstrução</b>	<b>18</b>
2.1	Amostrador Ideal . . . . .	18
2.2	Teorema da Amostragem . . . . .	20
2.3	Reconstrução de um sinal limitado em banda de suas amostras . . . . .	23
2.4	Segurador de Ordem Zero . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Transformada-<math>z</math></b>	<b>28</b>
3.1	Relação entre as Transformadas $z$ e de Laplace . . . . .	32
3.2	Função de Transferência . . . . .	33
3.3	Polos e Zeros no Plano- $z$ . . . . .	35
3.4	Sistema LIT Causal e Estável . . . . .	36
3.5	Algumas Propriedades da Transformada- $z$ . . . . .	37
3.6	A Transformada- $z$ inversa . . . . .	45
3.6.1	Transformada- $z$ inversa por Divisão Longa . . . . .	45
3.6.2	Transformada- $z$ inversa por Expansão em Frações Parciais . . . . .	46
3.7	Relação Entre o Plano- $s$ e o Plano- $z$ . . . . .	51

<b>4 Revisão de Sistemas de Controle Contínuos</b>	<b>54</b>
4.1 Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT) . . . . .	55
4.2 Função de Transferência . . . . .	56
4.3 Análise Transitória e de Regime Estacionário . . . . .	57
4.3.1 Especificações da Resposta Transitória . . . . .	61
4.3.2 Sistemas de Ordem Superior . . . . .	63
4.3.3 Efeito de Polo Adicional . . . . .	64
4.3.4 Efeito de Zero Adicional . . . . .	65
4.3.5 Erros Estacionários em Sistemas com Realimentação Unitária . . . . .	65
4.4 Lugar das Raízes ( <i>Root locus</i> ) . . . . .	67
4.5 Resposta em Frequência . . . . .	71
4.5.1 Diagrama de Bode . . . . .	71
4.5.2 Diagrama de Nyquist . . . . .	75
4.6 Controle PID . . . . .	81
4.7 Compensação Avanço/Atraso de Fase . . . . .	85
<b>5 Discretização de Sistemas Contínuos</b>	<b>89</b>
5.1 Mapeamento Casado de Polos e Zeros . . . . .	89
5.2 Diferenciação Numérica . . . . .	90
5.3 Integração Numérica . . . . .	91
5.4 Aproximação por Segurador de Ordem Zero . . . . .	97
5.5 Discretização de Controladores PID . . . . .	98
<b>6 Projeto de Controladores Contínuos</b>	<b>103</b>
<b>7 Análise de Sistemas de Controle Digitais</b>	<b>104</b>
7.1 Do plano- <i>s</i> para o plano- <i>z</i> . . . . .	104
7.2 Análise de Estabilidade . . . . .	106
7.2.1 Critério de Jury . . . . .	108
7.3 Análise de Erro em Regime Estacionário . . . . .	110
7.4 Lugar das Raízes . . . . .	112
7.5 Resposta em Frequência . . . . .	115
7.5.1 O Plano- <i>w</i> . . . . .	117
<b>8 Projeto de Sistemas de Controle Digitais</b>	<b>121</b>
8.1 Projeto por discretização de controladores em tempo contínuo . . . . .	121
8.1.1 Efeito da Amostragem e do Segurador de Ordem Zero . . . . .	121

8.2	Discretização da Planta e Projeto no plano- $z$ - Introdução . . . . .	126
8.3	Projeto pelo Lugar das Raízes . . . . .	127
8.3.1	Compensador por Avanço de Fase . . . . .	129
8.3.2	Controlador PID . . . . .	132
8.4	Projeto pelo Método da Resposta em Frequência . . . . .	137
8.5	Projeto por Método Direto . . . . .	137
8.5.1	Controle <i>Dead beat</i> . . . . .	149
8.5.2	Controle <i>Dahlin</i> . . . . .	150
<b>9</b>	<b>Controle Digital Por Variáveis de Estado</b>	<b>156</b>
9.1	Solução de Equação de Estados em Tempo Discreto . . . . .	158
9.2	Matriz de Transferência Discreta . . . . .	159
9.3	Discretização de Equações de Estado Contínuas . . . . .	160
9.4	Controlabilidade e Observabilidade . . . . .	161
9.4.1	Controle por Realimentação de Estados . . . . .	163
9.4.2	Projeto de Observadores . . . . .	164
9.5	Princípio da Separação . . . . .	169
9.6	Problema de Rastreamento . . . . .	169
9.6.1	Realimentação Estados com Entrada de Referência . . . . .	169
9.6.2	Inserção de Integrador . . . . .	172
9.7	Sistemas com perturbações . . . . .	185
9.8	Atrasos . . . . .	190
<b>10</b>	<b>Introdução ao Controle Ótimo</b>	<b>192</b>
10.1	Controle Quadrático Ótimo . . . . .	192
10.2	Controle LQR . . . . .	199
10.3	Filtro de Kalman . . . . .	205
10.4	Controle LQG . . . . .	218
10.4.1	Inserção de Integradores . . . . .	229
<b>11</b>	<b>Aspectos Práticos</b>	<b>231</b>
11.1	Estruturas de Representação de Sistemas Discretos . . . . .	231
11.2	Exemplo de Pseudo Código . . . . .	241
<b>A</b>	<b>Simulação de Sistemas de Controle Digitais no SIMULINK</b>	<b>244</b>

## Introdução

Até a década de 60, a tecnologia de controle de processos e processamento de sinais era praticamente toda analógica. A evolução dos computadores digitais e microprocessadores, juntamente com o desenvolvimento de algoritmos eficientes causaram a migração para o controle digital juntamente com processamento digital de sinais.

Diversas grandezas físicas com as quais lidamos, são grandezas analógicas por natureza. Tais grandezas, como temperatura, pressão, velocidade, etc., são representadas por valores contínuos. Sinais analógicos podem ser analogicamente processados por circuitos elétricos envolvendo componentes passivos e ativos.

Os sinais também podem se processados utilizando-se *hardwares* digitais. Para isso, os sinais analógicos precisam ser convertidos para sinais digitais. Esta conversão é conhecida como Conversão Analógica-Digital. Basicamente, esse processo de conversão toma um número finito de amostras no tempo do sinal analógico (processo de discretização no tempo) e efetua uma quantização das amplitudes dessas amostras para que as mesmas sejam representadas por um número finito de bits (processo de digitalização).

Há uma grande interseção entre Controle Digital e Processamento Digital de Sinais, no sentido de que a implementação de um controle digital necessita de um bom conhecimento de processamento digital de sinais.

Um esquema de processamento digital de sinais está ilustrado na Figura 1.1.

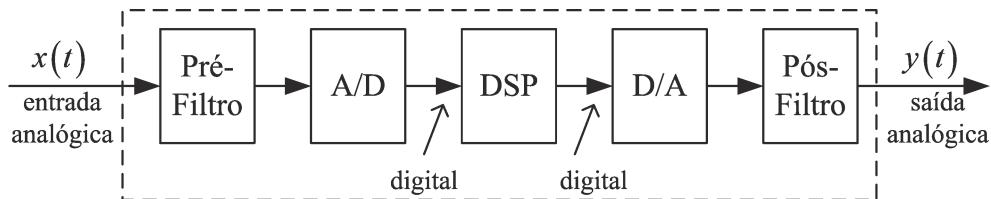


Figura 1.1: Processamento digital de sinais.

Os elementos apresentados são descritos a seguir:

- **Pré-filtro:** filtro anti-aliasing (anti-rebatimento) que condiciona o sinal a ser amostrado e depois

digitalizado.

- **Conversor A/D:** conversor analógico para digital, que produz uma sequência de bits a partir de uma entrada analógica.
- **Hardware Digital:** coração do sistema, que pode ser um processador específico otimizado para uma dada aplicação (DSP), um microcontrolador, um computador, etc.
- **Conversor D/A:** conversor digital para analógico, que produz uma saída numa forma de escada a partir de uma sequência de bits de entrada. É o primeiro passo para a conversão D/A completa. Na notação de controle digital, isto é conhecido como segurador (ou interpolador) de ordem zero (ZOH - *zero-order hold*).
- **Pós-filtro:** filtro que suaviza a saída do conversor A/D para produzir uma saída analógica. Matematicamente, é como se houvesse um interpolador com resposta mais suavizada. A interpolação sinc representa um filtro passa-baixas ideal.

A princípio, quando comparado ao processamento analógico, o processamento digital de sinais tem um estrutura mais complica, levando ao seguinte questionamento: por que utilizar processamento digital de sinais? A resposta para tal pergunta possui vários argumentos a favor, tais como

- possibilidade de armazenagem dos sinais e posterior processamento;
- as operações de um PDS são basicamente adição, multiplicação e deslocamento, o que representa um processamento bem robusto, como por exemplo robustez a mudanças de temperatura;
- as operações de um DSP podem ser facilmente modificadas, como por exemplo mudando apenas algumas linhas de código de programação de um microprocessador;
- facilidade de interconexão de blocos, uma vez que não ocorre problemas de casamento de impedância como nos blocos constituídos de circuitos analógicos;

## 1.1 Tipos de Sinais

Sinais geralmente transportam informações a respeito do estado ou do comportamento de um sistema físico, e em muitos casos são sintetizados para o propósito de comunicações entre humanos ou entre humanos e máquinas.

Sinais são representados matematicamente como funções de uma ou mais variáveis independentes. Por exemplo, um sinal de voz é representado matematicamente como uma função do tempo, e um imagem fotográfica é representada em função de duas variáveis no espaço. A maioria dos exemplos deste

curso será feita com a variável independente sendo o tempo. Porém, exemplos específicos com outras variáveis independentes poderão ser utilizados.

De modo geral, podemos classificar os sinais de interesse nos seguintes tipos [Lathi 2005]:

- **Sinais analógicos de tempo contínuo** são definidos ao longo de todos instantes do tempo e são representados por uma variável independente contínua.
- **Sinais analógicos de tempo discreto** são definidos em instantes discretos do tempo, mas as amplitudes podem assumir qualquer valor real. Podem ser matematicamente representados como sequências de números.
- **Sinais digitais de tempo contínuo** são aqueles definidos ao longo de todos instantes do tempo, porém os valores de amplitude são definidos apenas em alguns valores discretos pré-definidos.
- **Sinais digitais de tempo discreto** são aqueles em que ambos o tempo e a amplitude são discretos.

A Figura 1.2 ilustra a classificação dos tipos de sinais. Note que sinais amostrados e sinais digitais são sinais de tempo discreto.

Da mesma forma podemos classificar os tipos de sistemas de interesse aos nossos propósitos.

- **Sistemas de tempo contínuo** são sistemas em que ambas a entrada e a saída são sinais de tempo contínuo, incluindo os sinais digitais de tempo contínuo.
- **Sistemas de tempo discreto** são aqueles em que ambas a entrada e a saída são sinais de tempo discreto.
- **Sistemas digitais de tempo discreto** são aqueles em que ambas a entrada e a saída são sinais digitais de tempo discreto.

## 1.2 Amostragem Periódica

Sinais de tempo discreto são matematicamente representados como sequências de números. Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros. Formalmente, uma sequência  $x$  é escrita como:

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty \tag{1.1}$$

onde  $n$  é um número inteiro. Ao longo deste curso, a notação  $x[n]$  será equivalente a  $x(nT_s)$ . No entanto, em cursos de processamento digital de sinais, apesar de  $x[n]$  e  $x(nT_s)$  serem equivalentes, a primeira notação se refere a uma sequência, enquanto que a segunda se refere a um sinal amostrado. Matematicamente, uma sequência não é definida para valores de  $n$  não inteiros.

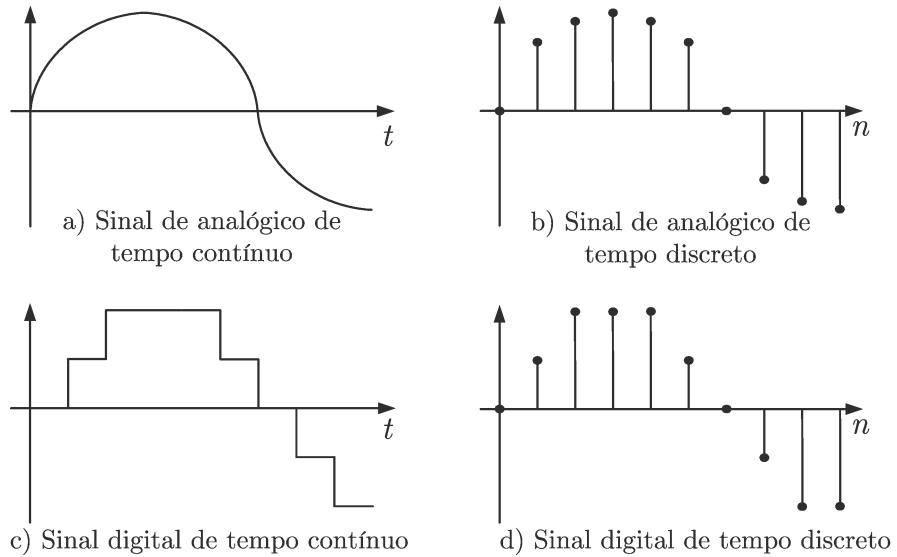


Figura 1.2: Classificação de tipos de sinais.

Num cenário prático, tais sequências podem ser oriundas da **amostragem periódica** de um sinal analógico. Neste caso, o valor numérico do  $n$ -ésimo elemento na sequência é igual ao valor do sinal analógico,  $x(t)$ , num instante  $nT_s$ , i.e.,

$$x[n] = x(nT_s), \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2)$$

A quantidade  $T_s$  é denominada período de amostragem, e sua recíproca é a frequência de amostragem  $f_s$  ou  $\omega_s = 2\pi f_s$ .

Na amostragem periódica o período  $T_s$  é constante (veja Figura 1.3). Apesar da abscissa da sequência ser uma linha contínua, é importante reconhecer que  $x[n]$  é definida apenas para valores inteiros de  $n$ . Não é correto pensar que  $x[n]$  vale zero quando  $n$  não é inteiro;  $x[n]$  simplesmente não é definida para valores não inteiros de  $n$ .

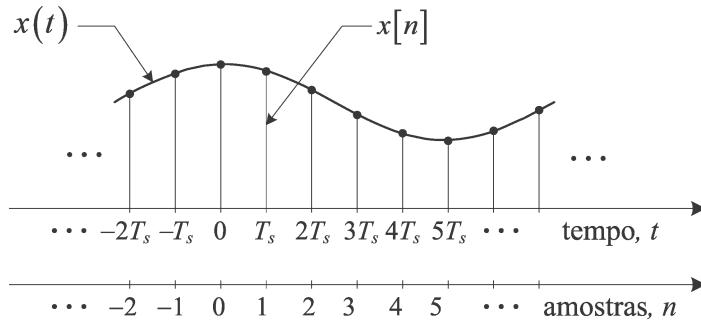


Figura 1.3: Relação entre sinal de tempo contínuo e sinal de tempo discreto.

O **Teorema de Amostragem** estabelece a mínima frequência que um sinal analógico precisa ser amostrado para posteriormente poder ser reconstruído. Tal teorema afirma que a frequência de amostragem deve ser maior ou igual a duas vezes a maior componente de frequência do sinal.

### 1.3 Conversor A/D e D/A

Um ponto crítico é a interface entre os circuitos digitais e os circuitos analógicos. Assim, deve-se ter os cuidados necessários no projeto destas interfaces uma vez que elas também determinam a precisão, rapidez de resposta e confiabilidade no processamento digital de informações.

A **resolução** de um conversor A/D, quando expressa em bits, é igual ao número de bits  $N$  do conversor. Quando expressa em tensão, é a menor variação que pode ser identificada em uma escala analógica, ou seja:

$$Q = \frac{V_{REF+} - V_{REF-}}{2^N}, \quad (1.3)$$

onde  $V_{REF+}$  e  $V_{REF-}$  representam, respectivamente, os extremos superior e inferior que a tensão de entrada pode ser convertida (codificada).  $Q$  também é referenciada como 1LSB. Exemplo: Para  $V_{REF-} = 0V$ ,  $V_{REF+} = 5V$  e  $N = 10$  bits, tem-se uma resolução de 0,0048 V (4,8 mV). A Figura 1.4 apresenta a relação entrada-saída de um exemplo de conversor A/D.

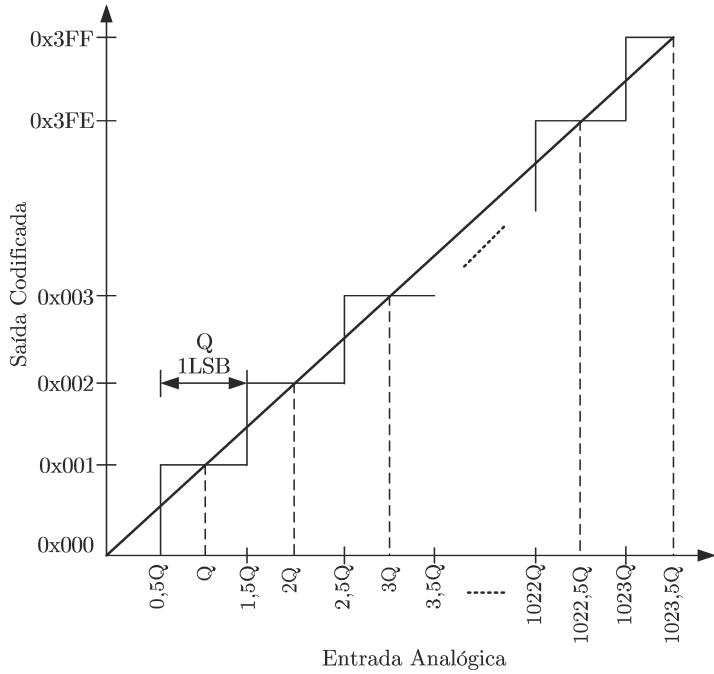


Figura 1.4: Relação entrada-saída de um conversor A/D unipolar.

Cada um dos  $N$  bits representa uma parcela do valor da tensão analógica a ser convertida, de forma que a soma de todas as contribuições de cada um dos  $N$  bits forma a tensão de entrada do conversor A/D. Suponha um A/D de quatro bits,  $V_{REF+} = 5 V$ ,  $V_{REF-} = 0 V$  e o valor da conversão em binário seja 1101. A tensão de entrada, então, é:

$$V_{IN} = 5 \times \frac{(1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0)}{2^4} = 4,0625 V$$

O **erro de quantização** do conversor expressa o desvio do resultado de conversão em relação a uma reta ideal. A magnitude do erro vai de 0 a  $\frac{1\text{LSB}}{2}$ .

O **tempo de aquisição** é tempo necessário para que o circuito **amostra e retém** (S-H) permaneça no modo amostragem de forma que o capacitor atinja a tensão de entrada. Uma nova aquisição não começa até que uma conversão tenha terminado.

O **tempo de conversão** é o tempo necessário para se obter o valor digital na saída da tensão analógica de entrada.

Obviamente, os dois tempos anteriores estão diretamente relacionados com a máxima frequência de amostragem do conversor A/D.

A primeira etapa da conversão A/D é a **discretização** no tempo. Isso é fisicamente implementado por um circuito denominado *sample-and-hold* (S-H). Tal circuito amostra o sinal de entrada numa taxa de amostragem determinada por um *clock* e segura o nível do sinal em um capacitor até o próximo pulso de *clock*, como ilustrado na Figura 1.5

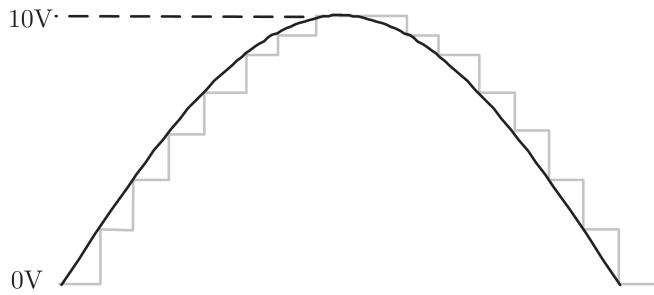


Figura 1.5: Entrada e saída típica de um circuito S-H.

A segunda parte consiste na quantização dos níveis de tensão constante da saída do *sample-and-hold* em códigos binários pelo conversor analógico/digital (A/D), como ilustrado na Figura 1.6. Os sinais digitais podem então ser processados por um hardware digital. Note que o tempo de conversão não pode ser maior do que o tempo em que o sinal permanece constante.

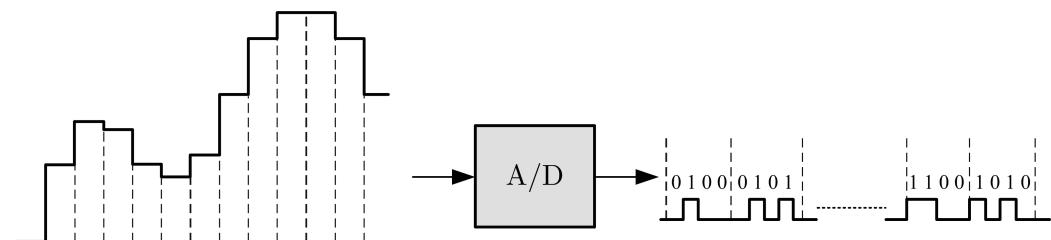


Figura 1.6: Conversão efetuada pelo A/D.

Vários CI's implementam internamente o S-H e a conversão A/D, propriamente dita, incluindo um, dois ou mais canais. Tais CI's são chamados de conversores A/D.

Há diversas formas de conversor A/D, tais como: *flash*, aproximações sucessivas, rampa, rampa dupla tipo integrador, tensão-frequência, sigma-delta.

A Figura 1.7 seguinte ilustra o conversor A/D tipo *flash*. Tal conversor é mais rápido, mas necessita de  $2^n$  comparadores para a conversão com  $n$  bits.

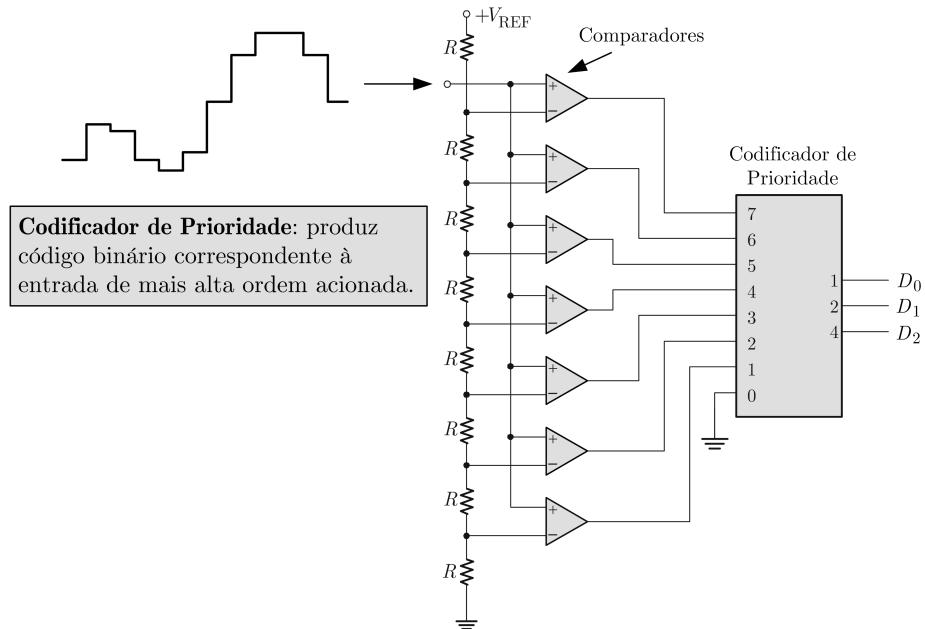


Figura 1.7: Conversor A/D flash.

No conversor por aproximações sucessivas, a conversão é realizada do bit mais significativo (MSB) para o menos significativo (LSB). Uma vez que o MSB representa metade da tensão de referência, conhecer o estado deste bit (0 ou 1) já significa saber se a tensão de entrada é maior ou menor que a metade da referência. Conhecido o bit mais significativo, passa-se ao próximo bit, que representa a metade da metade da tensão de referência, ou seja, 1/4 da tensão de referência. A conversão segue assim até o LSB. A Figura 1.8 apresenta um esquema do conversor por aproximações sucessivas.

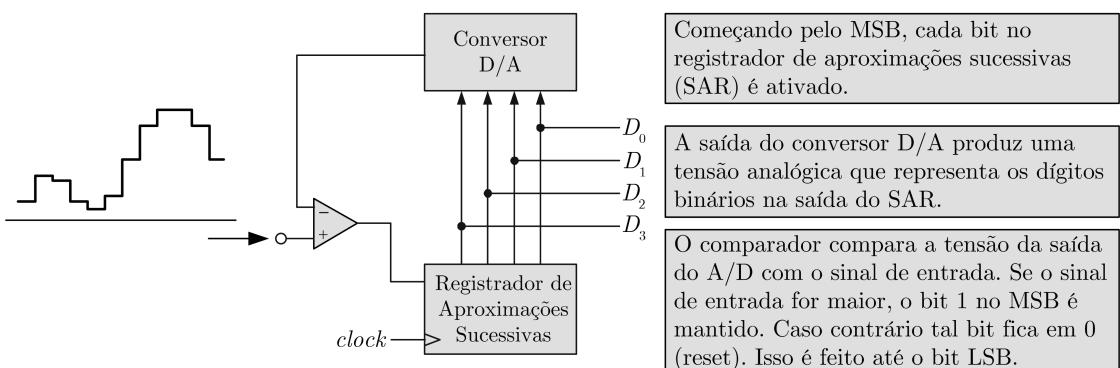


Figura 1.8: Conversor A/D por aproximações sucessivas.

Por outro lado, conversores D/A convertem uma palavra digital em um sinal analógico sob a forma de uma tensão ou corrente de saída. São formados por elementos passivos, fontes de referência, chaves e amplificadores operacionais.

A Figura 1.9 apresenta um conversor D/A com resistores proporcionais:

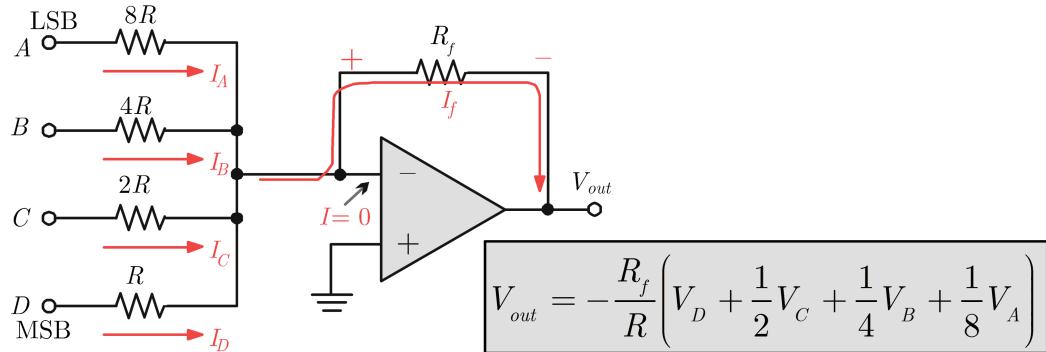
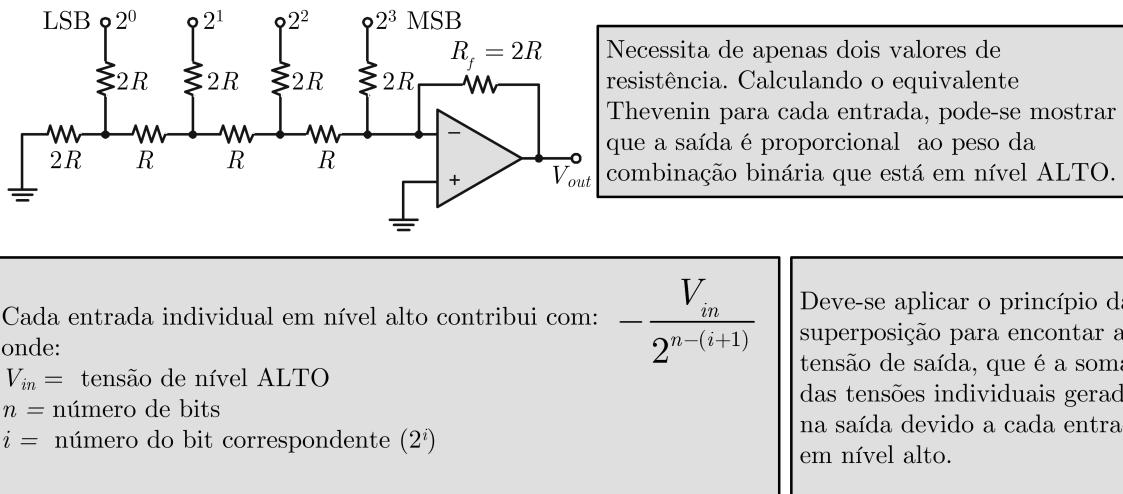


Figura 1.9: Conversor D/A com resistores proporcionais.

Uma outra forma de se implementar um conversor A/D é utilizando uma rede  $R - 2R$ . A vantagem é que apenas dois valores de resistência são necessários, conforme visto na Figura 1.10.

Figura 1.10: Conversor D/A com rede  $R - 2R$ .

Uma outra forma de conversor D/A para sinais com relativamente baixas frequências baseia-se em PWM. PWM significa Modulação por Largura de Pulso (*Pulse Width Modulation*) e trata-se de um sinal frequência constante e largura de pulso (ciclo ativo ou *duty cycle*) variável. Vários microcontroladores e processadores digital de sinais possuem uma função para gerar um sinal PWM modulado com largura de pulso proporcional a um certo número de bits (sinal digital). Pode-se, a partir deste sinal, implementar um conversor DA, pois o controle da largura do pulso permite obter uma tensão analógica variável. Um período de um sinal PWM pode ser representado por

$$V(t) = \begin{cases} V_{pulso}, & 0 \leq t \leq t_p \\ 0, & t_p \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.4)$$

onde  $T$  é o período da forma e  $t_p$  o a duração do pulso em nível alto e  $V_{pulso}$  a tensão de pulso. Assim, a tensão média de um sinal PWM é dada por

$$V_M = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{t_p} V_{\text{pulso}} dt + \int_{t_p}^T 0 dt \right] = \frac{t_p}{T} V_{\text{pulso}} \quad (1.5)$$

O *duty cycle* corresponde à razão entre a largura de pulso e o período do sinal. O pulso da onda PWM apresenta tensão fixa, porém o valor médio da tensão varia em função do *duty cycle*. A tensão média ( $V_M$ ) é diretamente proporcional ao ciclo ativo e, como este varia entre 0 e 1, a tensão média pode variar entre 0 e  $V_{\text{pulso}}$ . Para se obter um conversor D/A a partir de uma saída PWM de um hardware digital, basta adicionar à saída um filtro passa-baixas com frequência de corte menor (pelo menos 10 vezes) que a frequência do PWM, como apresentado na Figura 1.11.

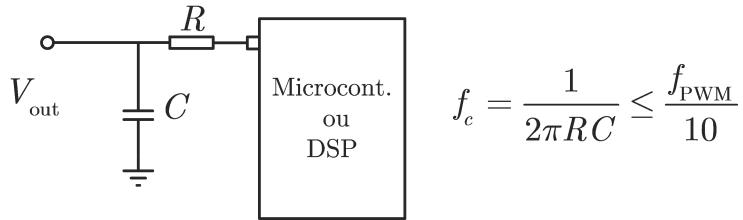


Figura 1.11: Conversor D/A PWM.

Para controlar resistências de aquecimento e ventiladores, por exemplo, não necessitam de filtro, desde que a frequência do PWM não seja muito baixa. Pode-se, portanto, regular a taxa de aquecimento do resistor e a velocidade do ventilador, variando a tensão média aplicada a eles.

## 1.4 Segurador de Ordem Zero

Na conversão A/D, um segurador de ordem zero é agregado ao circuito S-H. A conversão D/A é também implementada por um segurador que extrapola (“liga”) o sinal entre dois pontos consecutivos (amostras consecutivas). Na conversão D/A, o segurador não precisar necessariamente ser de ordem zero. O segurador de ordem zero produz um sinal na forma de escada, como mostrado na Figura 1.12, e é comumente utilizado em sistemas de controle digital devido a sua simplicidade. O ZOH será analisado com mais detalhes ao longo do curso.

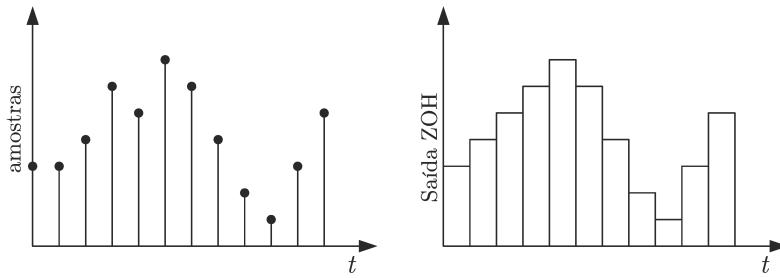


Figura 1.12: Entrada e saída de um segurador de ordem zero.

## 1.5 Introdução ao Controle Digital

A Figura 1.13 apresenta a topologia típica de um sistema de controle com compensação em série e realimentação unitária.

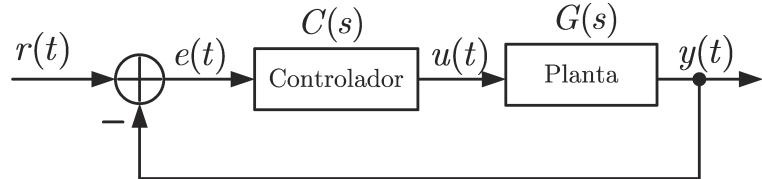


Figura 1.13: Sistema de controle com realimentação unitária.

Por outro lado, a Figura 1.14 apresenta o mesmo sistema, mas com o controle implementado de forma discreta.

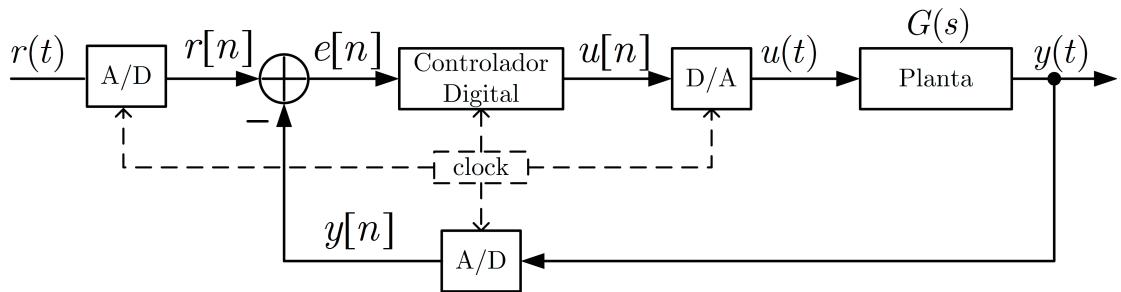


Figura 1.14: Sistema de controle com realimentação unitária em tempo discreto.

O período de amostragem do sinal do sistema é dado por  $T_s$ . Considere as seguintes definições:

- A/D: conversor analógico para digital
- D/A: conversor digital para analógico
- $r(t)$  e  $r[n] = r(nT_s)$ : sinal de referência (*set-point*) em tempo contínuo e em tempo discreto, respectivamente;
- $e(t)$  e  $e[n] = e(nT_s)$ : sinal de erro atuante em tempo discreto;
- $y(t)$  e  $y[n] = y(nT_s)$ : variável controlada (ou regulada) em tempo contínuo e em tempo discreto;
- $u(t)$  e  $u[n] = u(nT_s)$ : sinal de controle (variável manipulada) em tempo contínuo e em tempo discreto, respectivamente;

Note que agora o controlador não pode mais ser implementado de forma analógica. Uma das formas<sup>1</sup> de fazer com que um *hardware* digital produza uma solução que se aproxima da solução em tempo contínuo de um sistema que envolva derivadas é denominada método de Euler por diferença em avanço

<sup>1</sup>Outras formas melhores do que essa serão consideradas ao longo do curso.

*forward rectangular.* Note que a derivada de  $x$  em relação ao tempo, no instante  $t_n = nT_s$ , pode ser aproximada por

$$\dot{x}(n) \cong \frac{x(n+1) - x(n)}{T_s}, \quad (1.6)$$

onde:

- $T_s = t_{n+1} - t_n$ : intervalo equivalente ao período de amostragem;
- $x(n)$ : valor de  $x$  no instante  $t_n$ ;
- $x(n+1)$ : valor de  $x$  no instante  $t_{n+1}$ ;

O importante é observar que uma derivada foi transformada em uma diferença ponderada. De forma geral, uma **equação diferencial é transformada em uma equação de diferenças**. A equação de diferenças é resolvida repetidamente a cada intervalo de tempo  $T_s$ . Generalizando para sequências, tem-se

$$\dot{x}(n) \cong \frac{x[n+1] - x[n]}{T_s}. \quad (1.7)$$

☞ **Exemplo 1.1:** (baseado em [Franklin, Powell e Workman 2006]) Utilizando a regra *forward rectangular*, encontre a equação de diferenças para o equivalente digital do seguinte compensador

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10}$$

utilizando frequências de amostragens de 20 Hz e 40 Hz e considerando o sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

**Solução:** após a multiplicação cruzada,

$$(s+10)U(s) = 70(s+2)E(s)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace,

$$\dot{u} + 10u = 70(\dot{e} + 2e)$$

Utilizando a regra *forward rectangular* de Euler, tem-se

$$\frac{u[n+1] - u[n]}{T_s} + 10u[n] = 70 \left( \frac{e[n+1] - e[n]}{T_s} + 2e[n] \right)$$

Rearranjando, tem-se:

$$\begin{aligned} u[n+1] - u[n] + 10T_s u[n] &= 70(e[n+1] - e[n] + 2T_s e[n]) \\ \Rightarrow u[n+1] &= (1 - 10T_s)u[n] + 70(2T_s - 1)e[n] + 70e[n+1] \end{aligned}$$

Para  $f_s = 20$  Hz  $\Rightarrow T_s = 0,05$  s, obtém-se

$$u[n+1] = 0,5u[n] + 70(e[n+1] - 0,9e[n])$$

Para  $f_s = 40$  Hz  $\Rightarrow T_s = 0,025$  s, obtém-se

$$u[n+1] = 0,75u[n] + 70(e[n+1] - 0,95e[n]) \Rightarrow u[n] = 0,75u[n-1] + 70(e[n] - 0,95e[n-1])$$

A Figura 1.15 apresenta a resposta ao degrau para os dois casos considerados em comparação com o controle analógico.

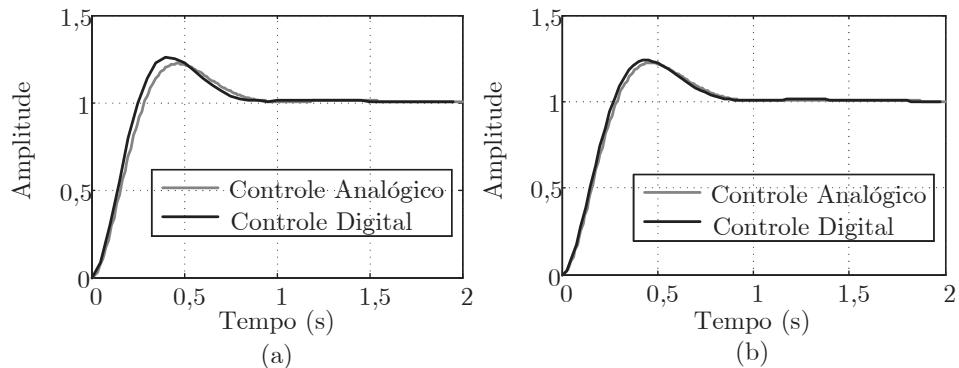


Figura 1.15: Resposta ao degrau para o Exemplo 1.1 com (a)  $f_s = 20$  Hz e (b)  $f_s = 40$  Hz.

## Amostragem e Reconstrução

Esta capítulo é baseado principalmente em [Oppenheim, Schafer e Buck 1999].

### 2.1 Amostrador Ideal

Neste capítulo, amostragem periódica será considerada durante a análise. O **amostrador ideal** toma amostras periódicas de  $x(t)$  para produzir  $x(nT_s)$ . Do ponto de vista matemático, o processo de amostragem é idealmente representado por uma modulação impulsiva, ou seja,  $x(t)$  é multiplicado por um trem de impulsos  $s(t)$  dado por

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad (2.1)$$

em que  $\delta(t)$  é a função impulso unitário ou delta de Dirac. Lembre que essa função tem valor não nulo somente quando o seu argumento for igual a zero, ou seja, quando  $t = nT_s$ . O resultado da multiplicação é o sinal  $x_s(t)$  dado por

$$x_s(t) = s(t)x(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s). \quad (2.2)$$

A Figura 2.1 representa a amostragem ideal por trem de impulsos

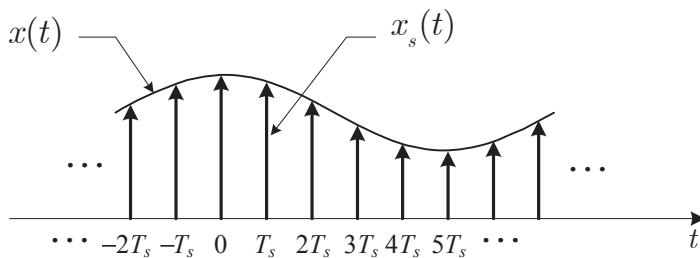


Figura 2.1: Amostragem por trem de impulsos.

O espectro do sinal amostrado é composto por uma soma de infinitas cópias do espectro do sinal (de entrada) de tempo contínuo, cada qual deslocada por um múltiplo inteiro da frequência de amostragem (veja Figura 2.2.(c)).

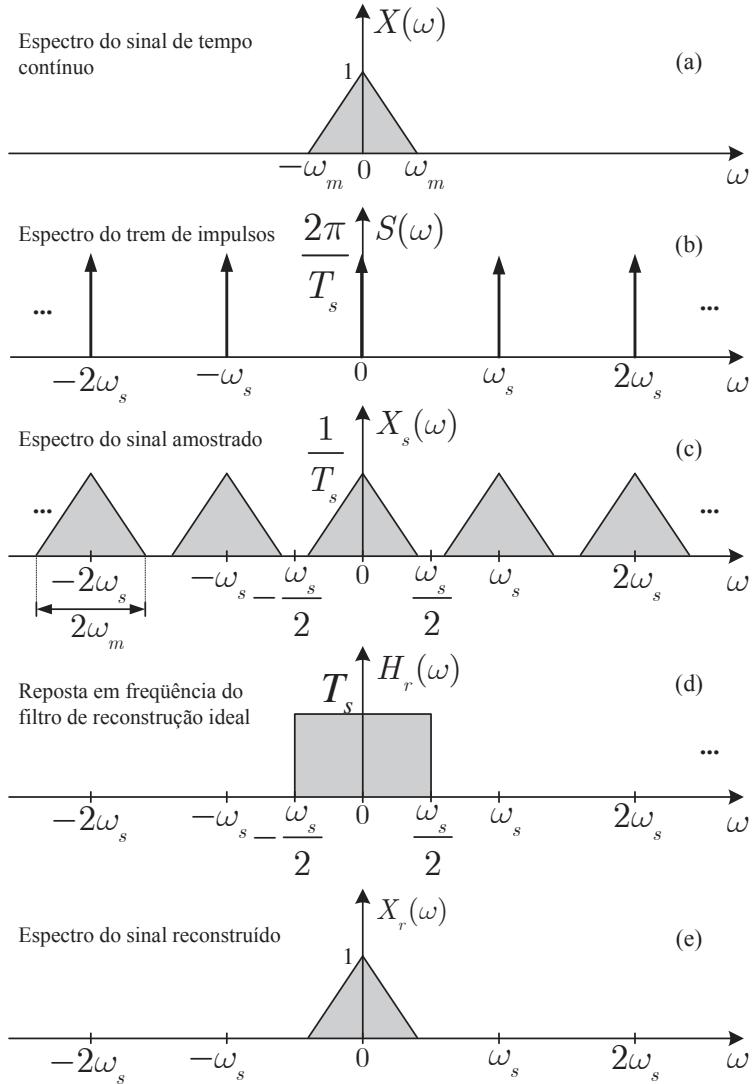


Figura 2.2: Análise no domínio da frequência de amostragem e reconstrução sem *aliasing*.

Analizando a Figura 2.2.(c) é possível concluir que:

- O sinal de entrada  $x(t)$  pode ser reconstruído a partir do sinal amostrado se esse for filtrado por um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte em  $\omega_s/2$  (veja Figura 2.2.(d));
- A afirmação anterior só será válida se a banda do sinal de entrada for menor que  $\omega_s/2$ , isto é,  $\omega_m \leq \omega_s/2$  ou  $\omega_s \geq 2\omega_m$ .

Verifique na Figura 2.3.(b) que se a situação  $\omega_m > \omega_s/2$  ocorrer, então haverá sobreposição das cópias de  $X(\omega)$  e mesmo com o filtro passa-baixas ideal não seria possível recuperar o sinal de entrada. Compare os espectros ilustrados na Figura 2.3.(a) e Figura 2.3.(d) e verifique.

Quando a situação  $\omega_m > \omega_s/2$  ocorrer, então ocorrerá *aliasing* ou rebatimento. A Figura 2.3 ilustra um exemplo de ocorrência de *aliasing* na amostragem.

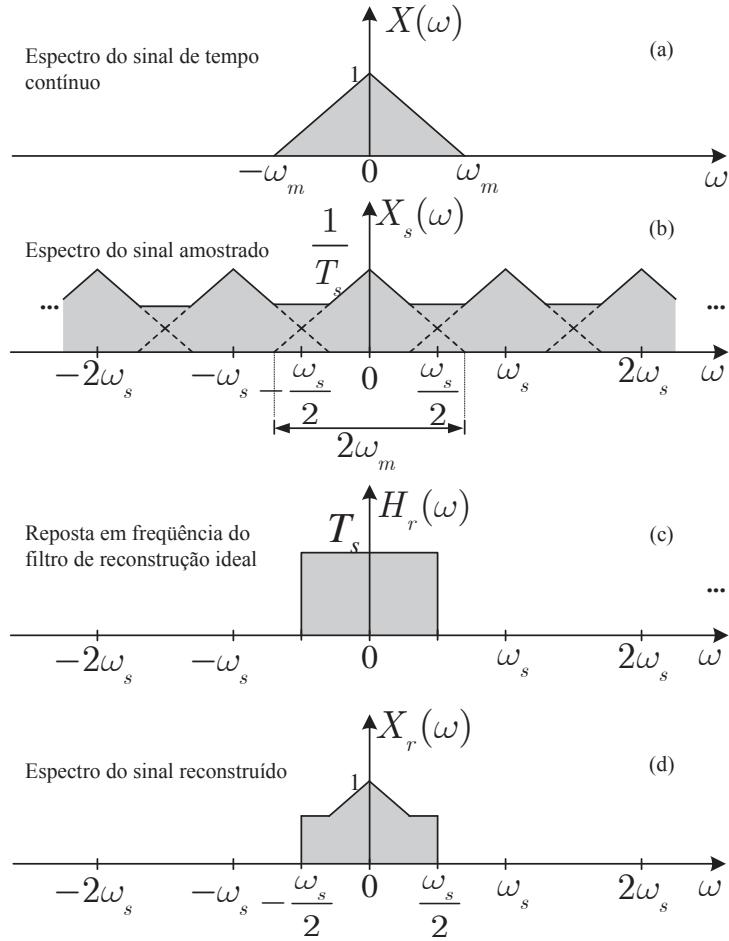


Figura 2.3: Análise no domínio da frequência de amostragem e reconstrução com *aliasing*.

## 2.2 Teorema da Amostragem

Seja um sinal  $x(t)$  de tempo contínuo limitado em banda, ou seja,

$$X(\omega) = 0, \text{ para } |\omega| \geq \omega_m, \quad (2.3)$$

como por exemplo o da Figura 2.3.(a). Então  $x(t)$  será unicamente determinado por suas amostras  $x[n] = x(nT_s)$ , somente se

$$\omega_s \geq 2\omega_m. \quad (2.4)$$

A frequência  $\omega_m$  é conhecida como frequência de Nyquist e a frequência  $2\omega_m$ , a qual deverá ser excedida pela frequência de amostragem, é conhecida como taxa de Nyquist.

Um aspecto importante consiste na escolha de um período de amostragem  $T_s$  adequado. Pode-se pensar que, quanto menor melhor. No entanto, o quanto menor esbarra em limitações do hardware digital. Elevadas frequências podem resultar em problemas numéricos de precisão dos parâmetros do algoritmo de processamento (controle) digital.

De forma geral, além de respeitar o teorema da amostragem, um aspecto prático para sistemas de controle consiste em escolher  $T_s$  pelo menos 10 vezes menor do que o período das oscilações de saída se

a resposta transitória for subamortecida, ou 10 vezes menor do que o tempo de subida, se a resposta for amortecida [Castrucci, Bittar e Sales 2011].

**Exemplo 2.1:** Um sinal  $x(t) = \cos(2\pi 1000t)$  foi amostrado com frequência de amostragem  $\omega_s$ . Em seguida, esse sinal foi reconstruído por meio de um filtro passa baixas ideal com frequência de corte em  $\omega_s/2$ . Determine o sinal reconstruído  $x_r(t)$  quando:

- a)  $\omega_s = 2\pi 8000$  (rad/s); b)  $\omega_s = 2\pi 1600$  (rad/s);

Solução: o sinal  $x(t)$  possui somente uma componente de frequência,

$$\omega_m = \omega_0 = 2\pi 1000 \Rightarrow f_m = f_0 = \omega_0/2\pi = 1000 \Rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} = 1 \text{ ms}$$

Logo, a Taxa de Nyquist é igual a  $2 \cdot f_m = 2000$  Hz ( $2\omega_m = 2\pi 2000$  rad/s).

a) Para  $\omega_s = 2\pi 8000$  (rad/s), tem-se  $T_s = 1/8000 = 0,125$  ms. Nesse caso,  $\omega_s = 8\omega_m$ . Como a amostragem foi feita com taxa superior a taxa de Nyquist, o sinal poderá ser recuperado sem *aliasing*, ou seja,  $x_r(t) = x(t) = \cos(2\pi 1000t)$ .

b) Para  $\omega_s = 2\pi 1600$  (rad/s), tem-se  $T_s = 1/1600 = 0,625$  ms. Nesse caso,  $\omega_s = 1,6\omega_m$ . A amostragem foi realizada com taxa inferior a taxa de Nyquist. Então, ocorrerá *aliasing*. A Transformada de Fourier de  $x(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \\ &= \pi\delta(\omega - 2\pi 1000) + \pi\delta(\omega + 2\pi 1000). \end{aligned}$$

Verifique na Figura 2.4 que o sinal resultante reconstruído será:

$$x_r(t) = \cos((\omega_s - \omega_0)t) = \cos(2\pi 600t).$$

Figura 2.5 apresenta uma análise no domínio do tempo para os casos a) (parte superior) e b) (parte inferior).

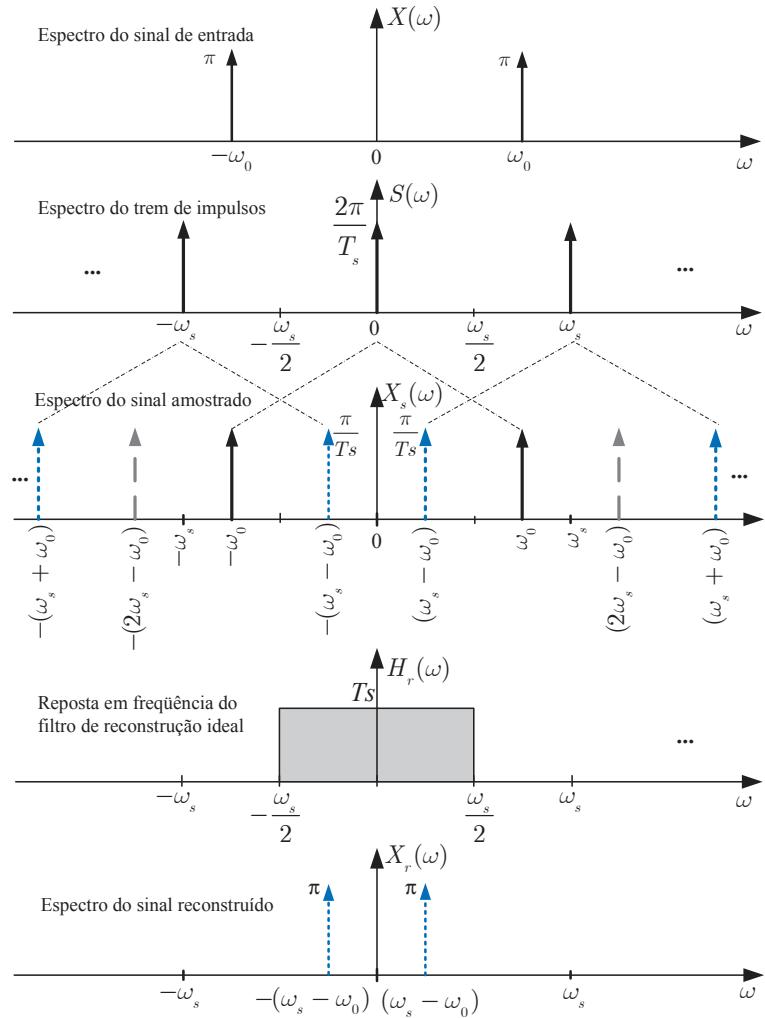


Figura 2.4: Análise no domínio da frequência dos sinais do Exemplo 2.1.b.

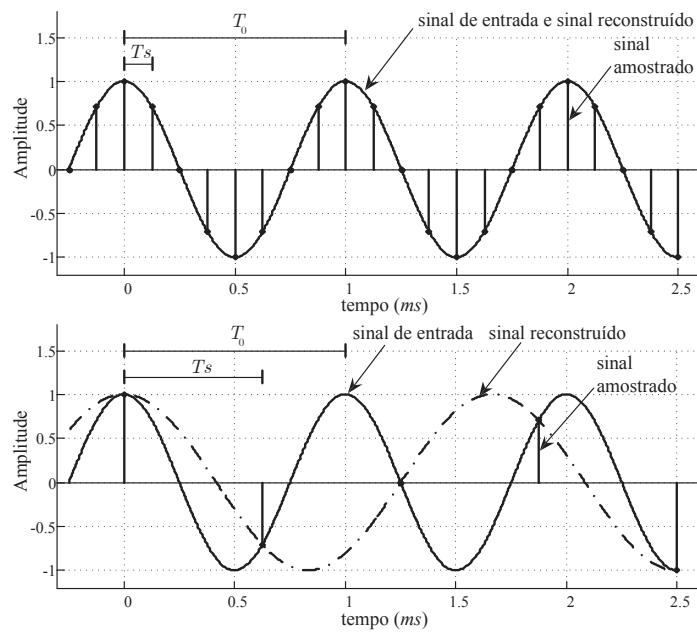


Figura 2.5: Análise no domínio do tempo para o Exemplo 2.1.

Exemplo 2.2: Análise do efeito do rebatimento (*aliasing*) para funções senoidais.

Considere os sinais de tempo contínuo  $x_1(t) = \cos(2\pi 10t)$  e  $x_2(t) = \cos(2\pi 50t)$ . Ambos os sinais foram amostrados por uma frequência de amostragem  $f_s = 40$  Hz. As duas sequências obtidas são:

$$x_1[n] = \cos\left[2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$x_2[n] = \cos\left[2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n\right] = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Note que as sequências  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$  são as mesmas, caracterizando *aliasing*. De forma geral, observe que

$$\cos\left(2\pi\frac{f_0 + kf_s}{f_s}n\right) = \cos\left(2\pi\frac{f_0}{f_s}n + 2\pi kn\right) = \cos\left(2\pi\frac{f_0}{f_s}n\right),$$

ou seja, qualquer senoide com frequência  $f = f_0 + f_s$  irá produzir a mesma sequência quando amostrada com frequência de amostragem  $f_s$ .

Na prática, após a amostragem (*sample*), tem-se a parte seguradora (*hold*) do S-H. A partir do sinal amostrado, o sinal na saída do S-H. Fisicamente, tem-se o circuito apresentado na Figura 2.6.

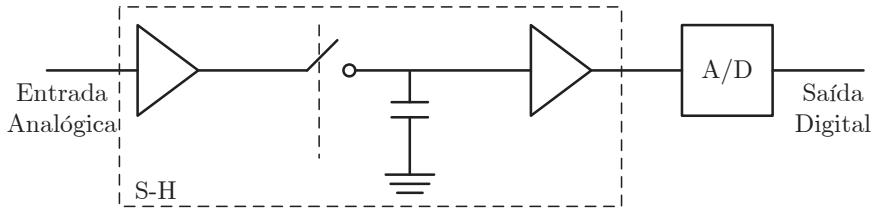


Figura 2.6: Circuito S-H na entrada do A/D.

O segurador é importante para que a tensão a ser convertida não se altere durante o tempo de conversão do A/D.

## 2.3 Reconstrução de um sinal limitado em banda de suas amostras

O filtro ideal passa-baixas de reconstrução tem resposta em frequência dada por (veja Figura 2.3)

$$H_r(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{ou} \quad H_r(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \pi/T_s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.5)$$

A resposta ao impulso desse filtro é dada pela transformada inversa de Fourier de  $H_r(\omega)$ ,

$$\begin{aligned} h_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_r(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{T_s}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} = \frac{T_s}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\pi t/T_s} - e^{-j\pi t/T_s}}{jt} \right] = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \triangleq \text{sinc}(\pi t/T_s), \end{aligned} \quad (2.6)$$

e possui a forma da Figura 2.7.

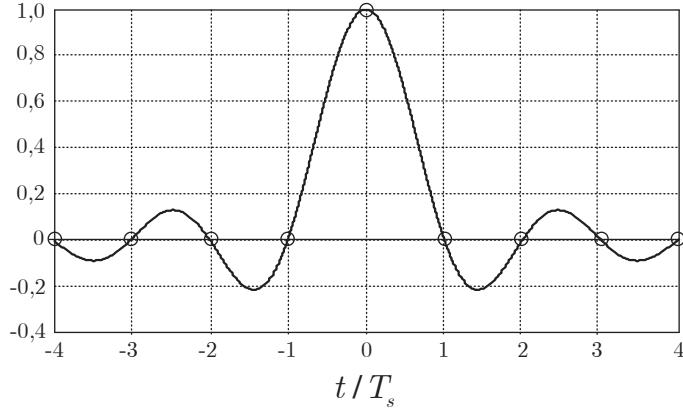


Figura 2.7: Resposta impulsiva do filtro interpolador ideal.

O sinal reconstruído é dado pela convolução entre o sinal amostrado e a resposta ao impulso do filtro, isto é,

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t). \quad (2.7)$$

Note que  $x_s(t)$  pode ser escrita como

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s), \quad (2.8)$$

o que resulta em,

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_s(t) * h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(\tau) h_r(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(\tau - nT_s) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - \tau)}{T_s}\right) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - \tau)}{T_s}\right) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Note que a partir da sequência  $x[n]$  é possível obter o valor de  $x_r(t)$  para qualquer instante de tempo, e não somente para os pontos em que o sinal de entrada foi amostrado.

Na realidade, a reconstrução representa um processo de interpolação, como ilustrado na Figura 2.8.(c), onde várias realizações da expressão  $x[n] \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right)$  são apresentadas.

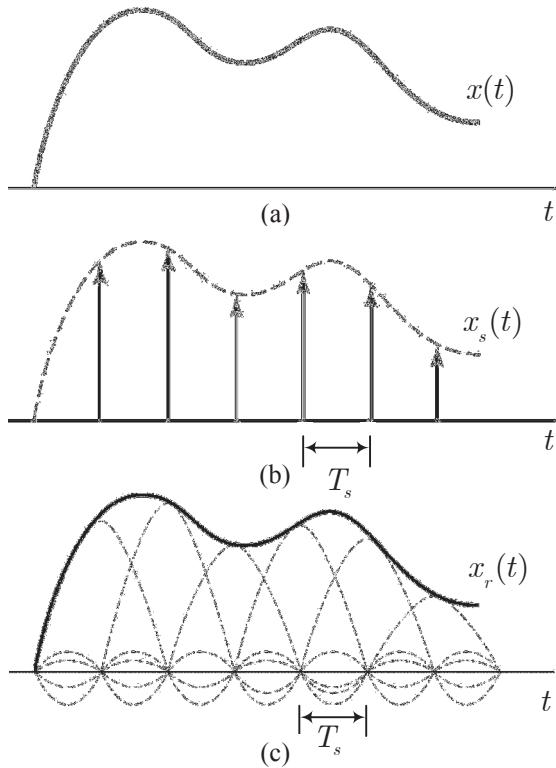


Figura 2.8: Interpolação ideal de sinal limitado em banda [Oppenheim, Schafer e Buck 1999].

Como observado, teoricamente, com tal interpolação é possível reconstruir o sinal perfeitamente. No entanto, o filtro passa-baixas ideal não é fisicamente realizável, pois o mesmo é não causal. Em muitas aplicações a não causalidade pode ser resolvida adicionando um atraso de fase dado por  $e^{-j\omega\lambda}$  em  $H_r(\omega)$  (que corresponde a um atraso de  $\lambda$  no tempo) e efetuar um truncamento da resposta impulsiva. No entanto, em aplicações de controle com realimentação, o atraso adicionado é desastroso para a estabilidade do sistema. Por este motivo é que se utiliza os seguradores polinomiais.

## 2.4 Segurador de Ordem Zero

Em particular, o segurador de ordem zero apresenta uma resposta impulsiva como a mostrada na Figura 2.9.

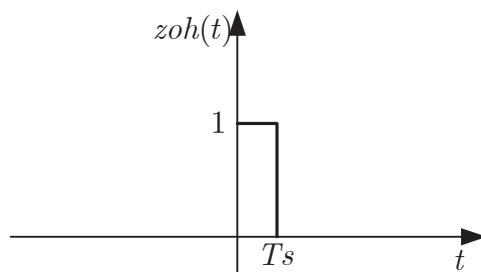


Figura 2.9: Resposta impulsiva do ZOH.

Na conversão A/D, um segurador de ordem zero é agregado ao circuito S-H. A conversão D/A é também implementada por um segurador que extrapola (“liga”) o sinal entre dois pontos consecutivos (amostras consecutivas). Na conversão D/A, o segurador não precisar necessariamente ser de ordem zero. O segurador de ordem zero produz um sinal na forma de escada, como mostrado na Figura 2.11, e é comumente utilizado em sistemas de controle digital devido a sua simplicidade.

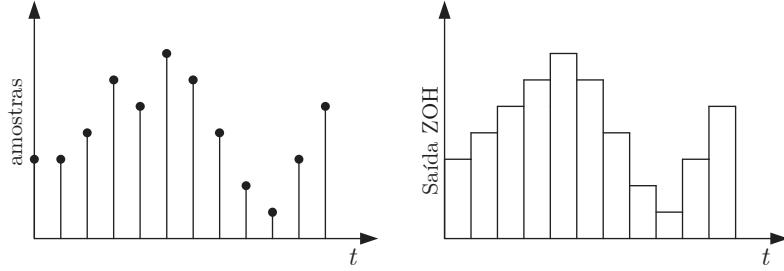


Figura 2.10: Entrada e saída de um segurador de ordem zero.

Matematicamente,

$$zoh(t) = u(t) - u(t - T_s) \quad (2.10)$$

onde  $u(t)$  é a função degrau unitário. A transformada de Laplace de  $zoh(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} ZOH(s) &= \int_0^{\infty} [u(t) - u(t - T_s)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{T_s} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{T_s} = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \end{aligned} \quad (2.11)$$

A transformada de Fourier do ZOH é dada por

$$\begin{aligned} ZOH(\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{j\omega} = e^{-j\omega T_s/2} \left( \frac{e^{j\omega T_s/2} - e^{-j\omega T_s/2}}{j\omega} \right) \left( \frac{2T_s}{2T_s} \right) \\ &= T_s e^{-j\omega T_s/2} \left( \frac{e^{j\omega T_s/2} - e^{-j\omega T_s/2}}{2j(\omega T_s/2)} \right) = T_s e^{-j\omega T_s/2} \frac{\sin(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2} \\ &= e^{-j\omega T_s/2} T_s \text{sinc}(\omega T_s/2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Note que o ZOH introduz um deslocamento de fase de  $\omega T_s/2$ , o que corresponde a um atraso no tempo de  $T_s/2$ . Isso pode ser observado no domínio do tempo, como apresentado na Figura 2.11.

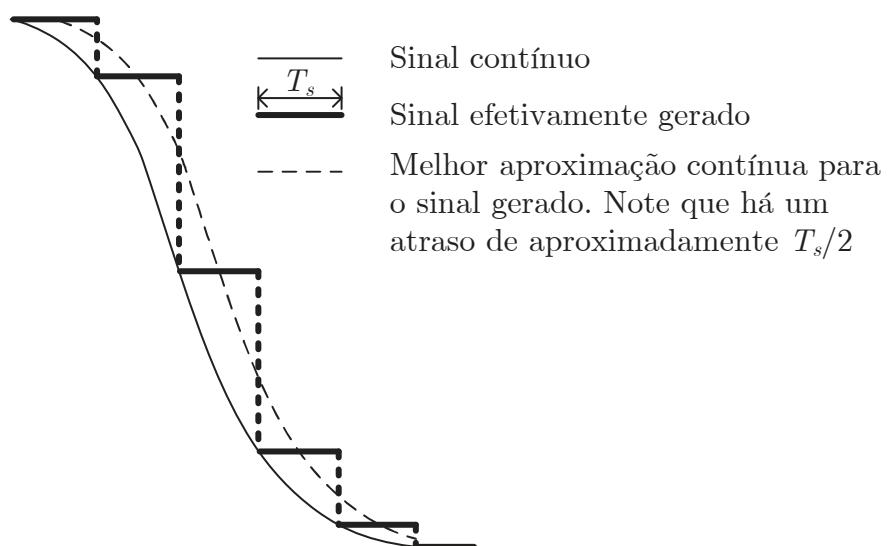


Figura 2.11: Efeito do ZOH.

# 3

## Transformada- $z$

Este capítulo está baseado nos livros textos [Oppenheim, Schafer e Buck 1999], [Ogata 1995] e [Franklin, Powell e Workman 2006].

Considere que o sinal em tempo discreto  $x[n] = x(nT_s)$  foi obtido por amostragem periódica. A transformada- $z$  (bilateral) de uma sequência  $x[n]$  é definida como

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}. \quad (3.1)$$

Trata-se de uma série de potência infinita, em que  $z$  é uma variável complexa contínua. Para sinais causais, o que será considerado neste curso, tem-se a transformada- $z$  unilateral

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}. \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.1: Degrau unitário:** determine a transformada- $z$  da sequência obtida pela amostragem periódica de

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

com um período de amostragem  $T_s$ .

**Solução:** note que  $u[n] = u(nT_s) = 1$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Logo,

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Observe que  $|z| > 1$  é a condição para convergência do somatório e, consequentemente, para existência dessa transformada- $z$ . Essa condição define uma região no plano- $z$  chamada, por razões obvias, de região de convergência ROC (*region of convergence*). Portanto,

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1$$

A Figura 3.1 ilustra o plano- $z$  e a região de convergência da transformada- $z$  calculada.

A definição da região de convergência é importante, pois dois sinais diferentes, um causal e um anticausal, podem ter a mesma expressão algébrica de  $X(z)$ . Logo, uma Transformada- $z$  bilateral só é completamente definida se a ROC for especificada. Como neste curso apenas sinais causais estão sendo considerados, a definição da ROC não é estritamente necessária.

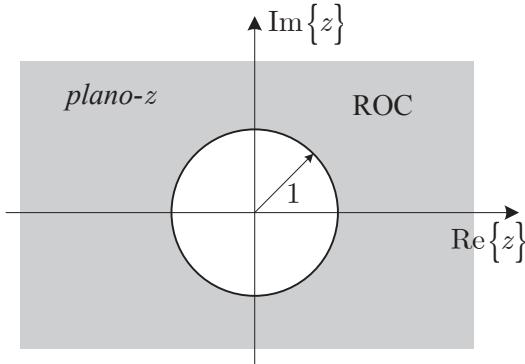


Figura 3.1: Plano- $z$  e ROC do Exemplo 31.

**Exemplo 3.2: Rampa unitária:** determine a transformada- $z$  da sequência obtida pela amostragem periódica de

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

com um período de amostragem  $T_s$ .

**Solução:** note que  $x[n] = x(nT_s) = nT_s$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Logo,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = T_s \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

Note que

$$X(z) = -T_s z d \frac{U(z)}{dz} = -T_s z \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Portanto,

$$X(z) = -T_s z \frac{(0 - z^{-2})}{(1 - z^{-1})^2} = T_s \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{T_s z}{(z - 1)^2}$$

Exemplo 3.3: Função Polinomial  $a^n$ : determine a transformada- $z$  da sequência

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Observe que  $|z| > |a|$  é a condição para convergência do somatório e, consequentemente, para existência dessa transformada- $z$ . Com isso,

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

A Figura 3.2 ilustra o plano- $z$  e a região de convergência da transformada- $z$  calculada.

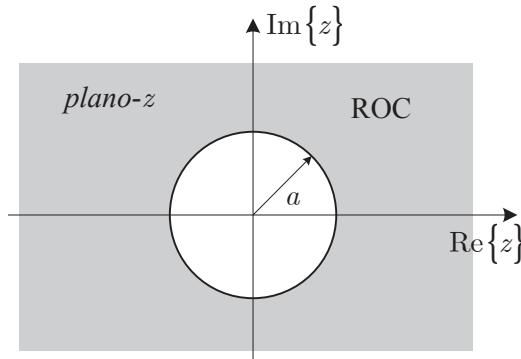


Figura 3.2: Plano- $z$  e ROC do Exemplo 33.

Exemplo 3.4: Função Exponencial: determine a transformada- $z$  da sequência obtida pela amostragem periódica de

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

com um período de amostragem  $T_s$ .

**Solução:** note que  $x[n] = x(nT_s) = e^{-anT_s}$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Logo,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_s} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{aT_s} z)^{-n}$$

Observe que  $|z| > |e^{-aT_s}|$  é a condição para convergência do somatório e, consequentemente, para existência dessa transformada- $z$ . Com isso,

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_s} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_s}}$$

Exemplo 3.5: **Função Senoidal:** determine a transformada- $z$  da sequência obtida pela amostragem periódica de

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

com um período de amostragem  $T_s$ .

**Solução:** note que  $x[n] = x(nT_s) = \sin(n\omega T_s)$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Como

$$\sin(n\omega T_s) = \frac{e^{jn\omega T_s} - e^{-jn\omega T_s}}{2j},$$

tem-se que:

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\omega T_s} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\omega T_s} z^{-n} \right)$$

Utilizando o resultado do Exemplo 34, tem-se que

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T_s} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T_s} z^{-1}} \right).$$

Manipulando o resultado, tem-se

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left( \frac{z^{-1} (e^{j\omega T_s} - e^{-j\omega T_s})}{1 - z^{-1} (e^{-j\omega T_s} + e^{j\omega T_s}) + z^{-2}} \right),$$

ou seja,

$$X(z) = \frac{z^{-1} \sin(\omega T_s)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega T_s) + z^{-2}} = \frac{z \sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}.$$

Exemplo 3.6: Obtenha a transformada- $z$  de

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Efetuando a expansão em frações parciais, tem-se

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Logo,

$$x(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Amostrando  $x(t)$  com período de amostragem  $T_s$ , obtém-se  $x[n] = 1 - e^{-nT_s}$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Com isso,

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T_s}z^{-1}}.$$

No MATLAB, o comando `ztransf()` do *Toobox* de matemática simbólica pode ser utilizado para obter a transformada- $z$ . Automaticamente, o MATLAB admite que a variável amostrada independente é  $n$  e que a variável independente transformada é  $z$ . O Exemplo 3.2 pode ser diretamente resolvido da seguinte forma por meio do MATLAB.

```
clear all; clc;
syms n T_s; % Define n e T_s como vars. simbólicas
x=n*T_s; % Define x[n] = x(nT_s) = nT_s
disp('x(n) = ');
pretty(x); % Forma "bonita" de x(nT_s)
X=ztrans(x); % Obtém X(z) = Z{x(n)}
disp('X(z) = ');
pretty(X); % Forma "bonita" de X(z)
```

### 3.1 Relação entre as Transformadas $z$ e de Lapace

Como visto na Equação (2.2), o sinal amostrado pode ser representado por

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s). \quad (3.3)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação anterior, verifica-se que

$$X_s(s) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathcal{L} \{ \delta(t - nT_s) \}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{L} \{ \cdot \}$  indica o operador transformada de Laplace. Como  $\mathcal{L} \{ \delta(t - nT_s) \} = e^{-snT_s}$ , tem-se:

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-snT_s}. \quad (3.5)$$

Por outro lado, como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad (3.6)$$

pode-se verificar que a transformada- $z$  da sequência  $x[n]$  obtida pela amostragem de  $x(t)$  é equivalente à transformada de Laplace do sinal amostrado  $x_s(t)$ , com  $z = e^{sT_s}$  ou  $s = (1/T_s) \ln(z)$ .

Como  $s = \sigma + j\omega$  é uma variável complexa, tem-se que

$$z = e^{T_s(\sigma+j\omega)} = e^{T_s\sigma} e^{jT_s\omega} = e^{T_s\sigma} e^{j(T_s\omega+2\pi k)}. \quad (3.7)$$

As seguintes observações podem ser enunciadas:

- Qualquer ponto no plano- $s$  onde as frequências diferem em múltiplos inteiros da frequência de amostragem  $\omega_s = 2\pi/T_s$  são mapeados no mesmo ponto no plano- $z$ .
- Todos os pontos no semiplano esquerdo do plano- $s$  correspondem a pontos no interior do círculo unitário no plano- $z$ .
- Todos os pontos no semiplano direito do plano- $s$  correspondem a pontos fora do círculo unitário no plano- $z$ .
- Pontos no eixo  $j\omega$  no plano- $s$  correspondem a pontos na circunferência unitária,  $|z| = 1$ , no plano- $z$ .

O semiplano esquerdo do plano- $s$  pode ser dividido em um número infinito de faixas periódicas, como mostrado na Figura 3.3. A primeira faixa vai de  $j\omega = -j\omega_s/2$  a  $j\omega_s/2$ . As faixas complementares vão de  $j\omega = j\omega_s/2$  a  $j\omega_s3/2$ ,  $j\omega = j\omega_s3/2$  a  $j\omega_s5/2$ , ..., e de  $j\omega = -j\omega_s/2$  a  $-j\omega_s3/2$ ,  $j\omega = -j\omega_s3/2$  a  $-j\omega_s5/2$ , ....

## 3.2 Função de Transferência

Considere um sistema LIT com entrada  $e[n]$  e saída  $u[n]$  caracterizado pela seguinte equação de diferenças

$$u[n] = u[n-1] + \frac{T_s}{2} (e[n] + e[n-1]) \quad (3.8)$$

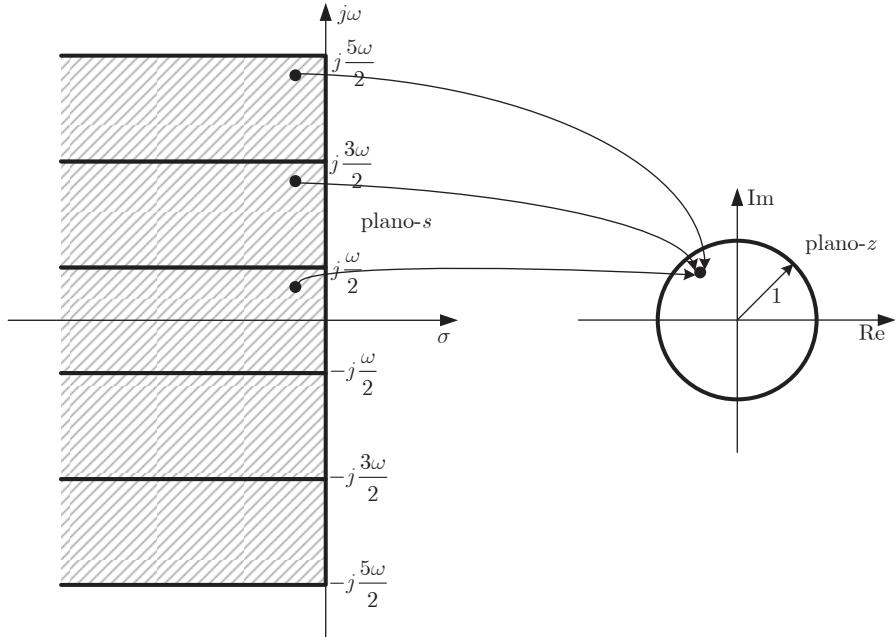


Figura 3.3: Faixas periódicas no plano- $s$  e mapeamento correspondente no plano- $z$ .

A transformada- $z$  do primeiro termo do lado direito da Equação acima é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} u[n-1] z^{-n} = z^{-1} U(z) \quad (3.9)$$

Ao aplicar este resultado na Equação (3.8), resulta em

$$U(z) = z^{-1} U(z) + \frac{T_s}{2} (E(z) + z^{-1} E(z)) \quad (3.10)$$

Rearranjando os termos, tem-se

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T_s}{2} \frac{z + 1}{z - 1} \quad (3.11)$$

A razão entre a transformada- $z$  da saída pela transformada- $z$  da entrada de um sistema é a função de transferência do sistema. A relação

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \quad (3.12)$$

com  $n \geq m$ , pode ser escrita como

$$G(z) = \frac{z^n b_0 + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.13)$$

A função `tf()` do MATLAB pode ser utilizada para definir um sistema LIT em termos de sua função de transferência, tanto em  $s$  quanto em  $z$ . Para criar um modelo de sistema de tempo contínuo no MATLAB na forma de função de transferência, pode-se fazer

```

num_Gs = [1 1]; %Numerador de G(s)
den_Gs = [1 5 6]; %Denominador de G(s)
% Cria uma função de transferência G(s)
G = tf(num_Gs, den_Gs);
% ou
% s = tf('s'); G = (s+1)/(s^2+5*s+6);
% Linha seguinte gera sys com um atraso de transporte de 1 s,
% ou seja, G = exp(-1*s)*(s+1)/(s^2+5*s+6)

```

No caso de sistemas em tempo discreto, uma função de transferência em  $z$  pode ser definida como

```

num_Gz = [1 2 7]; % Numerador de G(z)
den_Gz = [1 -0.3 0.02]; % Denominador de G(z)
T_s = 0.5; % Período de Amostragem
G = tf(num_Gz, den_Gz, T_s);
% Se o per. de amost. for indeterminado, pode-se fazer
G = tf(num_Gz, den_Gz, []); % ou G = tf(num_Gz, den_Gz, -1);
% Pode-se ainda fazer
z=tf('z', T_s);
G=(z^2+2*z+7)/(z^2-0.3*z+0.02);
% Se o per. de amost. for indeterminado, pode-se fazer
z=tf('z');
G=(z^2+2*z+7)/(z^2-0.3*z+0.02);
% Para atribuir um per. de amost. a G(z), deve-se fazer
G.Ts = T_s;

```

### 3.3 Polos e Zeros no Plano- $z$

Considere  $B(z)$  e  $A(z)$  os polinômios do numerador e do denominador de  $G(z)$ , respectivamente. As raízes da equação  $B(z) = 0$  são denominados zeros de  $G(z)$ , enquanto que as raízes de  $A(z) = 0$  são denominados polos de  $G(z)$ . Após fatoração,  $G(z)$  pode ser reescrita na forma zero-polo-ganho (zpk):

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (3.14)$$

A função `zpk()` do MATLAB pode ser utilizada para definir um sistema LIT em termos de sua função de transferência, tanto em  $s$  quanto em  $z$ , com ganho, polos e zeros fatorados. Para criar um modelo de sistema de tempo contínuo utilizando `zpk()`, pode-se fazer

```

K = 10; %Ganho de G(s)
zer_Gs = [-0.1 -0.2]; %Zeros de G(s)
pol_Gs = [-0.3 -0.4]; %Polos de G(s)
% Cria uma função de transferência G(s) fatorada
G = zpk(zer_Gs, pol_Gs);
% ou, por exemplo
% s = zpk('s'); G = (10*s^2+3*s+0.2)/(s^2+0.7*s+0.12)

```

No caso de sistemas em tempo discreto, pode-se definir

```

K = 10; %Ganho de G(z)
zer_Gz = [-0.1 -0.2]; %Zeros de G(z)
pol_Gz = [-0.3 -0.4]; %Polos de G(z)
T_s = 0.5; % Período de Amostragem
G = zpk(zer_Gz, pol_Gz, K, T_s);
% Se o per. de amost. for indeterminado, pode-se fazer
G = zpk(zer_Gz, pol_Gz, K, []); % ou G = zpk(zer_Gs, pol_Gs, K, -1);
% Pode-se ainda fazer
z=zpk('z', T_s);
G=(z^2+2*z+7)/(z^2-0.3*z+0.02);
% Se o per. de amost. for indeterminado, pode-se fazer
z=zpk('z');
G=(10*z^2+3*z+0.2)/(z^2+0.7*z+0.12);
% Para atribuir um per. de amost. a G(z), deve-se fazer
G.Ts = T_s;

```

### 3.4 Sistema LIT Causal e Estável

Suponha que  $g[n]$  seja a resposta impulsiva discreta de um sistema linear e invariante no tempo. Para que o sistema seja causal,

$$g[n] = 0, \quad n < 0. \quad (3.15)$$

Este sistema será estável no sentido BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) se e somente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g[n]| < \infty. \quad (3.16)$$

Para sistemas causais, a ROC é determinada por uma região externa de um disco centrado na origem (veja Exemplo 3.1). Por outro lado como a ROC de qualquer sistema não pode conter polos, então a ROC de um sistema LIT causal deve começar a partir do polo de maior módulo (mais externo) conforme ilustra a Figura 3.4. Além disso, para que um sistema seja estável, a ROC deve conter o círculo unitário. Conclusão,

**Os polos de um sistema LIT causal e estável devem estar localizados estritamente dentro do círculo unitário.**

A Figura 3.4 ilustra um exemplo de sistema estável e causal ao mesmo tempo. Note que se algum polo estiver fora do círculo unitário, o sistema causal não é estável.

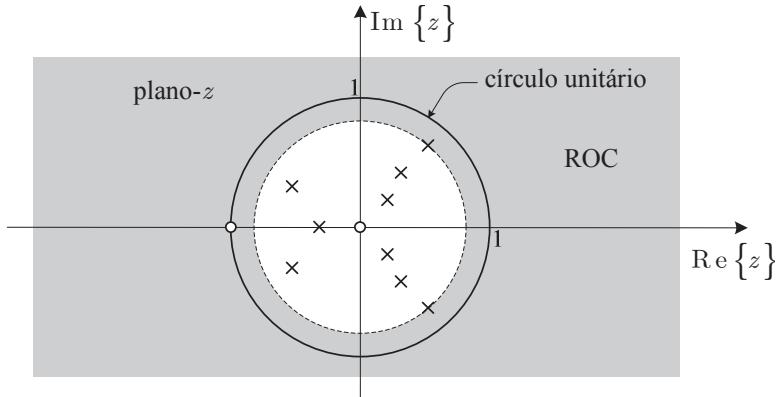


Figura 3.4: Plano- $z$  e ROC para um sistema LIT estável e causal.

Uma outra forma de verificar a necessidade dos polos estarem dentro do círculo de raio unitário é efetuar a expansão da transformada- $z$  em frações parciais e verificar que a série não converge para os fatores correspondentes a polos com módulo maior ou igual à unidade.

### 3.5 Algumas Propriedades da Transformada- $z$

As propriedades aqui apresentadas podem ser utilizadas para facilitar o cálculo de transformadas diretas, inversas ou como método indireto para solucionar outros problemas. Será considerado que as sequências  $x[n]$  e  $y[n]$  foram obtidas por amostragem periódica com período  $T_s$  de sinais contínuos  $x(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente, ambos com valor nulo para  $t < 0$ .

#### • Linearidade

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{ax[n] + by[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (ax[n] + by[n]) z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} + b \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n} \\ &= a\mathcal{Z}\{x[n]\} + b\mathcal{Z}\{y[n]\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Essa propriedade mostra que a transformada da soma é a soma das transformadas e que ao multiplicar uma sequência no domínio do tempo por uma constante, sua transformada também será multiplicada pelo mesmo valor. Essa propriedade é ilustrada pelo seguinte par de transformadas,

$$ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} aX(z) + bY(z). \quad (3.18)$$

• **Atraso**

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[n - n_0]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n} = \sum_{m=-n_0}^{\infty} x[m] z^{-(m+n_0)}, \quad m = n - n_0 \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} = z^{-n_0} \mathcal{Z}\{x[n]\}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Como  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ , o limite inferior na segunda linha da equação anterior pode ser modificado para  $m = 0$ . Essa propriedade mostra que atrasar uma sequência no tempo por  $n_0$  amostras para direita é equivalente a multiplicar sua transformada por  $z^{-n_0}$ , ou seja,

$$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z). \quad (3.20)$$

• **Avanço**

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[n + n_0]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n + n_0] z^{-n} = \sum_{m=n_0}^{\infty} x[m] z^{-(m-n_0)}, \quad m = n - n_0 \\ &= z^{n_0} \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} - z^{n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m] z^{-m}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Portanto,

$$x[n + n_0] \leftrightarrow z^{n_0} X(z) - z^{n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m] z^{-m}. \quad (3.22)$$

• **Escalonamento no domínio- $z$**

$$\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad (3.23)$$

ou seja,

$$a^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right). \quad (3.24)$$

• **Derivada de  $X(z)$**

$$\begin{aligned}-z \frac{d}{dz} X(z) &= -z \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \right) = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} x[n] z^{-n} \\ &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx[n] z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Observe que multiplicar uma sequência no tempo por  $n$  é equivalente a derivar a sua transformada- $z$  e multiplicar por  $-z$ .

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} X(z). \quad (3.26)$$

### • Teorema da Convolução

A convolução entre duas sequências é equivalente ao produto entre suas transformadas (prove!).

$$x[n] * g[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) G(z). \quad (3.27)$$

Em um sistema LIT com resposta ao impulso  $g[n]$ , entrada  $x[n]$  e saída  $y[n]$ , tem-se,

$$Y(z) = X(z) G(z) \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (3.28)$$

### • Teorema do Valor Inicial

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.29)$$

### • Teorema do Valor Final

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z) \quad (3.30)$$

 **Exemplo 3.7: Deslocamento temporal:** Determine a transformada- $z$  da sequência

$$x[n] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} u[n-3].$$

Solução: Definindo  $x_1[n] = \left(\frac{5}{6}\right)^n u[n]$ , tem-se

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{5}{6}.$$

Utilizando a propriedade do deslocamento temporal, verifica-se que

$$x[n] = x_1[n-3] \Rightarrow X(z) = z^{-3} X_1(z) = \frac{z^{-3}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{5}{6}.$$

Exemplo 3.8: Deslocamento temporal (II): Determine a transformada- $z$  da sequência

$$x[n] = \left(\frac{5}{6}\right)^n u[n-3].$$

Solução: com simples manipulação matemática, observe que,

$$x[n] = \left(\frac{5}{6}\right)^n u[n-3] \left(\frac{5}{6}\right)^{-3} \left(\frac{5}{6}\right)^3 \Rightarrow x[n] = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} u[n-3].$$

Portanto, aproveitando o resultado do Exemplo 3.7, obtém-se

$$X(z) = \frac{(5/6)^3 z^{-3}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{5}{6}.$$

Exemplo 3.9: Propriedade da derivada de  $X(z)$ : Determine a transformada- $z$  de

$$x[n] = n a^n u[n].$$

Solução: fazendo-se  $x_1[n] = a^n u[n]$ , tem-se que  $x[n] = n x_1[n]$ . Assim, aproveitando o resultado do Exemplo 3.1, segue que

$$\begin{aligned} X(z) &= -z \frac{d}{dz} X_1(z) = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - az^{-1}} \right) \\ &= -z \left( \frac{-az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > a. \end{aligned}$$

Exemplo 3.10: Um sistema LIT causal é descrito pela Eq. de diferenças:

$$y[n] - 0,55y[n-1] - 0,20y[n-2] = 0,5r[n] + 0,1r[n-1].$$

Determine  $G(z) = Y(z)/R(z)$ , seus polos e zeros, e o gráfico do plano- $z$ . Utilize o MATLAB para confirmar os cálculos.

Solução: utilizando a propriedade de deslocamento temporal tem-se,

$$Y(z) (1 - 0,55z^{-1} - 0,20z^{-2}) = R(z) (0,5 + 0,1z^{-1}).$$

Logo,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,5 + 0,1z^{-1}}{1 - 0,55z^{-1} - 0,20z^{-2}} \left( \frac{z^2}{z^2} \right) = \frac{z(0,5z + 0,1)}{z^2 - 0,55z - 0,20},$$

com zeros:  $\{0; -0,2\}$ ; e polos:  $\{0,8; -0,25\}$ .

Algoritmo MATLAB,

```
N = [0.5 0.1 0]; D = [1 -0.55 -0.2];
zer = roots(N); pol = roots(D);
zplane(N,D);
```

Resposta do algoritmo

```
zer =          pol =
-0.20000      0.80000
0.00000      -0.25000
```

A Figura 3.5 apresenta o plano- $z$  com os polos e zeros. Como todos os polos estão dentro do círculo unitário, o sistema é estável.

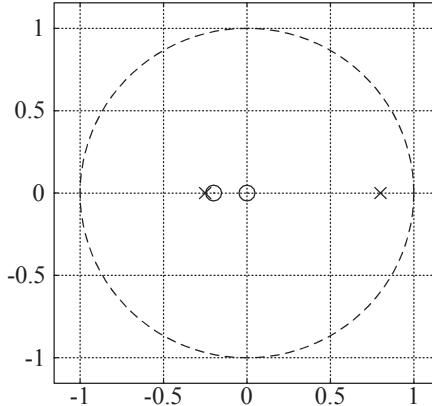


Figura 3.5: Plano- $z$  com polos e zeros para o Exemplo 3.7.

A Tabela 3.1 apresenta algumas sequências e suas transformadas- $z$ , enquanto que a Tabela 3.2 apresenta a relação entre a transformada de Laplace e a transformada- $z$  obtida através da amostragem de alguns sinais contínuos. Note que, na Tabela 3.2, a conversão de  $s$  para  $z$  é obtida ao discretizar a resposta impulsiva e então tomar a transformada- $z$  da sequência obtida.

Seja um sistema linear e invariante no tempo (LIT) com resposta impulsiva  $h_c(t)$ . A resposta  $y(t)$  a uma entrada qualquer  $x(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty x(\tau)h_c(t-\tau)d\tau \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{\infty} x(m\Delta\tau)h_c(t-m\Delta\tau)\Delta\tau \\ &\approx T_s \sum_{m=0}^{\infty} x(mT_s)h_c(t-mT_s) \end{aligned} \quad (3.31)$$

A resposta amostrada no instante  $nT_s$  é dada por:

$$y(nT_s) = T_s \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h_c((n-m)T_s) \quad (3.32)$$

Por outro lado, seja  $h[n]$  a resposta impulsiva do sistema LIT em tempo discreto equivalente. A resposta  $y[n]$  para a entrada  $x[n]$  é dada por:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n-m]. \quad (3.33)$$

Note que, para (3.32) ser equivalente a (3.33), deve-se ter que:

$$h[n] = T_s h_c(nT_s). \quad (3.34)$$

Com isso, as resposta impulsivas do sistema em tempo contínuo e do sistema em tempo discreto serão equivalentes. Tal método de discretização recebe o nome de **invariância ao impulso**. No MATLAB, o comando `c2d` realiza essa conversão, com a opção '`imp`'. Por exemplo, para obter o equivalente discreto de  $G(s) = \frac{0,7}{s(s+0,7)}$ , pelo método da invariância ao impulso e com  $T_s = 0,1$ , pode-se fazer:

No caso de sistemas em tempo discreto, pode-se definir

```
s = tf('s');
G = 0.7/(s*(s+0.7));
Ts = 0.1;
G_d = c2d(G, Ts, 'imp');
```

A resposta obtida é  $G_D = \frac{0,0067606z}{(z-1)(z-0,9324)}$ .

Note que  $X(z)$  na Tabela 3.2 (quarta coluna), quando multiplicado por  $T_s$ , é o equivalente discreto de  $X(s)$  (primeira linha da Tabela 3.2), obtido pelo método da invariância ao impulso.

Tabela 3.1: Alguns Pares de Transformada- $z$  unilateral.

	Sequência	Transformada- $z$
1	$\delta[n]$	1
2	$\delta[n - m]$	$z^{-m}$
3	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
4	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$
5	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$
6	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - (\cos \omega_0) z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$
7	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{(\sin \omega_0) z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$
11	$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - (r \cos \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$
12	$r^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{(r \sin \omega_0) z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$
13	$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & c. c. \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$

Tabela 3.2: Pares de transformada de Laplace e transformada- $z$ .

	$X(s)$	$x(t)$	$x[n]$	$X(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
2	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$e^{-anT_s}$	$\frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}$
3	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$nT_s$	$\frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
4	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$(nT_s)^2$	$\frac{T_s^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
5	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-anT_s}$	$\frac{z^{-1}(1-e^{-aT_s})}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT_s}z^{-1})}$
6	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$nT_s e^{-anT_s}$	$\frac{z^{-1}T_s e^{-aT_s}}{(1-z^{-1}e^{-aT_s})^2}$
7	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$	$(1 - anT_s)e^{-anT_s}$	$\frac{1-(1+aT_s)e^{-aT_s}z^{-1}}{(1-z^{-1}e^{-aT_s})^2}$
8	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2 e^{-at}$	$(nT_s)^2 e^{-anT_s}$	$\frac{T_s^2 e^{-aT_s}(1+e^{-aT_s}z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1}e^{-aT_s})^3}$
9	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\sin(\omega nT_s)$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega T_s)}{1-2z^{-1} \cos(\omega T_s)+z^{-2}}$
10	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega nT_s)$	$\frac{1-z^{-1} \cos(\omega T_s)}{1-2z^{-1} \cos(\omega T_s)+z^{-2}}$
11	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$e^{-anT_s} \sin(\omega nT_s)$	$\frac{e^{-aT_s} z^{-1} \sin(\omega T_s)}{1-2e^{-aT_s} z^{-1} \cos(\omega T_s)+e^{-2aT_s} z^{-2}}$
12	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$e^{-anT_s} \cos(\omega nT_s)$	$\frac{1-e^{-aT_s} z^{-1} \cos(\omega T_s)}{1-2e^{-aT_s} z^{-1} \cos(\omega T_s)+e^{-2aT_s} z^{-2}}$

### 3.6 A Transformada- $z$ inversa

Na análise de sistemas, com frequência é necessário realizar o processo inverso da transformada- $z$ , ou seja, obter a sequência a partir de sua transformada. Esse processo é chamado de transformada- $z$  inversa. Pode-se, por exemplo, utilizar uma tabela de transformada- $z$  e, por meio de inspeção, obter a transformada inversa.

No entanto, existe uma expressão formal para realizar esse tipo de cálculo que é baseada no teorema da integral de Cauchy para variáveis complexas,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (3.35)$$

em que  $C$  é um contorno fechado na ROC no sentido horário. A integral em (3.35) é resolvida pelo teorema dos resíduos de Cauchy. Alguns procedimentos para obtenção da inversa serão considerados a seguir.

#### 3.6.1 Transformada- $z$ inversa por Divisão Longa

Neste método a transformada- $z$  inversa é obtida pela expansão de  $X(z)$  em uma série de potência infinita em  $z^{-1}$ . Tal método é útil quando é difícil encontrar uma expressão fechada para a transformada inversa, ou quando se deseja obter apenas os primeiros termos de  $x[n]$ . O presente método se baseia no fato de que  $X(z)$  pode ser expandida como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \dots \quad (3.36)$$

No entanto, é relativamente difícil se obter uma expressão fechada para  $x[n]$  com tal método.

Exemplo 3.11: **Divisão Longa:** Encontre os cinco primeiros termos de  $x[n]$ , dado que

$$X(z) = \frac{10z + 5}{(z - 1)(z - 0,2)}.$$

Solução: Note que

$$X(z) = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}}.$$

Efetuando a divisão longa, obtém-se:

$$\begin{array}{r} 10z^{-1} + 5z^{-2} \\ \underline{10z^{-1} - 12z^{-2} + 2z^{-3}} \\ 17z^{-2} - 2z^{-3} \\ \hline 17z^{-2} - 20,4z^{-3} + 3,4z^{-4} \\ 18,4z^{-3} - 3,4z^{-4} \\ \hline 18,4z^{-3} - 22,08z^{-4} + 3,68z^{-5} \\ 18,68z^{-4} - 3,68z^{-5} \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} |1 - 1,2z^{-1} + 0,2z^{-2}| \\ 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18,4z^{-3} + \dots \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X(z) &= 0 + 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18,4z^{-3} + 18,68z^{-4} + \dots \\ \Rightarrow x[0] &= 0; \quad x[1] = 10; \quad x[2] = 17; \quad x[3] = 18,4; \quad x[4] = 18,68; \quad \dots \end{aligned}$$

### 3.6.2 Transformada- $z$ inversa por Expansão em Frações Parciais

Considere  $X(z)$  dada por

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad n \geq m$$

Para expandir  $X(z)$  em frações parciais, inicialmente o denominador precisa ser fatorado para encontrar os polos. Alguns casos particulares serão considerados a seguir:

**Expansão em Frac. Parciais para  $A(z)$  com raízes distintas:**

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} \quad (3.37)$$

Para expansão em frações parciais, é mais conveniente se expandir  $X(z)/z$  ao invés de  $X(z)$ , tal que,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \dots + \frac{a_n}{z - p_n} \quad (3.38)$$

onde  $a_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$ , é chamado de resíduo do polo em  $s = p_k$ . O valor de  $a_k$  pode ser obtido como:

$$a_k = \left[ (z - p_k) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_k} \quad (3.39)$$

A antitransformada- $z$  de  $X(z)$  é então dada por

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{a_1 z}{z - p_1} + \frac{a_2 z}{z - p_2} + \cdots + \frac{a_n z}{z - p_n} \right\} \quad (3.40)$$

**Exemplo 3.12: Antitransformada com polos distintos:** Obtenha a transformada- $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{z+1}{z^2 + 0,3z + 0,02}$$

Solução:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z^2 + 0,3z + 0,02)} = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z+0,1} + \frac{a_3}{z+0,2}$$

Os resíduos  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são dados por

$$a_1 = \left[ z \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0} = X(0) = \frac{1}{0,02} = 50$$

$$a_2 = \left[ (z+0,1) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=-0,1} = \frac{1-0,1}{(-0,1)(0,1)} = -90$$

$$a_3 = \left[ (z+0,2) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=-0,2} = \frac{1-0,2}{(-0,2)(-0,1)} = 40$$

Assim,

$$X(z) = 50 - \frac{90z}{z+0,1} + \frac{40z}{z+0,2}$$

Portanto,

$$x[n] = \begin{cases} 50\delta[n] - 90(-0,1)^n + 40(-0,2)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Como  $x[0] = 0$ , tem-se

$$x[n] = \begin{cases} -90(-0,1)^n + 40(-0,2)^n, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases}$$

**Expanão em Frac. Parciais para  $A(z)$  com raízes múltiplas:**

Caso  $X(z)/z$  tenha polos múltiplos, por exemplo, um polo duplo em  $z = p_1$  e um polo simples em  $z = p_2$ , a seguinte expansão pode ser feita

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_{11}}{(z - p_1)^2} + \frac{a_{12}}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} \quad (3.41)$$

Os coeficientes  $a_{11}$  e  $a_{12}$  são obtidos da seguinte forma

$$a_{11} = \left[ (z - p_1)^2 \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_1} \quad (3.42)$$

$$a_{12} = \left[ \frac{d}{dz} \left( (z - p_1)^2 \frac{X(z)}{z} \right) \right]_{z=p_1} \quad (3.43)$$

No caso mais geral, com  $k > 2$  polos múltiplos em  $z = p_1$ ,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_{11}}{(z - p_1)^k} + \frac{a_{12}}{(z - p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{1i}}{(z - p_1)^{k-i+1}} + \cdots + \frac{a_{1k}}{(z - p_1)} \quad (3.44)$$

O coeficiente  $a_{1i}$  é dado por

$$a_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \left[ \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} \left( (z - p_1)^k \frac{X(z)}{z} \right) \right]_{z=p_1} \quad (3.45)$$

Exemplo 3.13: Antitransformada com polos múltiplos: Obtenha a transformada- $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{1}{z^2(z - 0,5)}$$

Solução:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z^3(z - 0,5)} = \frac{a_{11}}{z^3} + \frac{a_{12}}{z^2} + \frac{a_{13}}{z} + \frac{a_2}{(z - 0,5)}$$

Os coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$  e  $a_2$  são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left[ z^3 \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0} = \frac{1}{z - 0,5} = -2 \\ a_{12} &= \left[ \frac{d}{dz} z^3 \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0} = \left[ \frac{d}{dz} \frac{1}{z - 0,5} \right]_{z=0} = \left[ \frac{-1}{(z - 0,5)^2} \right]_{z=0} = -4 \\ a_{13} &= \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{dz^2} \left( z^3 \frac{X(z)}{z} \right) \right]_{z=0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dz} \frac{-1}{(z - 0,5)^2} \right]_{z=0} = -8 \\ a_2 &= \left[ (z - 0,5) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0,5} = \left[ \frac{1}{z^3} \right]_{z=0,5} = 8 \end{aligned}$$

Portanto,

$$X(z) = -2z^{-2} - 4z^{-1} - 8 + \frac{8z}{z - 0,5}$$

Consequentemente,

$$x[n] = \begin{cases} -2\delta[n-2] - 4\delta[n-1] - 8\delta[n] + 8(0,5)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Note que

$$x[0] = -8 + 8 = 0; \quad x[1] = -4 + 8(0,5) = 0; \quad x[2] = -2 + 8(0,5)^2 = 0.$$

Com isso, a transformada inversa pode ser reescrita como

$$x[n] = \begin{cases} 8(0,5)^{n-3}, & n \geq 3 \\ 0, & n < 3 \end{cases}$$

**Expanão em Frac. Parciais para  $A(z)$  com raízes complexas conjugadas:**

O Exemplo 3.14 ilustra um desses casos.

**Exemplo 3.14: Antitransformada com polos complexos conjugados:** Obtenha a transformada- $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{2z(3z + 17)}{(z - 1)(z^2 - 6z + 25)}$$

Solução:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2(3z + 17)}{(z - 1)(z - 3 - j4)(z - 3 + j4)}$$

Pode-se efetuar a seguinte expansão:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{(z - 1)} + \frac{a_2}{(z - 3 - j4)} + \frac{a_2^*}{(z - 3 + j4)},$$

com,

$$a_1 = \left[ (z - 1) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=1} = \left[ \frac{2(3z + 17)}{(z^2 - 6z + 25)} \right]_{z=1} = \frac{40}{20} = 2,$$

$$a_2 = \left[ (z - 3 - j4) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=3+j4} = \left[ \frac{52 + j24}{-32 + j16} \right] = -1 - j1,25 = 1,6e^{-j2,24}$$

Portanto,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z - 1)} + \frac{1,6e^{-j2,24}}{(z - 3 - j4)} + \frac{1,6e^{j2,24}}{(z - 3 + j4)}$$

$$X(z) = \frac{2z}{(z - 1)} + \frac{1,6e^{-j2,24}z}{(z - 3 - j4)} + \frac{1,6e^{j2,24}z}{(z - 3 + j4)}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} x[n] &= 2 + 1,6e^{-j2,24}(3 + j4)^n + 1,6e^{j2,24}(3 - j4)^n \\ &= 2 + 1,6e^{-j2,24}(5e^{j0,93})^n + 1,6e^{j2,24}(5e^{-j0,93})^n \\ &= 2 + 3,2(5)^n \cos(0,93n - 2,24), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

O comando `iztransf()` do *Toolbox* de Matemática Simbólica pode ser utilizado para diretamente encontrar a antitransformada- $z$ . O Exemplo 311 pode ser diretamente resolvido da seguinte forma.

```
clear all; clc;
syms n z; % Define n e z como vars. simbólicas
X = (z+1)/(z^2+0.3*z+0.02); % Define X(z)
disp('X(z) = ');
pretty(X); % Forma "bonita" de X(z)
x=iztrans(X); % Obtém a transformada z inversa.
disp('x[n] = ');
pretty(x); % Forma "bonita" de x[n].
```

OBS: o termo `kroneckerDelta(n, k)` corresponde a  $\delta[n - k]$ .

### 3.7 Relação Entre o Plano- $s$ e o Plano- $z$

Já foi visto neste capítulo como um ponto no plano- $s$  é mapeado no plano- $z$ . Se considerarmos apenas a faixa principal da Figura 3.3 indo de  $-j\omega_s/2$  a  $j\omega_s/2$  o caminho descrito pelos pontos (1)-(2)-(3)-(4)-(5) no semiplano esquerdo do plano- $s$  é mapeado dentro do círculo unitário como ilustrado na Figura 3.6.

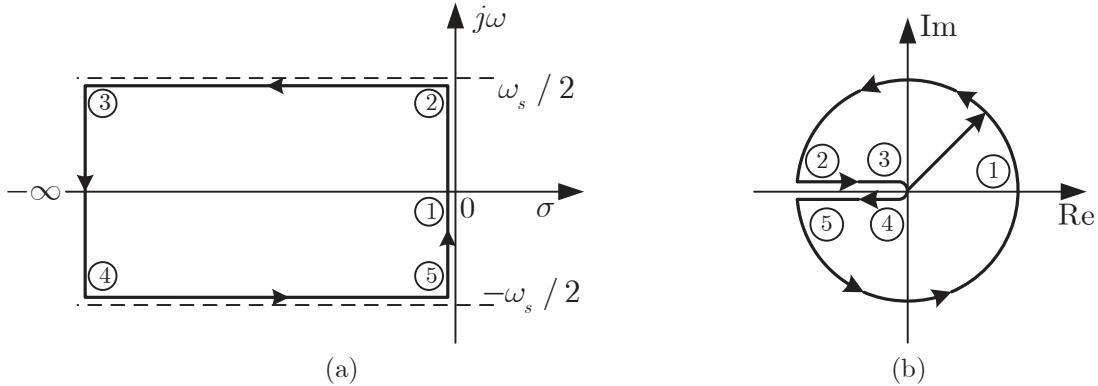


Figura 3.6: Mapeamento da faixa principal do plano- $s$  (a) no plano- $z$ (b) [Ogata 1995].

É sabido que os polos sobre uma linha contínua vertical no semiplano esquerdo plano- $s$  representam uma mesma taxa de decaimento (envoltória) na resposta ao degrau. O fator de decaimento,  $\sigma_k$ , é dado pela parte real de  $k$ -ésimo polo de uma dada função de transferência. Linhas verticais no plano- $s$ , dadas por  $s = \sigma_k$ , são mapeadas em círculos concêntricos à origem no plano- $z$ . A linha sobre o eixo  $j\omega$  no plano- $s$  é mapeada sobre o círculo unitário em  $z$ , como visto na Figura 3.7.

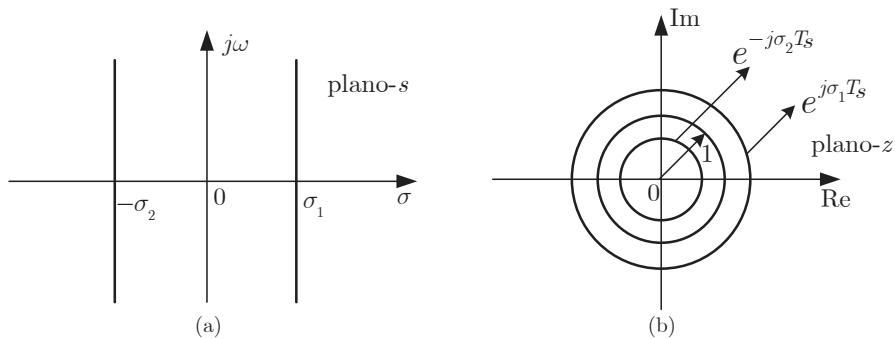
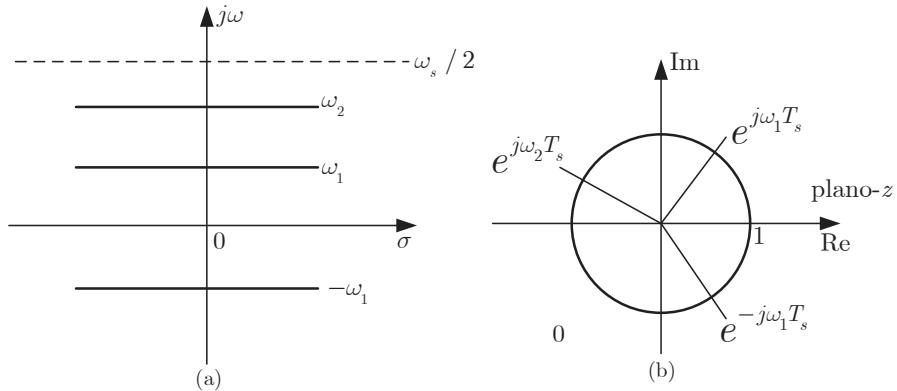


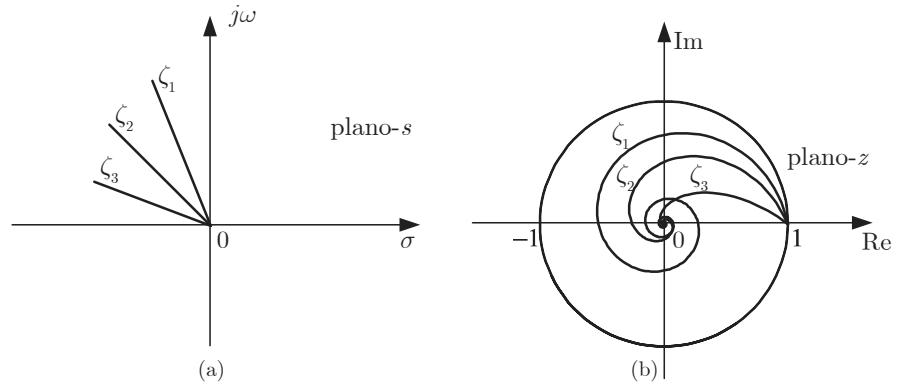
Figura 3.7: Linhas verticais no plano- $s$  e a representação no plano- $z$ .

Polos sobre uma linha horizontal no plano- $s$  possuem a mesma frequência natural amortecida  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , onde  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\zeta$  o coeficiente de amortecimento. Em termos da resposta ao degrau subamortecida para um sistema de segunda ordem, isso significa o mesmo tempo de pico para dois sistemas com polos complexos conjugados sobre linhas horizontais  $s = \pm j\omega_{d,k}$ . Linhas horizontais no plano- $s$  representam linhas radiais no plano- $z$  saindo da origem, como ilustrado na Figura 3.8.

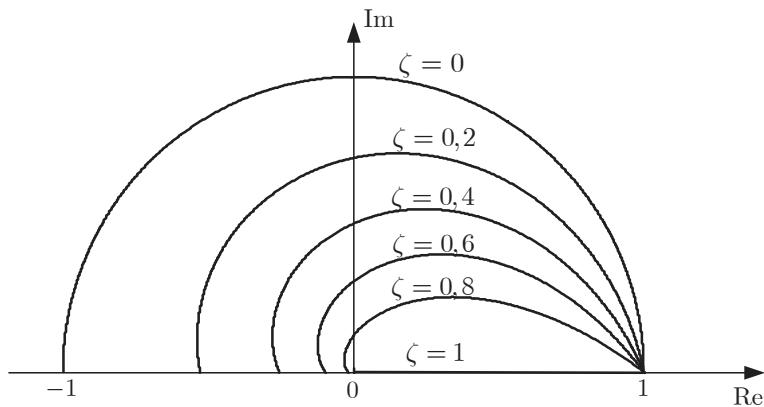
Linhas no plano- $s$  com coeficientes de amortecimento constantes formam linhas radiais no plano- $z$

Figura 3.8: Linhas horizontais no plano- $s$  e a representação no plano- $z$ .

saindo da origem, como ilustrado na Figura 3.9.

Figura 3.9: Linhas radiais no plano- $s$  e a representação no plano- $z$ .

A Figura 3.10 mostra algumas curvas com  $\zeta$  constante no plano- $z$  para  $0 < \omega_d < 0,5\omega_s$ , o que corresponde às curvas localizadas na metade superior do plano- $z$ .

Figura 3.10: Exemplos de curvas com  $\zeta$  constante no plano- $z$  para  $0 < \omega_d < 0,5\omega_s$ .

No plano- $s$ , linhas com  $\zeta$  constantes são normais a linhas com  $\omega_n$  constantes. No plano- $z$ , tal propriedade se mantém, ou seja, o mapeamento do plano- $s$  para o plano- $z$  (e vice-versa) é um mapeamento conformal. A Figura 3.11 ilustra linhas com  $\zeta$  constante e  $\omega_n$  constante no plano- $z$ . O comando `zgrid`

do MATLAB pode ser utilizado para isto.

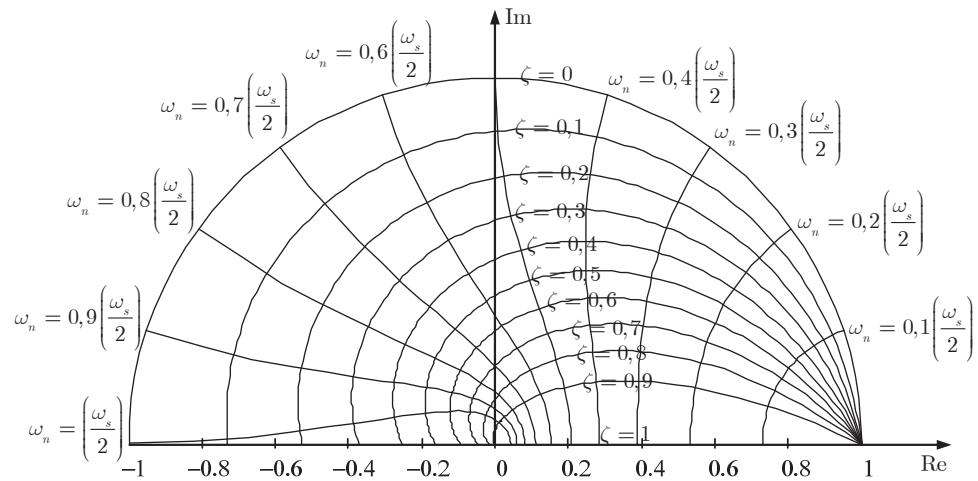


Figura 3.11: Linhas no plano- $z$  com com  $\zeta$  constante e  $\omega_n$  constante.

## Revisão de Sistemas de Controle Contínuos

A engenharia de controle baseia-se no princípio da realimentação (retroação) e objetiva o controle de determinadas variáveis de um sistema. Sistemas de controle possuem uma vasta aplicação em diversos ramos da Engenharia.

Algumas definições utilizadas em sistema de controle são listadas a seguir:

- **Sistema:** conjunto de componentes conectados de forma ordenada para agir como uma unidade.
- **Controle:** regulação, direcionamento ou comando.
- **Sistema de Controle:** interconexão de subsistemas e processos (ou plantas) com o propósito de controlar as saídas do processo.
- **Planta** (processo ou sistema controlado): sistema que é o objeto da ação do sistema de controle. A planta é representada como um bloco relacionando uma variável de entrada a uma variável de saída.
- **Variável de referência** (ou comandada ou *set-point*): é a referência, valor desejado da variável a ser controlada.
- **Variável controlada** (ou regulada): é qualquer variável que se deseja controlar. Em geral, é a saída do sistema de controle.
- **Variável de controle** (ou manipulada): é determinada pela ação do controlador. Em geral, é a variável de entrada da planta.
- **Comparador:** Dispositivo que gera o sinal de erro entre o valor desejado e o obtido.
- **Controlador:** Dispositivo que manipula o sinal de erro, gerando um sinal de controle que será aplicado no sistema, afim de corrigir a variável a ser controlada.
- **Atuador:** Dispositivo que recebe o sinal de controle e gera um sinal com potência suficiente para atuar sobre o processo.

- **Medidor:** (transdutor) Dispositivo responsável pela medição e conversão da variável a ser controlada.

**Sistemas de Controle em Malha Aberta** utilizam um controlador em série com a planta a ser controlada e controlam diretamente o processo sem utilizar retroação. A variável de controle não depende da variável de saída (variável controlada).

- Desvantagens: sensível a distúrbios e variações do processo; impossibilidade de autoregulação.
- Vantagens: baixo custo e complexidade reduzida.

**Sistemas de Controle em Malha Fechada** usam uma medida de saída e a retroação desse sinal para compará-lo com o valor desejado (*set-point*).

- Vantagens: Robustez; autoregulação.
- Desvantagens: maior custo e maior complexidade.

## 4.1 Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)

Um sistema é linear se satisfizer a propriedade da superposição (homogeneidade e aditividade), conforme ilustrado na Figura 4.1.

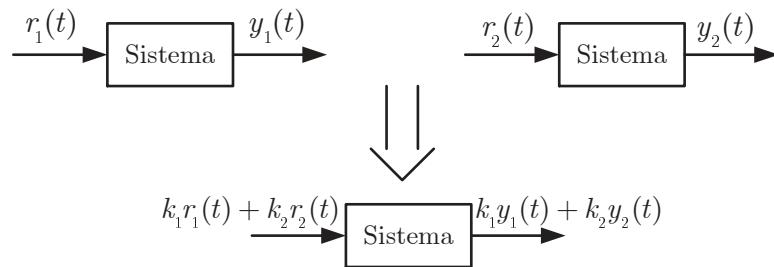


Figura 4.1: Propriedade da superposição.

Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento no sinal de entrada resulta em um mesmo deslocamento na saída, conforme ilustrado na Figura 4.1.

Um sistema é LIT se satisfazer as condições de linearidade em invariância no tempo. Uma sistema cuja dinâmica é regida por uma equação diferencial a coeficientes constantes é linear e invariante no tempo.

Dado um sistema LIT com resposta impulsiva  $g(t)$  (resposta ao impulso unitário), a saída  $y(t)$  deste sistema devido a uma entrada  $r(t)$  é dada pela integral de convolução

$$y(t) = \int_0^t r(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)r(t - \tau)d\tau, \quad (4.1)$$

onde  $g(t)$  e  $r(t)$  são ambos iguais a zero para  $t < 0$  (causalidade).

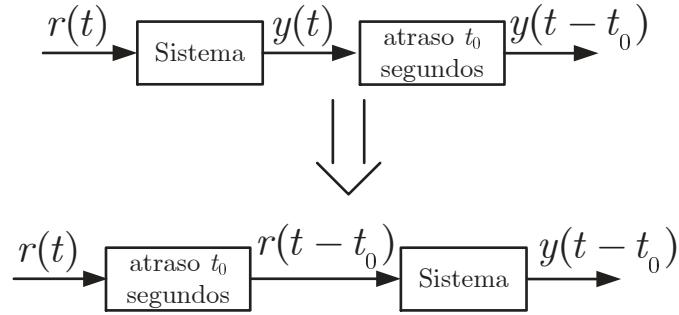


Figura 4.2: Propriedade da invariação temporal.

## 4.2 Função de Transferência

Funções de transferência são comumente utilizadas para caracterizar a relação entre a entrada e a saída de um dado LIT com entrada simples e saída simples (SISO).

A função de transferência de um sistema é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, admitindo-se todas as condições iniciais nulas. Considere o sistema LIT definido pela seguinte equação:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{r} + b_1 \overset{(m-1)}{r} + \cdots + b_{m-1} \dot{r} + b_m r, \quad (n \geq m), \quad (4.2)$$

onde  $y$  é a saída do sistema e  $r$  a entrada. A função de transferência deste sistema é dada por:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Big|_{\text{condições iniciais nulas}} \\ &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aplicando o teorema da convolução na Equação (4.1), pode-se verificar que:

$$Y(s) = G(s)X(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad (4.4)$$

ou seja, a função de transferência de um sistema LIT é dada pela transformada de Laplace da resposta impulsiva desse sistema.

A resposta impulsiva  $g(t)$  ou, alternativamente, a função de transferência  $G(s)$  de um sistema LIT caracterizam completamente o sistema. Conhecendo-se  $g(t)$  ou  $G(s)$  de um sistema LIT, pode-se obter a resposta do sistema para qualquer entrada  $x(t)$ .

Considere o esquema da Figura 4.3.

A relação entre o sinal de realimentação  $B(s)$  e o sinal de erro atuante  $E(s)$  é chamada de função de transferência de malha aberta, ou seja,

$$\text{Função de transf. de malha aberta} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad (4.5)$$

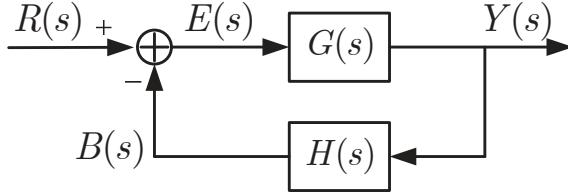


Figura 4.3: Função de transferência em malha fechada.

A relação entre o sinal de saída  $Y(s)$  e o sinal de erro atuante é chamada de função de transferência do ramo direto,

$$\text{Função de transf. do ramo direto} = \frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) \quad (4.6)$$

A expressão que relaciona a saída  $Y(s)$  e a entrada  $R(s)$  é obtida como:

$$Y(s) = G(s)E(s) \quad (4.7)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - Y(s)H(s) \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.7), tem-se:

$$Y(s) = G(s)[R(s) - Y(s)H(s)] \Rightarrow Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s). \quad (4.9)$$

Portanto,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad (4.10)$$

é conhecida como função de transferência de malha fechada.

### 4.3 Análise Transitória e de Regime Estacionário

Muitos dos critérios de projeto possuem como base a resposta do sistema a uma dada entrada teste, como as apresentadas na Figura 4.4.

A resposta temporal de um sistema é constituída de duas partes: resposta transitória, que vai do estado inicial ao estado final, e resposta estacionária, que representa o comportamento da saída do sistema à medida em que  $t \rightarrow \infty$ .

#### Sistema de Primeira Ordem

Modelos de primeira ordem são utilizados para descrever um grande número de processos simples, tais como a velocidade de uma massa, a temperatura de um líquido em um tanque, o nível de um tanque, a tensão num circuito RC série, entre outros. Sistemas de primeira ordem assumem a seguinte forma padrão:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}, \quad (4.11)$$

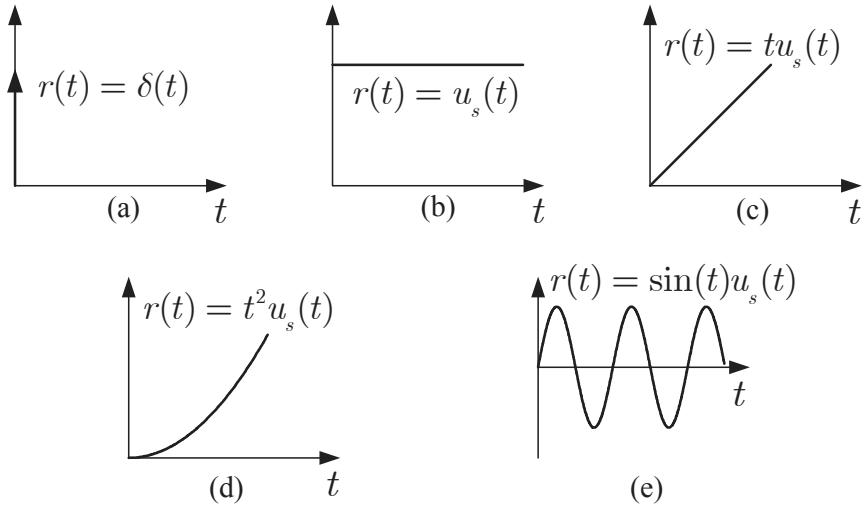


Figura 4.4: Sinais típicos de teste: (a) impulso, (b) degrau, (c) rampa, (d) parábola, (e) senoide.

onde  $k$  é o ganho e  $\tau$  a constante de tempo do sistema. A Figura 4.5 apresenta o diagrama de blocos de um sistema de primeira ordem padrão.

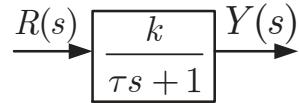


Figura 4.5: Diagrama de blocos de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem padrão.

A resposta ao degrau unitário é dada por

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{k}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k/\tau}{s(s + 1/\tau)} \\ &= \frac{k}{s} - \frac{k}{s + (1/\tau)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

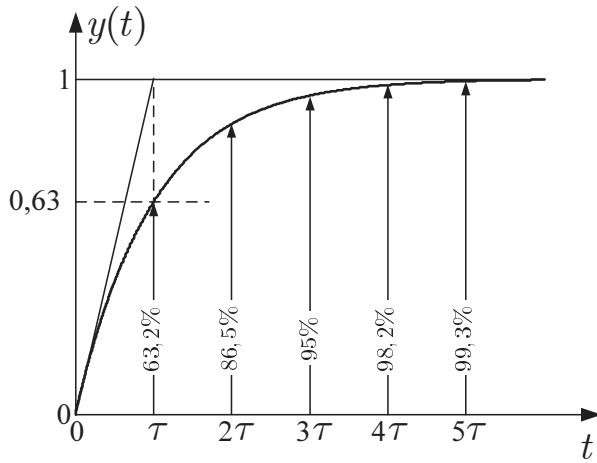
$$y(t) = k - ke^{-t/\tau}, \quad t \geq 0 \quad (4.13)$$

A Figura 4.6 apresenta a resposta ao degrau do sistema de primeira ordem, para  $k = 1$ . Note que  $y(0) = 0$  e que  $y(\infty) = k$ . Para  $k = 1$ ,  $y(\tau) = 0,632$ , ou seja,  $y(t)$  em  $t = \tau$  alcança 63,2% de sua variação total. Quanto menor a constante de tempo  $\tau$ , mais rápido o sistema responde.

Para  $t = 2\tau, 3\tau, 4\tau$ , e  $5\tau$  a resposta alcança 86,5%, 95%, 98,2% e 99,3%, respectivamente, da resposta final. Assim, para  $t \geq 4\tau$ , a resposta se mantém a 2% do valor final. Na prática é razoável considerar que para  $t > 4\tau$  o sistema já esteja em regime estacionário.

## Sistema de Segunda Ordem

Modelos de segunda ordem são também representativos de um grande número de processos de interesse, como a posição de uma massa num sistema massa-mola- atrito, o deslocamento angular do eixo de

Figura 4.6: Resposta ao degrau unitário para  $k = 1$ .

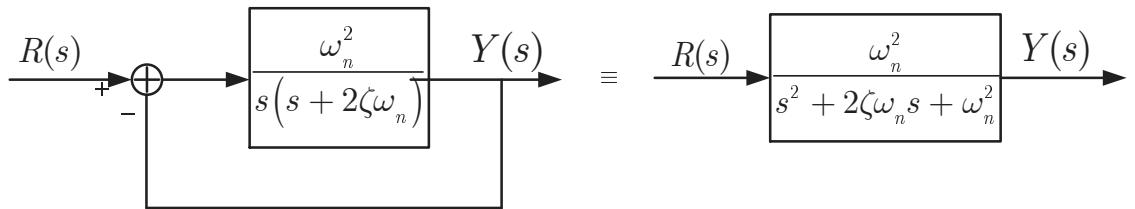
um motor DC (modelo simplificado) ou a carga no capacitor de um circuito RLC série. A forma padrão de um sistema de segunda ordem é dada por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2}, \quad (4.14)$$

onde:

- $\omega_n$ : frequência natural não amortecida;
- $\zeta$ : coeficiente de amortecimento;
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ : frequência natural amortecida do sistema.

A Figura 4.7 ilustra o diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem na forma padrão.

Figura 4.7: Sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão.

A equação característica é dada por  $s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0$ . O comportamento dinâmico do sistema de 2<sup>a</sup> ordem pode ser descrito através dos parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

- **Sistema subamortecido** ( $0 < \zeta < 1$ ): Os polos de malha fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano-s. Nesse caso, as raízes da equação característica são

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d, \quad (4.15)$$

ou seja,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}. \quad (4.16)$$

Pode-se mostrar que a resposta ao degrau é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$ . O termo  $\zeta\omega_n = \alpha$  controla o amortecimento do sistema e é chamada de coeficiente de atenuação.

Observe que a frequência de oscilação transitória é a frequência natural amortecida do sistema,  $\omega_d$ , que varia de acordo com  $\zeta$ .

- **Sistema não amortecido ( $\zeta = 0$ )**: Se  $\zeta = 0$ , pode-se verificar que

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t), \quad t \geq 0, \quad (4.18)$$

ou seja, a resposta oscila na frequência natural sem amortecimento. Nesse caso, os polos estão sobre o eixo imaginário.

- **Sistema criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ )**: Os polos de malha fechada são reais e iguais, situados em  $-\omega_n$ . Nesse caso,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)(s + \omega_n)} \quad (4.19)$$

A resposta ao degrau unitário é dada por

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t \geq 0 \quad (4.20)$$

- **Sistema superamortecido ( $\zeta > 1$ )**: Os polos de malha fechada são reais e desiguais. Nesse caso,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad (4.21)$$

Para entrada degrau unitário, tem-se a seguinte resposta:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad t > 0 \quad (4.22)$$

onde  $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$  e  $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ . Se  $|s_2| \ll |s_1|$ , então  $e^{-s_1 t}$  decai muito mais rápido do que  $e^{-s_2 t}$  e, portanto, pode ser desprezado. A resposta obtida é tipicamente a de um sistema de primeira ordem.

A Figura 4.8 ilustra algumas curvas da resposta ao degrau unitário de sistemas de segunda ordem na forma padrão para diferentes valores de  $\zeta$ .

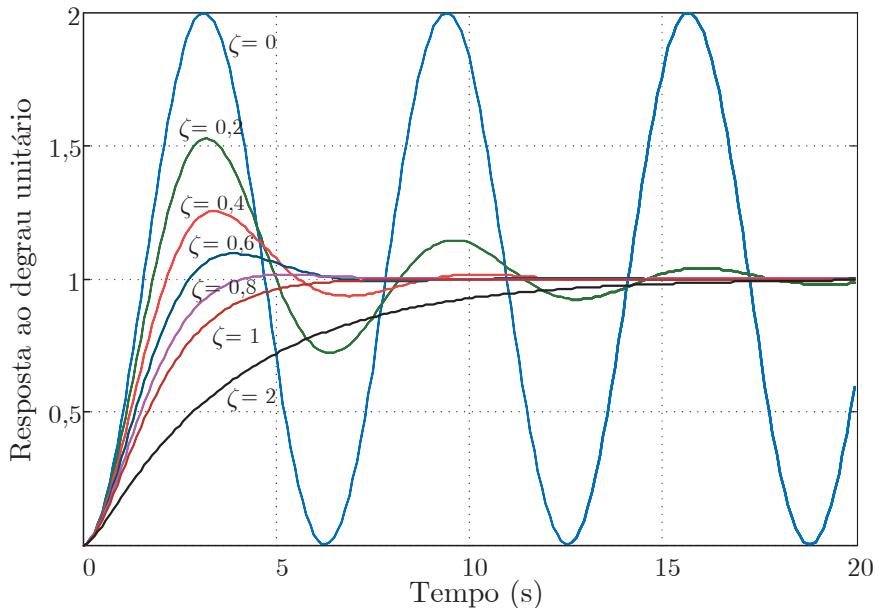


Figura 4.8: Resposta ao degrau para o sistema de 2<sup>a</sup> ordem padrão.

### 4.3.1 Especificações da Resposta Transitória

As características de um sistema de controle são em vários casos especificadas em termos da resposta transitória a uma entrada degrau. A entrada degrau se trata de um sinal com variação brusca e pode ser gerada facilmente. Para sistemas LIT, quando a resposta a uma entrada degrau é conhecida, é possível calcular matematicamente a resposta a qualquer tipo de sinal de entrada.

As seguintes especificações são comuns [Ogata 2003]:

- **Tempo de atraso,  $t_d$ :** tempo necessário para que a resposta alcance pela primeira vez a metade do seu valor final.
- **Tempo de subida,  $t_r$ :** para sistemas subamortecidos corresponde ao tempo necessário para a resposta ir de 0% a 100% do valor em regime estacionário. Para sistemas superamortecidos, geralmente considera-se o tempo necessário para ir de 10% a 90% do valor em regime estacionário.
- **Tempo de pico,  $t_p$ :** tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobresinal.

- **Máximo sobresinal** (ou apenas **sobresinal**),  $M_p$ : valor máximo de pico da curva de resposta menos o seu final, medido em porcentagem do valor final, ou seja,

$$M_p(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \quad (4.23)$$

- **Tempo de acomodação** (ou **tempo de assentamento**),  $t_s$ : tempo necessário para que a resposta permaneça com valores no interior de uma certa faixa  $\pm\Delta$  (usualmente  $\pm 2\%$  ou  $\pm 5\%$ ) em torno do valor final. Está relacionado à maior constante de tempo do sistema. Pode-se determinar que a porcentagem desejada seja critério de projeto.

A Figura 4.9 mostra graficamente tais especificações.

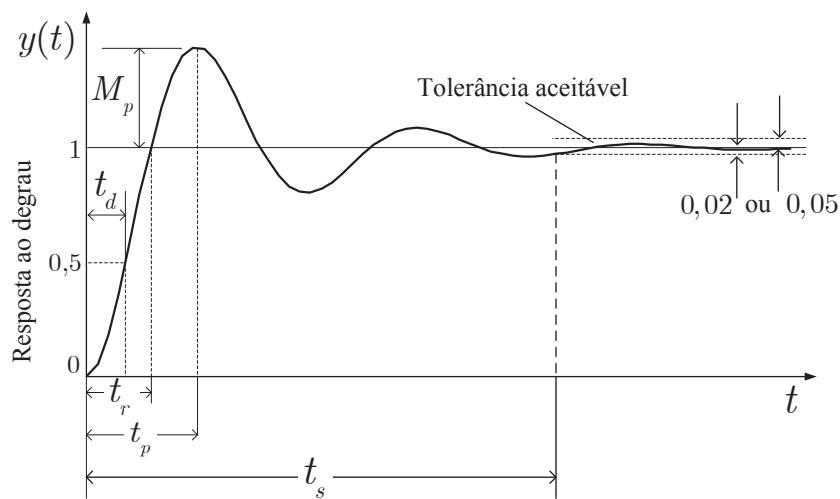


Figura 4.9: Resposta ao degrau com especificações da resposta transitória.

As especificações tempo de subida, tempo de pico, máximo sobresinal e tempo de acomodação do sistema de segunda ordem podem ser obtidas analiticamente em função dos parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

- Tempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}. \quad (4.24)$$

- Tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}. \quad (4.25)$$

- Máximo sobresinal:

$$\begin{aligned} M_p &= y(t_p) - 1 = -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} \left[ \cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi) \right] \\ &= e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \end{aligned} \quad (4.26)$$

ou,

$$M_p(\%) = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \times 100\% \quad (4.27)$$

- Tempo de acomodação  $t_s$ : Para  $0 < \zeta < 0,9$ , as seguintes aproximações podem ser consideradas:

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}; \quad t_s(5\%) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}. \quad (4.28)$$

A Figura 4.10 associa possíveis movimentos dos polos do sistema de segunda ordem com a resposta ao degrau resultante.

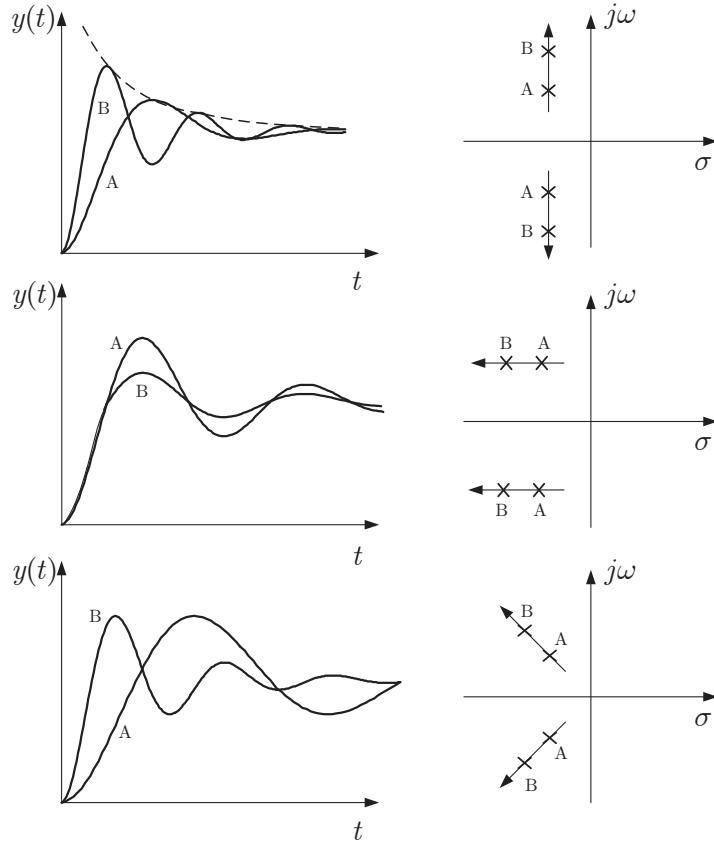


Figura 4.10: Resposta ao degrau de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem à medida em que os polos se movem (Adaptado de [Nise 2012]).

### 4.3.2 Sistemas de Ordem Superior

Esta análise está baseada em [Ogata 2003]. Considere um sistema de controle com função de transferência de malha fechada dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m \leq n). \quad (4.29)$$

A equação acima pode ser fatorada como

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}. \quad (4.30)$$

Considere a resposta do sistema a uma entrada degrau e, inicialmente, que todos os polos sejam reais e distintos. Efetuando expansão em frações parciais, tem-se:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}, \quad (4.31)$$

onde  $a_i$  é o resíduo do polo em  $s = -p_i$ . Se o sistema possuir polos múltiplos, então  $Y(s)$  terá termos multipolares.

Com todos os polos situados no semiplano esquerdo do plano- $s$ , os valores dos resíduos determinarão a importância relativa dos componentes na forma expandida de  $Y(s)$ . Se há um zero próximo a um polo, o resíduo nesse polo é pequeno. Além disso, os transitórios de polos longe da origem são de curta duração. Com isso, um sistema de ordem superior pode ser aproximado para um sistema de menor ordem.

Considere agora que o sistema possua polos reais e distintos e pares de polos conjugados. Um par de polos complexos conjugados resulta em um termo de segunda ordem. A resposta pode ser escrita como a soma de termos fatorados de primeira e segunda ordem, tal que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k (s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \\ &\quad (q + 2r = n). \end{aligned} \quad (4.32)$$

A de Laplace transformada inversa de  $Y(s)$  é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \left( \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \left( \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \right), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

A curva de um sistema de ordem superior estável é a soma de curvas exponenciais (primeira ordem) e senoidais amortecidas (segunda ordem). O sistema também pode ser aproximado por um sistema de menor ordem. Note ainda que se o sistema for estável, então  $y(\infty) = a$ .

### 4.3.3 Efeito de Polo Adicional

Considere um sistema de segunda ordem com três polos,  $-\zeta \omega_n \pm \sqrt{1 - \zeta^2}$  e  $-p_1$ . A transformada da saída do sistema devida a um degrau de entrada é dada por

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{b(s + \zeta \omega_n) + c \omega_d}{(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2}. \quad (4.34)$$

No domínio do tempo, tem-se

$$y(t) = a + a_1 e^{-p_1 t} + e^{-\zeta \omega_n t} [b \cos(\omega_d t) + c \sin(\omega_d t)]. \quad (4.35)$$

Se  $p_1 >> \zeta\omega_n$  a exponencial pura desaparecerá muito mais rapidamente do que o termo de segunda ordem. Se o polo real estiver à esquerda dos polos dominantes cinco vezes mais distante, admite-se que o sistema seja representado por seu par de polos dominantes.

Se o polo real estiver próximo ao par de polos dominantes, então ele não poderá ser desprezado e a resposta do sistema será modificada.

#### 4.3.4 Efeito de Zero Adicional

Seja  $Y(s)$  a transformada da resposta de um sistema com função de transferência  $T(s)$  sem zeros finitos. Se um zero for adicionado à função de transferência, gerando  $(s + a)T(s)$ , tem-se a seguinte resposta no domínio  $s$ :

$$(s + a)Y(s) = sY(s) + aY(s). \quad (4.36)$$

Logo, verifica-se que a resposta divide-se em duas partes: a derivada da resposta original e uma versão ponderada por  $a$  da resposta original.

Se  $a$  for muito grande, tem-se praticamente a resposta original ponderada por  $a$ .

À medida que  $a$  se torna menor (zero mais próximo da origem), o termo que corresponde à derivada tem um efeito maior.

Se  $a$  for negativo (sistema de fase não-mínima), o termo da resposta em escala terá sinal oposto ao termo da derivada. A resposta pode começar a se orientar em direção negativa, embora o valor final seja positivo.

#### 4.3.5 Erros Estacionários em Sistemas com Realimentação Unitária

Alterações na entrada de referência causarão erros inevitáveis em regime transitório e, possivelmente, erros estacionários. Um sistema pode não apresentar erro estacionário a uma determinada entrada, mas apresentar um erro diferente de zero a uma outra entrada. O erro estacionário que o sistema apresenta quando excitado por um sinal específico depende do tipo da função de transferência de malha aberta desse sistema.

O erro estacionário para entrada degrau é denominado erro estático de posição; para entrada rampa unitária é denominado erro estático de velocidade; para entrada parábola unitária é denominado erro estático de aceleração.

Considere um sistema de controle com realimentação unitária, tal como ilustrado na Figura 4.11, com a seguinte função de transferência de malha aberta;

$$G(s) = \frac{K(T_as + 1)(T_bs + 1) \cdots (T_ms + 1)}{s^N(T_1s + 1)(T_2s + 1) \cdots (T_ps + 1)} \quad (4.37)$$

Note que, no caso geral, há um polo com multiplicidade  $N$  na origem. O sistema é chamado tipo 0, 1, 2, ..., se  $N = 0, N = 1, N = 2, \dots$ , respectivamente.

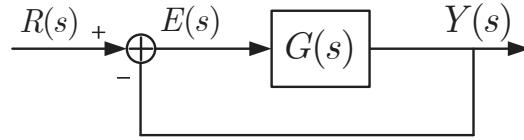


Figura 4.11: Sistema de controle com realimentação unitária.

Para o sistema da Figura 4.11, tem-se

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \quad (4.38)$$

Aplicando o teorema do valor final, o erro estacionário será:

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (4.39)$$

Para entrada degrau unitário,

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{1 + K_p}, \quad (4.40)$$

onde  $K_p = G(0)$  é denominada **constante de erro estático de posição**.

Para entrada rampa unitária,

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{K_v}, \quad (4.41)$$

onde  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$  é denominada **constante de erro estático de velocidade**.

Para entrada parábola unitária definida como:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0 \\ &= 0, \quad t < 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

o erro estático é dado por,

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a}, \quad (4.43)$$

onde  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$  é denominada **constante de erro estático de aceleração**.

A relação entre o tipo de sistema e o erro estático associado está resumida na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Sistema de controle com realimentação unitária.

	$e_{ss}$	Posição	$e_{ss}$	Velocidade	$e_{ss}$	Aceleração
Tipo 0	$\frac{1}{1+K_p}$			$\infty$		$\infty$
Tipo 1	0			$\frac{1}{K_v}$		$\infty$
Tipo 2	0			0		$\frac{1}{K_a}$

## 4.4 Lugar das Raízes (*Root locus*)

O comportamento dinâmico de um sistema em malha fechado é determinado pela função de transferência de malha fechada. Considere o sistema de controle da Figura 4.12.

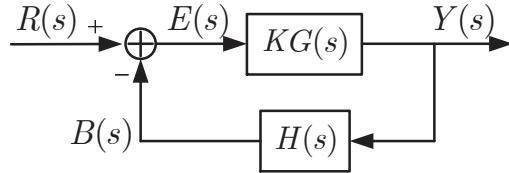


Figura 4.12: Sistema em malha fechada para análise do lugar das raízes.

A função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (4.44)$$

A equação característica desse sistema é dada por

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \Rightarrow KG(s)H(s) = -1 \quad (4.45)$$

Como  $G(s)H(s)$  é uma grandeza complexa, tem-se que

$$\text{Condição de módulo: } |KG(s)H(s)| = 1 \quad (4.46)$$

$$\text{Condição angular: } \angle KG(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

Os valores de  $s$  que satisfazem tanto a condição de módulo quanto a condição angular são as raízes da equação característica (polos de malha fechada). O local da raízes é o caminho das raízes da equação característica no plano  $s$  traçado quando um parâmetro do sistema, geralmente o ganho de malha aberta, é variado.

Um ponto no plano- $s$  está sobre o LR para um valor particular de  $K$ , se a soma dos ângulos dos zeros menos os ângulos dos polos de  $G(s)H(s)$ , todos em relação ao ponto  $s$ , resultam em um valor múltiplo ímpar de  $180^\circ$ .

Toda função de  $s$  tem um número igual de polos e zeros se os polos e zeros no infinito forem incluídos. Se a função tender ao infinito quando  $s \rightarrow \infty$ , então a função terá polo no infinito. Se a função tender a zero quando  $s \rightarrow \infty$ , então a função terá zero no infinito.

A seguinte análise foi extraída de [Nise 2012]. Considere o sistema de controle da Figura 4.13. A função de transferência de malha fechada é dada por,

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}, \quad (4.48)$$

A Tabela 4.2 apresenta os valores dos polos de malha fechada com a variação do ganho  $K$ .

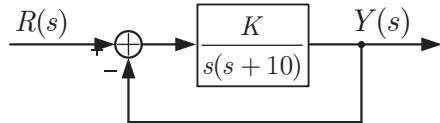


Figura 4.13: Sistema de controle do exemplo.

Tabela 4.2: Valores dos polos de malha fechada do sistema da Figura 4.12.

$K$	Polo 1	Polo 2
0	-10	0
5	-9,47	-0,53
10	-8,87	-1,13
15	-8,16	-1,84
20	-7,24	-2,76
25	-5	-5
30	$-5 + j2,34$	$-5 - j2,34$
35	$-5 + j3,16$	$-5 - j3,16$
40	$-5 + j3,87$	$-5 - j3,87$
45	$-5 + j4,47$	$-5 - j4,47$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$

Observe que, para  $K = 0$ , há um polo em  $-10$  e outro em  $0$ . À medida em que  $K$  aumenta, o polo mais a esquerda se move para direita sobre o eixo real e o polo mais a direita se move para esquerda sobre o eixo real.

Os polos se encontram sobre o eixo real no ponto  $-5$ . A partir daí um polo se move verticalmente para cima, enquanto o outro se move verticalmente para baixo.

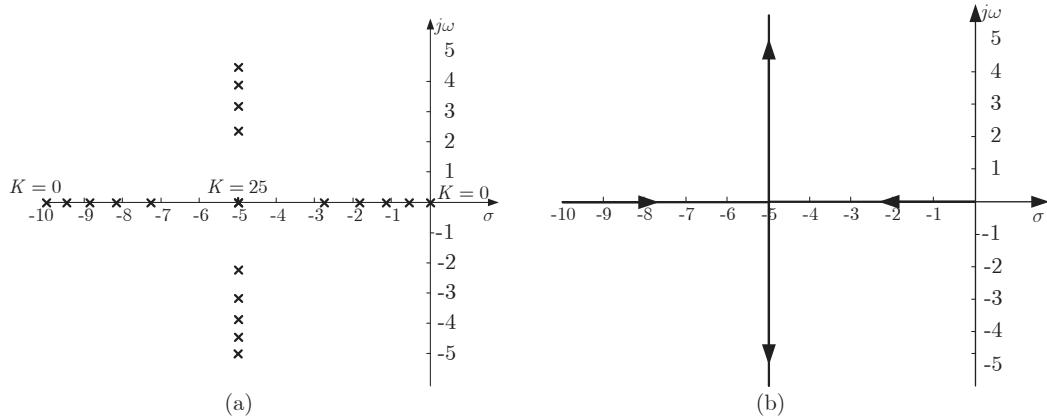
Para  $K < 25$ , os polos são reais e distintos, ou seja, o sistema é superamortecido. Para  $K = 25$ , os polos são reais e idênticos, e o sistema é criticamente amortecido. Para  $K > 25$ , o sistema é subamortecido.

Note que, para  $K > 25$ , o aumento do ganho  $K$  faz com que o coeficiente de amortecimento diminua e o sobresinal aumente. A frequência de oscilação amortecida também aumenta. No entanto, o tempo de assentamento permanece sem alterações. Observe ainda que, para  $K > 0$ , o sistema é sempre estável.

A Figura 4.14 apresenta o diagrama de polos e o lugar das raízes do sistema considerado.

A seguir serão listadas algumas das propriedades do lugar das raízes, considerando realimentação negativa:

- **Número de ramos:** o número de ramos do LR é igual ao número de polos de malha fechada.
- **Simetria:** o LR é simétrico em relação ao eixo real negativo.

Figura 4.14: (a) Diagrama de polos; (b) *root locus*.

- **Segmentos sobre o eixo real:** um trecho do eixo real está sobre o LR se o número total de polos e zeros à direita desse ponto for um número ímpar.
- **Pontos de entrada e de saída:** o LR se inicia nos polos finitos e infinitos da função de transferência de malha aberta,  $KG(s)H(s)$  (ou  $G(s)H(s)$ ), e termina nos zeros finitos e infinitos de  $G(s)H(s)$ .
- **Comportamento no infinito:** O LR tende a retas assíntotas quando o mesmo tende ao infinito.
- **Ponto de saída e de chegada sobre o eixo real:** em vários casos, o LR sai do eixo real quando os polos se tornam complexos. Em outros caso, o LR retorna ao eixo real quando os polos se tornam reais. Nesses pontos, um par de ramos do LR se funde no eixo real quando  $K$  aumenta.

Na construção do gráfico do lugar das raízes com o MATLAB, a equação característica  $1+KG(s)H(s) = 0$  é apresentada na forma

$$1 + K \frac{\text{num}}{\text{den}} = 0, \quad (4.49)$$

onde `num` e `den` representam, respectivamente, o numerador e o denominador de  $G(s)H(s)$ . O comando em MATLAB para desenhar o gráfico do *root locus* é dado por

```
rlocus(num, den);
```

Neste caso, o vetor de ganho  $K$  é determinado automaticamente. Pode-se ainda utilizar o comando `rlocus` da seguinte forma:

```
rlocus(G); % onde G é o sistema definido por num e den
```

Caso seja desejado informar o vetor de ganhos  $K$ , as seguintes opções são possíveis:

```
rlocus(num, den, K);
rlocus(G, K);
```

O comando `sgrid` mostra linhas radiais (grades) com  $\zeta$  constante e circunferências concêntricas com  $w_n$  constante. Se forem desejadas apenas determinadas linhas com  $\zeta$  constante (ex,  $\zeta = 0.5$  e  $\zeta = 0.707$ ) e determinadas circunferências com  $\omega_n$  constante, (ex,  $\omega_n = 0,5$ ,  $\omega_n = 1$  e  $\omega_n = 2$ ), pode se fazer

```
sgrid([0.5 0.707], [0.5 1 2]);
```

Considere um sistema com realimentação unitária com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}. \quad (4.50)$$

O gráfico do lugar das raízes é obtido no MATLAB como:

```
clear all; close all; clc;
num_G = [1 3];
den_G = conv([1 0], conv([1 1], conv([1 2], [1 4])));
G = tf(num_G, den_G);
rlocus(G)
```

A Figura 4.15 apresenta o resultado obtido.

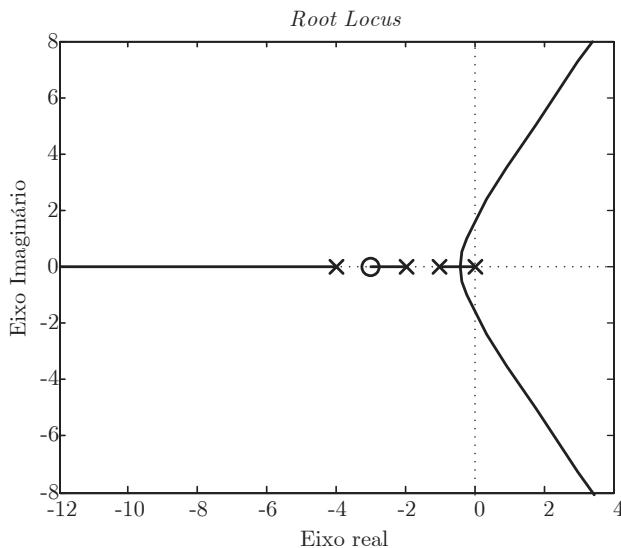


Figura 4.15: *Root locus* de  $G(s)$  da Equação 4.50.

## 4.5 Resposta em Frequência

A Resposta em frequência é dada pela resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal. Os métodos de resposta em frequência foram desenvolvidos no período entre 1930 e 1940 por Nyquist, Bode, Nichols, entre outros. Testes de resposta em frequência são, em geral, simples e podem ser realizados com exatidão com a utilização de geradores senoidais com frequência variável. Considere o sistema LIT, estável, da Figura 4.16

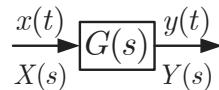


Figura 4.16: Sistema LIT estável.

Depois de esperar até que as **condições de regime permanente tenham sido alcançadas**, a resposta em frequência pode ser calculada substituindo-se  $s$  por  $j\omega$  na função de transferência, ou seja,

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} = M e^{j\phi}, \quad (4.51)$$

onde  $\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{\text{parte imaginária de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)} \right]$ .

Pode-se mostrar que a resposta em regime estacionário para uma entrada  $x(t) = A \sin(\omega t)$  é dada por

$$y_{ss}(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) = A M \sin(\omega t + \phi) \quad (4.52)$$

Portanto, a resposta de um sistema LIT estável à uma entrada senoidal com frequência  $\omega$  é também um sinal senoidal com a mesma frequência, mas com amplitude ponderada pelo módulo da função de transferência na frequência  $\omega$  do sinal de entrada, e com desvio de fase igual ao ângulo da função de transferência na frequência  $\omega$  do sinal de entrada.

### 4.5.1 Diagrama de Bode

O diagrama de Bode é constituído de dois gráficos: um do módulo em decibel (dB) outro do ângulo de fase, onde ambos são traçados em relação à frequência em escala logarítmica. Lembre que o logaritmo do módulo de  $G(j\omega)$  é  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ , com unidade em dB.

Em dB, a multiplicação dos módulos pode ser convertida em soma, o que garante uma forma simples de se esboça a curva aproximada do módulo em dB, assim como a curva de ângulo de fase.

A expansão da escala de frequências pelo uso da escala logarítmica de frequência é muito vantajosa. As relações de frequência são expressas em termos de oitavas ou de décadas. Uma oitava é o intervalo de frequência de  $\omega_1$  a  $2\omega_1$ , onde  $\omega_1$  é qualquer valor de frequência. Uma década é o intervalo de frequência de  $\omega_1$  a  $10\omega_1$ , onde  $\omega_1$  é qualquer valor de frequência. Note que não se pode traçar as curvas até a frequência zero, pois  $\log_{10}(0) = -\infty$ , mas isso, de fato, não significa nenhuma desvantagem.

A determinação experimental de uma função de transferência de um sistema LIT pode ser feita de forma simples a partir do diagrama de Bode. A seguir serão apresentadas algumas formas básicas.

Os fatores básicos que habitualmente ocorrem em qualquer função de transferência são:

- Ganho  $K$ ;
- Fatores integrativo e derivativo  $(j\omega)^{\mp 1}$ ;
- Fatores de primeira ordem  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ ;
- Fatores quadráticos  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$ ;

Conhecendo a característica de resposta de cada um desses fatores isoladamente, é possível utilizá-los para a construção do diagrama de Bode composto de qualquer função de transferência, por uma simples soma de tais fatores.

### Ganho $K$ :

Um número maior do que um possui valor positivo em dB, ao passo que um número entre zero e um tem valor negativo em dB. A curva do módulo em dB de um ganho constante  $K$  é uma reta horizontal de valor  $20 \log K$  decibéis. O ângulo de fase de  $K$  é zero.

O efeito da variação de  $K$  é o de deslocar para cima ou para baixo a curva de módulo em dB. Não há efeito na curva de ângulo de fase. Quando um número aumenta por um fator de 10, o valor correspondente em dB fica acrescido de 20, ou seja,

$$20 \log_{10}(K \cdot 10) = 20 \log_{10}(K) + 20, \quad (4.53)$$

ou ainda,

$$20 \log_{10}(K \cdot 10^n) = 20 \log_{10}(K) + 20 \cdot n. \quad (4.54)$$

Observe que, quando expresso em decibéis, o recíproco de um número difere de seu valor apenas no sinal, ou seja,  $20 \log_{10}(K) = -20 \log_{10}(\frac{1}{K})$ .

### Fatores integral e derivativo $(j\omega)^{\mp 1}$ :

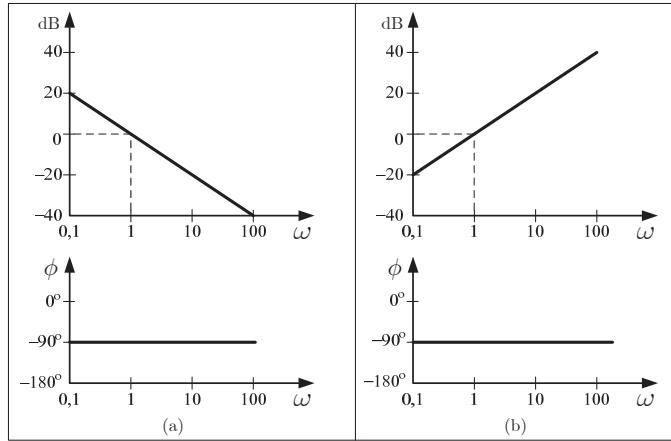
O termo  $(j\omega)^{-1}$  em dB é:

$$20 \log_{10} \frac{1}{j\omega} = -20 \log_{10} \omega \text{ dB} \quad (4.55)$$

O ângulo de fase de  $(j\omega)^{-1}$  é constante e igual a  $-90^\circ$ . O gráfico de  $-20 \log_{10} \omega$  em função de  $\omega$  em escala logarítmica será uma reta com inclinação de  $-20 \text{ dB/década}$  (ou  $\approx -6 \text{ dB/oitava}$ ).

A inclinação da curva de módulo em dB para o fator  $(j\omega)^{-n}$  é  $-20n \text{ dB/década}$ . O ângulo de fase desse fator é dado por  $-90^\circ \cdot n$ . Similarmente, a inclinação da curva de módulo em dB para o fator  $(j\omega)^n$  é  $+20n \text{ dB/década}$ . O ângulo de fase desse fator é dado por  $+90^\circ \cdot n$ .

A Figura 4.17 apresenta o diagrama de Bode para fatores  $(j\omega)^{\pm 1}$ .

Figura 4.17: Diagrama de Bode de (a)  $(j\omega)^{-1}$  e (b)  $(j\omega)$ .**Fatores de primeira ordem  $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$ :**

O módulo em dB de  $(1 + j\omega T)^{-1}$  é:

$$20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB} \quad (4.56)$$

Para baixas frequências, como  $\omega \ll 1/T$ , o módulo em dB pode ser aproximado por:

$$-20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx -20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (4.57)$$

Para altas frequências,

$$-20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx -20 \log_{10} \omega T \text{ dB} \quad (4.58)$$

O gráfico do módulo de  $(1 + j\omega T)^{-1}$  em dB pode então ser aproximado por duas retas assíntotas, uma reta em 0 dB (para a faixa  $0 < \omega < 1/T$ ) e outra com inclinação igual a  $-20 \text{ dB/década}$  (para a faixa  $1/T < \omega < \infty$ ).

A frequência na qual as assíntotas se encontram é chamada de *frequência de canto*. Para o fator  $(1 + j\omega T)^{-1}$ , a frequência de canto é  $\omega = 1/T$ . A frequência de canto divide a resposta em frequência em duas regiões: região de baixa frequência e região de alta frequência.

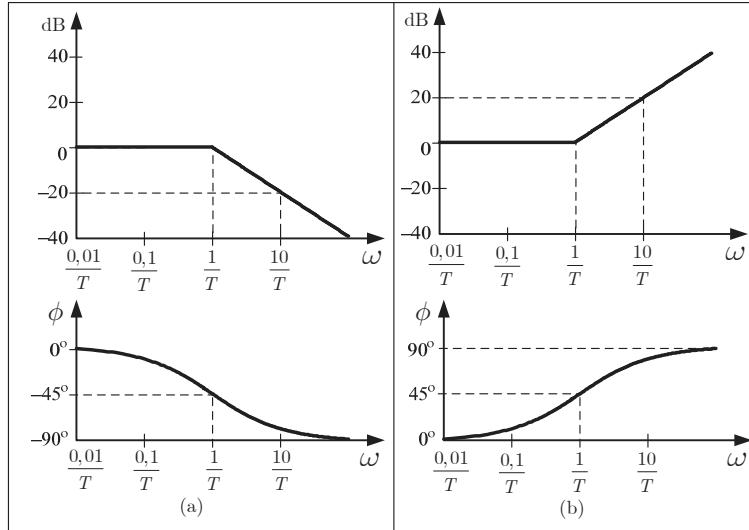
O ângulo de fase exato de  $(1 + j\omega T)^{-1}$  é

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega T). \quad (4.59)$$

Na frequência zero, o ângulo de fase é zero. No infinito, ele se torna  $-90^\circ$ . Na frequência de canto, tem-se

$$\phi = -\tan^{-1}(T/T) = -45^\circ \quad (4.60)$$

O erro máximo entre as curvas assíntotas e a curva real ocorre na frequência de canto e é aproximadamente igual a  $-3 \text{ dB}$ . O erro em uma oitava acima ou abaixo da frequência de corte é igual a  $-0,97 \text{ dB}$ . A Figura 4.18 apresenta o diagrama de Bode assintótico para fatores  $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$ .

Figura 4.18: Diagrama de Bode de (a)  $(1 + j\omega)^{-1}$  e (b)  $(1 + j\omega)$ .

Para o termo  $(1 + j\omega T)$ , o módulo em dB é dado por

$$20 \log_{10} |1 + j\omega T| = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB} \quad (4.61)$$

A frequência de canto é também igual a  $\omega = 1/T$ . O ângulo de fase varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , conforme  $\omega$  varia de zero a infinito. Note que para fatores recíprocos, as curvas de módulo em dB e do ângulo de fase necessitam trocar apenas o sinal.

**Fatores quadráticos**  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ :

O módulo e a fase do fator quadrático dependem tanto da frequência de canto ( $\omega_n$ ) como do coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . As aproximações assintóticas para as curvas de resposta em frequência não são precisas para um fator com baixos valores de  $\zeta$ . Considerando fatores quadráticos no denominador, o módulo em dB de  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$  é:

$$20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| = -20 \log_{10} \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (4.62)$$

Para baixas frequências,  $\omega \ll \omega_n$ , o módulo passa a ser  $-20 \log_{10} 1 = 0$  dB. Para altas frequências,  $\omega \gg \omega_n$ , o módulo passa a ser

$$-20 \log_{10} \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB} \quad (4.63)$$

A assíntota de baixa frequência é uma reta horizontal em 0 dB, ao passo que a assíntota de alta frequência é uma reta com inclinação de -40 dB/década. As assíntotas se cruzam em  $\omega = \omega_n$ . Logo,  $\omega_n$  é denominada frequência de canto. As duas assíntotas são independentes de  $\zeta$ . Próximo a  $\omega = \omega_n$

ocorre um pico de ressonância.  $\zeta$  determina o pico dessa ressonância. O erro entre a curva real e as assíntotas depende de  $\zeta$  e será maior para valores pequenos de  $\zeta$ .

O ângulo de fase do fator quadrático é dado por:

$$\phi = -\tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (4.64)$$

Em  $\omega = 0$   $\phi = 0^\circ$ . Em  $\omega = \omega_n$ ,  $\phi = -90^\circ$ , independentemente de  $\zeta$ . Em  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\phi = -180^\circ$ .

Para fatores quadráticos no numerador, as curvas de resposta em frequência do módulo em dB e do ângulo de fase são obtidas simplesmente pela inversão do sinal das curvas obtidas para fatores no denominador.

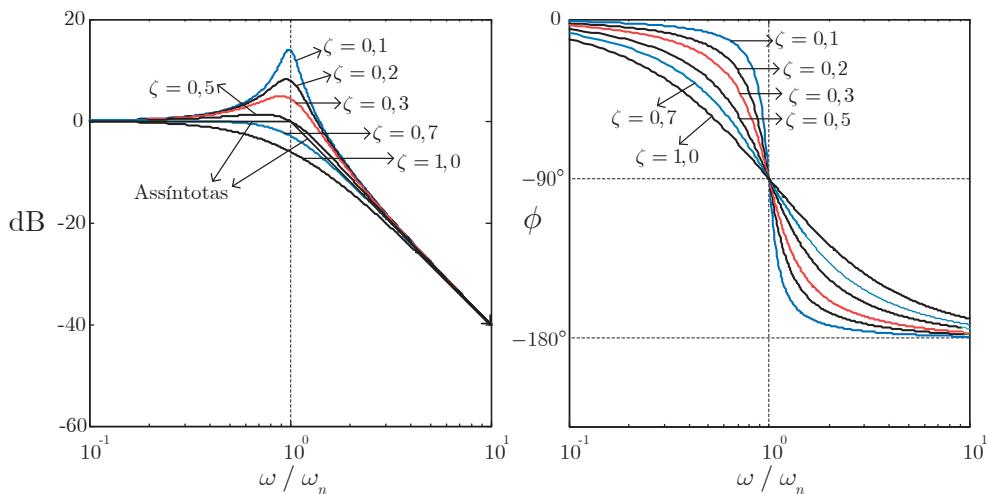


Figura 4.19: Diagrama de Bode de  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$  com assíntotas.

No MATLAB, o diagrama de Bode é obtido através do comando `bode`. Considere o sistema

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s/2)(1+s/5)} = \frac{100}{s(s+2)(s+5)} = \frac{100}{s^3 + 7s^2 + 10s} \quad (4.65)$$

O código é utilizado para gerar o diagrama de Bode da função de transferência da Equação (4.65).

```
clear all; close all; clc;
num_G = 100;
den_G = [1 7 10 0];
G = tf(num_G, den_G); % G(s)
bode(G); % Diagrama de Bode
```

A Figura 4.20 apresenta o resultado obtido

### 4.5.2 Diagrama de Nyquist

Uma dada função de transferência pode ser representada no plano complexo quando  $\omega$  varia de 0 a  $\infty$ . Tal representação é denominada diagrama de Nyquist. Na Figura 4.21 são apresentados os diagramas

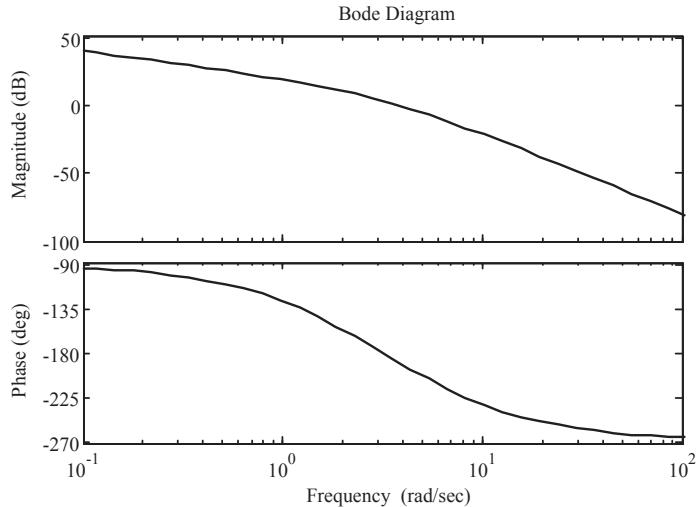


Figura 4.20: Diagrama de Bode do sistema da Equação (4.65).

de Nyquist para as funções de transferência  $G_1(j\omega) = 1/(s + 1)$  e  $G_2(j\omega) = 1/[s(s + 1)]$ .

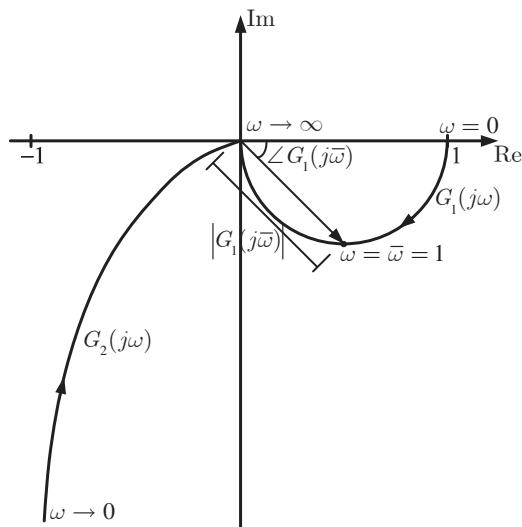


Figura 4.21: Exemplos de diagramas de Nyquist.

A curva correspondente a  $G_2(j\omega)$  representa o caso típico de um sistema com integrador, onde o ganho em baixas frequências ( $\omega \rightarrow 0$ ) tende a infinito.

O ponto  $-1 + j0$  no diagrama de Nyquist, denominado ponto crítico, é de fundamental importância para análise de estabilidade de sistemas. Considere o diagrama da Figura 4.22.

Note que o vetor  $1 + G(j\bar{\omega})$  corresponde ao inverso da função de sensibilidade do sistema. As raízes de  $1 + G(j\bar{\omega})$  representam os polos de malha fechada do sistema. À medida que o diagrama de Nyquist se aproxima do ponto crítico, para  $\omega = \bar{\omega}$  o termo  $1 + G(j\bar{\omega})$  se aproxima de zero e, portanto, a estabilidade relativa do sistema se degrada.

O critério de estabilidade de Nyquist pode ser enunciado da seguinte forma:

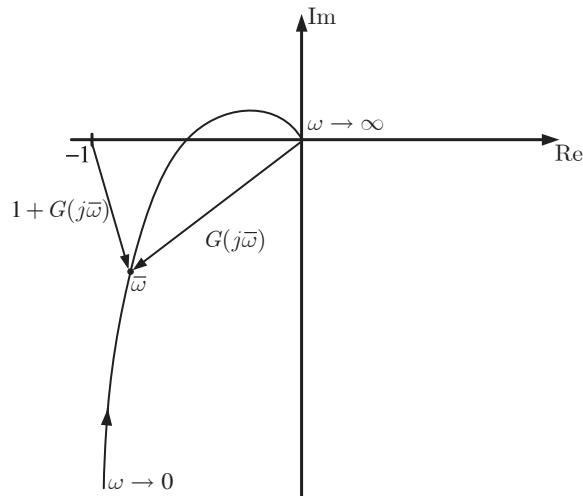


Figura 4.22: Exemplo de diagrama de Nyquist e a relação com o ponto crítico.

*Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema em malha fechada é que o número de voltas do diagrama de Nyquist do sistema em malha aberta em torno do ponto crítico, no sentido anti-horário, seja igual ao número de polos instáveis de malha aberta.*

Considere o diagrama da Figura 4.23 [da Cruz 1996]. Tal sistema é, portanto, instável.

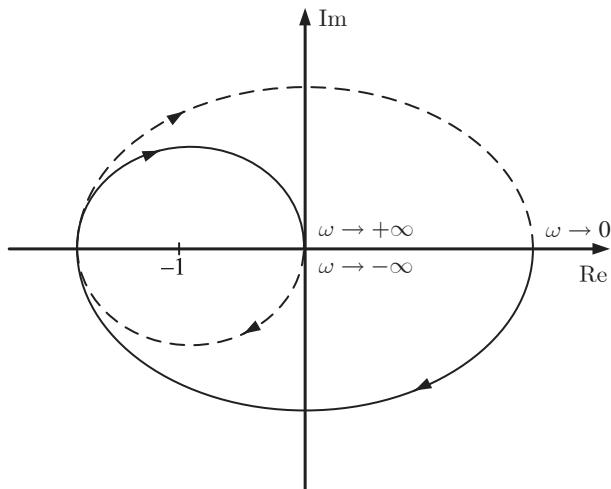


Figura 4.23: Exemplo de diagrama de Nyquist de sistema instável.

O comando `nyquist` do MATLAB, com a mesma sintaxe do comando `bode`, faz o gráfico do diagrama de Nyquist.

### Sistemas de Fase Mínima e de Fase Não Mínima

Sistemas que não possuem nem zeros nem polos no semiplano direito são denominados **sistemas de fase mínima**. Sistemas que possuem zeros e/ou polos no semiplano direito são denominados **sistemas de fase não mínima**.

Em ambos os tipos de sistema, a inclinação da curva de módulo em dB quando  $\omega \rightarrow \infty$  tende a  $-20(q - p)$  dB/década, onde  $p$  e  $q$  são os graus dos polinômios do numerador e do denominador da função de transferência, respectivamente.

Em sistemas de fase mínima, o ângulo de fase quando  $\omega \rightarrow \infty$  tende a  $-90^\circ(q - p)$ . Em sistemas de fase não mínima isso não ocorre.

### Margem de Ganho e Margem de Fase

A análise seguinte é considerada para sistemas de fase mínima. A **Margem de Ganho** ( $MG$ ) é definida como a mudança no valor do ganho de malha aberta no ponto com fase de  $180^\circ$  necessária para tornar instável o sistema a malha fechada. Em outras palavras, é o recíproco de  $|G(j\omega)|$  na frequência  $\omega_1$  em que o ângulo é  $-180^\circ$ , ou seja,

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_1)|}. \quad (4.66)$$

Expressa em dB, a margem de ganho será positiva se o sistema for estável e será negativa para sistema instável.

$$MG = 20 \log_{10} \left[ \frac{1}{|G(j\omega_1)|} \right] dB = -20 \log_{10} |G(j\omega_1)| dB \quad (4.67)$$

A **Margem de Fase** ( $MF$ ) é definida como a mudança no valor de fase de malha aberta no ponto com ganho unitário, necessária para tornar instável o sistema a malha fechada. Em outras palavras, é o atraso de fase adicional, na frequência de cruzamento de ganho, necessária para que o sistema atinja o limiar de instabilidade. Matematicamente,

$$MF = 180^\circ + \phi, \quad (4.68)$$

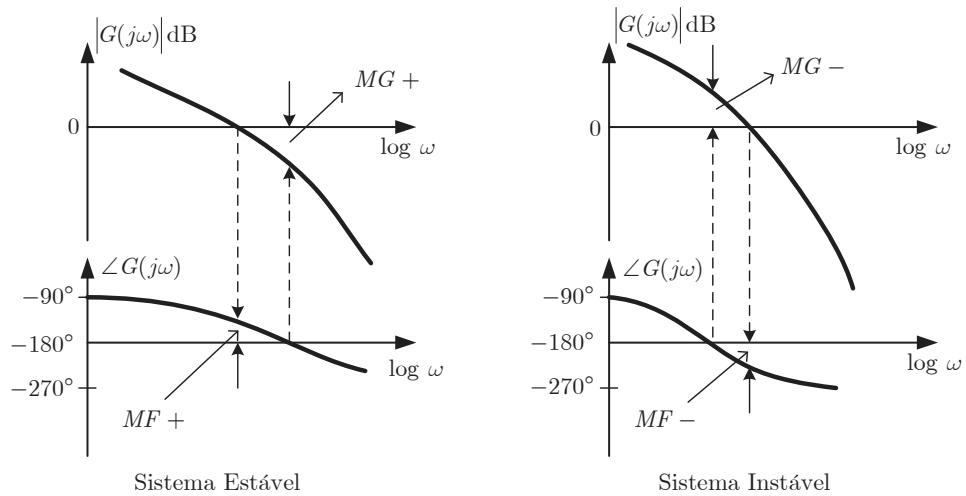
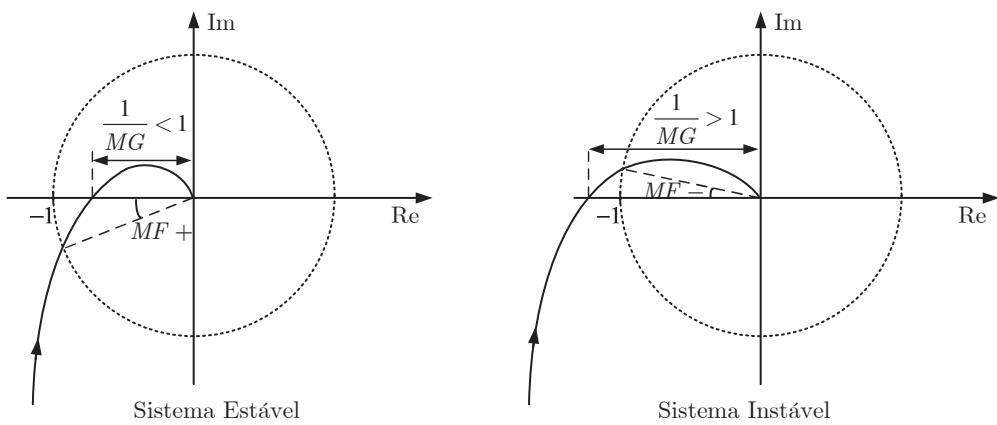
onde  $\phi$  é o ângulo de fase da função de transferência de malha aberta no cruzamento de ganho. Para sistemas de fase mínima estáveis,  $MF$  deve ser positiva.

As Figuras 4.24 e 4.25 [Ogata 2003] ilustram a margem de fase e a margem de ganho típicas para sistema de fase mínima estáveis e instáveis, considerando os diagramas de Bode e Nyquist, respectivamente.

O comando `margin` do MATLAB, com a mesma sintaxe do comando `bode`, faz o gráfico do diagrama de Bode e mostra as margens de ganho e de fase.

As margens de fase e de ganho são medidas da proximidade do diagrama polar em relação ao ponto  $-1 + j0$ . Tais margens podem ser utilizadas como critérios de projeto. Para um sistema de fase mínima, as margens de ganho e de fase devem ser positivas para que o sistema seja estável;

Valores de margens de ganho e de fase apropriados protegem contra variações no comportamento do sistema. Para um desempenho satisfatório, a margem de fase deve estar situada entre  $30^\circ$  e  $60^\circ$  e a margem de ganho deve ser superior a 6 dB [Ogata 2003];

Figura 4.24: Diagrama de Bode com  $MG$  e  $MF$  em sistemas estáveis e instáveis.Figura 4.25: Diagrama de Nyquist com  $MG$  e  $MF$  em sistemas estáveis e instáveis.

Em um sistema de segunda ordem na forma padrão, a margem de fase e o coeficiente de amortecimento se relacionam da seguinte forma:

$$MF = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}} \right), \quad (4.69)$$

ou seja, a margem de fase é uma função apenas de  $\zeta$ . A Figura 4.26 ilustra a relação entre  $MF$  e  $\zeta$  para sistema segunda ordem padrão.

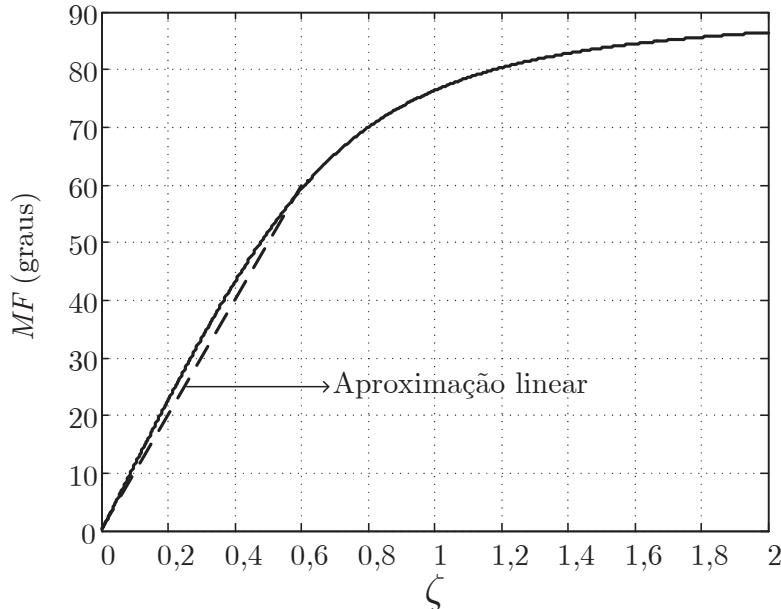


Figura 4.26: Curva  $MF \times \zeta$  para sistema segunda ordem padrão. Fonte [Ogata 2003].

Note que para  $0 \leq \zeta \leq 0,6$ , tem-se que  $\zeta \approx MF/100$ .

### Banda Passante

A frequência  $\omega_b$  na qual a amplitude da resposta em frequência de malha fechada é 3 dB abaixo do seu valor na frequência zero é denominado frequência de canto, como ilustrado na Figura 4.27. O intervalo de frequências  $0 \leq \omega \leq \omega_b$  é denominado banda passante. Uma banda passante grande corresponde a um tempo de subida pequeno (resposta rápida). Se a banda passante for muito elevada, ruídos de alta frequência podem comprometer o desempenho do sistema.

### Relação Entre o Tipo de Sistema e a Curva de Módulo em dB

Genericamente, a resposta em frequência em malha aberta de um sistema de controle pode ser dada por

$$G(j\omega) = \frac{K (T_a j\omega + 1) (T_b j\omega + 1) \cdots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1) (T_2 j\omega + 1) \cdots (T_p j\omega + 1)}, \quad (4.70)$$

onde, para  $N = 0, 1, 2$  tem-se, respectivamente um sistema tipo 0, 1 e 2.

As constantes de erro estático de posição, velocidade e aceleração descrevem, respectivamente, o comportamento em baixa frequência dos sistemas tipo 0, tipo 1 e tipo 2. O tipo de sistema determina

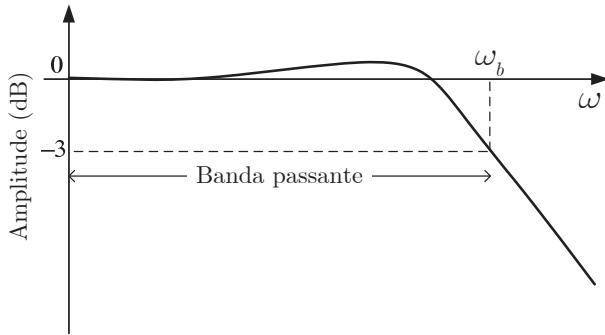


Figura 4.27: Resposta em frequência de amplitude, indicando frequência de corte e banda passante.

a inclinação da curva de módulo em dB em baixas freqüências: para sistemas tipo 0, tem-se uma reta horizontal; para sistemas tipo 1, tem-se uma reta com inclinação  $-20 \text{ dB/década}$ ; para sistemas tipo 2, tem-se uma reta com inclinação  $-40 \text{ dB/década}$ .

Para um sistema tipo 0, o módulo da resposta em frequência para baixas freqüências é igual a  $K_p$  (constante de erro estático de posição), pois,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K = K_p \quad (4.71)$$

Em um sistema tipo 1, para  $\omega \ll 1$ , tem-se que

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega} \Rightarrow 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{K_v}{j\omega} \right| \text{ dB} \quad (4.72)$$

A intersecção do segmento de  $-20 \text{ dB/década}$  (ou sua extensão) com o eixo de 0 dB ocorre em uma freqüência numericamente igual a  $K_v$  (constante de erro estático de velocidade).

Em um sistema tipo 2, para  $\omega \ll 1$ , tem-se que

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2} \Rightarrow 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right| \text{ dB} \quad (4.73)$$

A intersecção do segmento de  $-40 \text{ dB/década}$  (ou sua extensão) com o eixo de 0 dB ocorre em uma freqüência numericamente igual a  $\sqrt{K_a}$  ( $K_a$  é a constante de erro estático de aceleração).

A Figura 4.28 apresenta a relação entre o diagrama de bode e as constantes de erro estático para sistemas tipo 0, 1, e 2.

## 4.6 Controle PID

É de longe o tipo de controle mais utilizado na indústria. O controle PID na forma paralela é apresentado na Figura 4.29.

Os parâmetros  $K_P$ ,  $K_I$  e  $K_D$  são denominados ganho proporcional, ganho integrativo e ganho deri-

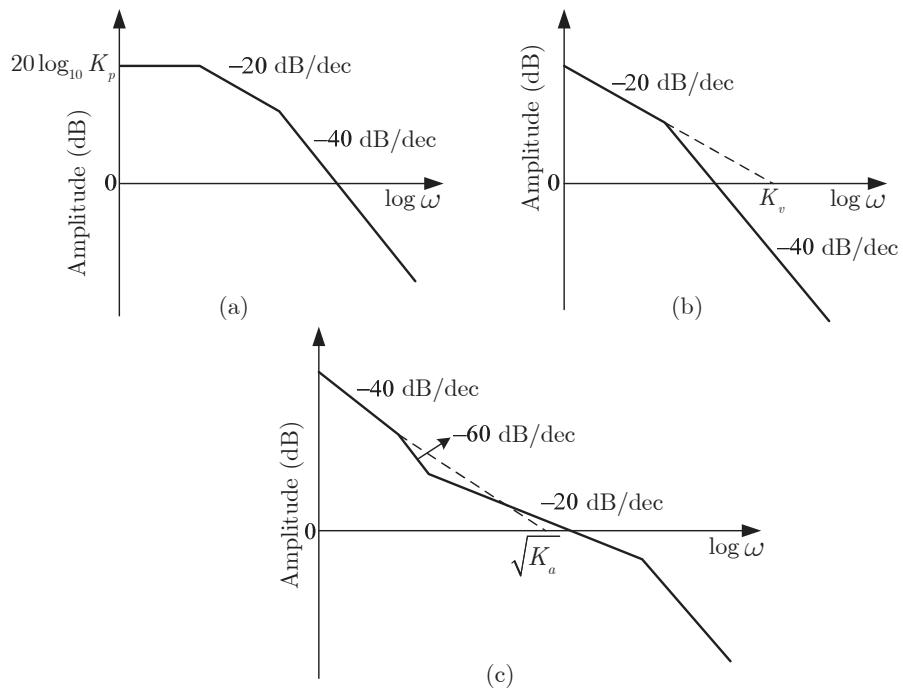


Figura 4.28: Relação entre as curvas de módulo em dB e os coeficientes de erro estático, para sistemas (a) tipo 0, (b) tipo 1 e (c) tipo 2.

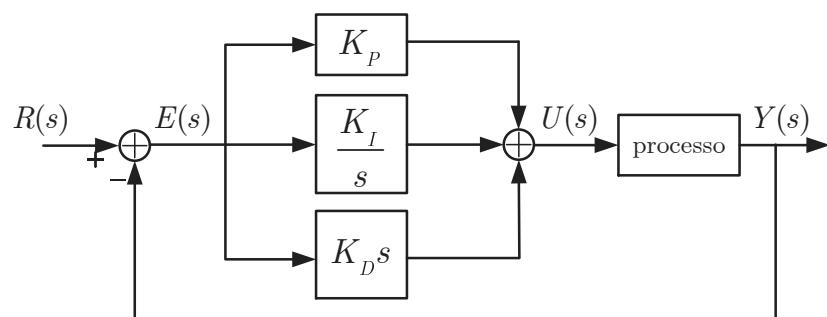


Figura 4.29: Controlador PID na forma paralela.

vativo, respectivamente. A ação de controle é dada por:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} &= K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \end{aligned} \quad (4.74)$$

Outra forma de estrutura de controle PID é apresentada na Figura 4.30.

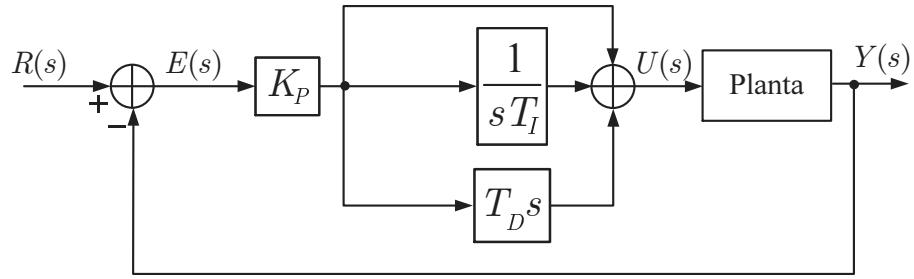


Figura 4.30: outra forma de controlador PID.

Tal esquema é um caso particular da forma ISA, sendo mais usual. Note que:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \\ \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} &= K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde  $T_D$  é denominado tempo derivativo e  $T_I$  tempo de repetição. Ao comparar as Equações (4.74) e (4.75), observa-se que  $K_I = K_P/T_I$  e  $K_D = K_P T_D$ , ou seja,  $K_D$  e  $K_I$  dependem de  $K_P$ .

O aumento do ganho proporcional acelera a resposta, pois, quanto maior o erro, maior será o termo proporcional de compensação. O aumento de  $K_P$  tende ainda a diminuir os erros em regime permanente, além de reduzir os efeitos dos distúrbios e a sensibilidade à variação de parâmetros na planta. Porém não rejeita completamente distúrbios, e erros em estado estacionário geralmente irão persistir. Além disso, ganhos elevados podem levar o sistema à instabilidade.

A ação integral acelera o movimento do processo em direção ao *set-point*, eliminando (ou diminuindo) o erro residual que ocorre com controlador puramente proporcional (insere polo na origem aumentando o tipo do sistema de um). Como o termo integral isolado acumula erros do passado, valores elevados para  $K_I$  provocam o efeito colateral de aumento no sobresinal.

Em um sistema prático é comum a ocorrência de saturação no atuador. Quando ocorre a saturação e a saída da planta não atinge o *set-point*, a saída do termo integrativo do controlador cresce cada vez mais, mesmo que a saída física já tenha saturado. Assim, o erro acumulado pelo integrador fica muito elevado. Tal fenômeno é denominado *windup*. O problema não é o *windup* em si, mas a volta do sistema a uma

condição normal após algum tempo em saturação. Se o erro acumulado no integrador for alto, o sistema demorará muito para corrigir o erro.

Para evitar que isso ocorra, deve-se utilizar um esquema denominado *anti windup*, que limita ou “congela” a ação integrativa quando o sistema entre em saturação, evitando o acúmulo de erro indesejável no integrador. Uma forma muito utilizada de PID com *anti-windup* é representada na Figura 4.31:

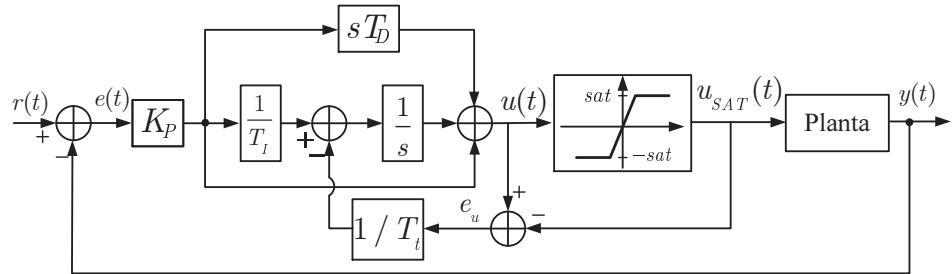


Figura 4.31: Controlador PID com *anti-windup*.

A diferença entre a entrada e a saída do atuador (TR) é realimentada para a entrada do integrador, passando pelo ganho  $1/T_t$ . Quando há saturação, este sinal impede que o integrador acumule erros indesejados.  $T_t$  é a constante de tempo de atracamento do *anti-windup*. Uma regra prática consiste em assumir  $T_D \leq T_t \leq T_I$  (por exemplo,  $T_t = \sqrt{T_I T_D}$ ) [Aström e Wittenmark 1997].

Para utilizar o anti-windup em um sistema prático, deve-se inserir na malha um modelo de saturação do atuador.

Considere isoladamente agora a ação derivativa, tal que

$$U(s) = K_P T_D s E(s) \quad (4.76)$$

Note que este tipo de função de transferência não é própria. Além disso, o termo derivativo possui um ganho que cresce com o aumento da frequência, e o sistema fica extremamente sensível a ruídos de alta frequência. Para evitar tal problema, pode-se escrever o termo derivativo em uma forma realista, tal que:

$$U(s) = K_P \frac{T_D s}{(T_D/N)s + 1} E(s) \quad (4.77)$$

Onde  $N$  é um parâmetro tipicamente adotado entre 3 e 20. Essa forma acrescenta um polo em  $-N/T_D$ . Além de tornar a função de transferência própria, o ganho da parcela derivativa é saturado a partir de  $\omega = N/T_D$ . As respostas em frequência das parcelas derivativas para os casos básico e realista são ilustradas na Figura 4.32.

Para variações abruptas na referência, a ação de controle derivativa contribui com um valor de amplitude muito elevado (*kick derivativo*). Para amenizar este problema, a parcela derivativa pode atuar diretamente na realimentação de saída, com sinal trocado, o que resulta na seguinte ação de controle:

$$U(s) = -K_P \frac{T_D s}{(T_D/N)s + 1} Y(s), \quad (4.78)$$

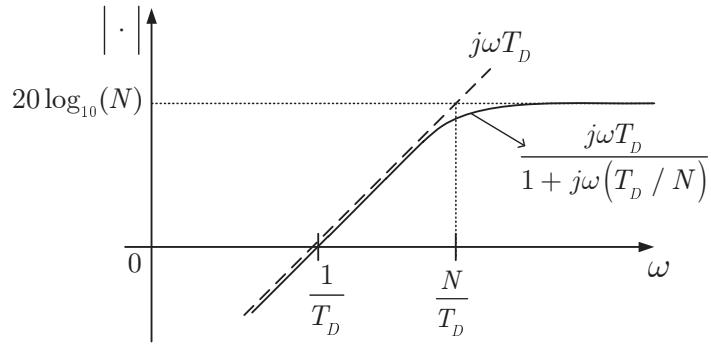
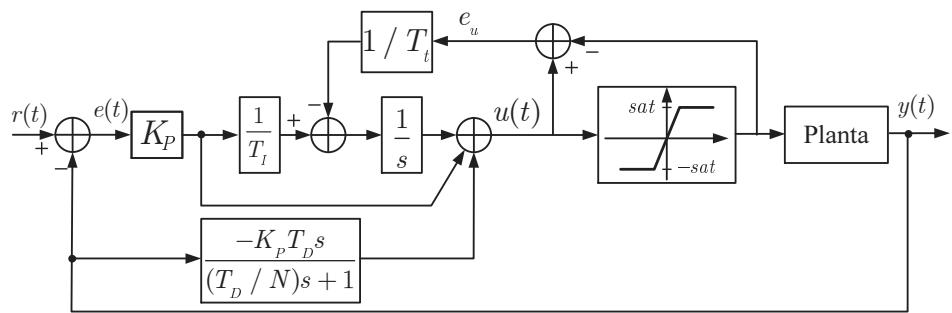


Figura 4.32: Comparação da resposta em frequência do termo derivativo.

O diagrama do controle PID realista e com *anti-windup* é representada na Figura 4.33:

Figura 4.33: Controlador PID realista com *anti-windup*.

Os efeitos independentes dos ganhos  $K_P$ ,  $K_I$  e  $K_D$  na resposta de malha fechada do sistema são resumidos na Tabela 4.3:

Tabela 4.3: Efeitos dos parâmetros  $K_P$ ,  $K_I$  e  $K_D$  em um controle PID.

	$t_r$	$U.P.$	$t_s$	$e_{ss}$	Estabilidade
$\uparrow K_P$	Decresce	Aumenta	Aumenta pouco	Decresce	Degrada
$\uparrow K_I$	Decr. Pouco	Aumenta	Aumenta	Decr. Muito	Degrada
$\uparrow K_D$	Decr. Pouco	Decresce	Decresce	Influi Pouco	Melhora*

\* Desde que o sistema seja livre de ruídos de altas freqüências.

## 4.7 Compensação Avanço/Atraso de Fase

### Avanço de Fase

Caso o sistema não compensado não apresente características de resposta transitória indesejáveis, é necessário redesenhar o LR de modo que os polos dominantes de malha fechada tenham localização desejada no plano complexo.

O problema descrito acima pode ser resolvido pela inserção de um compensador de avanço de fase, dado por

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)}, \quad (0 < \alpha < 1), \quad (4.79)$$

Há a inserção de um zero e um polo sobre o eixo real negativo, sendo o zero mais próximo da origem do que o polo. O diagrama de Bode do compensador por avanço de fase com  $K_c = 1$  e  $\alpha = 0,1$  é apresentado na Figura 4.34 [Ogata 2003]. Note que tal compensador é um filtro passa altas.

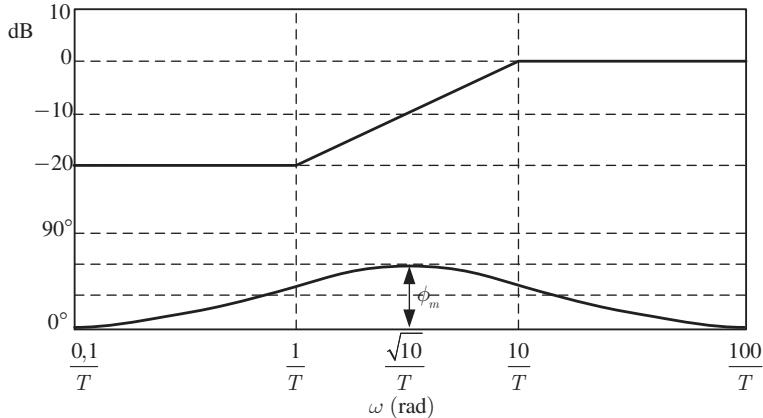


Figura 4.34: Diag. de Bode do comp. por avanço de fase com  $K_c = 1$  e  $\alpha = 0,1$ .

O termo  $\phi_m$  representa o máximo ângulo imposto pelo compensador, e sua relação com  $\alpha$  é dada por:

$$\sin \phi_m = \frac{(1 - \alpha)/2}{(1 + \alpha)/2} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

As posições exatas do polo e do zero inseridos devem ser tal que a contribuição angular do sistema compensado em relação à nova posição dos polos dominantes de malha fechada satisfaça a condição angular do LR.

### Atraso de Fase

Caso o sistema não compensado apresente resposta transitória com características satisfatórias, mas as características em regime estacionário sejam insatisfatórias, pode-se adicionar um compensador por atraso de fase no ramo direto.

Caso não se queira modificar significativamente o LR, a contribuição angular da rede de atraso deve ser limitada a um valor pequeno em torno de  $5^\circ$ . Assim, o polo e o zero do compensador são inseridos próximos um do outro e próximos da origem.

A função de transferência de um compensador por atraso de fase pode ser dada por

$$G_c(s) = \hat{K}_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\beta T)}, \quad (\beta > 1). \quad (4.80)$$

Há um zero em  $s = -1/T$  e um polo em  $s = -1/(\beta T)$ . O polo fica à direita do zero. A relação entre a distância do zero e do polo em relação à origem está diretamente relacionada com o ganho de malha aberta, o que contribui para a redução do erro em regime.

A Figura 4.35 apresenta o diagrama de Bode do compensador por atraso de fase, para  $K_c = 1$  e  $\beta = 10$  [Ogata 2003]. Note que tal compensador é um sistema que amplifica em baixas frequências.

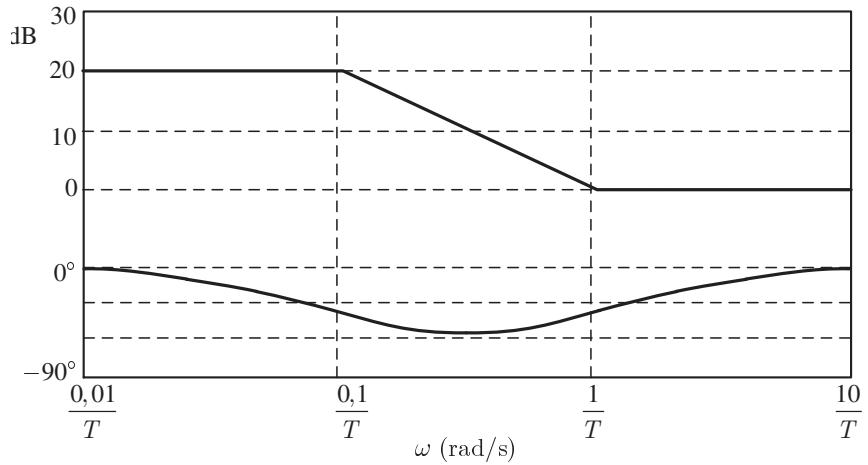


Figura 4.35: Diag. de Bode do comp. por atraso de fase p/  $K_c = 1$  e  $\beta = 10$ .

### Avanço e Atraso de Fase

O compensador por atraso e avanço de fase combina as vantagens da compensação por atraso de fase e por avanço de fase. Tal compensador possui a seguinte função de transferência

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_c \beta \alpha \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\alpha T_1 s + 1)(\beta T_2 s + 1)} \\ &= K_c \left( \frac{s + 1/T_1}{s + 1/(\alpha T_1)} \right) \left( \frac{s + 1/T_2}{s + 1/(\beta T_2)} \right) \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde  $\beta > 1$  e  $0 < \alpha < 1$ . A Figura 4.36 apresenta um diagrama de bode do compensador [Ogata 2003].

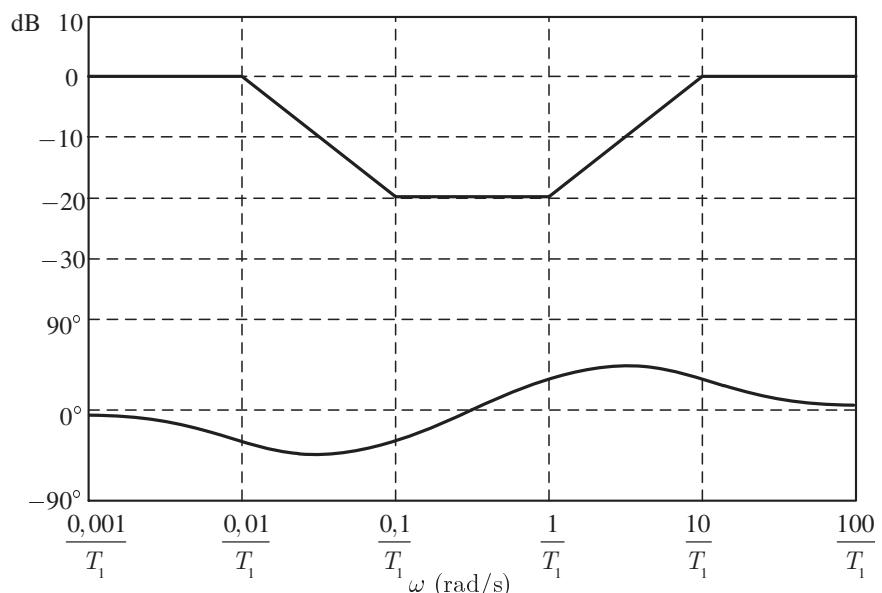


Figura 4.36: Diagrama de Bode do compensador por avanço e atraso de fase para  $\beta = 1/\alpha = 10$  e  $K_c = 1$  e  $T_2 = 10T_1$ .

## Discretização de Sistemas Contínuos

O objetivo deste capítulo é definir uma função de transferência discreta,  $C_D(z)$ , que seja aproximadamente igual a uma função de transferência de sistemas contínuos  $C(s)$ , na faixa de frequências de interesse. Pode-se com isto, por exemplo, projetar um controlador no domínio  $s$  e converter para o domínio  $z$  para ser implementado digitalmente em hardware. Alguns métodos serão discutidos, tendo como base a referência [Franklin, Powell e Workman 2006]. Por fim, a discretização do algoritmo de controle PID é descrita em detalhes.

### 5.1 Mapeamento Casado de Polos e Zeros

Pode-se, inicialmente, considerar  $z = e^{sT_s}$  e sua inversa  $s = (1/T_s) \ln(z)$  como a transformação entre  $z$  e  $s$ . O equivalente discreto é obtido seguindo-se o seguinte procedimento:

- Todos os polos e zeros finitos no plano- $s$  são mapeados no plano- $z$  como  $z = e^{sT_s}$ . Para polos reais  $(s + a) \rightarrow (z - e^{-aT_s})$ . Para polos complexos,  $(s + \alpha - j\omega) \rightarrow (z - e^{-\alpha T_s} \cdot e^{j\omega T_s})$ .
- Para obtenção de sistemas próprios (grau do denominador = grau do numerador), todos os zeros em  $s = \infty$  ou fora da faixa primária são mapeados em  $z = -1$ . Ou seja, para cada zero no infinito, inclui-se um termo  $(z + 1)$  no numerador. O ponto  $z = -1$  representa a maior frequência possível da função de transferência discreta.
- Para atrasar a resposta do sistema discreto em um período de amostragem, então um dos zeros em  $s = \infty$  é mapeado em  $z = \infty$ , enquanto que os outros são mapeados em  $z = -1$ . Com isto, há um zero finito a menos do que polos finitos em  $C_D(z)$ . Assim, tem-se um sistema estritamente próprio (grau do denominador > grau do numerador). Este procedimento causa perda na qualidade das aproximações.
- O ganho do sistema discreto deve ser ajustado em uma frequência crítica. Normalmente escolhe-se um ponto em baixas frequências, ou seja,  $C(s)|_{s=0} = C_D(z)|_{z=1}$ .

O comando em MATLAB para transformar uma função de transferência contínua  $C(s)$  em uma discreta  $C_D(z)$  com período de amostragem  $T_s$ , através de mapeamento casado de polos e zeros, é:  $\text{C\_D} = \text{c2d}(\text{C}, \text{T\_s}, \text{'matched'})$ .

Exemplo 5.1: **Zero-Pole Matching:** Encontre o equivalente discreto de

$$C(s) = \frac{a}{s+a}$$

utilizando mapeamento casado de polos e zeros.

**Solução:** note que  $C(s)$  possui um polo finito em  $s = -a$ , que é mapeado em  $z = e^{-aT_s}$ , e um zero infinito, que, primeiramente, é mapeado em um zero em  $z = -1$ . Logo,

$$C_D(z) = K \frac{z+1}{z - e^{-aT_s}}$$

Como,

$$C(s)|_{s=0} = 1 = C_D(z)|_{z=1} = K \frac{2}{1 - e^{-aT_s}},$$

tem-se que  $K = \frac{1 - e^{-aT_s}}{2}$ . Portanto,

$$C_D(z) = \frac{(z+1)(1 - e^{-aT_s})}{2(z - e^{-aT_s})}$$

Mapeando, por outro lado,  $s = \infty$  em  $z = \infty$ , pois assim há um polo finito e nenhum (um a menos) zero finito, tem-se

$$C_D(z) = K \frac{1}{z - e^{-aT_s}}$$

Como,

$$C(s)|_{s=0} = 1 = C_D(z)|_{z=1} = K \frac{1}{1 - e^{-aT_s}},$$

tem-se que  $K = 1 - e^{-aT_s}$ . Portanto,

$$C_D(z) = \frac{1 - e^{-aT_s}}{z - e^{-aT_s}}$$

## 5.2 Diferenciação Numérica

O método da diferença em avanço (retangular para frente – *forward rectangular*) é uma técnica simples que substitui a derivada de uma função por

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=nT_s} = \frac{e(t + T_s) - e(t)}{T_s} \quad (5.1)$$

Para  $e(t) = 0$  em  $0 \leq t < T_s$ , tem-se no domínio  $s$

$$sE(s) = \frac{e^{sT_s} E(s) - E(s)}{T_s} = E(s) \left[ \frac{e^{sT_s} - 1}{T_s} \right] \quad (5.2)$$

Com  $z = e^{sT_s}$  tem-se

$$s = \frac{z - 1}{T_s} \quad (5.3)$$

Para transformar uma função do plano- $s$  para o plano- $z$  pelo método retangular para frente deve-se fazer

$$C_D(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{T_s}} \quad (5.4)$$

Utilizando por outro lado a diferença em atraso (retangular para trás – *backward rectangular*)

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=nT_s} = \frac{e(t) - e(t - T_s)}{T_s} \quad (5.5)$$

Aplicando a transformada de Laplace e assumindo condições iniciais nulas,

$$sE(s) = \frac{E(s) - e^{-sT_s} E(s)}{T_s} = E(s) \left[ \frac{1 - e^{-sT_s}}{T_s} \right] \quad (5.6)$$

Com  $z = e^{sT_s}$  tem-se

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} = \frac{z - 1}{T_s z} \quad (5.7)$$

Portanto, para transformar uma função do plano- $s$  para o plano- $z$  pelo método retangular para trás, tem-se

$$C_D(z) = C(s)|_{s=\frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z}} \quad (5.8)$$

A Figura 5.1 apresenta graficamente as duas aproximações para derivada consideradas.

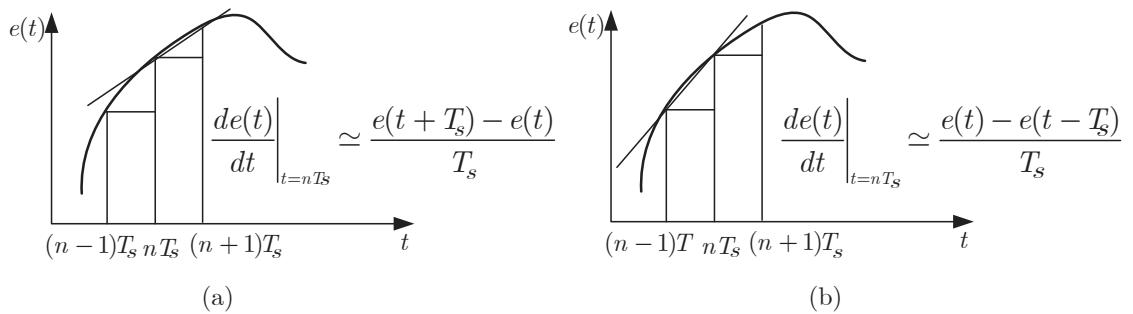


Figura 5.1: Aproximações para derivada. (a) retangular para frente; (b) retangular para trás.

### 5.3 Integração Numérica

Considere o integrador puro dado por

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}. \quad (5.9)$$

Assim,

$$u(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.10)$$

Para  $t = nT_s$ , tem-se

$$\begin{aligned} u(nT_s) &= \int_0^{nT_s} e(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{(n-1)T_s} e(\tau) d\tau + \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} e(\tau) d\tau \\ &= u([n-1]T_s) + \begin{cases} \text{área de } e(\tau) \\ \text{para } (n-1)T_s \leq \tau < nT_s \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

A área de  $e(\tau)$  no intervalo  $(n-1)T_s \leq \tau < nT_s$  pode ser aproximada conforme ilustrado na Figura 5.2.

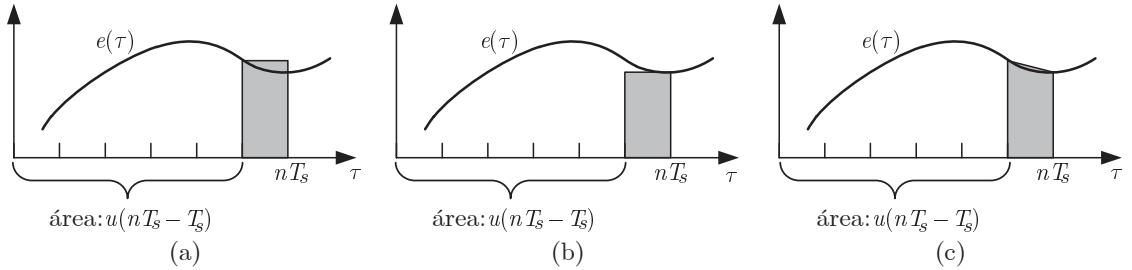


Figura 5.2: Aproximações para integral. (a) retangular para frente; (b) retangular para trás; (c) trapezoidal.

Utilizando a aproximação retangular para frente (Figura 5.2 (a)), pode-se verificar que

$$u(nT_s) = u([n-1]T_s) + T_s e([n-1]T_s) \quad (5.12)$$

A sequência obtida é dada por

$$u[n] = u[n-1] + T_s e[n-1]. \quad (5.13)$$

Aplicando a transformada- $z$  em (5.13), obtém-se

$$U(z) = z^{-1}U(z) + T_s z^{-1} E(z), \quad (5.14)$$

ou seja,

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (5.15)$$

A função de transferência discreta é obtida pela substituição na função de transferência contínua:

$$s \leftarrow \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1} T_s} = \frac{z - 1}{T_s} \quad (5.16)$$

Utilizando agora a aproximação retangular para trás (Figura 5.2 (b)), pode-se verificar que

$$u(nT_s) = u([n-1]T_s) + T_s e(nT_s) \quad (5.17)$$

A sequência obtida é dada por

$$u[n] = u[n-1] + T_s e[n] \quad (5.18)$$

Aplicando a transformada- $z$  em (5.18), obtém-se

$$U(z) = z^{-1}U(z) + T_s E(z) \quad (5.19)$$

ou seja,

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s}{1 - z^{-1}} \quad (5.20)$$

A seguinte substituição é utilizada para obtenção do equivalente discreto:

$$s \leftarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_s} = \frac{z - 1}{zT_s} \quad (5.21)$$

Uma outra regra que pode ser utilizada é a trapezoidal, como mostrado na Figura 5.2 (c)). Com isso,

$$u(nT_s) = u([n-1]T_s) + \frac{T_s}{2}\{e([n-1]T_s) + e(nT_s)\} \quad (5.22)$$

A sequência obtida é dada por

$$u[n] = u[n-1] + \frac{T_s}{2}(e[n-1] + e[n]) \quad (5.23)$$

Aplicando a transformada- $z$  e separando os termos em  $U(z)$  e  $E(z)$ , obtém-se

$$U(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T_s}{2}E(z)(1 + z^{-1}) \quad (5.24)$$

ou seja,

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (5.25)$$

A aproximação discreta é obtida com a seguinte substituição:

$$s \leftarrow = \frac{2}{T_s} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})} = \frac{2}{T_s} \frac{(z - 1)}{(z + 1)} \quad (5.26)$$

A tabela seguinte resume as três abordagens vistas.

Método	Aproximação
Forward	$s \leftarrow \frac{z - 1}{T_s}$
Backward	$s \leftarrow \frac{z - 1}{T_s z}$
Trapezoidal	$s \leftarrow \frac{2}{T_s} \frac{(z - 1)}{(z + 1)}$

As transformações dos métodos *Forward* e *Backward* de integração são equivalentes aos respectivos métodos de derivação.

O método trapezoidal é também conhecido como método de Tustin, ou transformação bilinear. Uma outra forma de se obter a transformação bilinear é observando que  $z = e^{sT_s} \Rightarrow s = (1/T_s) \ln(z)$ . A função  $\ln(z)$  pode ser expandida como

$$\ln(z) = 2 \left( \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right). \quad (5.27)$$

Logo,

$$\begin{aligned} s = \frac{1}{T_s} \ln(z) &= \frac{2}{T_s} \left( \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right) \\ &\approx \frac{2}{T_s} \frac{(z-1)}{(z+1)}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

ou seja,

$$C_D(z) \approx C(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{(z-1)}{(z+1)}} \quad (5.29)$$

Note que as regras descritas até o momento representam mapeamentos do plano- $s$  no plano- $z$ . Como  $s = j\omega$  representa o limiar de estabilidade no plano- $s$ , pode-se analisar como essa linha é mapeada no plano- $z$  para se ter uma ideia gráfica do mapeamento.

Para a regra retangular para frente,  $z = 1 + T_s s$ . Substituindo  $s = j\omega$ , tem-se que  $z = 1 + jT_s \omega$ . Observe que o plano- $z$  é dado apenas por um deslocamento do plano- $s$ , como ilustrado na Figura 5.3 (a). Pode-se concluir que um sistema estável em  $s$  pode então ser mapeado em um sistema instável em  $z$ . Para um polo estável no plano  $s$  ser mapeado em um polo estável no plano  $z$  pela aproximação retangular para frente, deve-se garantir que  $|1 + T_s s| < 1$ . Suponha, por exemplo, que  $s$  seja real. Assim,

$$-1 < 1 + T_s s < 1 \Rightarrow -2 < T_s s < 0$$

Com isso, conclui-se que: (i)  $s < 0$ , o que é trivial; (ii) supondo  $s = -s_0$ ,  $s_0 > 0$ , tem-se que  $T_s s_0 < 2 \Rightarrow T_s < \frac{2}{s_0}$ .

Para a regra retangular para trás,  $z = \frac{1}{1 - T_s s}$ . Adicionando e subtraindo  $1/2$ , obtém-se

$$z = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{1 - T_s s} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1 + T_s s)}{(1 - T_s s)} \quad (5.30)$$

Substituindo  $s = j\omega$ ,

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1 + j\omega T_s)}{(1 - j\omega T_s)} \quad (5.31)$$

Como  $\left| \frac{1 + j\omega T_s}{2(1 - j\omega T_s)} \right| = \frac{1}{2}$ , pode-se observar que o mapeamento de  $j\omega$  no plano- $z$  será um círculo, como ilustrado na Figura 5.3 (b). O semiplano da esquerda do plano- $s$  é mapeado para dentro da circunferência da Figura 5.2 b.

Por fim, para a transformação bilinear, com  $s = j\omega$ , tem-se

$$z = \frac{2 + j\omega T_s}{2 - j\omega T_s} \quad (5.32)$$

Como  $|z| = 1$ , a reta  $j\omega$  do plano- $s$  é mapeado na circunferência unitária no plano- $z$ . O semiplano da esquerda do plano- $s$  é mapeado no círculo unitário no plano- $z$ , como ilustrado na Figura 5.3 (c).

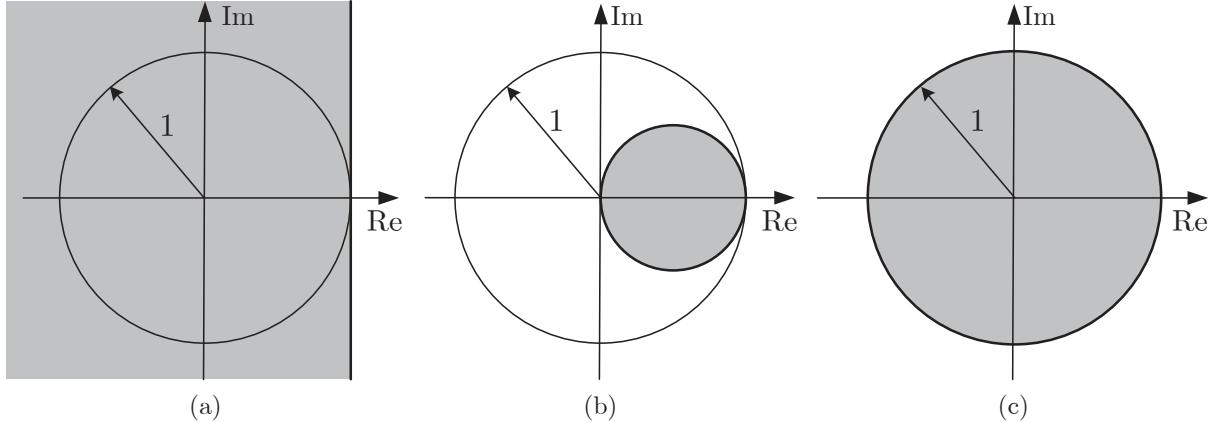


Figura 5.3: Mapeamento do semiplano da esquerda do plano- $s$  no plano- $z$  para (a) retangular para frente; (b) retangular para trás; (c) bilinear.

O comando em MATLAB para transformar uma função de transferência contínua  $C(s)$  em uma discreta  $C_D(z)$  com período de amostragem  $T_s$ , através da transformada bilinear, é:

```
C_D = c2d(C, T_s, 'tustin');
```

**Exemplo 5.2: Transformação Bilinear:** Obtenha o equivalente discreto para o seguinte sistema, utilizando o método de Tustin.

$$C(s) = \frac{1}{0,1s + 1}$$

utilizando  $T_s = 0,1$  s.

**Solução:**

$$C_D(z) = \frac{1}{0,1\frac{2}{0,1}\frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z+1}{3z-1}$$

Utilizando o MATLAB, o exemplo pode ser resolvido como

```
clear all; clc;
num_C = 1; den_C = [0.1 1];
T_s = 0.1;
C = tf(num_C, den_C);
disp('C_D(z) = ');
C_D = c2d(C, T_s, 'tustin')
```

Apesar de toda a região estável do plano- $s$  (semiplano da esquerda) ser mapeada dentro de toda a região estável do plano- $z$  (círculo unitário), há distorções (*warping*). Seja  $\omega_A$  um ponto no eixo imaginário do plano- $s$ . Como visto, pontos sobre o eixo imaginário do plano- $s$  são mapeados em pontos sobre a circunferência unitária no plano- $z$  e vice-versa. Utilizando a transformação bilinear de  $s = 0 + j\omega_A$  para  $z$ , tem-se

$$j\omega_A = \frac{2}{T_s} \frac{(z-1)}{(z+1)} \quad (5.33)$$

Considere  $\omega_D$ , tal que,

$$z = e^{sT_s} = e^{j\omega_D T_s} \quad (5.34)$$

Ao substituir (5.34) em (5.33) pode-se medir a distorção de frequência que ocorre quanto o método de Tustin é utilizado para discretizar uma função de transferência, pois

$$j\omega_A = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega_D T_s} - 1}{e^{j\omega_D T_s} + 1} = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega_D T_s/2} (e^{j\omega_D T_s/2} - e^{-j\omega_D T_s/2})}{e^{j\omega_D T_s/2} (e^{j\omega_D T_s/2} + e^{-j\omega_D T_s/2})} = \frac{2}{T_s} \frac{2j \sin(\omega_D T_s/2)}{2 \cos(\omega_D T_s/2)}, \quad (5.35)$$

ou seja,

$$\omega_A = \frac{2}{T_s} \tan(\omega_D T_s/2) \quad (5.36)$$

Se  $\tan(\omega_D T_s/2) \approx \omega_D T_s/2$ , ou seja, quando  $T_s$  é pequeno (altas frequências de amostragem),  $\omega_A \approx \omega_D$  e, portanto, a distorção é minimizada. Uma forma de compensar as distorções em uma dada frequência  $\omega_c$ , geralmente a frequência de canto do filtro, é utilizar o procedimento de pré-distorção (*pre-warping*) na frequência  $\omega_c$ . A ideia é garantir que em  $\omega_c$ , a função de transferência discreta tenha as mesmas características da função em tempo contínuo correspondente. Note que isso pode ser feito se

$$s = \frac{\omega_c}{\tan(\omega_c T_s/2)} \frac{(z-1)}{(z+1)} \quad (5.37)$$

Portanto, com *pre-warping*, tem-se a seguinte equivalência

$$C_D(z) = C(s)|_{s=\frac{\omega_c}{\tan(\omega_c T_s/2)} \frac{(z-1)}{(z+1)}} \quad (5.38)$$

O comando em MATLAB para transformar uma função de transferência contínua  $C(s)$  em uma discreta  $C_D(z)$  com período de amostragem  $T_s$ , através da transformada bilinear e *pre-warping* em  $\omega_c$  é:  
`C_D = c2d(C, T_s, 'prewarp', wc);`

Algumas observações sobre os métodos de discretização:

- Quanto maior a frequência de amostragem, maior é a equivalência entre o métodos e maior é a aproximação com o sistema em tempo contínuo original. Mas cuidado com o aumento exagerado de  $f_s$ .
- Por questões de estabilidade, não utilizar a regra retangular para frente.
- Se os requisitos de frequência de amostragem forem apertados, melhor utilizar Tustin e mapeamento casado polo zero, pois produzem menos distorções em relação a  $z = esT_s$ .
- Com Tustin e mapeamento casado polo zero, as funções de transferência discretas serão sempre bipróprias. Se isso for indesejável, utilizar então a versão estritamente própria do casamento polo zero.

## 5.4 Aproximação por Segurador de Ordem Zero

Esta aproximação é utilizada quando se deseja obter uma representação discreta de um sistema incluindo o efeito do segurador de ordem zero, conforme apresentado na Figura 5.4.

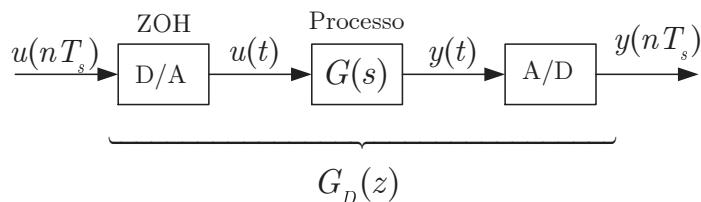


Figura 5.4: Equivalência do subsistema ZOH + processo + A/D.

O equivalente discreto de  $G(s)$  com ZOH pode ser obtido como:

$$G_D(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} G(s) \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} - \mathcal{Z} \left\{ e^{-T_s s} \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (5.39)$$

Como  $e^{-T_s s}$  é exatamente um atraso de um período de amostragem, verifica-se que

$$\mathcal{Z} \left\{ e^{-T_s s} \frac{G(s)}{s} \right\} = z^{-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \quad (5.40)$$

Portanto,

$$G_D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (5.41)$$

Considere que a resposta ao degrau do sistema em tempo discreto seja coincidente com a do sistema em tempo contínuo nos instantes de amostragem, ou seja,

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ G_D(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=nT_s}. \quad (5.42)$$

Assim,

$$G_D(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right] \right\} = \mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right], \quad (5.43)$$

ou ainda,

$$G_D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right]. \quad (5.44)$$

Por essa razão, a aproximação por ZOH também é conhecida com **invariância ao degrau**.

Para realizar um projeto de controle diretamente no plano-z a partir de uma planta contínua, deve-se, inicialmente, obter o equivalente discreto da planta pelo método ZOH. Atenção especial deve ser dada quando a ordem relativa do sistema (a diferença entre o número de polos finitos e o número de zeros finitos) é  $or \geq 2$ . Nesses casos, se o período de amostragem for suficientemente pequeno, o sistema em tempo discreto pode apresentar zeros de fase não-mínima, mesmo que o sistema em tempo contínuo seja de fase mínima [Astrom, Hagander e Sternby 1980], [Hagiwara, Yuasa e Araki 1992]. Para técnicas de projeto que exigem sistemas de fase mínima, isso é um problema.

Uma solução consiste em utilizar o método de discretização da **invariância ao impulso**. Nesse caso, o efeito do atraso do ZOH não é inserido no modelo em tempo discreto, o que pode resultar em especificações de desempenho não atendidas no projeto do controlador. Tente, nesse caso, utilizar um período de amostragem menor (mas não muito menor) que o necessário para que o efeito do atraso de  $T_s/2$  não seja relevante.

## 5.5 Discretização de Controladores PID

O PID básico é dado por

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (5.45)$$

A ação de controle pode ser dividida nas parcelas proporcional, integrativa e derivativa, respectivamente dadas por

$$u_P(t) = K_P e(t), \quad (5.46)$$

$$u_I(t) = \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (5.47)$$

e,

$$u_D(t) = K_P T_D \frac{d e(t)}{dt} \quad (5.48)$$

A discretização da parte proporcional é dada por  $u_P[n] = K_P e[n]$ . Ao considerar a aproximação retangular para trás nas parcelas integrativa e derivativa, chega-se em:

$$u_I[n] = \frac{K_P T_s}{T_I} \sum_{k=0}^n e[k] \Rightarrow u_I[n] = u_I[n-1] + \frac{K_P T_s}{T_I} e[n], \quad (5.49)$$

e,

$$u_D[n] = \frac{K_P T_D}{T_s} (e[n] - e[n-1]) \quad (5.50)$$

Assim, a ação de controle corresponde à soma das três parcelas, ou seja:

$$u[n] = u_P[n] + u_I[n] + u_D[n] \quad (5.51)$$

Esta formulação é conhecida na literatura como PID posicional, tendo como vantagem o fato das parcelas proporcional, integrativa e derivativa serem obtidas separadamente.

Se o método de Tustin for utilizado para a parcela integrativa, tem-se que

$$u_I[n] = u_I[n-1] + \frac{K_P T_s}{2T_I} (e[n] + e[n-1]), \quad (5.52)$$

Como visto no capítulo anterior, a função de transferência do controle PID realista é dada por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{(T_D/N)s + 1} \right), \quad (5.53)$$

onde  $N$  é um parâmetro tipicamente adotado entre 3 e 20. A função de transferência da parcela derivativa isolada é dada por:

$$\frac{U_D(s)}{E(s)} = K_P \frac{T_D s}{(T_D/N)s + 1} \quad (5.54)$$

Utilizando a técnica de discretização retangular para trás,

$$\frac{U_D(z)}{E(z)} = \frac{K_P N T_D}{(T_D + N T_s)} \frac{z - 1}{\left( z - \frac{T_D}{(T_D + N T_s)} \right)} \quad (5.55)$$

Para  $T_D$  pequeno, o que ocorre frequentemente, o polo ficará situado próximo de  $\{0\}$ , o que representa uma boa resposta. A equação de diferenças da parcela derivativa é dada por:

$$u_D[n] = \frac{T_D}{(T_D + N T_s)} u_D[n-1] + \frac{K_P N T_D}{(T_D + N T_s)} (e[n] - e[n-1]) \quad (5.56)$$

Para amenizar o efeito *kick-derivativo*, a parcela derivativa pode atuar diretamente na realimentação de saída, o que resulta em:

$$U(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) E(s) - K_P \frac{T_D s}{(T_D/N)s + 1} Y(s), \quad (5.57)$$

Com isso, a seguinte equação de diferenças é obtida:

$$u_D[n] = \frac{T_D}{(T_D + NT_s)} u_D[n-1] - \frac{K_P N T_D}{(T_D + NT_s)} (y[n] - y[n-1]) \quad (5.58)$$

Quando a implementação do controlador é digital, uma forma simples de *anti windup* consiste em “congelar” a ação integrativa quando há saturação, conforme o código abaixo

```
% PID posicional com anti-windup (v.1)
if (u[n-1] ≥ sat || u[n-1] ≤ -sat)
    e_i[n]=0;
else
    e_i[n]=r[n]-y[n];
end
e[n] = r[n]-y[n];
u_P[n] = K_P*e[n];
u_I[n] = u_I[n-1] + (K_P*T_s/T_I)*e_i[n]; % Ex: backward
u_D[n] = T_D / (T_D+N*T_s) * u_D[n-1] - (K_P*N*T_D) / (T_D+N*T_s) * (y[n]-y[n-1]);
u[n]=u_P[n]+u_I[n]+u_D[n];
```

Assume-se que a saturação do atuador é conhecida e igual a  $\pm sat$ . Outra forma de anti-windup consiste no equivalente discreto do sistema da Figura 4.33, que pode ser realizada pela seguinte lógica ( $e_u$  representa a diferença do sinal de controle antes e depois da saturação):

```
% PID posicional com anti-windup (v.2)
a = Ts/T_t;
if (u[n-1] ≥ sat)
    e_u = u[n-1] - sat;
elseif (u[n-1] ≤ -sat)
    e_u = u[n-1] + sat;
else
    e_u = 0;
end
e[n] = r[n]-y[n];
u_P[n] = K_P*e[n];
u_I[n] = u_I[n-1] + (K_P*T_s/T_I)*e[n] - a*e_u; % Ex: backward
u_D[n] = T_D / (T_D+N*T_s) * u_D[n-1] - (K_P*N*T_D) / (T_D+N*T_s) * (y[n]-y[n-1]);
u[n]=u_P[n]+u_I[n]+u_D[n];
```

Outra forma de PID digital é denominada PID incremental ou PID de velocidade. Tal forma é obtida tomando-se a diferença do PID de posição no instante  $n$  e no instante  $(n - 1)$ , ou seja;

$$\Delta u[n] = u[n] - u[n-1] = \Delta u_P[n] + \Delta u_I[n] + \Delta u_D[n] \quad (5.59)$$

Assim,

$$u[n] = u[n-1] + \Delta u_P[n] + \Delta u_I[n] + \Delta u_D[n] \quad (5.60)$$

Assumindo a aproximação retangular para trás nas parcelas integrativa e derivativa, os termos incrementais são dados por:

$$\Delta u_P[n] = u_P[n] - u_P[n-1] = K_P(e[n] - e[n-1]), \quad (5.61)$$

$$\Delta u_I[n] = u_I[n] - u_I[n-1] = \frac{K_P T_s}{T_I} \sum_{k=0}^n e[k] - \frac{K_P T_s}{T_I} \sum_{k=0}^{n-1} e[k] = \frac{K_P T_s}{T_I} e[n], \quad (5.62)$$

e, para a derivada ideal,

$$\begin{aligned} \Delta u_D[n] &= u_D[n] - u_D[n-1] = \frac{K_P T_D}{T_s} [(e[n] - e[n-1]) - (e[n-1] - e[n-2])] = \\ &\quad \frac{K_P T_D}{T_s} (e[n] - 2e[n-1] + e[n-2]). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Se o método de Tustin for utilizado para a parcela integrativa, chega-se em:

$$\Delta u_I[n] = \frac{K_P T_s}{2T_I} (e[n] + e[n-1]), \quad (5.64)$$

Se a derivada da saída (com sinal trocado) for considerada ao invés da derivada do erro, tem-se:

$$\Delta u_D[n] = -\frac{K_P T_D}{T_s} (y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]) \quad (5.65)$$

Ainda, se for considerada a forma realista com filtro na parcela derivativa e aproximação retangular para trás, tem-se que:

$$\Delta u_D[n] = \frac{T_D}{(T_D + NT_s)} \Delta u_D[n-1] - \frac{K_P N T_D}{(T_D + NT_s)} (y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]). \quad (5.66)$$

Esta forma somente é utilizada se a parcela integral estiver presente, ou seja, não é diretamente válida para controladores P e PD. A vantagem deste método é que, a cada passo de cálculo, apenas valores incrementais são calculados para as parcelas do controlador, o que pode reduzir problemas com precisão numérica no cálculos dos termos separados, mas não no cálculo total da ação de controle. Na hipótese de falha em alguma iteração do algoritmo, ao retornar para a condição normal de operação a ação de controle se encontrará com 'último valor válido'.

O *anti-windup* na forma incremental pode ser incrementado como:

```
% PID incremental com anti-windup
e[n] = r[n]-y[n];
Du_P = K_P*(e[n]-e[n-1]);
Du_I=(K_P*T_s/(2*T_I))*(e[n] + e[n-1]);
u[n] = u[n-1] + Du_P + Du_I;
```

```
if (u[n] ≥ sat)
u[n] = sat;
elseif (u[n] ≤ -sat)
u[n] = -sat;
end
```

# 6

## Projeto de Controladores Contínuos

*Coming Soon.*

## Análise de Sistemas de Controle Digitais

Neste capítulo será feita uma análise de sistemas de controle digitais no plano- $z$ . Tal análise servirá de suporte para o projeto de controladores digitais diretamente no plano- $z$ .

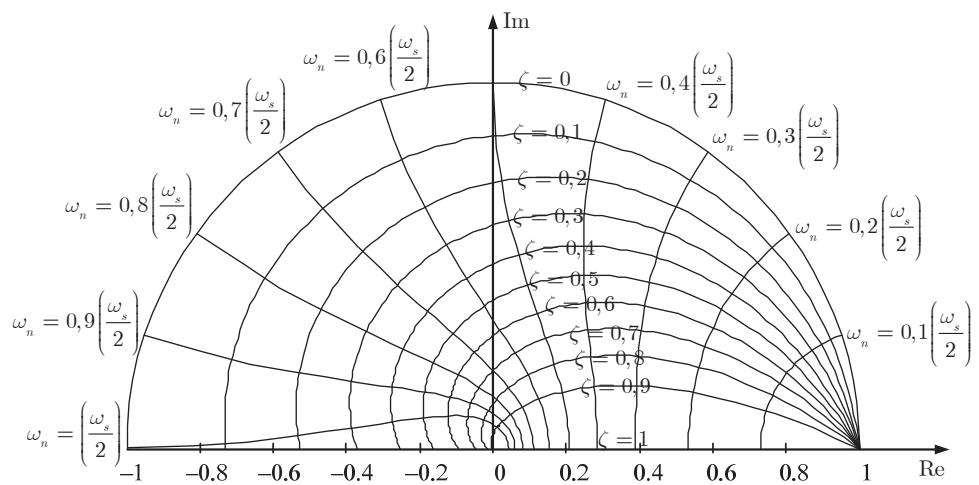
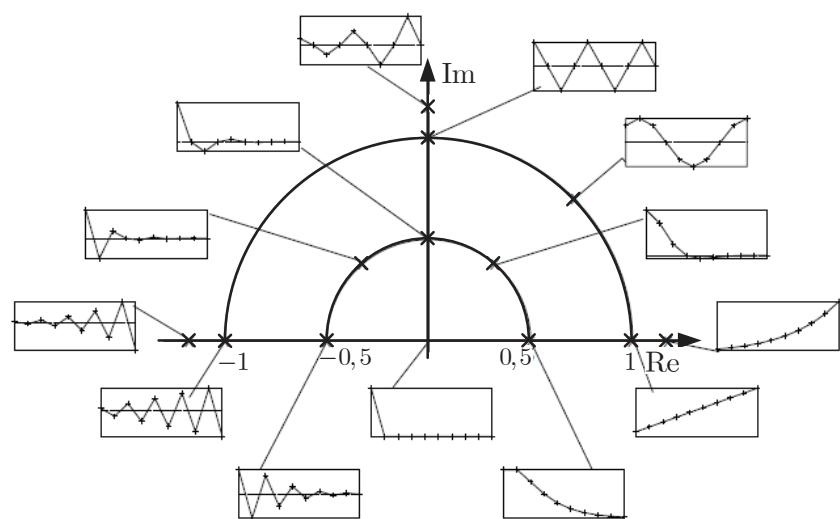
### 7.1 Do plano- $s$ para o plano- $z$

No Capítulo 3 as seguintes relações entre o plano- $s$  e o plano- $z$  foram demonstradas:

- o semiplano da esquerda do plano- $s$  é mapeado no interior do círculo unitário no plano- $z$ ;
- linhas verticais no plano- $s$  com  $\zeta\omega_n$  constante, que estão relacionadas com o tempo de assentamento da resposta transitória, são mapeadas em circunferências concêntricas à origem no plano- $z$ ;
- linhas horizontais no plano- $s$  com  $\omega_d$  constante, que estão relacionadas com o tempo de pico da resposta transitória, são mapeadas em linhas radiais no plano- $z$ ;
- linhas radiais no plano- $s$  com  $\zeta$  constante, que estão relacionadas com o sobresinal da resposta transitória, são mapeadas em espirais no plano- $z$ .

No plano- $s$ , linhas com  $\zeta$  constantes são normais a linhas com  $\omega_n$  constantes. No plano- $z$ , tal propriedade se mantém, ou seja, o mapeamento do plano- $s$  para o plano- $z$  (e vice-versa) é um mapeamento conformal. A Figura 7.1 ilustra linhas com  $\zeta$  constante e  $\omega_n$  constante no plano- $z$ . O comando `zgrid` do MATLAB pode ser utilizado para isto.

A relação entre a posição de polos dominantes de malha fechada de um sistema no domínio- $z$  e a resposta transitória está esquematizada na Figura 7.2.

Figura 7.1: Linhas no plano- $z$  com com  $\zeta$  constante e  $\omega_n$  constante.Figura 7.2: Linhas no plano- $z$  com com  $\zeta$  constante e  $\omega_n$  constante.

Exemplo 7.1: Indique no plano- $s$  e no plano- $z$  a região aceitável para localização dos polos de malha fechada de um sistema com  $\zeta \geq 0,5$ ,  $\omega_n \geq 1$  e  $\zeta\omega_n \geq 0,5$ . Considere período de amostragem  $T_s = 0,2$ .

Solução: como

$$z = e^{sT_s} = e^{-\zeta\omega_n T_s} e^{j\omega_d T_s}$$

tem-se que

$$|z| = e^{-\zeta\omega_n T_s}$$

$$\zeta\omega_n \geq 0,5 \Rightarrow |z| \leq e^{-0,5 \cdot 0,2} = 0,9$$

ou seja,  $\zeta\omega_n \geq 0,5$  corresponde no plano- $z$  ao interior do círculo de raio 0,9. A linha  $\zeta = 0,5$  é mapeada em um espiral no plano- $z$ . Tal espiral pode ser visualizada com o comando `zgrid` do MATLAB. A semicircunferência  $\omega_n = 1$  no plano- $s$  é mapeada no plano- $z$  também com o auxílio do comando `zgrid`. Note, no entanto, que neste caso a faixa de frequências de 0 a  $\omega_s/2$  é normalizada entre 0 e  $\pi$ , ou seja, para obter a curva  $\omega_n = \omega_s/2$ , deve-se entrar com  $\pi$  no argumento de `zgrid`. Para obter a curva para uma frequência  $\omega_n$  qualquer, deve-se entrar, portanto, com o argumento  $2\pi\omega_n/\omega_s = \omega_n \cdot T_s$  em `zgrid`. A Figura 7.3 ilustra o mapeamento. O seguinte *script* foi utilizado para definir a região no plano- $z$ .

```
clear all; close all; clc;
zeta = 0.5; w_n = 1; T_s = 0.2;
x = linspace(-exp(-.1), exp(-.1), 1e5);
plot(x, sqrt(0.904837418035960^2 - x.^2), 'k--');
hold on;
plot(x, -sqrt(0.904837418035960^2 - x.^2), 'k--');
zgrid(zeta, w_n*T_s);
axis('square');
```

## 7.2 Análise de Estabilidade

Considere o sistema em malha fechada representado na Figura 7.4.

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$F(z) = G(z)H(z) \quad (7.1)$$

A função de transferência de malha fechada é escrita como

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + F(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}. \quad (7.2)$$

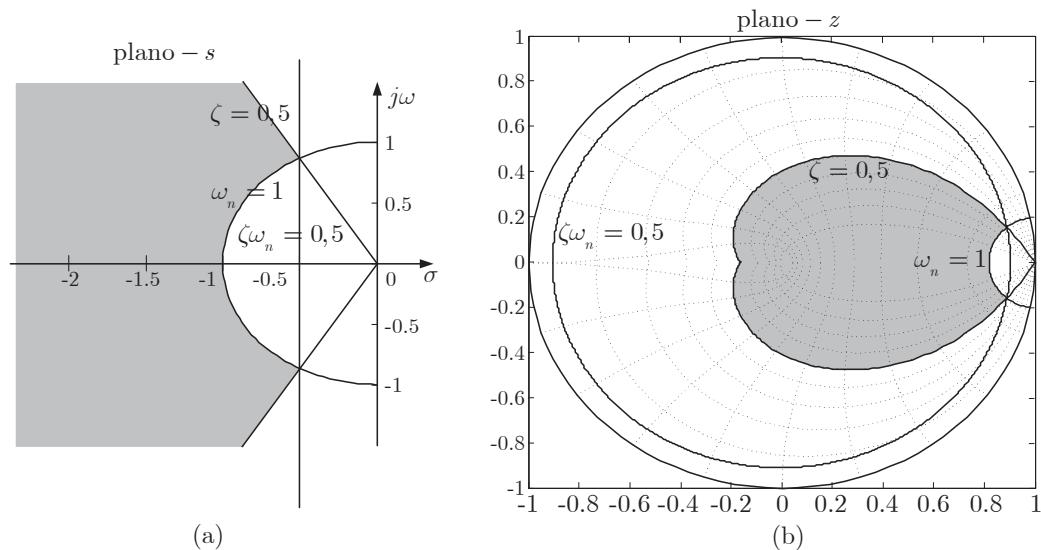
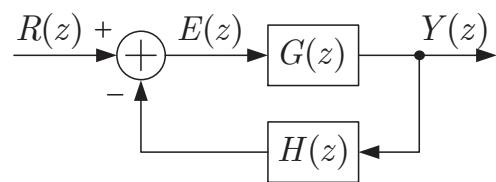
Figura 7.3: Mapeamento  $s \rightarrow z$  do Exemplo 7.1.

Figura 7.4: Sistema em tempo discreto em malha fechada.

A estabilidade deste sistema é determinada pela localização dos polos de malha fechada, obtidos pela solução da equação característica:

$$P(z) = 1 + F(z) = 0. \quad (7.3)$$

O sistema é absolutamente estável se os polos de malha fechada possuírem raio menor do que a unidade.

### 7.2.1 Critério de Jury

Caso não se conheça explicitamente as raízes de  $P(z)$ , o critério de Jury pode ser utilizado para determinar a estabilidade absoluta de um sistema. Considere a equação característica dada por:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad (7.4)$$

com  $a_0 > 0$ . A seguinte tabela é construída

Linha	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	...	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$
2	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
3	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	...	$b_1$	$b_0$	
4	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
5	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	...	$c_0$		
6	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{n-2}$		
$\vdots$	$\vdots$							
$2n - 5$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$				
$2n - 4$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$				
$2n - 3$	$q_2$	$q_1$	$q_0$					

onde

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$\vdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2$$

Note que a última linha da tabela possui três elementos. Para sistemas de segunda ordem, há apenas uma linha na tabela. Segundo o critério de Jury, o sistema é estável se

1.  $|a_n| < a_0$ ;
2.  $P(z)|_{z=1} > 0$ ;
3.  $P(z)|_{z=-1} > 0$  para  $n$  par e  $< 0$  para  $n$  ímpar;
4.  $|b_{n-1}| > |b_0|; |c_{n-2}| > |c_0|; \dots; |q_2| > |q_0|$ .

Exemplo 7.2: Examine a estabilidade do sistema com a seguinte equação característica:

$$P(z) = z^4 - 1,2z^3 + 0,07z^2 + 0,3z - 0,08 = 0$$

**Solução:** tem-se que  $a_0 = 1, a_1 = -1,2, a_2 = 0,07, a_3 = 0,3, a_4 = -0,08$ .

A propriedade 1 é satisfeita, pois  $0,08 < 1$ .

Como  $P(1) = 1 - 1,2 + 0,07 + 0,3 - 0,08 = 0,09 > 0$ , a propriedade 2 é satisfeita.

Como  $P(-1) = 1 + 1,2 + 0,07 - 0,3 - 0,08 = 1,89 > 0$ , e  $n$  é par, a propriedade 3 também é satisfeita.

Para verificar a propriedade 4, tem-se que

$$\begin{aligned} b_0 &= \begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = -0,204; \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = -0,0756; \\ b_2 &= \begin{vmatrix} a_4 & a_1 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} = 1,176; \quad b_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} = -0,994 \\ c_2 &= \begin{vmatrix} b_3 & b_0 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} = 0,946; \quad c_0 = \begin{vmatrix} b_3 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0,315 \end{aligned}$$

Como  $|b_3| > |b_0|$  e  $|c_2| > |c_0|$ , o sistema é estável. De fato, pode-se observar que as raízes da equação característica são  $\{0,8; -0,5; 0,5; 0,4\}$ .

Exemplo 7.3: Considere um sistema discreto com realimentação unitária, cuja função de transferência no ramo direto é dada por

$$G(z) = \frac{K(0,3679z + 0,2642)}{(z - 0,3679)(z - 1)}$$

Determine a faixa de valores do ganho  $K$  para que o sistema seja estável.

Solução: a função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K(0,3679z + 0,2642)}{z^2 + (0,3679K - 1,3679)z + 0,3679 + 0,2642K}$$

A equação característica é dada por

$$P(z) = z^2 + (0,3679K - 1,3679)z + 0,3679 + 0,2642K = 0$$

Como o sistema em questão é de segunda ordem, o critério de Jury é simplesmente dado por

1.  $|a_2| < a_0$
2.  $P(1) > 0$
3.  $P(-1) > 0, n = 2 = \text{par}$

Aplicando a primeira condição, verifica-se que

$$|0,3679 + 0,2642K| < 1 \Rightarrow -5.1775 < K < 2,3925$$

Pela segunda condição,

$$P(1) = 1 + (0,3679K - 1,3679) + 0,3679 + 0,2642K > 0 \Rightarrow K > 0$$

Da terceira condição,

$$P(-1) = 1 - (0,3679K - 1,3679) + 0,3679 + 0,2642K > 0 \Rightarrow K < 26,382$$

Portanto, das três condições, verifica-se que  $0 < K < 2,3925$  para que o sistema seja estável.

## 7.3 Análise de Erro em Regime Estacionário

Alterações na entrada de referência causarão erros inevitáveis em regime transitório e, possivelmente, erros estacionários. Nesta seção será estudado o tipo de erro estacionário causado pela incapacidade de um sistema em tempo discreto em seguir determinados tipos de sinal de entrada. Um sistema pode não apresentar erro estacionário a uma determinada entrada, mas apresentar um erro diferente de zero a uma outra entrada.

Sistemas de controle em tempo discreto podem ser classificados de acordo com o número de polos de malha aberta em  $z = 1$ . Suponha que um sistema possua a seguinte função de transferência em malha aberta

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (7.5)$$

onde  $\frac{B(z)}{A(z)}$  não possui nem polo nem zero em  $z = 1$ . Tal sistema é classificado como tipo 0 se  $N = 0$ , tipo 1 se  $N = 1$ , tipo 2 se  $N = 2$ , e assim por diante. O tipo de sistema está relacionado com o erro em regime estacionário para uma dada entrada.

Considere novamente o sistema em tempo discreto da Figura 7.4. O sinal de erro é dado por

$$E(z) = R(z) - F(z)E(z). \quad (7.6)$$

Logo,

$$E(z) = \frac{1}{1 + F(z)}R(z). \quad (7.7)$$

Aplicando o teorema do valor final, tem-se

$$e_{ss} = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT_s) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + F(z)} R(z) \right]. \quad (7.8)$$

O erro estático de posição é definido em relação à entrada degrau unitário  $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ , ou seja

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + F(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + F(z)}. \quad (7.9)$$

Define-se  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)}$  como a constante de erro estático de posição. Logo

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}. \quad (7.10)$$

Note que erro estático de posição se torna zero se  $K_p \rightarrow \infty$ , o que requer que  $F(z)$  possua um polo (ou mais) em  $z = 1$  (seja pelo menos tipo 1).

Para entrada rampa unitária,  $R(z) = \frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ , o erro estático de velocidade é definido tal que

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + F(z)} \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T_s}{(1 - z^{-1})F(z)}. \quad (7.11)$$

Define-se  $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})F(z)}{T_s} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1}) \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)}}{T_s}$  como a constante de erro estático de velocidade. Logo

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}. \quad (7.12)$$

Note que erro estático de velocidade se torna zero se  $K_v \rightarrow \infty$ , o que requer que  $F(z)$  possua pelo menos dois polos em  $z = 1$  (seja pelo menos tipo 2).

O erro estático de aceleração é definido em função da entrada parábola unitária  $R(z) = \frac{T_s^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$ , de maneira que

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + F(z)} \frac{T_s^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T_s^2}{(1 - z^{-1})^2 F(z)}. \quad (7.13)$$

Similarmente, define-se  $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 F(z)}{T_s^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)}}{T_s^2}$  como a constante de erro estático de aceleração. Desta forma,

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}. \quad (7.14)$$

Note que o erro estático de aceleração se torna zero se  $K_a \rightarrow \infty$ , o que requer que  $F(z)$  possua pelo menos três polos em  $z = 1$  (seja pelo menos tipo 3). A Tabela 7.1, similar à apresentada no Capítulo 4 para sistemas de tempo contínuo, relaciona o tipo de sistema com o erro em regime estacionário.

Tabela 7.1: Sistema de controle com realimentação unitária.

	$e_{ss}$	Posição	$e_{ss}$	Velocidade	$e_{ss}$	Aceleração
Tipo 0	$\frac{1}{1+K_p}$			$\infty$		$\infty$
Tipo 1	0			$\frac{1}{K_v}$		$\infty$
Tipo 2	0			0		$\frac{1}{K_a}$

## 7.4 Lugar das Raízes

Em sistemas de tempo discreto, a equação característica pode ser escrita como:

$$1 + F(z) = 0 \Rightarrow F(z) = -1. \quad (7.15)$$

Verifica-se que no caso de sistemas de tempo discreto, as condições necessárias para que um dado ponto  $z$  esteja sobre o lugar das raízes (seja um polo de malha fechada) é semelhante ao caso de um ponto  $s$  genérico em sistemas contínuos, isto é, as seguintes condições precisam ser satisfeitas:

$$\text{Condição de módulo: } |F(z)| = 1 \quad (7.16)$$

$$\text{Condição angular: } \angle F(z) = \pm 180^\circ (2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

Para construção do lugus das raízes de sistemas discreto utilizando o MATLAB, o comando `rlocus` é utilizado da mesma forma que em sistemas de tempo contínuo.

**Exemplo 7.4:** Determine a equação característica do sistema da Figura 7.5 e trace o gráfico do lugar das raízes utilizando o MATLAB, considerando  $T_s = 0,5$  s e  $T_s = 1,5$  s.

Solução: Inicialmente, o equivalente discreto de  $G(s)$  com o ZOH é obtido como

$$\mathcal{Z}\{ZOH(s)G(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT_s}}{s}\frac{1}{s+1}\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

Efetuando expansão em frações parciais e a transformada- $z$ , tem-se

$$\mathcal{Z}\{ZOH(s)G(s)\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}\right\} = (1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_s}}\right) = \frac{1-e^{-T_s}}{z-e^{-T_s}}$$

Como há realimentação unitária, a função de transferência de malha aberta é dada por

$$F(z) = C(z)\mathcal{Z}\{ZOH(s)G(s)\} = \frac{Kz}{z-1} \frac{1-e^{-T_s}}{z-e^{-T_s}}$$

Para  $T_s = 0,5$ , tem-se

$$F(z) = \frac{0,3935Kz}{(z-1)(z-0,6065)}$$

Para  $T_s = 1,5$ , tem-se

$$F(z) = \frac{0,7769Kz}{(z-1)(z-0,2231)}$$

A Figura 7.6 apresenta os gráficos do lugar das raízes para os casos considerados no exemplo. O código MATLAB utilizado para gerar as figura é o seguinte:

```
clear all; close all; clc;
T_s = 0.5;
num_1 = [1-exp(-T_s) 0];
den_1 = conv([1 -1], [1 -exp(-T_s)]);
F_1 = tf(num_1, den_1, T_s);
subplot(121);
rlocus(F_1);

%%%%%%%%%%%%%
T_s = 1.5;
num_2 = [1-exp(-T_s) 0];
den_2 = conv([1 -1], [1 -exp(-T_s)]);
F_2 = tf(num_2, den_2, T_s);
subplot(122);
rlocus(F_2);
```

Particularmente no Exemplo 7.4 verificou-se que o ganho  $K$  crítico para levar o sistema ao limiar de estabilidade se torna-se maior conforme o período de amostragem é reduzido.

O período de amostragem tem relação direta com a resposta transitória e a estabilidade do sistema. Além de satisfazer os critérios apontados por Nyquist no teorema da amostragem, a escolha de  $T_s$  pode ser feita de acordo com as seguintes regras [Castrucci, Bittar e Sales 2011]:

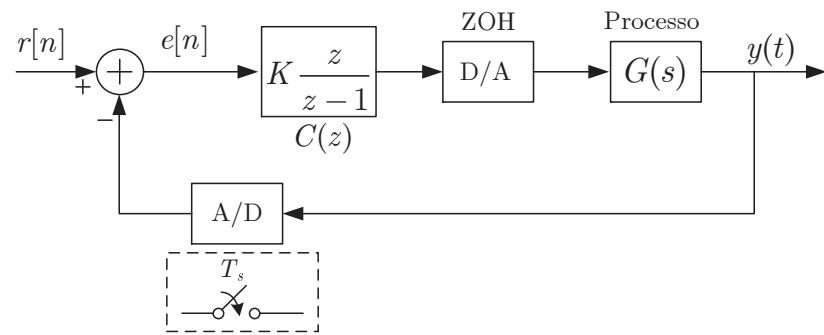
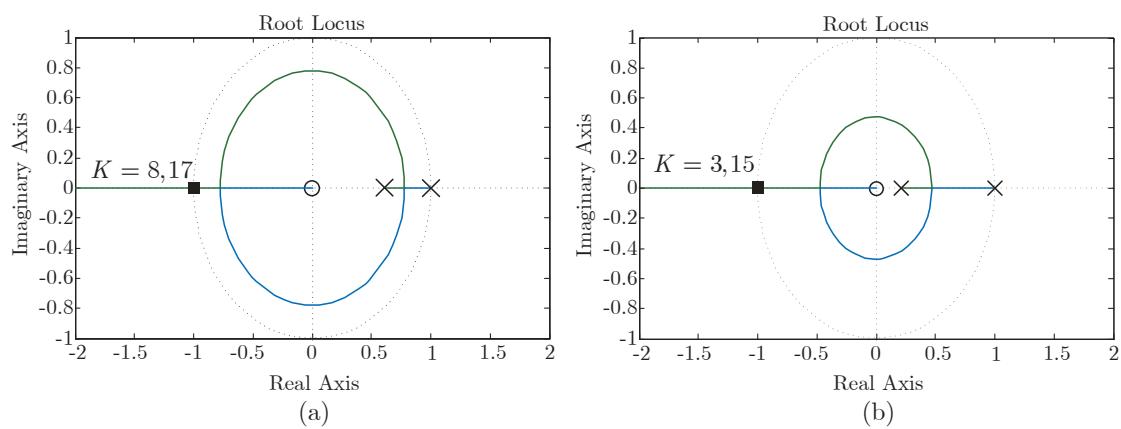


Figura 7.5: Sistema de controle em tempo discreto do Exemplo 7.4.

Figura 7.6: LR do Exemplo 7.4 para (a)  $T_s = 0,5$  e (b)  $T_s = 1,5$ .

- Para sistemas subamortecidos  $T_s$  deve ser escolhido tal que o sinal seja amostrado pelo menos dez vezes durante um ciclo da senoide amortecida;
- Para sistemas amortecidos  $T_s$  deve ser escolhido tal que o sinal seja amostrado pelo menos dez vezes durante o tempo de subida da resposta ao degrau;

O Exemplo 7.5 mostra um particular caso da influência de  $T_s$  na estabilidade.

**Exemplo 7.5:** Determine a faixa de valores de  $T_s$  para que o sistema da Figura 7.7 seja estável.

Solução: Inicialmente, o equivalente discreto de  $G(s)$  com o ZOH. A partir do Exemplo 7.4, pode-se concluir que

$$G(z) = \mathcal{Z}\{ZOH(s)G(s)\} = 10 \frac{1 - e^{-T_s}}{z - e^{-T_s}}$$

A função de transferência de malha fechada é portanto dada por

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{10(1 - e^{-T_s})}{z - (11e^{-T_s} - 10)}$$

Para o sistema ser estável,  $|11e^{-T_s} - 10| < 1$ . Resolvendo a inequação, verifica-se que  $0 < T_s < 0,2$ .

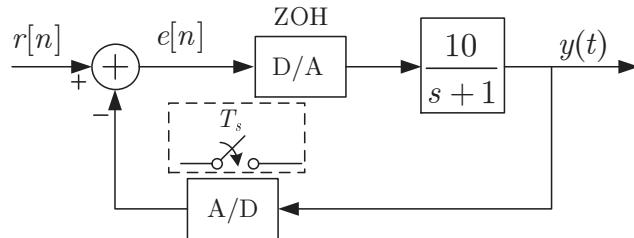


Figura 7.7: Sistema de controle em tempo discreto do Exemplo 7.5.

## 7.5 Resposta em Frequência

Depois de esperar até que as **condições de regime permanente tenham sido alcançadas**, a resposta em frequência de  $G(z)$  pode ser calculada substituindo-se  $z = e^{j\omega T_s}$ . Da mesma forma que em sistemas de tempo contínuo, pode-se mostrar que a resposta em regime estacionário de um sistema LIT discreto para uma entrada  $r(nT_s) = A \sin(n\omega T_s)$  é dada por

$$y_{ss}(nT_s) = A |G(e^{j\omega T_s})| \sin(n\omega T_s + \angle G(e^{j\omega T_s})) = A M \sin(n\omega T_s + \phi) \quad (7.18)$$

**Exemplo 7.6:** Encontre a resposta em frequência do sistema definido pela seguinte equação de diferenças

$$x[n] = r[n] + ax[n - 1], \quad 0 < a < 1$$

assumindo que o período de amostragem é igual a  $T_s$ . Determine a saída em regime estacionário para uma entrada  $r(nT_s) = A \sin(n\omega T_s)$

Solução: aplicando a transformada- $z$ , tem-se

$$X(z) = R(z) + az^{-1}X(z).$$

Assim,

$$G(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Substituindo  $z = e^{j\omega T_s}$ , tem-se

$$G(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T_s}} = \frac{1}{1 - a \cos(\omega T_s) + ja \sin(\omega T_s)},$$

ou seja,

$$|G(e^{j\omega T_s})| = M = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega T_s)}},$$

e,

$$\angle G(e^{j\omega T_s}) = \phi = -\tan^{-1} \left( \frac{a \sin \omega T_s}{1 - a \cos \omega T_s} \right).$$

Portanto,

$$y_{ss}(t) = A \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega T_s)}} \sin \left( n\omega T_s - \tan^{-1} \left( \frac{a \sin \omega T_s}{1 - a \cos \omega T_s} \right) \right)$$

O diagrama de Bode de uma função de transferência discreta pode ser obtido no MATLAB utilizando-se o comando `bode`.

Exemplo 7.7: Utilizando o MATLAB, plote a resposta em frequência da planta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

contínua e discreta com um ZOH na entrada com período de amostragem  $T_s = 0,2$ ,  $T_s = 1$  e  $T_s = 2$  segundos.

Solução: A Figura 7.8 apresenta as curvas. O seguinte *script* foi utilizado para gerar a solução.

```
clear all; close all; clc;
G = tf(1, [1 1 0]);
G_d1 = c2d(G, 0.2, 'zoh');
G_d2 = c2d(G, 1, 'zoh');
G_d3 = c2d(G, 2, 'zoh');
bode(G, 'k', G_d1, 'b', G_d2, 'r', G_d3, 'g');
```

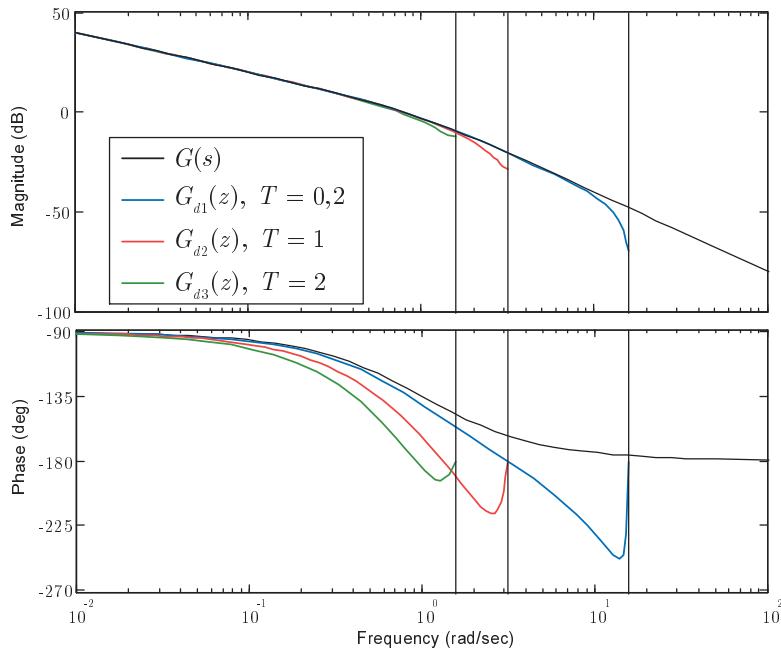


Figura 7.8: Diagramas de Bode do Exemplo 7.6.

Pode-se observar que as curvas para os sistemas discretos se aproximam da curva do sistema contínuo para baixas frequências e diferem substancialmente da resposta contínua para  $\omega = \omega_s/2 = \pi/T_s$ . Observa-se que os gráficos não tendem a curvas assintóticas como no caso contínuo.

### 7.5.1 O Plano- $w$

Como o plano- $z$  mapeia a faixa principal do plano- $s$  (de  $-\omega_s/2$  a  $\omega_s/2$ ) e as faixas complementares no plano- $z$ , métodos convencionais de resposta em frequência, que incluem todo o semiplano esquerdo

do plano- $s$ , não se aplicam no plano- $z$ . Além disso, como frequências no plano- $z$  aparecem como  $z = e^{j\omega T_s}$ , a simplicidade dos gráficos em escala logarítmica seria perdida.

Para superar tais dificuldades na análise em frequência de sistemas discretos, o plano- $z$  é mapeado no plano-w. Tal processo é comumente denominado transformada-w, que também é bilinear, sendo definida como

$$z = \frac{1 + (T_s/2)w}{1 - (T_s/2)w} \quad (7.19)$$

onde  $T_s$  é o período de amostragem. Com tal mapeamento, os métodos de resposta em frequência convencionais, como por exemplo diagrama de Bode, podem ser estendidos para sistemas em tempo discreto. Com a transformação em (7.19), pode-se obter a relação inversa, dada por

$$w = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (7.20)$$

É interessante notar que, com a transformada-z, a faixa principal do plano- $s$  é mapeada dentro do círculo unitário do plano- $z$ . Com a transformada-w, o interior do círculo unitário é mapeado em todo o semiplano da esquerda do plano-w. A Figura 7.9 ilustra estes mapeamentos.

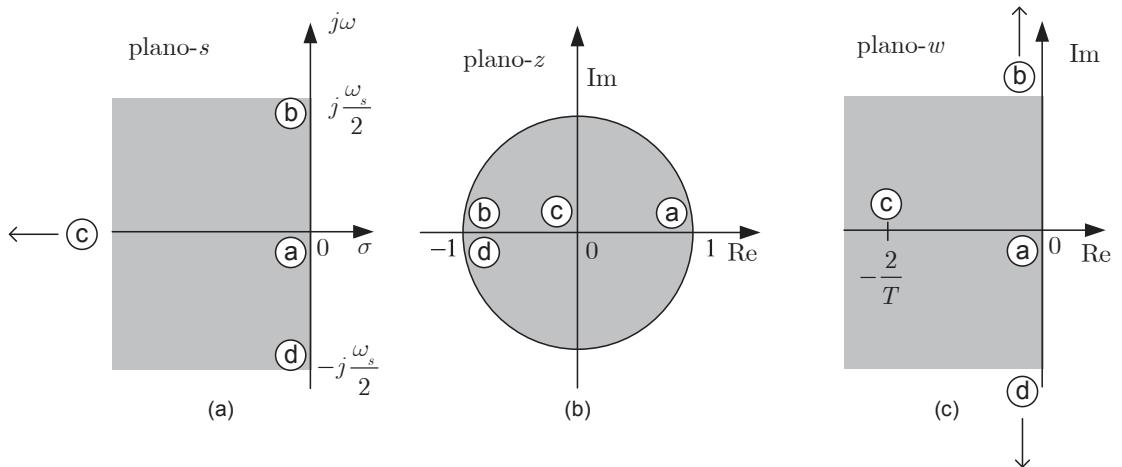


Figura 7.9: Mapeamentos  $s \rightarrow z$  e  $z \rightarrow w$ .

A diferença fundamental entre o plano- $s$  e o plano-w é que a faixa de frequências no plano- $s$  de  $\omega = -\omega_s/2$  a  $\omega = \omega_s/2$  é estendida de  $\nu = -\infty$  a  $\nu = \infty$  no plano-w, onde  $\nu$  é uma frequência fictícia no plano-w. A frequência de Nyquist  $\omega = \omega_s/2$  é mapeada em  $\nu = \infty$ , portanto não pode haver qualquer dinâmica significativa próxima ou acima da frequência de Nyquist.

Uma função de transferência  $G(z)$  é transformada em  $G(w)$  pela transformada-w e tratada como uma função de transferência convencional em  $w$ . Com isso, técnicas convencionais de resposta em frequência podem ser empregadas no plano-w para o projeto de sistemas em tempo discreto, fazendo-se  $w = j\nu$ . O detalhe é que, devido à transformação, a função de transferência é de fase não-mínima. As frequências  $\nu$  e  $\omega$  se relacionam da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 w|_{w=j\nu} &= j\nu = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega T_s} - 1}{e^{j\omega T_s} + 1} \\
 &= \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega T_s/2} - e^{-j\omega T_s/2}}{e^{j\omega T_s/2} + e^{-j\omega T_s/2}} = \frac{2}{T_s} j \tan(\omega T_s/2)
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Com isso,  $G(j\omega)$  pode ser convertida em  $G(j\nu)$  fazendo-se  $\omega = \frac{2}{T_s} \tan^{-1}(\nu T_s/2)$ . Para  $\omega T_s$  pequeno,  $G(s)$  e  $G(w)$  se aproximam.

**Exemplo 7.8:** Considere o sistema da Figura 7.10. Obtenha  $G(w)$  e plote o diagrama de Bode em função de  $\nu$ . Assuma  $T_s = 0,2$  s.

Solução:

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} = \frac{0,1813}{z - 0,8187}$$

Utilizando a transformação bilinear de  $z$  para  $w$  dada por

$$z = \frac{1 + (T_s/2)w}{1 - (T_s/2)w} = \frac{1 + 0,1w}{1 + 0,1w}$$

tem-se que

$$G(w) = \frac{0,1813}{\frac{1+0,1w}{1-0,1w} - 0,8187} = 0,9967 \frac{1 - 0,1w}{w + 0,9967}$$

Observe que os polos e o ganho de malha aberta nos planos  $s$  e  $w$  são bem parecidos. No entanto,  $G(w)$  possui zero em  $w = 2/T_s = 10$ , embora o sistema contínuo não possua zeros. Com  $T_s \rightarrow 0$ , o zero do plano-w tende a infinito. Outro ponto a observar é que

$$\lim_{w \rightarrow 0} G(w) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

O diagrama de Bode de  $G(j\nu)$  em função de  $\nu$  é ilustrado na Figura 7.11, em comparação com  $G(j\omega)$ . O seguinte *script* em MATLAB foi criado:

```

clear all; close all; clc;
s = tf('s'); z = tf('z'); Ts = 0.2;
Gs = 1/(s+1);
Gz = c2d(Gs,Ts,'zoh'); Gw = d2c(Gz,'tustin');
[MGs,PGs,w] = bode(Gs);
[MGw,PGw] = bode(Gw,w); PGw = PGw-360;
figure(1); subplot(211); semilogx(w,20*log10(MGs(:))); hold on
semilogx(w,20*log10(MGw(:)), 'r--');
ylabel('Amplitude (dB)'); xlabel('Frequência (rad/s)');
legend('$G(s)$', '$G(\{\rm{rmw}\})$');
subplot(212); semilogx(w,PGs(:)); hold on
semilogx(w,PGw(:), 'r--');
ylabel('Fase (graus)'); xlabel('Frequência (rad/s)');

```

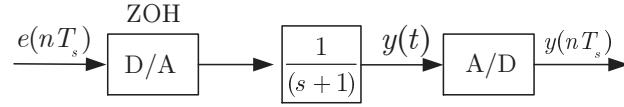
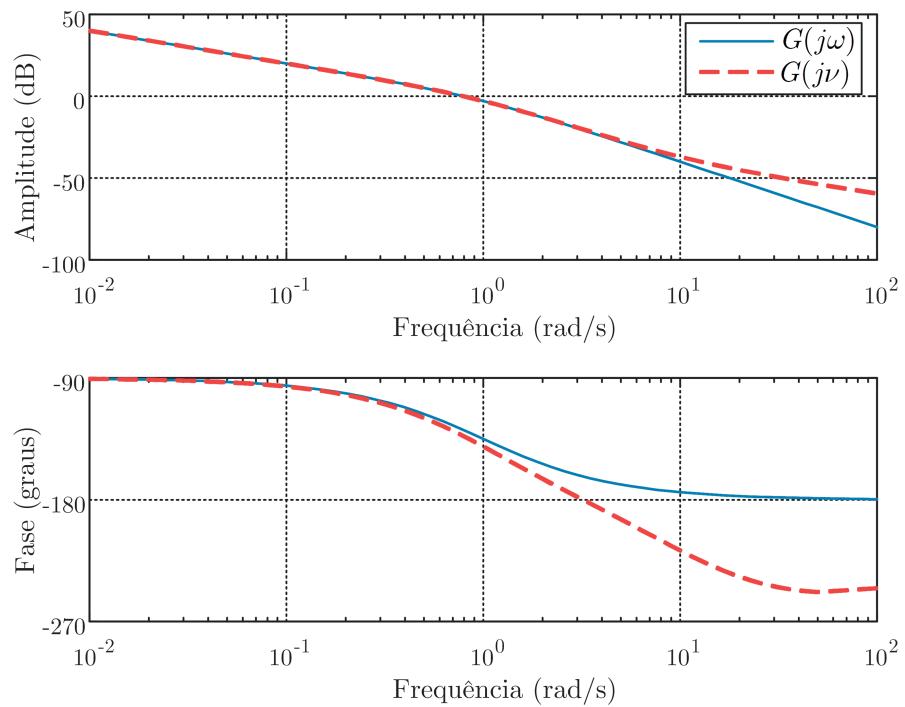


Figura 7.10: Sistema do Exemplo 8.

Figura 7.11: Diagrama de Bode de  $G(j\nu)$  e  $G(j\omega)$  do Exemplo 8.

## Projeto de Sistemas de Controle Digitais

Neste capítulo, inicialmente, é apresentado um projeto de controlador digital por discretização de um controlador projetado em tempo contínuo, enfatizando o efeito do atraso inserido pelo segurador de ordem zero. Em seguida, algumas técnicas de projeto de sistemas de controle digitais serão apresentadas, diretamente no plano- $z$ .

### 8.1 Projeto por discretização de controladores em tempo contínuo

Em muitos casos, controladores digitais são obtidos diretamente pela discretização de controladores projetados por técnicas tradicionais em tempo contínuo.

#### 8.1.1 Efeito da Amostragem e do Segurador de Ordem Zero

O processo de amostragem e o segurador de ordem zero introduzem um atraso na resposta do sistema. Se tal atraso for considerável em relação às maiores constantes de tempo do sistema, o desempenho pode ser comprometido. Como já visto, para o ZOH tem-se:

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}. \quad (8.1)$$

O termo  $e^{-sT_s}$  pode ser escrito em uma forma racional utilizando-se uma aproximação de Padé de primeira ordem , tal que

$$e^{-sT_s} \approx \frac{1 - sT_s/2}{1 + sT_s/2} \quad (8.2)$$

Obviamente, aproximações de maiores ordens são melhores, mas resultam em termos mais complexos na função de transferência equivalente, o que dificulta o projeto do controlador. Assim,

$$ZOH(s) \approx \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{2 - sT_s}{2 + sT_s} \right) = \frac{2}{s + 2/T_s} \quad (8.3)$$

Note, entretanto, que com essa aproximação o ganho em baixas frequências não é unitário. Para fazer o ganho em baixas frequências unitário, pode-se utilizar a seguinte aproximação [Castrucci, Bittar e Sales 2011]:

$$ZOH(s) \approx \frac{2/T_s}{s + 2/T_s} \quad (8.4)$$

Com isso, o controlador contínuo deve ser projetado conforme o diagrama da Figura 8.1.

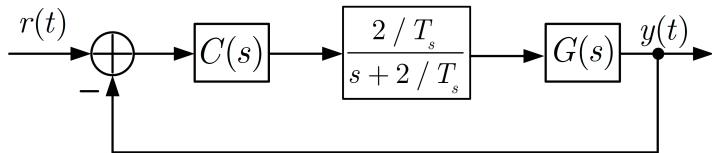


Figura 8.1: Sistema de controle em malha fechada com aproximação de primeira ordem para  $ZOH(s)$ .

Segundo [Franklin, Powell e Workman 2006], o efeito do ZOH pode ser desprezado se a frequência de amostragem for maior do que 30 vezes a banda passante do sistema. Para frequências de amostragem baixas, o efeito é considerável.

Exemplo 8.1: Imposição algébrica de polos considerando efeito do ZOH: Projete um controlador em tempo contínuo e obtenha a versão digital por discretização para o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0,3)}$$

tal que a resposta ao degrau tenha máximo sobressinal  $M_p = 16,3\%$  e tempo de pico  $t_p = 1s$ .

Da especificação de máximo sobressinal:

$$M_p(\%) = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} 100\% \Rightarrow \zeta = 0,5$$

Da especificação de tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1 \Rightarrow \omega_d = \pi \text{ rad/s}$$

Assim,

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow \omega_n = 3,628 \text{ rad/s}$$

A resposta transitória amortecida ao degrau de entrada apresentará oscilações com período  $T_d = 2\pi/\omega_d = 2s$ . Portanto, escolhe-se o período de amostragem tal que  $T_s = 0,2s$ .

A função de transferência de um sistema de segunda ordem padrão é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

tal que os polos de malha fechada sejam dados por  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$ . De acordo com as especificações do problema,  $s_{1,2} = -1,81 \pm j\pi$ .

O projeto será inicialmente feito sem levar em conta os efeitos da amostragem e do ZOH. O controlador para este problema pode ser da forma

$$C_1(s) = K \frac{(s + a)}{(s + b)}$$

Assim, a função de transferência de malha aberta é dada por:

$$C_1(s)C(s) = K \frac{(s + a)}{(s + b)} \frac{1}{s(s + 0,3)}$$

Há infinitos valores de  $K$ ,  $a$  e  $b$  que satisfazem as especificações de projeto. Uma particular consiste em cancelar o polo estável da planta ( $s = -0,3$ ) com o zero do controlador. Logo,

$$C_1(s)C(s) = K \frac{1}{s(s + b)}$$

Em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + bs + K}$$

Com isso, tem-se que  $K = \omega_n^2 = 13,162$  e  $b = 2\zeta\omega_n = 3,628$ . O seguinte controlador é obtido:

$$C_1(s) = 13,162 \frac{(s + 0,3)}{(s + 3,628)}$$

Trata-se de um avançador de fase, pois o zero está mais próximo da origem do que o polo. Ao utilizar o método mapeamento polo-zero para obter a versão discreta do controlador, chega-se em:

$$C_1(z) = 9,6429 \frac{(z - 0,9418)}{(z - 0,484)}$$

Será agora considerado o efeito aproximado do ZOH no projeto do controlador. O controlador a ser projetado possui a seguinte forma:

$$C_2(s) = K \frac{(s + a)}{(s + b)}$$

A função de transferência em malha aberta é dada por:

$$C_2(s)ZOH(s)G(s) = 10K \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)(s + 10)s(s + 0,3)}$$

Ao assumir novamente que o controlador cancela o polo estável da planta original, tem-se:

$$C_2(s)ZOH(s)G(s) = 10K \frac{1}{(s + p_c)(s + 10)s}$$

Em malha fechada:

$$T(s) = 10K \frac{1}{s^3 + (10 + b)s^2 + 10bs + 10K}$$

No que o sistema é de terceira ordem. Vamos considerar que o denominador de  $T(s)$  possui a seguinte forma:

$$T(s) = \frac{10K}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)} = \frac{10K}{s^3 + (2\zeta\omega_n + p)s^2 + (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p)s + p\omega_n^2}$$

O seguinte sistema deve ser resolvido:

$$\begin{cases} b & -p \\ 10b & -2p\zeta\omega_n \\ p\omega_n^2 & -10K \end{cases} = \begin{cases} 2\zeta\omega_n - 10 \\ \omega_n^2 \\ 0 \end{cases}$$

Assim,  $K = 15,88$ ;  $b = 5,69$  e  $p = 12,07$ . Para que os sistemas de segunda e terceira ordem tenham comportamentos semelhantes, o terceiro polo deve estar localizado pelo menos cinco constantes de tempo mais à esquerda dos polos dominantes, isto é  $p \leq -5\zeta\omega_n$ . Neste exemplo,  $p = 12,07 \leq -9,07$ , o que está de acordo.

Com isso,

$$C_2(s) = 15,88 \frac{(s + 0,3)}{(s + 5,69)}$$

Discretizando novamente pelo método casamento polo-zero, tem-se:

$$C_2(z) = 9,7698 \frac{(z - 0,9418)}{(z - 0,3205)}$$

As respostas do sistema compensado para o controle analógico e os controles digitais  $C_1(z)$  e  $C_2(z)$  são apresentados na Figura 8.2. Note que quando a aproximação de primeira ordem do ZOH foi considerada, o projeto atendeu melhor às especificações.

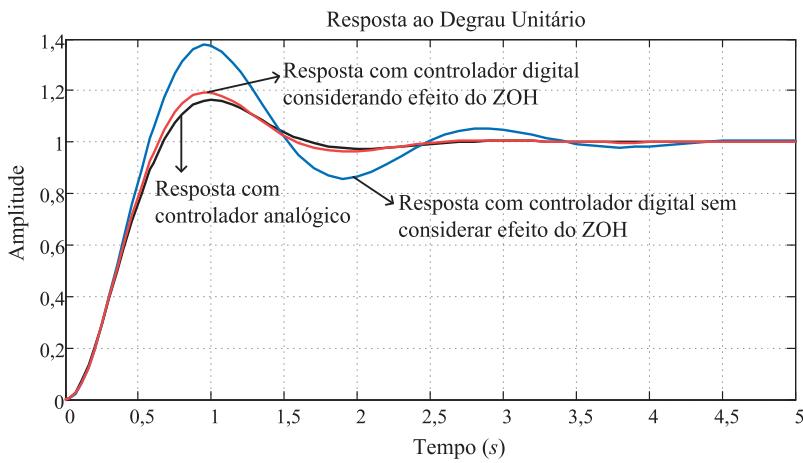


Figura 8.2: Respostas para o sistema compensado do Exemplo 8.1.

## 8.2 Discretização da Planta e Projeto no plano- $z$ - Introdução

Neste seção é apresentada uma motivação ao projeto diretamente no domínio discreto. Para isso o Exemplo 8.1 será tomado como base. O equivalente discreto da planta do exemplo anterior com ZOH é dado por:

$$\mathcal{Z}\{ZOH(s)G(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s + 0,3)}\right\}$$

A mesma metodologia de projeto por alocação de polos do exemplo 8.1 é considerada no exemplo 8.2 seguinte, mas agora diretamente no plano- $z$ . Para isso, as especificações da resposta transitória no plano- $s$  também precisam ser mapeadas no plano- $z$  a partir da relação  $z = e^{sT_s}$ .

**Exemplo 8.2: Exemplo de imposição algébrica de polos no plano- $z$ :** Utilizando o Matlab verifica-se que o equivalente discreto da planta com ZOH é dado por

$$G_D(z) = 0,0196 \frac{(z + 0,9802)}{(z - 1)(z - 0,9418)}$$

O controlador discreto possui a seguinte forma

$$C_3(z) = K \frac{(z + a)}{(z + b)}$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$F(z) = C_3(z)G_D(z) = 0,0196K \frac{(z + a)(z + 0,9802)}{(z + b)(z - 1)(z - 0,9418)}$$

Vamos considerar que o zero do controlador cancela o polo  $z = 0,9418$  da planta. Logo,

$$F(z) = 0,0196K \frac{(z + 0,9802)}{(z + b)(z - 1)}$$

Em malha fechada,

$$T(z) = \frac{0,0196K(z + 0,9802)}{z^2 + (b + 0,0196K - 1)z + (0,0192K - b)}$$

As especificações no plano- $s$  são tais que:

$$s_0 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}, \quad s_0^* = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

No plano- $z$ , com período de amostragem  $T_s$ , verifica-se que:

$$z_0 = e^{T_s(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})}, \quad z_0^* = e^{T_s(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})}$$

Assim, tem-se o seguinte polinômio característico:

$$\begin{aligned}
 (z - z_0)(z - z_0^*) &= z^2 - (z_0 + z_0^*)z + z_0 z_0^* \\
 &= z^2 - \left[ 2e^{-T_s \omega_n \zeta} \cos(\zeta \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}) \right] z + e^{-2T_s \omega_n \zeta}
 \end{aligned}$$

Ao substituir os valores de  $T_s$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$ , resulta em

$$(z - z_0)(z - z_0^*) = z^2 - 1,1257z + 0,4840$$

O seguinte sistema deve ser resolvido:

$$\begin{cases} b + 0,0196K = 1 - 1,1257 \\ -b + 0,0192K = 0,4840 \end{cases}$$

Os valores obtidos são:  $b = -0,3076$  e  $K = 9,2345$ , o que resulta na seguinte função de transferência discreta para o controlador:

$$C_3(z) = 9,2345 \frac{(z - 0,9418)}{(z - 0,3076)}$$

As respostas do sistema compensado com  $C(s)$ ,  $C_1(z)$  e  $C_2(z)$  do primeiro exemplo e  $C_3(z)$  obtido neste exemplo são apresentados na Figura 8.3. Note que a resposta de  $C_3(z)$  foi a que mais se aproximou da resposta de  $C(s)$ .

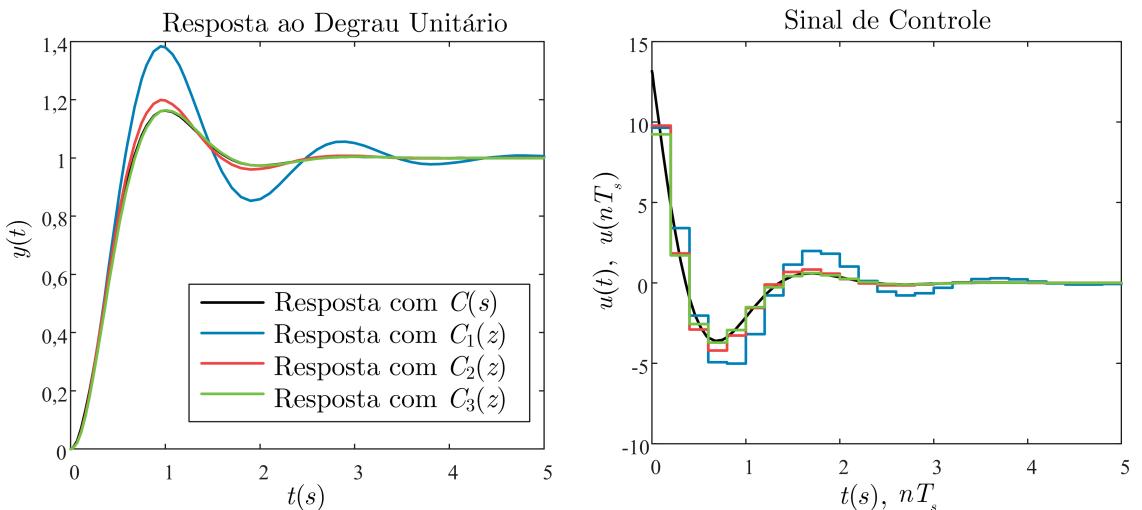


Figura 8.3: Respostas para o sistema compensado dos dois exemplos anteriores.

### 8.3 Projeto pelo Lugar das Raízes

Inicialmente, considerando que o lugar das raízes apresenta um traçado adequado, o projeto consistirá apenas em um ajuste de ganho para fazer com que os polos dominantes de malha fechada fiquem sobre

o lugar das raízes em pontos determinados pelas especificações de projeto.

**Exemplo 8.3:** Para o sistema mostrado na Figura 8.4, obtenha o valor do ganho,  $K$ , que leva a um coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,7$ .

Solução: o lugar das raízes está apresentado na Figura 8.5 (a). Verifica-se, graficamente, que o ganho para que os polos de malha fechada tenham  $\zeta = 0,7$  é  $K = 0,063$ . A Figura 8.5 (b) ilustra graficamente o resultado.

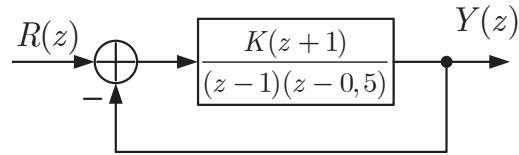


Figura 8.4: Sistema de controle do Exemplo 8.3.

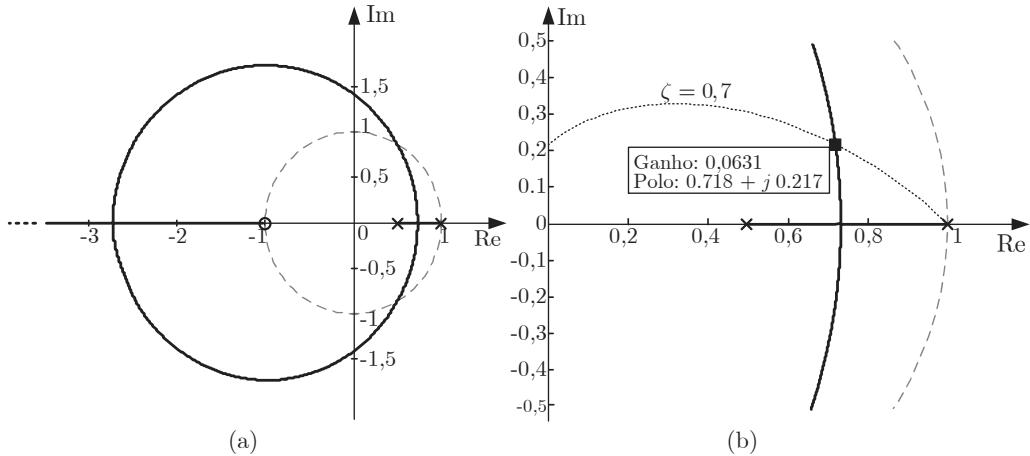


Figura 8.5: Exemplo 8.3: (a) lugar das raízes de  $G(z)$ ; (b) solução.

### 8.3.1 Compensador por Avanço de Fase

Um compensador por avanço de fase discreto pode ser dado

$$C(z) = K_c \frac{z - a}{z - b}, \quad -1 < b < a < 1 \quad (8.5)$$

O compensador por avanço de fase é comumente utilizado para melhorar as características da resposta transitória, mas com a desvantagem de estar sujeito a ruídos de alta frequência.

Um procedimento (não único) de projeto de um compensador por avanço de fase para um sistema  $G(z)$  é o seguinte:

1. Escolhe-se a localização do polo de malha fechada do sistema,  $z_0$ , de acordo com a especificação de resposta transitória.
2. O polo e o zero do compensador devem ser escolhidos tal que a condição de fase do LR seja satisfeita em  $z = z_0$ . Há infinitas formas de resolver um problema. Uma escolha consiste em:
  - O zero do compensador é escolhido para cancelar um polo **estável** de  $G(z)$  sobre o eixo real.
  - Escolhe-se a localização do polo do compensador, tal que a condição de ângulo do lugar das raízes em relação ao ponto  $z = z_0$  seja satisfeita.
3. Por fim, a condição de módulo é aplicada para se encontrar  $K_c$ , tal que:

$$K_c = \left| \frac{1}{C(z)G_D(z)} \right|_{z=z_0}$$

No Matlab esse valor pode ser encontrado com o comando:

```
Kc = 1/abs(evalfr(C*D,z0)).
```

Perceba que, com este procedimento, as localizações das outras raízes da equação característica podem não ser satisfatórias. Assim algumas iterações dos passos 2 e 3 podem ser requeridas (tentativa e erro).

Exemplo 8.4: Considere o sistema de controle da Figura 8.6, com

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

e  $T_s = 0,1$  s. Deseja-se projetar  $C(z)$  tal que os polos complexos dominantes de malha fechada possuam  $\zeta = 0,7$  e  $\omega_n = 5$ .

Solução: inicialmente o equivalente discreto  $G_D(z)$  é encontrado

$$\mathcal{Z}\{ZOH(s)G(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} = \frac{0,004837(z+0,9672)}{(z-1)(z-0,9048)}$$

O lugar das raízes do sistema a ser compensado, juntamente com as linhas  $\zeta = 0,7$  e  $\omega_n = 5$ , e a localização desejada para os polos são apresentadas na Figura 8.7. No plano-s a posição desejada para os polos de malha fechada dominantes do sistema é tal que  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -3,5 \pm j3,57$ . No plano-z, tem-se  $z = e^{sT_s} = 0,660 \pm j0,246$ .

O zero do compensador é fixado em  $a = 0,9048$ , o que cancela um polo estável do sistema. Pela condição angular, como visto na Figura 8.8, o polo do compensador deve ser fixado em  $b = 0,41$ . Aplicando a condição de módulo, tem-se que  $K_c = 18,506$ . A função de transferência do compensador é dada por

$$C_1(z) = 18,506 \frac{z - 0,9048}{z - 0,41}$$

A Figura 8.9 ilustra o lugar das raízes do sistema compensado, juntamente com a posição dos polos de malha fechada, situados em  $\{0,660 + j0,246; 0,660 - j0,246\}$ . Portanto, o projeto é válido. A resposta ao degrau unitário é mostrada na Figura 8.10.

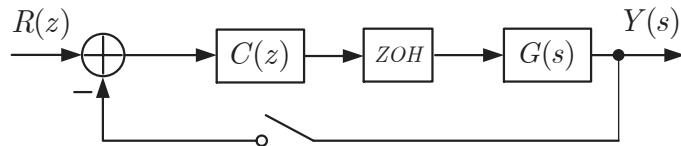


Figura 8.6: Sistema de controle do Exemplo 8.4.

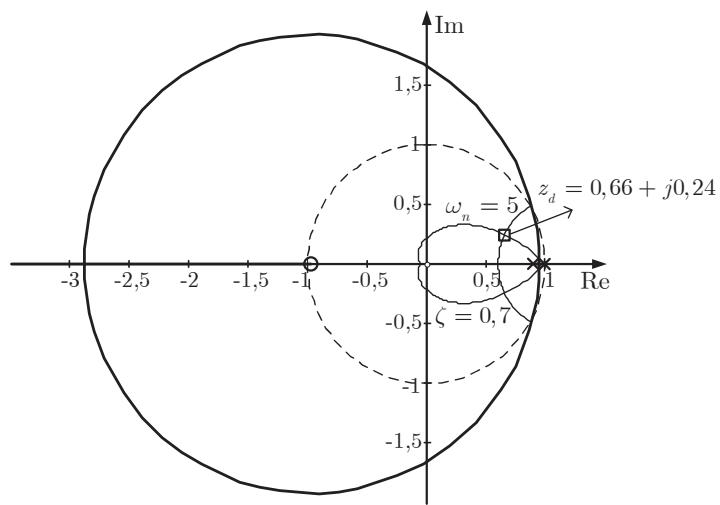
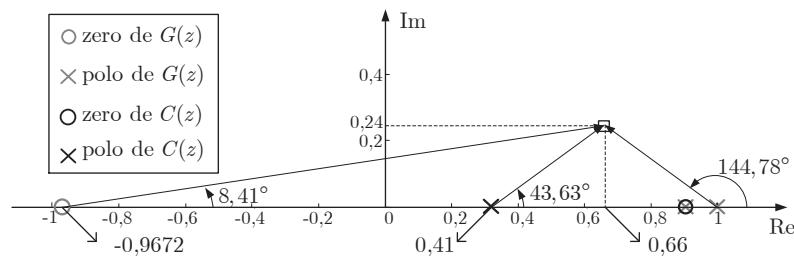
Figura 8.7: Lugar das raízes de  $G(z)$  do Exemplo 8.4.

Figura 8.8: Polos e zeros do sistema compensado do Exemplo 8.4.

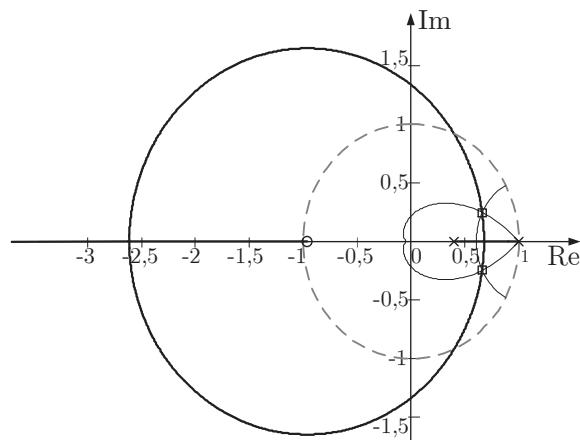


Figura 8.9: Lugar das raízes do sistema compensado do Exemplo 8.4.

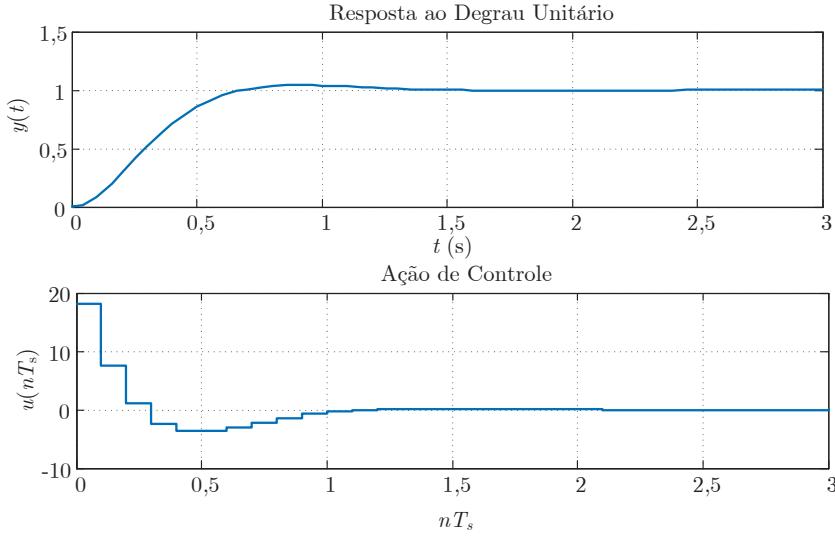


Figura 8.10: Resposta ao degrau unitário e sinal de controle do Exemplo 8.4.

### 8.3.2 Controlador PID

O PID digital básico com aproximação Tustin para a parcela integrativa e retangular para trás na parcela derivativa possui a seguinte função de transferência:

$$\begin{aligned} PID(z) &= K_P \left( 1 + \frac{T_s}{2T_I} \frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{T_D}{T_s} \frac{z-1}{z} \right) \\ &= a + b \frac{(z+1)}{(z-1)} + c \frac{z-1}{z} = \frac{az(z-1) + bz(z+1) + c(z-1)^2}{z(z-1)} \end{aligned} \quad (8.6)$$

com  $a = K_P$ ,  $b = K_P \frac{T_s}{2T_I}$  e  $c = K_P \frac{T_D}{T_s}$ . De forma equivalente, pode-se escrever a Equação (8.6) como

$$PID(z) = \frac{K(z - c_1)(z - c_2)}{z(z - 1)} \quad (8.7)$$

Assim, pode-se aplicar o método do LR para projetar o PID. Uma escolha razoável consiste em escolher um dos zeros do compensador para cancelar um polo estável da planta. Com isso, o outro zero é encontrado pela aplicação da condição de fase do LR. Por fim, aplica-se a condição de módulo do LR para encontrar o ganho  $K$ .

Para implementação utilizando a equação de diferenças do controlador, pode-se aplicar diretamente a transformada- $z$  inversa em

$$PID(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K(z - c_1)(z - c_2)}{z(z - 1)} \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{K(1 - c_1 z^{-1})(z - c_2 z^{-1})}{1 - z^{-1}} \quad (8.8)$$

Note, entretanto, que para obter as equações de diferenças do PID digital vistas no Capítulo 5 (anti-windup, filtro na derivada, derivada da saída), pode-se igualar os numeradores das Equações (8.6) e (8.7), e resolver o sistema de equações comparando os coeficientes dos polinômios em  $z$  para encontrar os valores equivalentes de  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$ . Isso será feito utilizando o Symbolic Math Toolbox do MATLAB, da seguinte forma:

```

clear all; close all; clc
syms z Ts Kp Ti Td K c1 c2 a b c c1 c2
a = Kp; b = Kp*Ts/(2*Ti); c = Kp*Td/Ts;
num_PID = collect(a*z*(z-1) + b*z*(z+1) + c*(z-1)^2, z);
Cf_1 = coeffs(num_PID, z);
num_PID2 = collect(K*(z-c1)*(z-c2), z);
Cf_2 = coeffs(num_PID2, z);
X = solve(Cf_1(1)==Cf_2(1), Cf_1(2)==Cf_2(2), Cf_1(3)==Cf_2(3), Kp, Ti, Td);
K_P = X.Kp; % Valor de K_P
T_I = X.Ti; % Valor de T_I
T_D = X.Td; % Valor de T_D
disp('K_P = '); pretty(K_P);
disp('T_I = '); pretty(T_I);
disp('T_D = '); pretty(T_D);

```

Com isso, o seguinte resultado é obtido:

$$K_P = \frac{K}{2}(c_1 + c_2 - 3c_1c_2 + 1), \quad (8.9)$$

$$T_I = \frac{T_s}{2} \frac{1 + c_1 + c_2 - 3c_1c_2}{1 + c_1c_2 - c_1 - c_2}, \quad (8.10)$$

$$T_D = 2T_s \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2 - 3c_1c_2 + 1}. \quad (8.11)$$

**Exemplo 8.5:** [Castrucci, Bittar e Sales 2011] Projete um controlador digital para o processo  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ , tal que:

- o erro estacionário seja nulo para entrada degrau;
- os polos de malha fechada dominantes tenham coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,5$  e frequência natural  $\omega_n = 2$  (rad/s).

Solução: com as especificações apresentadas, se os polos dominantes forem predominantes na resposta, então o sistema apresentará um sobressinal  $M_p \approx 16,3\%$  e um tempo de acomodação  $t_s \approx 4s$ . No plano-s, a posição dos polos dominantes de malha fechada é dada por:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1 \pm \sqrt{3}j$$

As oscilações da resposta subamortecida possuem período igual a  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3,63s$ .

Assim, pode-se escolher o período de amostragem tal que  $T_s \approx T_d/10$ . Adota-se então  $T_s = 0,4s$ .

Os polos dominantes no plano-s são mapeados no plano-z da seguinte forma:

$$z_{1,2} = e^{0,4(-1 \pm \sqrt{3}j)} = 0,5158 \pm 0,4281j$$

O equivalente discreto da planta é obtido como:

$$\mathcal{Z}\{ZOH(s)G(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right\} = \frac{0,054344(z + 0,6703)}{(z - 0,6703)(z - 0,4493)}$$

A condição de erro estacionário nulo para entrada degrau exige que o sistema tenha um polo na origem e, como a planta não possui integrador, isso deve ser imposto pelo controlador. Além disso, a resposta transitório precisa ter o comportamento especificado no enunciado. Tais requisitos podem ser satisfeitos por um controlador PID, ou seja,

$$C(z) = \frac{K(z - c_1)(z - c_2)}{z(z - 1)}$$

Vamos assumir que um dos zeros do controlador cancela o polo estável da planta em  $z = 0,6703$ .

Assim,  $c_2 = 0,6703$ . A função de transferência em malha aberta é dada por

$$F(z) = C(z)G(z) = \frac{0,054344K(z - c_1)(z + 0,6703)}{z(z - 1)(z - 0,4493)}$$

Para obter  $c_1$ , aplica-se a condição de fase:

$$\angle F(z)|_{z=z_1} = \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ$$

Portanto,

$$\angle(z_1 - c_1) = -\angle(z_1 + 0,6703) + \angle(z_1) + \angle(z_1 - 1) + \angle(z_1 - 0,4493) - 180^\circ,$$

o que resulta em  $c_1 = 0,2640$ . Com isso,

$$C(z) = \frac{K(z - 0,2640)(z - 0,6703)}{z(z - 1)}$$

Para encontrar o ganho  $K$  deve-se aplicar a condição de módulo, ou seja:

$$|F(z)|_{z=z_1} = 1 \Rightarrow \left| \frac{0,054344K(z - 0,2640)(z + 0,6703)}{z(z - 1)(z - 0,4493)} \right|_{z=z_1} = 1,$$

o que resulta em  $K = 5,5153$ . Portanto:

$$C(z) = 5,5153 \frac{(z - 0,2640)(z - 0,6703)}{z(z - 1)}$$

O projeto pode ser feito utilizando o seguinte *script* em Matlab.

```

clear all; close all; clc;
zeta = 0.5; wn = 2;
s = tf('s'); z = tf('z'); Ts = 0.4;
G = 1/((s+1)*(s+2));
G_D = c2d(G,Ts,'zoh'); G_zer = zero(G_D); G_pol = pole(G_D);
s1 = -zeta*wn+j*wn*sqrt(1-zeta^2); z1 = exp(Ts*s1);
c2 = G_pol(1);
% Condição de Fase
P=-pi-angle(z1-G_zer)+angle(z1)+angle(z1-1)+angle(z1-G_pol(2));
c1 = -imag(z1)/tan(P)+real(z1);
% Condição de Módulo
C_D_temp = ((z-c1)*(z-c2))/(z*(z-1)); C_D_temp.Ts = Ts;
K = 1/abs(evalfr((G_D*C_D_temp),z1));
C_D = K*C_D_temp;
F = minreal(C_D*G_D);
figure(1);rlocus(F/K);zgrid(zeta,Ts*wn); axis([-2 2 -2 2]); hold on;
G_MF = feedback(F,1); G_MF_pol = pole(G_MF);
plot(real(G_MF_pol), imag(G_MF_pol), 'sk')
%Obter os valores equivalentes de K_P, T_I e T_D
K_P = (K*(c1 + c2 - 3*c1*c2 + 1))/2;
T_I = -(Ts*(c1 + c2 - 3*c1*c2 + 1))/(2*(c1 + c2 - c1*c2 - 1));
T_D = (2*Ts*c1*c2)/(c1 + c2 - 3*c1*c2 + 1);

```

O lugar das raízes do sistema compensado é apresentado na Figura 8.11. A resposta ao degrau unitário e o sinal de controle são apresentados na Figura 8.12.

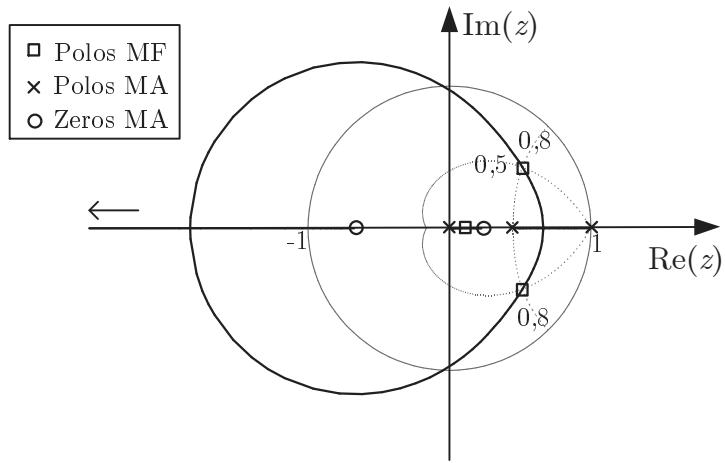


Figura 8.11: Lugar das raízes e polos de malha fechada do sistema compensado com controlador PID do Exemplo 8.5.

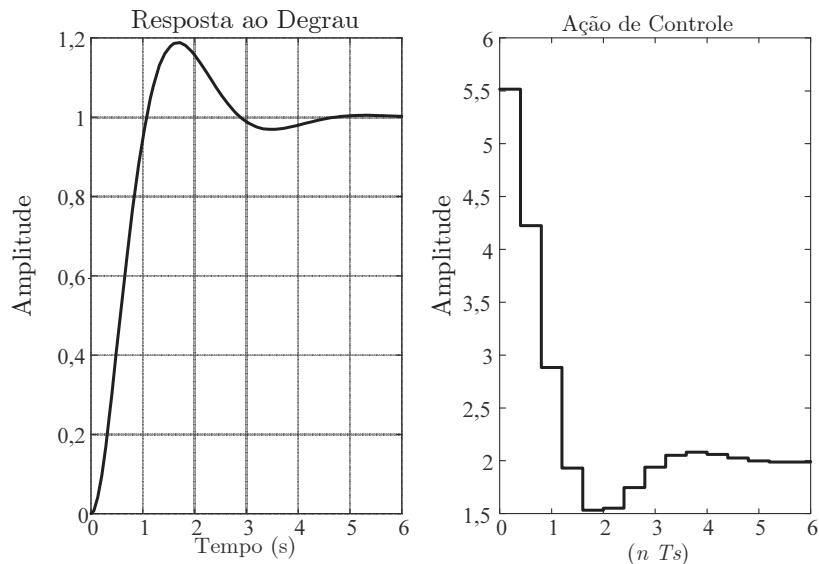


Figura 8.12: Resposta ao degrau e sinal de controle do sistema compensado em malha fechada com controlador PID do Exemplo 8.5.

## 8.4 Projeto pelo Método da Resposta em Frequência

O projeto de compensadores digitais pode também ser efetuado no domínio da frequência utilizando diagramas de Bode no plano-w, através da seguinte transformação:

$$C(w) = C(z)|_{z=\frac{1+\frac{T_s}{2}w}{1-\frac{T_s}{2}w}}$$

Para projetar uma dado  $C(w)$  pelo método da resposta em frequência, utilizam-se os mesmos procedimentos de projeto para o plano-s. Em seguida, transforme  $G(w)$  em  $G(z)$  utilizando a seguinte relação

$$w = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

Deve-se ficar atento com a frequência de amostragem, que deve ser suficientemente alta para amenizar as distorções entre  $\omega$  e  $\nu$ .

## 8.5 Projeto por Método Direto

Considere o sistema da Figura 8.13.

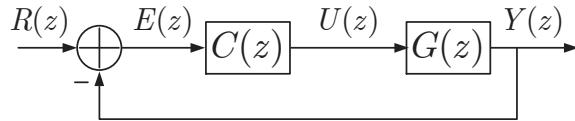


Figura 8.13: Controle Digital com realimentação unitária.

Em malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G_{MF}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad (8.12)$$

Ao resolver esta equação para  $C(z)$ , tem-se:

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \quad (8.13)$$

Note que tal controlador inverte a planta. Obviamente isso não é possível para todos os casos. O projeto se resume em escolher adequadamente  $G_{MF}(z)$ .

A seguir serão apresentadas algumas restrições para que exista um controlador neste formato. A escolha de  $G_{MF}(z)$  e, consequentemente  $C(z)$ , com base nestas restrições é denominado método de Ragazzini [Franklin, Powell e Workman 2006].

- **Causalidade**

Inicialmente,  $C(z)$  precisa ser causal, ou seja, a ordem em potências de  $z$  do polinômio do numerador não pode ser maior do que a ordem em potências de  $z$  do polinômio do denominador. Em outras palavras, se  $z \rightarrow \infty$ ,  $C(z)$  não pode possuir polos no infinito. De (8.13), se  $G(z)$  possuir zero no infinito, então

$C(z)$  terá um polo no infinito, a menos que  $G_{MF}(z)$  tenha um zero no infinito de  $G(z)$ . Portanto,  $G_{MF}(z)$  deve ser escolhida tal que

$$\begin{aligned} G_{MF}(z) \text{ deve possuir zero no infinito da mesma} \\ \text{ordem que zeros de } G(z) \text{ no infinito.} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Uma consequência direta dessa condição é que o atraso em  $G_{MF}(z)$  precisa ser igual ou maior do que o atraso em  $G(z)$ .

#### • Estabilidade

Os zeros de  $C(z)$  não podem cancelar polos instáveis de  $G(z)$ . Além disso, os polos de  $C(z)$  não devem cancelar eventuais zeros de fase não-mínima de  $G(z)$ . A equação característica do sistema é dada por  $1 + C(z)G(z) = 0$ . Se  $C(z) = c(z)/d(z)$  e  $G(z) = b(z)/a(z)$ , então a equação característica fica como

$$a(z)d(z) + b(z)c(z) = 0 \quad (8.15)$$

Suponha que  $G(z)$  possua um termo  $(z - \gamma)$  como um polo, ou seja  $a(z) = (z - \gamma)\bar{a}(z)$ . Suponha que  $C(z)$  fosse escolhido para cancelar este termo, ou seja  $c(z) = (z - \gamma)\bar{c}(z)$ . Logo, a Equação (8.15) resultaria em:

$$(z - \gamma)\bar{a}(z)d(z) + b(z)(z - \gamma)\bar{c}(z) = 0 \Rightarrow (z - \gamma)[\bar{a}(z)d(z) + b(z)\bar{c}(z)] = 0 \quad (8.16)$$

Note que se esse fator estiver fora do círculo unitário e não se cancelar perfeitamente, então o sistema será instável. O cancelamento deste fator deve ser feito pelo termo  $1 + G_{MF}(z)$ .

Similarmente, pode-se verificar que o zero de fase não-mínima da planta deve ser cancelado por  $G_{MF}(z)$ , para que não seja cancelado por  $C(z)$ . Assim, as seguintes restrições devem ser respeitadas:

$$\begin{aligned} 1 - G_{MF}(z) \text{ deve ter como fatores comuns no numerador todos os} \\ \text{polos de } G(z) \text{ fora do círculo unitário.} \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} G_{MF}(z) \text{ deve ter como fatores comuns no numerador todos os} \\ \text{zeros de fase não-mínima de } G(z) \end{aligned} \quad (8.18)$$

#### • Erro Estacionário

O sinal de erro é definido como

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) - G_{MF}(z)R(z) = R(z)[1 - G_{MF}(z)], \quad (8.19)$$

sendo  $R(z)$  o *setpoint* e  $Y(z)$  a saída da planta. O erro em regime estacionário é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) R(z)[1 - G_{MF}(z)] \quad (8.20)$$

Se  $R(z)$  for um sinal degrau unitário,  $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{(1 - z^{-1})} [1 - G_{MF}(z)] \quad (8.21)$$

Se o sistema for tipo 1 ou mais, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = 0$  e, portanto

$$G_{MF}(1) = 1 \quad (8.22)$$

Por outro lado, para  $R(z) = \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$ , ou seja, rampa unitária,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) [1 - G_{MF}(z)] \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \lim_{z \rightarrow 1} [1 - G_{MF}(z)] \frac{T_s}{z - 1} \quad (8.23)$$

Para calcular o limite anterior é necessário aplicar a regra de L'Hopital, o que resulta em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = -T_s \left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} \quad (8.24)$$

Se o sistema for tipo 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = \frac{1}{K_v}$ . Assim,

$$\left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} = -\frac{1}{T_s K_v} \quad (8.25)$$

Se o sistema for tipo 2 ou mais, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = 0$ . Logo,

$$\left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0 \quad (8.26)$$

No projeto pelo método direto, se  $T_s$  for muito pequeno, o sinal de controle pode ser muito elevado e atingir a saturação. Se, por outro lado,  $T_s$  for muito grande o sistema pode se tornar instável. Na prática, deve-se escolher  $T_s$  pequeno suficientemente para não atingir a saturação [Castrucci, Bittar e Sales 2011].

 **Exemplo 8.6:** Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(7s + 1)}$$

Projete um controlador digital pelo método direto, utilizando  $T_s = 0,5$  s, de tal forma que o equivalente contínuo do sistema em malha fechada seja de segunda ordem com polos em  $s = -0,7071 \pm j0,7071$ , e que a constante de erro estático de velocidade do sistema  $K_v = 1$ .

No plano-z tem-se o mapeamento  $z = 0,6588 \pm j0,2431$ , com a seguinte equação característica:  $z^2 - 1,3175z + 0,4931 = 0$ . O equivalente discreto da planta é dado por:

$$G(z) = 0,01744 \frac{z + 0,9765}{(z - 1)(z - 0,9311)}$$

A forma geral de  $G_{MF}(z)$  é dada por

$$G_{MF}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots}{1 - 1,3175z^{-1} + 0,4931z^{-2}}$$

Como  $G(z)$  possui um zero no infinito, tem-se que

$$G_{MF}(z)|_{z=\infty} = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

Como  $G(z)$  não possui nem zero nem polo fora do círculo unitário, as restrições (8.17) e (8.18) não se aplicam, exceto pelo zero no infinito que já foi contemplado pela restrição de causalidade. O requisito de constante de erro estático de posição nulo implica que

$$G_{MF}(1) = 1 = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}{1 - 1,3175 + 0,4931} \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 0,1756,$$

O requisito de constante de erro estático de velocidade implica que

$$\left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} = -\frac{1}{T_s K_v} = -2$$

Com isso,

$$\frac{(-b_1 - 2b_2 - 3b_3 - \dots) \cdot \underbrace{(1 - 1,3175 + 0,4931)}_{=0,1756} - \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)}_{=0,1756} \cdot (1,3175 - 2 \cdot 0,4931)}{0,1756^2} = -2,$$

ou,

$$\frac{(b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots) + 0,3313}{0,1756} = 2 \Rightarrow (b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots) = 0,0199$$

Como há apenas duas equações, para o sistema ter solução, deve-se ter duas incógnitas. Fazendo-se  $b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$ , tem-se

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0,1756 \\ b_1 + 2b_2 = 0,0199 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 0,3313; \quad b_2 = -0,1557$$

Portanto,

$$G_{MF}(z) = \frac{0,3313z - 0,1557}{z^2 - 1,3175z + 0,4931},$$

e,

$$1 - G_{MF}(z) = \frac{z^2 - 1,649z + 0,6488}{z^2 - 1,317z + 0,4931} = \frac{(z-1)(z-0,6488)}{z^2 - 1,317z + 0,4931}$$

Da Equação (8.13), tem-se

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} = \frac{57,33(z-1)(z-0,9311)}{(z+0,9765)} \frac{0,3313(z-0,47)}{(z-1)(z-0,6488)} \\ &= 19 \frac{(z-0,9311)(z-0,47)}{(z+0,9765)(z-0,6488)} \end{aligned}$$

A resposta ao degrau e a resposta à rampa do sistema são apresentadas nas Figuras 8.14 e 8.15, respectivamente. O sinal de controle possui amplitude elevada nos instantes iniciais. Além disso, tal sinal oscila muito, o que na prática provoca um ripple elevado na resposta do sistema.

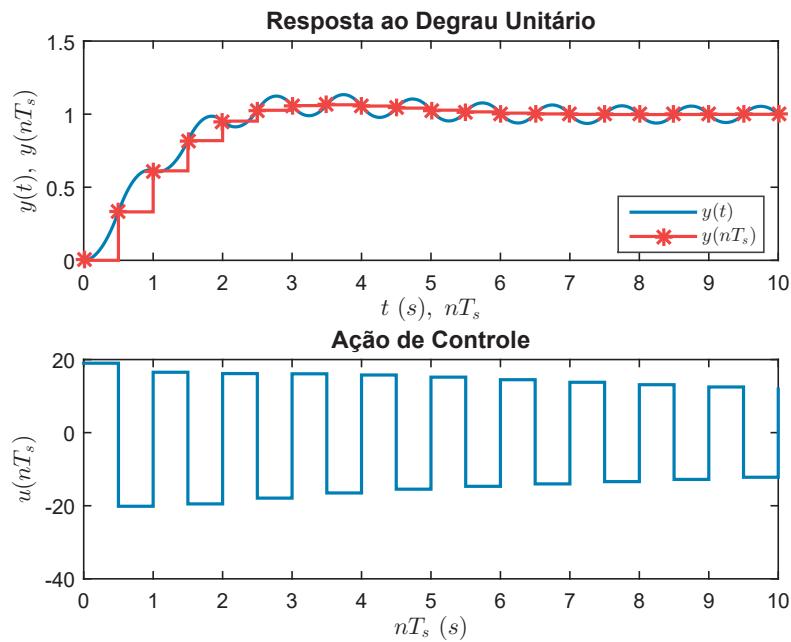


Figura 8.14: Resposta ao degrau e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 8.6.

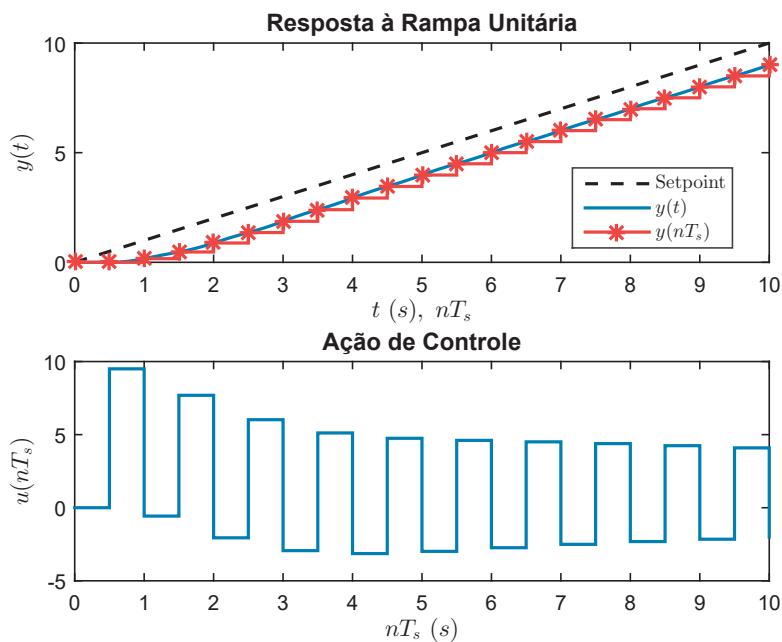


Figura 8.15: Resposta à rampa e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 8.6.

Para solucionar o problema das oscilações (*ripple*) indesejadas entre intervalos de amostragem, a partir da Figura 8.13, observe que

$$U(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{G_{MF}(z)}{G(z)} R(z) \quad (8.27)$$

Definindo  $G(z) = N(z)/D(z)$ , tem-se que:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = G_{MF}(z) \frac{D(z)}{N(z)} \quad (8.28)$$

Se  $R(z)$  é do tipo degrau, para o sinal de controle ser constante após o período transitório da resposta os polos de (8.28) devem ficar longe da circunferência unitária. No exemplo anterior os polos de  $G_{MF}(z)$  estão relativamente afastados da circunferência unitária e, portanto, os zeros de  $G(z)$  são responsáveis pelas oscilações.

Para solucionar este problema basta acrescentar a seguinte restrição:

$$G_{MF}(z) \text{ deve ter como fatores comuns no numerador todos os zeros de } G(z) \text{ próximos à circunferência de raio unitário} \quad (8.29)$$

**Exemplo 8.7:** Projetar um controlador para o exemplo anterior em que a saída não apresente oscilações entre instantes de amostragem.

A planta possui um zero indesejável em  $z = -0,9765$ . Assim, deve-se incluir um zero a mais em  $G_{MF}(z)$ , tal que  $G_{MF}(-0,9765) = 0$ .

Assim:

$$G_{MF}(-0,9765) = 0 = -1,0241b_1 + 1,0487b_2 - 1,0739b_3,$$

onde considerou-se  $b_0 = 0$ , da restrição de causalidade.

As demais restrições são obtidas diretamente do exemplo anterior, lembrando que agora há três termos no numerador de  $G_{MF}(z)$ , ou seja:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,1756$$

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0,0199$$

os valores de  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são obtidos como solução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -1,0241 & 1,0487 & -1,0739 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1756 \\ 0,0199 \end{bmatrix}$$

Assim,  $b_1 = 0,2115$ ,  $b_2 = 0,0839$  e  $b_3 = -0,1198$ . Com isso:

$$G_{MF}(z) = \frac{0,2115z^{-1} + 0,0839z^{-2} - 0,1198z^{-3}}{1 - 1,3175z^{-1} + 0,4931z^{-2}} = \frac{0,2115z^2 + 0,0839z - 0,1198}{z^3 - 1,3175z^2 + 0,4931z}$$

O seguinte controlador é obtido:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \\ C(z) &= \frac{57,33(z-1)(z-0,9311)}{(z+0,9765)} \frac{0,2115(z-0,9765)(z+0,58)}{(z-1)(z-0,7001)(z+0,1711)} \\ &= 12,13 \frac{(z-0,9311)(z-0,58)}{(z-0,7001)(z+0,1711)} \end{aligned}$$

A resposta ao degrau e a resposta à rampa do sistema são apresentadas nas Figuras 8.16 e 8.17, respectivamente.

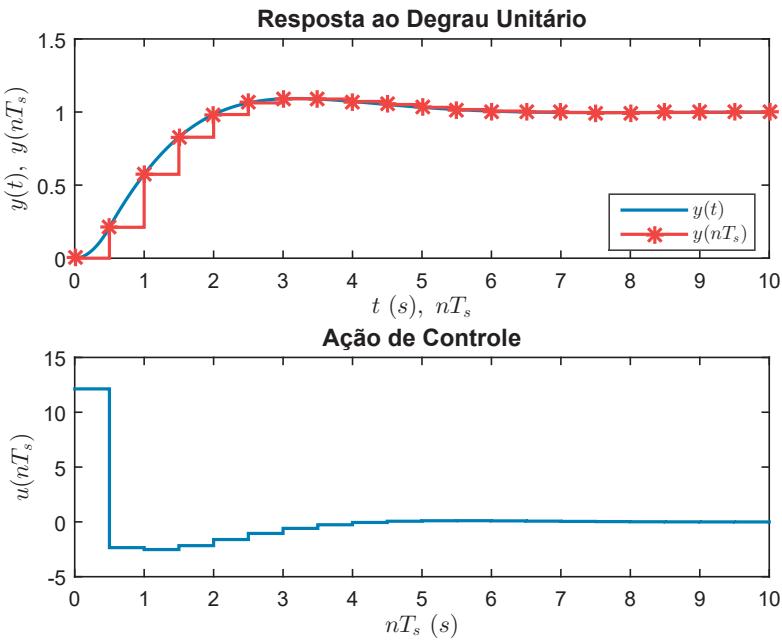


Figura 8.16: Resposta ao degrau e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 8.7.

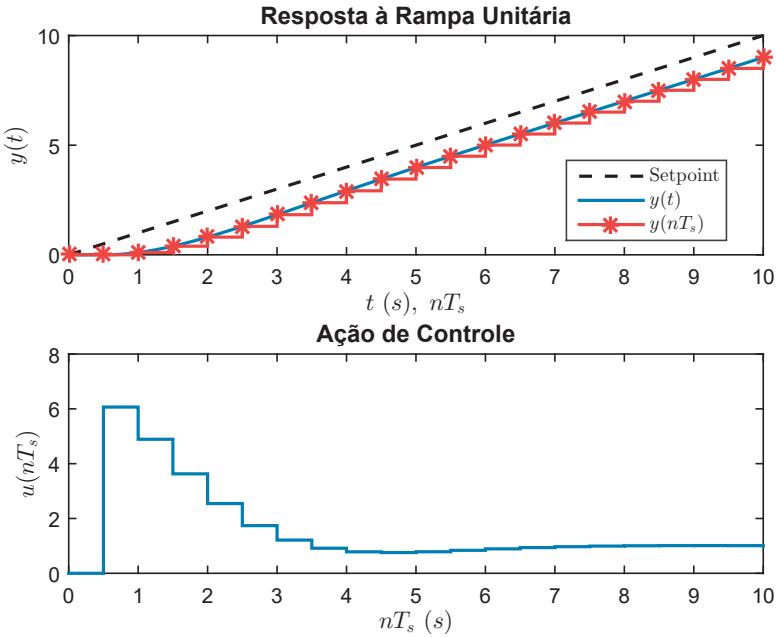


Figura 8.17: Resposta à rampa e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 8.7.

Uma escolha típica para  $G_{MF}(z)$  é dada por [Castrucci, Bittar e Sales 2011]:

$$\begin{aligned} G_{MF}(z) &= \frac{g_0 z^p + g_1 z^{p-1} + g_2 z^{p-2} + \dots + g_{p-1} z + g_p}{z^p} \\ &= g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_{p-1} z^{1-p} + g_p z^{-p} \end{aligned} \quad (8.30)$$

com  $p \geq n$ , sendo  $n$  a ordem da planta. O que é uma estrutura FIR, naturalmente estável. Além disso, a estrutura FIR garantem tempo de acomodação finito. Note que nesse caso, para respeitar a propriedade de causalidade, o menor atraso em  $G_{MF}(z)$  deve ser no mínimo igual ao menor atraso em  $G(z)$ . Se, por exemplo, a expansão de  $G(z)$  começar em  $z^{-2}$ , então  $G_{MF}(z)$  deve ser da forma

$$G_{MF}(z) = g_2 z^{-2} + \dots + g_{p-1} z^{1-p} + g_p z^{-p} \quad (8.31)$$

Obviamente, deve-se testar se as demais restrições são satisfeitas. Se a resposta ao degrau possuir tempo de acomodação mínimo, erro estacionário nulo e não apresenta oscilações entre instantes de amostragem, a mesma é definida como *dead beat* [Ogata 1995], [Castrucci, Bittar e Sales 2011].

Exemplo 8.8: A função de transferência de um sistema a ser controlado com realimentação unitária é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-0,7)}$$

Utilize uma estrutura FIR e projete um controlador para o sistema, assumindo  $T_s = 1$  e que o erro para entrada degrau seja nulo e o tempo de acomodação seja mínimo.

O equivalente discreto da planta é dado por:

$$G(z) = 0,48006 \frac{(z+0,907)}{(z-2,014)(z-0,3679)}$$

A forma geral de  $G_{MF}(z)$ , assumindo que a ordem de  $G_{MF}(z)$  é igual à ordem de  $G(z)$ , é dada por

$$G_{MF}(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Pela restrição de causalidade,  $b_0 = 0$ , então:

$$G_{MF}(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Note que  $G(z)$  possui polo instável em  $z = 2,014$ . Assim pela restrição de estabilidade:

$$1 - G_{MF}(2,014) = 1 - b_1(2,014)^{-1} - b_2(2,014)^{-2} = 0 \Rightarrow 0,4966b_1 + 0,2466b_2 = 1$$

Pela restrição de erro estático de posição nulo:

$$G_{MF}(1) = b_1 + b_2 = 1$$

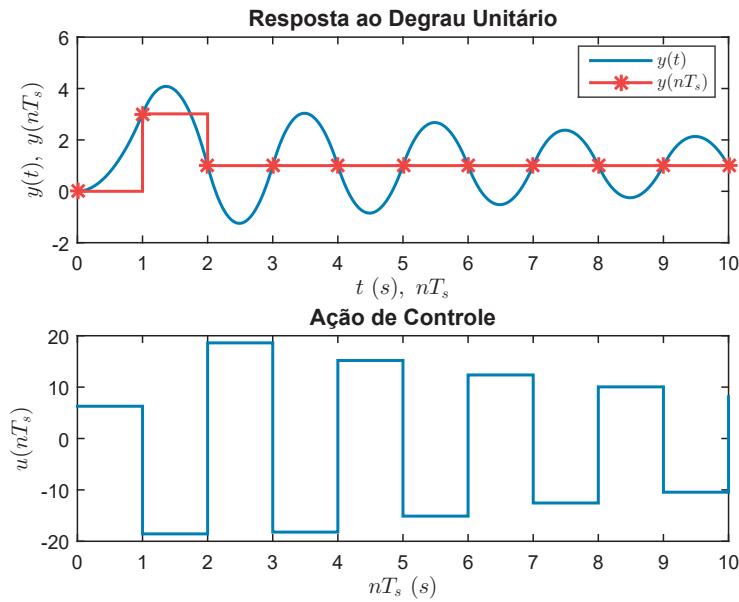
Assim, ao resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas, chega-se em  $b_1 = 3,0138$  e  $b_2 = -2,0138$ . Portanto:

$$G_{MF}(z) = 3,0138z^{-1} - 2,0138z^{-2}$$

O seguinte controlador é obtido:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \\ C(z) &= \frac{2,0831(z-2,0138)(z-0,3679)}{(z+0,9070)} \frac{3,0138z-2,0138}{z^2-3,0138z+2,0138} \\ &= 6,2779 \frac{(z-2,0138)(z-0,3679)}{(z+0,9070)} \frac{(z-0,6682)}{(z-1)(z-2,0138)} \\ &= 6,2779 \frac{(z-0,3679)(z-0,6682)}{(z-1)(z+0,9070)} \end{aligned}$$

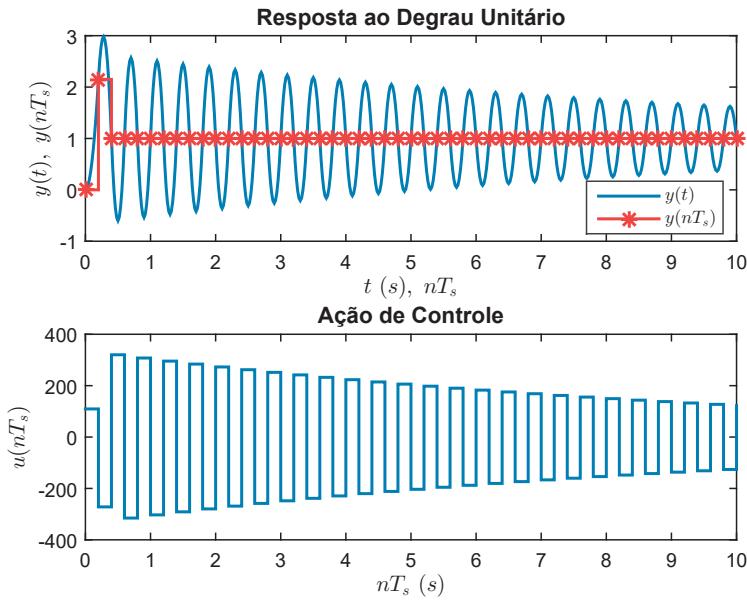
A resposta ao degrau do sistema é apresentada na Figura 8.18.

Figura 8.18: Resposta ao degrau do Exemplo 8.8 com  $T_s = 1 \text{ s}$ .

O projeto do Exemplo 8.8 foi refeito para  $T_s = 0,2 \text{ s}$ , chegando-se ao seguinte controlador:

$$C(z) = 109,4201 \frac{(z - 0,8187)(z - 0,5349)}{(z - 1)(z + 0,9802)} \quad (8.32)$$

A resposta é apresentada na Figura 8.19. Note que a resposta contínua do sistema fica muito oscilatória e a ação de controle com valores extremamente elevados, o que pode levar o sistema à saturação, piorando ainda mais a resposta.

Figura 8.19: Resposta ao degrau do Exemplo 8.8 com  $T_s = 0,2 \text{ s}$ .

Note que no Exemplo 8.8 para  $T_s = 1$  s, o sistema possui um zero em  $-0,9070$  o que causa oscilações na ação de controle. O exemplo a seguir adiciona este zero em  $G_{MF}(s)$  para melhorar o aspecto oscilatório.

**Exemplo 8.9:** Repita o exemplo anterior, para  $T_s = 1$  s, de tal forma a reduzir as oscilações na ação de controle e, consequentemente, na resposta entre períodos de amostragem.

A planta possui um zero indesejável em  $z = -0,9070$ . Assim, deve-se incluir um zero a mais em  $G_{MF}(z)$ , tal que  $G_{MF}(-0,9070) = 0$ . Logo:

$$G_{MF}(-0,9070) = 0 = -1,1026b_1 + 1,2157b_2 - 1,3404b_3,$$

onde  $b_0 = 0$ , da restrição de causalidade. As demais restrições são obtidas diretamente do exemplo anterior, lembrando que agora há três termos no numerador de  $G_{MF}(z)$ , ou seja:

Estabilidade:

$$\begin{aligned} 1 - G_{MF}(2,0138) &= 1 - b_1(2,0138)^{-1} + b_2(2,0138)^{-2} + b_3(2,0138)^{-3} = 0 \\ \Rightarrow 0,4966b_1 + 0,2466b_2 + 0,1225b_3 &= 1 \end{aligned}$$

Erro estacionário nulo para entrada degrau:  $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ . Os valores de  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são obtidos como solução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -1,1026 & 1,2157 & -1,3404 \\ 0,4966 & 0,2466 & 0,1225 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,  $b_1 = 2,2407$ ,  $b_2 = 0,3159$  e  $b_3 = -1,5567$ . Com isso:

$$G_{MF}(z) = 2,2407z^{-1} + 0,3159z^{-2} - 1,5567z^{-3}$$

O seguinte controlador é obtido:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \\ C(z) &= \frac{2,0831(z - 2,0138)(z - 0,3679)}{(z + 0,9070)} \frac{2,2407z^2 + 0,3159z - 1,5567}{z^3 - 2,2407z^2 - 0,3159z + 1,5567} \\ &= 4,668 \frac{(z - 2,0138)(z - 0,3679)}{(z + 0,9070)} \frac{(z + 0,9070)(z - 0,7660)}{(z - 1)(z - 2,0138)(z + 0,7730)} \\ &= 4,668 \frac{(z - 0,3679)(z - 0,7660)}{(z - 1)(z + 0,7730)} \end{aligned}$$

A resposta ao degrau é apresentada na Figura 8.20.

O projeto do Exemplo 8.9 foi refeito para  $T_s = 0,2$  s, chegando-se ao seguinte controlador:

$$C(z) = 70,9002 \frac{(z - 0,8187)(z - 0,6376)}{(z - 1)(z + 0,757)} \quad (8.33)$$

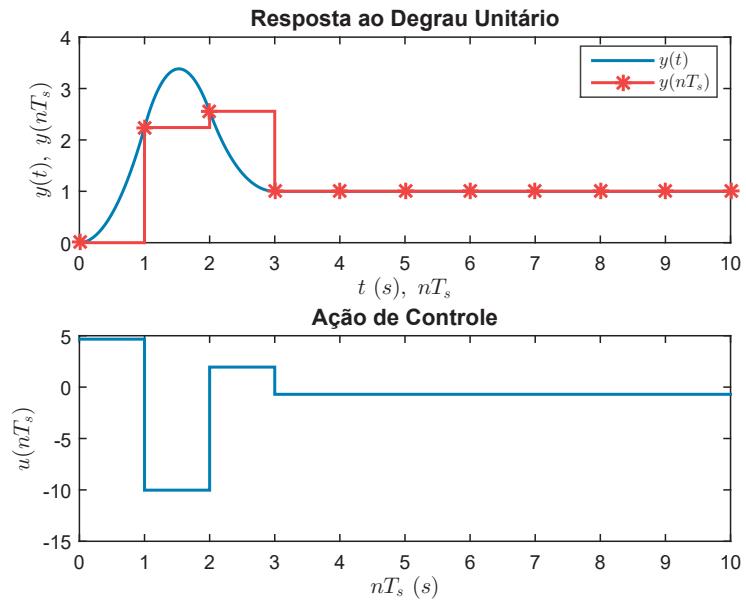
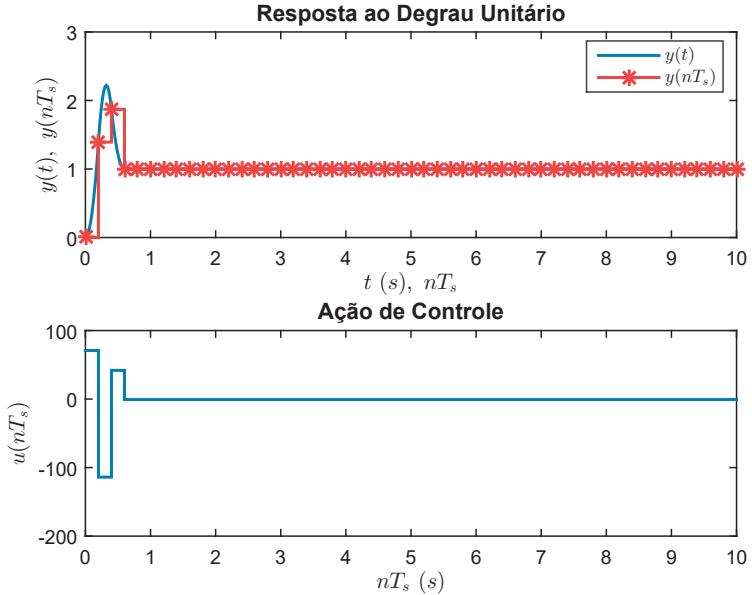


Figura 8.20: Resposta ao degrau do Exemplo 8.9.

A resposta é apresentada na Figura 8.21. Note que a ação de controle durante o período transitório assume valores extremamente elevados, o que pode levar o sistema à saturação.

Figura 8.21: Resposta ao degrau do Exemplo 8.9 com  $T_s = 0,2$  s.

### 8.5.1 Controle *Dead beat*

O controle *Dead beat* é aquele que proporciona resposta transitória com tempo de acomodação mínimo, erro estacionário nulo e livre de oscilações após o tempo de assentamento. Uma estrutura FIR para  $G_{MF}$  pode proporcionar essa resposta. Uma escolha particular para  $G_{MF}(z)$  é tal que uma entrada degrau é seguida pelo sistema com atraso de um ou mais períodos de amostragem [Fadali 2013]. Assim,

$$G_{MF}(z) = z^{-k}, \quad k \geq 1 \quad (8.34)$$

Logo,

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}} = \frac{1}{G(z)} \frac{1}{z^k - 1} \quad (8.35)$$

O valor de  $k$  deve ser escolhido para garantir a causalidade de  $C(z)$ . Por exemplo, se a planta tiver  $m$  zeros no infinito,  $G_{MF}(z)$  deve possuir  $k \geq m$  zeros no infinito.

**Exemplo 8.10:** A função de transferência de um sistema a ser controlado com realimentação unitária é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

Projete controladoradores *Deadbeat* assumindo  $T_s = 0,1$  s,  $T_s = 0,2$  s,  $T_s = 0,5$  s e  $T_s = 1$  s.

O problema é resolvido com o seguinte código Matlab:

```
clear all; clc; close all;
s = tf('s'); z = tf('z');
G = 1/((s+1)*(s+10));
Ts = 0.1; %0.2 0.5 1
G_D = c2d(G,Ts,'zoh'); %Discretiza a planta (em G_D há um zero no infinito)
C_D = (1/G_D)*(1/(z-1)); %Projeto Controlador
C_D = minreal(C_D); %Simplifica a F.T. do controlador
```

Os seguintes resultados são obtidos:

$$C_D = 281,69 \frac{(z - 0,9048)(z - 0,3679)}{(z - 1)(z + 0,6945)}, \quad T_s = 0,1\text{s}$$

$$C_D = 94,934 \frac{(z - 0,8187)(z - 0,1353)}{(z - 1)(z + 0,488)}, \quad T_s = 0,2\text{s}$$

$$C_D = 30,597 \frac{(z - 0,6065)(z - 0,006738)}{(z - 1)(z + 0,1958)}, \quad T_s = 0,5\text{s}$$

$$C_D = 16,913 \frac{(z - 0,3679)(z - 4,54e - 05)}{(z - 1)(z + 0,06908)}, \quad T_s = 1\text{s}$$

A resposta ao degrau do sistema compensado está apresentada na Figura 8.22, para diferentes períodos

de amostragem. A resposta discreta, de fato, é uma versão atrasada da entrada por uma amostra. No entanto, a resposta contínua, apesar de coincidir com a discreta nos pontos de amostragem, possui variações com amplitudes relativamente elevadas nos primeiros picos, principalmente para valores baixos de  $T_s$ . Além disso, o sinal de controle na saída do controlador *Deadbeat*, como visto na Figura 8.23, pode possuir amplitude muito elevada para valores pequenos de  $T_s$ , o que na prática pode gerar saturação.

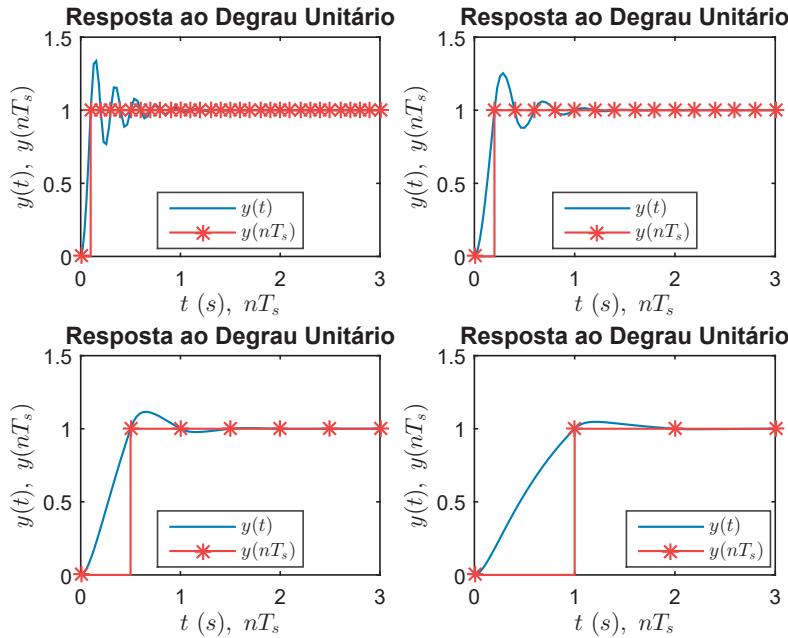


Figura 8.22: Resposta ao degrau do sistema compensado do Exemplo 8.10.

### 8.5.2 Controle Dahlin

O controlador *Dahlin* é uma versão modificada do *Deadbeat*. Ele considera que a função de transferência em malha fechada seja um sistema de primeira ordem com atraso de transporte, ou seja,

$$G_{MF}(s) = \frac{e^{-as}}{qs + 1}, \quad (8.36)$$

No plano- $z$ , com  $a = kT_s$ , tem-se:

$$G_{MF}(z) = \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T_s/q})}{(1 - e^{-T_s/q} z^{-1})} = \frac{1 - e^{-T_s/q}}{z^{k+1} - z^k e^{-T_s/q}} \quad (8.37)$$

O termo  $k$  deve ser escolhido para garantir causalidade. A função de transferência do controlador é, portanto, obtida como

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} = \frac{1}{G(z)} \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T_s/q})}{1 - e^{-T_s/q} z^{-1} - (1 - e^{-T_s/q}) z^{-k-1}} \\ &= \frac{1}{G(z)} \frac{1 - e^{-T_s/q}}{z^{k+1} - e^{-T_s/q} z^k - (1 - e^{-T_s/q})} \end{aligned} \quad (8.38)$$

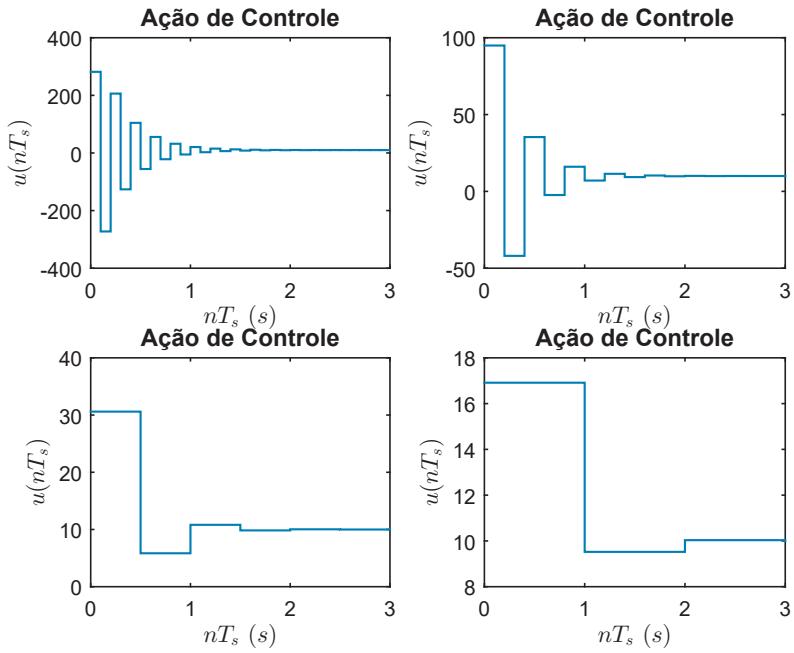


Figura 8.23: Sinal de controle dos casos do Exemplo 8.10.

☞ **Exemplo 8.11:** Refaça o Exemplo 8.10 com um controlador tipo *Dahlin* e  $T_s = 0,5$  s e  $q = 1$ .

O equivalente discreto de  $G(s)$  com ZOH na entrada é dado por

$$G(z) = 0,032683 \frac{(z + 0,1958)}{(z - 0,6065)(z - 0,006738)}$$

Como há um zero no infinito, qualquer  $k \geq 0$  já satisfaz a restrição de causalidade. Para  $k = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} C(z) &= 30,5969 \frac{(z - 0,6065)(z - 0,006738)}{(z + 0,1958)} \frac{(1 - e^{-0,5})}{z - e^{-0,5} - (1 - e^{-0,5})} \\ &= 30,5969 \frac{(z - 0,6065)(z - 0,006738)}{(z + 0,1958)} 0,3935 \\ &= 12,0390 \frac{(z - 0,6065)(z - 0,006738)}{(z + 0,1958)(z - 1)} \end{aligned}$$

A resposta ao degrau do sistema compensado é apresentada na Figura 8.24 e a ação de controle é apresentada na Figura 8.24. Note que o esforço de controle é menor se comparado ao *Deadbeat* e que a resposta em malha fechada apresenta forma mais suavizada.

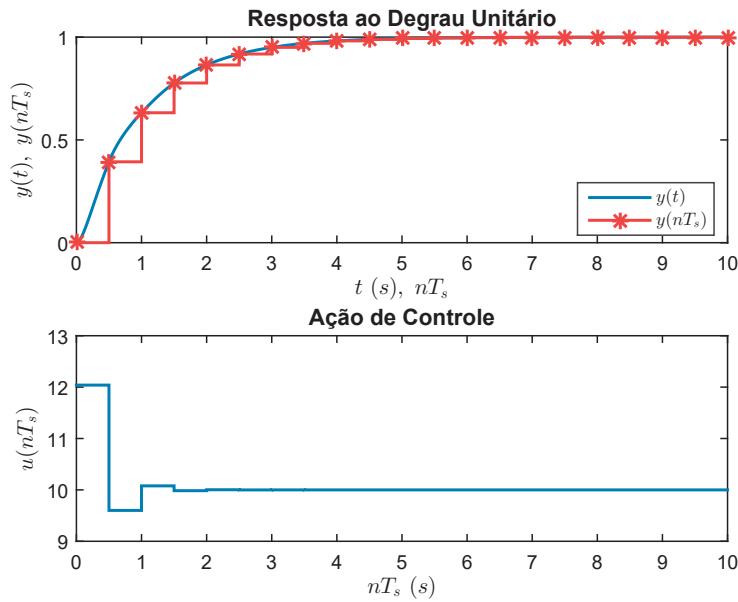


Figura 8.24: Sinal de controle dos casos do Exemplo 8.11.

Exemplo 8.12: Considere o seguinte sistema

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0,3)(s + 0,7)}$$

Projete um controlador Dahlin com  $T_s = 0,2$  e  $q = 0,5$ . O equivalente discreto da planta é dado por:

$$G(z) = \frac{0,018718(z + 0,9355)}{(z - 0,9418)(z - 0,8694)}$$

Há novamente um zero no infinito. Para  $k = 0$ , segue que

$$G_{MF}(z) = \frac{0,3297}{z - 0,6703}$$

Logo,

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \\ &= \frac{17,613(z - 0,9418)(z - 0,8694)}{(z - 1)(z + 0,9355)} \end{aligned}$$

A resposta ao degrau do sistema compensado é apresentada na Figura 8.25. Note que há oscilações entre períodos de amostragem e que o sinal de controle apresenta grandes oscilações devido ao zero de  $G(z)$  em  $z = -0,9355$ .

Como  $G(z)$  possui um zero no infinito, não podemos acrescentar um zero finito em  $G_{MF}(z)$ , pois isso violaria a restrição de causalidade. Vamos então efetuar a seguinte modificação:

$$G_{MF}(z) = G_{MF}(z) = \frac{K0,3297(z + 0,9355)}{z(z - 0,6703)}$$

ou seja, acrescentar um zero em  $(z + 0, 9355)$  e um polo em  $z = 0$ . O valor de  $K$  é facilmente encontrado pela restrição de erro estacionário nulo:

$$G_{MF}(1) = \frac{K0,3297(1 + 0,9355)}{(1 - 0,6703)} = 1 \Rightarrow K = 0,2016$$

Efetuando o projeto novamente, chega-se em:

$$C(z) = \frac{9,1(z - 0,9418)(z - 0,8694)}{(z - 1)(z + 0,1593)}$$

A resposta ao é apresentada na Figura 8.26. As oscilações foram extintas e a ação de controle está bem comportada.

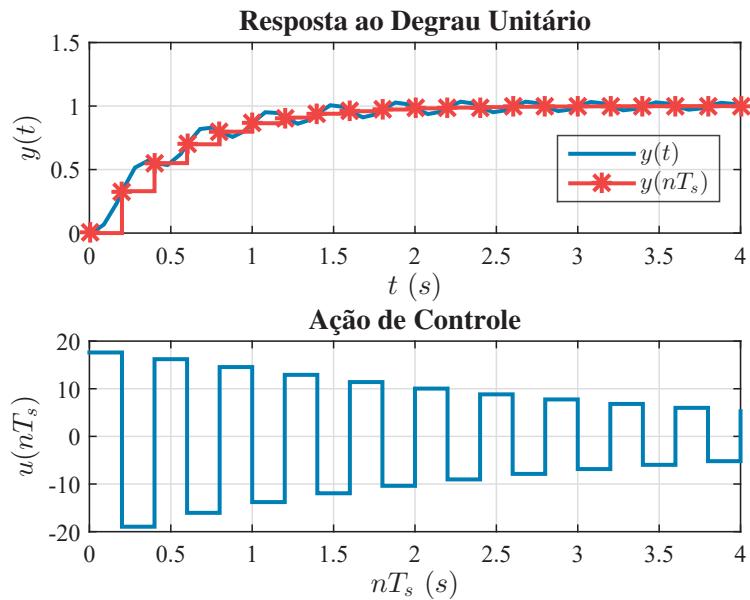


Figura 8.25: Resposta ao degrau do Exemplo 8.12 sem considerar compensação das oscilações entre períodos de amostragem.

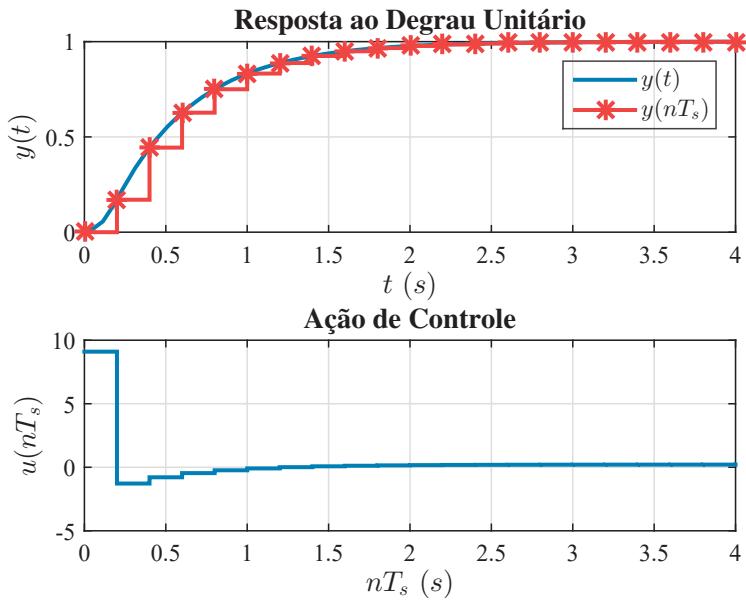


Figura 8.26: Resposta ao degrau do Exemplo 8.12 com compensação das oscilações entre períodos de amostragem.

☞ **Exemplo 8.13:** Obtenha um controlador Dahlin para o sistema.

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{1 + 10s}$$

Considerando  $T_s = 1$  s e  $q = 5$ . O equivalente ZOH é dado por

$$G(z) = z^{-2} \frac{0,09516}{z - 0,9048} = \frac{0,09516}{z^3 - 0,9048z^2}$$

Note que para garantir a causalidade,  $k \geq 2$ . Fazendo-se  $k = 2$ , tem-se

$$\begin{aligned} C(z) &= \left( \frac{z^3 - 0,9048z^2}{0,09516} \right) \left( \frac{1 - e^{-0,2}}{z^3 - (e^{-0,2})z^2 - (1 - e^{-0,2})} \right) \\ &= \left( \frac{z^3 - 0,9048z^2}{0,09516} \right) \left( \frac{0,1813}{z^3 - 0,8187z^2 - 0,1813} \right) \\ &= \frac{0,1813z^3 - 0,1640z^2}{0,09516z^3 - 0,0779z^2 - 0,0173} = \frac{1,905z^3 - 1,724z^2}{z^3 - 0,8187z^2 - 0,1813} \end{aligned} \quad (8.39)$$

A resposta ao degrau do sistema compensado é apresentada na Figura 8.27, juntamente com o sinal de controle.

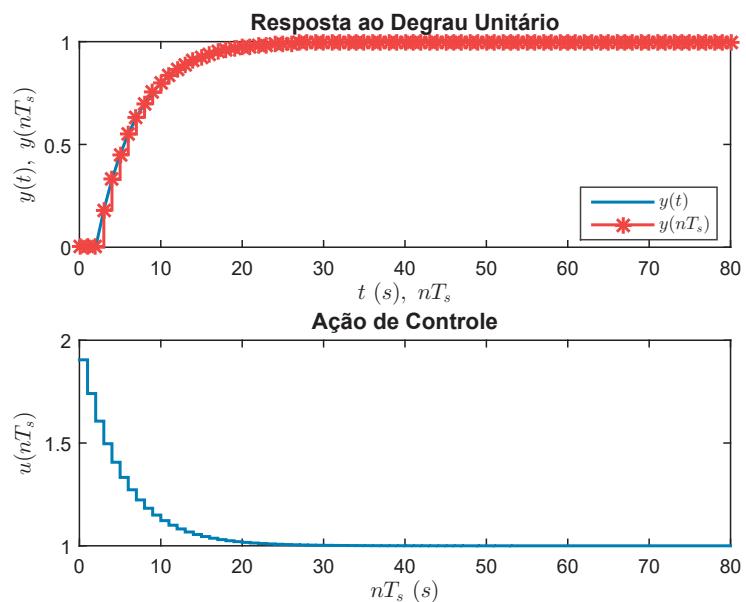


Figura 8.27: Resposta ao degrau do Exemplo 8.13.

## Controle Digital Por Variáveis de Estado

Seja um sistema dinâmico MIMO com  $r$  entradas,  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ ,  $m$  saídas,  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  e  $k$  integradores. Definindo as  $k$  saídas dos integradores como variáveis de estado,  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ , pode-se ter a seguinte representação em espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (9.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (9.2)$$

onde a primeira equação é denominada equação de estado e a segunda equação de saída.  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  são, respectivamente os vetores de estado, de entrada e de saída.

As funções vetoriais  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  podem ser tanto lineares quanto não lineares. Se tais funções envolverem explicitamente o tempo  $t$ , o sistema será variante no tempo; caso contrário, o sistema será invariante no tempo.

Se o conjunto de equações em questão for linearizado em torno de algum ponto de equilíbrio, tem-se a seguinte representação em espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (9.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \quad (9.4)$$

onde  $\mathbf{A}(t)$  é chamada de matriz de estado,  $\mathbf{B}(t)$  matriz de entrada,  $\mathbf{C}(t)$  matriz de saída e  $\mathbf{D}(t)$  matriz de transição direta. Uma representação do diagrama de blocos deste sistema de equações lineares pode ser representado em diagrama de blocos, como mostrado na Figura 9.1.

Se  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  não envolverem o tempo  $t$  explicitamente, então o sistema será chamado de invariante no tempo. A representação no espaço de estados de um sistema linear e invariante no tempo (LIT) pode ser dada pelo seguinte conjunto de equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (9.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \quad (9.6)$$

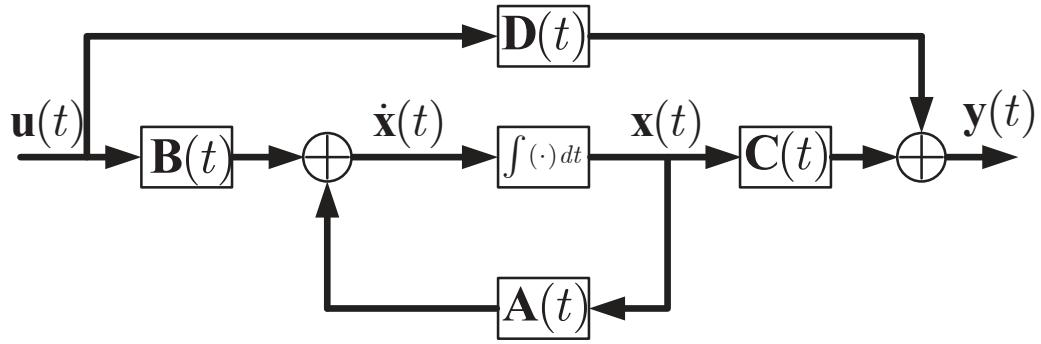


Figura 9.1: Diagrama de blocos de um sistema linear de tempo contínuo representado no espaço de estados.

Para sistemas em tempo discreto não necessariamente LITs, as equações de estados e de saída pode ser dada por

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n], n) \quad (9.7)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n], n), \quad (9.8)$$

onde a primeira equação é denominada equação de estado e a segunda equação de saída.  $\mathbf{x}[n]$ ,  $\mathbf{u}[n]$  e  $\mathbf{y}[n]$  são, respectivamente os vetores de estado, de entrada e de saída.

Para sistemas lineares, não necessariamente invariantes no tempo, tem-se a seguinte notação

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi[n]\mathbf{x}[n] + \Gamma[n]\mathbf{u}[n] \quad (9.9)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}[n]\mathbf{u}[n], \quad (9.10)$$

onde  $\Phi[n]$  é chamada de matriz de estado,  $\Gamma[n]$  matriz de entrada,  $\mathbf{C}[n]$  matriz de saída e  $\mathbf{D}[n]$  matriz de transição direta. Uma representação do diagrama de blocos deste sistema de equações lineares pode ser representado em diagrama de blocos, como mostrado na Figura 9.2.

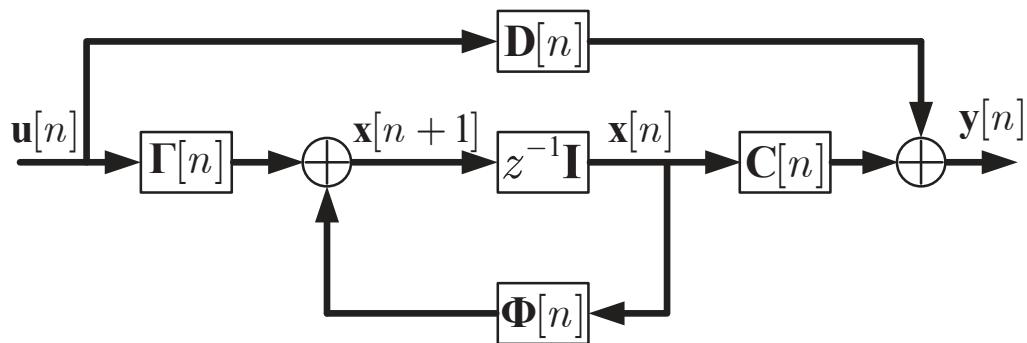


Figura 9.2: Diagrama de blocos de um sistema linear de tempo discreto representado no espaço de estados.

Para sistemas LIT, tem-se

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n] \quad (9.11)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n], \quad (9.12)$$

## 9.1 Solução de Equação de Estados em Tempo Discreto

A solução de (9.11) pode ser obtida diretamente por um procedimento de recursão, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[1] &= \Phi\mathbf{x}[0] + \Gamma\mathbf{u}[0] \\ \mathbf{x}[2] &= \Phi\mathbf{x}[1] + \Gamma\mathbf{u}[1] = \Phi^2\mathbf{x}[0] + \Phi\Gamma\mathbf{u}[0] + \Gamma\mathbf{u}[1] \\ \mathbf{x}[3] &= \Phi\mathbf{x}[2] + \Gamma\mathbf{u}[2] = \Phi^3\mathbf{x}[0] + \Phi^2\Gamma\mathbf{u}[0] + \Phi\Gamma\mathbf{u}[1] + \Gamma\mathbf{u}[2] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (9.13)$$

Repetindo o processo, pode-se verificar que

$$\mathbf{x}[n] = \Phi^n\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi^{n-j-1}\Gamma\mathbf{u}[j], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.14)$$

A saída  $\mathbf{y}[n]$  é dada por

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\Phi^n\mathbf{x}[0] + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{n-1} \Phi^{n-j-1}\Gamma\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.15)$$

Note que a solução homogênea é dada por

$$\mathbf{x}[n] = \Phi^n\mathbf{x}[0] = \Psi[n] \quad (9.16)$$

onde  $\Psi[n] = \Phi^n$  é uma matriz  $k \times k$  que satisfaz a seguinte condição

$$\Psi[n+1] = \Phi\Psi[n], \quad \Psi[0] = \mathbf{I} \quad (9.17)$$

Consequentemente,

$$\Psi[n] = \Phi^n \quad (9.18)$$

Note que a solução em (9.15) é simplesmente uma transformação do estado inicial. A matriz  $\Phi[n]$ , portanto, denomina-se matriz de transição de estados (ou matriz fundamental). Em termos da matriz de transição de estados, a solução em (9.14) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \Psi[n]\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{n-1} \Psi[n-j-1]\Gamma\mathbf{u}[j] \\ &= \Psi[n]\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{n-1} \Psi[j]\Gamma\mathbf{u}[n-j-1] \end{aligned} \quad (9.19)$$

Com isso, a equação de saída é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\Psi[n]\mathbf{x}[0] + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{n-1} \Psi[n-j-1]\Gamma\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n] \\ &= \mathbf{C}\Psi[n]\mathbf{x}[0] + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{n-1} \Psi[j]\Gamma\mathbf{u}[n-j-1] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n] \end{aligned} \quad (9.20)$$

Uma forma alternativa de obtenção de  $\Psi[n]$  é considerada a seguir. Seja a equação de estados discreta

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n] \quad (9.21)$$

Aplicando a transformada- $z$  na equação anterior, tem-se que

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}[0] = \Phi\mathbf{X}(z) + \Gamma\mathbf{U}(z) \quad (9.22)$$

Então

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \Phi)\mathbf{X}(z) &= z\mathbf{x}[0] + \Gamma\mathbf{U}(z) \\ \Rightarrow \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\mathbf{x}[0] + (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma\mathbf{U}(z) \end{aligned} \quad (9.23)$$

Aplicando a transformada- $z$  inversa em (9.23), obtém-se

$$\mathbf{x}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\right\}\mathbf{x}[0] + \mathcal{Z}^{-1}\left\{(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma\mathbf{U}(z)\right\} \quad (9.24)$$

Comparando (9.24) a (9.19), pode-se constatar que

$$\Psi[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\right\} \quad (9.25)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma\mathbf{U}(z)\right\} = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi[j]\Gamma\mathbf{u}[n-j-1] \quad (9.26)$$

## 9.2 Matriz de Transferência Discreta

Um sistema de simples entrada e simples saída (SISO) pode ser modelado por uma função de transferência discreta. Tal representação pode ser generalizada para sistemas MIMO chegando-se em uma matriz de transferência discreta

Seja a representação em espaço de estados

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n] \quad (9.27)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n], \quad (9.28)$$

com  $\mathbf{x}[n]$  sendo um vetor de  $k$  elementos,  $\mathbf{y}[n]$  um vetor de  $m$  elementos,  $\Phi$  uma matriz  $k \times k$ ,  $\Gamma$  uma matriz  $k \times r$ ,  $\mathbf{C}$  uma matriz  $m \times k$  e  $\mathbf{D}$  uma matriz  $m \times r$ . Aplicando a transformada- $z$  na representação em espaço de estados e assumindo condições iniciais nulas, obtém-se:

$$z\mathbf{X}(z) = \Phi\mathbf{X}(z) + \Gamma\mathbf{U}(z) \quad (9.29)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z), \quad (9.30)$$

Isolando  $\mathbf{X}(z)$  em (9.29) e substituindo em (9.30), chega-se em:

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma + \mathbf{D}] \mathbf{U}(z). \quad (9.31)$$

Como  $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z)$ , tem-se que: Logo,

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma + \mathbf{D}] \quad (9.32)$$

A matriz  $\mathbf{G}(z)$ , de dimensão  $(m \times r)$  é conhecida como matriz de transferência discreta e caracteriza a dinâmica de entrada-saída do sistema em tempo discreto modelado em (9.26)-(9.28).

Como

$$(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \Phi)}{|z\mathbf{I} - \Phi|} \quad (9.33)$$

com  $\text{adj}(\mathbf{M})$  sendo a matriz adjunta da matriz  $\mathbf{M}$ <sup>1</sup>.

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(z\mathbf{I} - \Phi) \Gamma}{|z\mathbf{I} - \Phi|} + \mathbf{D} \quad (9.34)$$

Observa-se que os polos de  $\mathbf{G}(z)$  são os autovalores de  $\Phi$ .

### 9.3 Discretização de Equações de Estado Contínuas

Seja a representação em espaço de estados contínua

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (9.35)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (9.36)$$

A solução para a equação de estados em (9.35) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t)} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (9.37)$$

A representação em tempo discreto para (9.35) assume a forma

$$\mathbf{x}([n+1]T_s) = \Phi(T_s)\mathbf{x}(nT_s) + \Gamma(T_s)\mathbf{u}(nT_s) \quad (9.38)$$

Observe que  $\Phi$  e  $\Gamma$  dependem de  $T_s$ . Para determinar  $\Phi$  e  $\Gamma$ , pode-se utilizar a Equação (9.37). Assume-se adicionalmente que a entrada  $\mathbf{u}(t)$  é amostrada e mantida constante dentro do período de amostragem (segurador de ordem zero), tal que  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(nT_s)$ , para  $nT_s \leq t \leq (n+1)T_s$ .

Pode-se verificar que

---

<sup>1</sup>A matriz adjunta de uma matriz quadrada  $\mathbf{M}$  é a transposta da matriz que se obtém substituindo-se cada termo  $\mathbf{M}_{i,j}$  pelo determinante da matriz obtida retirando-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{M}$ , multiplicado por  $(-1)^{i+j}$

$$\mathbf{x}([n+1]T_s) = e^{\mathbf{A}([n+1]T_s)} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}([n+1]T_s)} \int_0^{(n+1)T_s} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (9.39)$$

e,

$$\mathbf{x}(nT_s) = e^{\mathbf{A}(nT_s)} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}(nT_s)} \int_0^{nT_s} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (9.40)$$

Multiplicando (9.40) por  $e^{\mathbf{A}T_s}$  e subtraindo de (9.39), obtém-se

$$\mathbf{x}([n+1]T_s) = e^{\mathbf{A}T_s} \mathbf{x}(nT_s) + e^{\mathbf{A}([n+1]T_s)} \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (9.41)$$

A Equação (9.41) pode ainda se escrita como

$$\mathbf{x}([n+1]T_s) = e^{\mathbf{A}T_s} \mathbf{x}(nT_s) + \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} e^{\mathbf{A}([n+1]T_s - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(nT_s) d\tau \quad (9.42)$$

Substituindo  $\eta = nT_s + T_s - \tau$  em (9.42), obtém-se

$$\mathbf{x}([n+1]T_s) = e^{\mathbf{A}T_s} \mathbf{x}(nT_s) + \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}\eta} \mathbf{B}\mathbf{u}(nT_s) d\eta \quad (9.43)$$

Ao definir  $\Phi = e^{\mathbf{A}T_s}$  e  $\Gamma = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \mathbf{B}$ , a Equação 9.43 é reescrita como

$$\mathbf{x}([n+1]T_s) = \Phi \mathbf{x}(nT_s) + \Gamma \mathbf{u}(nT_s) \quad (9.44)$$

Note que  $\Phi$  e  $\Gamma$  dependem de  $T_s$ . Se  $\mathbf{A}$  for não singular, então a seguinte simplificação pode ser feita [Ogata 1995]:

$$\Gamma = \left( \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}\eta} d\eta \right) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T_s} - \mathbf{I}) \mathbf{B} = (e^{\mathbf{A}T_s} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (9.45)$$

Quanto à equação de saída, por não possuir dinâmica, sua versão discreta é dada por

$$\mathbf{y}([n+1]T_s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(nT_s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(nT_s) \quad (9.46)$$

No MATLAB, o comando `c2d` pode ser utilizado para encontrar a representação discreta, da seguinte forma: `[Phi, Gamma] = c2d(A, B, Ts)`.

## 9.4 Controlabilidade e Observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman e possuem um papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados.

- **Controlabilidade:** considere o sistema descrito pela seguinte equação de estado

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n], \quad (9.47)$$

onde:

$\mathbf{x}[n]$ : vetor  $(k \times 1)$  de estados no instante  $n$ ;

$\mathbf{u}[n]$ : vetor  $(r \times 1)$  de entrada;

$\Phi$ : matriz  $(k \times k)$  de estados;

$\Gamma$ : matriz  $(k \times r)$  de entrada.

Assume-se que qualquer elemento de  $\mathbf{u}[n]$  é constante para  $nT_s \leq t \leq (n+1)T_s$ .

Tal sistema será dito de estado controlável se, para qualquer instante inicial  $n = 0$ , existir uma entrada  $\mathbf{u}[n]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , que transfira o sistema do estado inicial  $\mathbf{x}[0]$  par qualquer estado final desejado  $\mathbf{x}[N]$ , em um intervalo arbitrário de  $N$  amostras.

Para um sistema ser completamente controlável, a matriz  $(k \times kr)$

$$\mathcal{C} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{k-1}\Gamma \end{array} \right], \quad (9.48)$$

deve possuir posto (*rank*)  $k$ , ou seja, se as colunas de  $\mathcal{C}$  forem linearmente independentes. Tal matriz é denominada **matriz de controlabilidade**.

No Matlab, `C = ctrb(Phi, Gamma)` obtém a matriz de controlabilidade `C` do par `(Phi, Gamma)`, e `rank(C)` verifica o posto da matriz.

- **Observabilidade:** Considere o sistema descrito por

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi\mathbf{x}[n] \quad (9.49)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \quad (9.50)$$

onde

$\mathbf{x}[n]$ : vetor de estado ( $k$  elementos);

$\mathbf{y}[n]$ : vetor de saída ( $m$  elementos);

$\Phi$ : matriz  $k \times k$ ;

$\mathbf{C}$ : matriz  $m \times k$ ;

O sistema será dito completamente observável se todo estado inicial  $\mathbf{x}[0]$  puder ser determinado pela observação da saída  $\mathbf{y}[n]$  e da entrada  $\mathbf{u}[n]$  durante um número finito de períodos de amostragem ( $0 \leq n \leq N$ ), dado que o modelo do sistema seja conhecido. Em outras palavras, o sistema é completamente observável se toda transição de estados afeta todos os elementos do vetor de saída. Pode-se mostrar que o posto da matriz ( $km \times k$ )

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{C}\Phi \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{C}\Phi^{k-1} \end{bmatrix}, \quad (9.51)$$

deve ser  $k$ , ou seja,  $\text{rank}(\mathcal{O}) = k$ . A matriz  $\mathcal{O}$  é denominada **matriz de observabilidade**.

No Matlab,  $\text{Ob} = \text{obsv}(\text{Phi}, \mathbf{C})$  obtém a matriz de observabilidade  $\text{Ob}$  do par  $(\text{Phi}, \mathbf{C})$ , e  $\text{rank}(\text{Ob})$  verifica o posto da matriz.

#### 9.4.1 Controle por Realimentação de Estados

Considere novamente o sistema dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \end{aligned} \quad (9.52)$$

Ao invés de realimentar a saída, que tal utilizar a retroação das variáveis de estado?

Se o sistema for controlável, é possível determinar uma matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  ( $r \times k$ ) de realimentação de estados, tal que a lei de controle  $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$ , garanta alocação arbitrária dos polos do sistema em malha fechada.

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi\mathbf{x}[n] - \Gamma\mathbf{K}\mathbf{x}[n] \quad (9.53)$$

A Figura 9.3 apresenta a representação em espaço de estados bem como o sistema com realimentação de estados.

A equação característica do sistema descrito em (9.53) é dada por

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}) = 0 \quad (9.54)$$

Se que a posição desejada dos polos de malha fechada é conhecida, tal que

$$p_c(z) = (z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdots (z - p_k), \quad (9.55)$$

então, o vetor  $\mathbf{K}$  pode ser obtido como

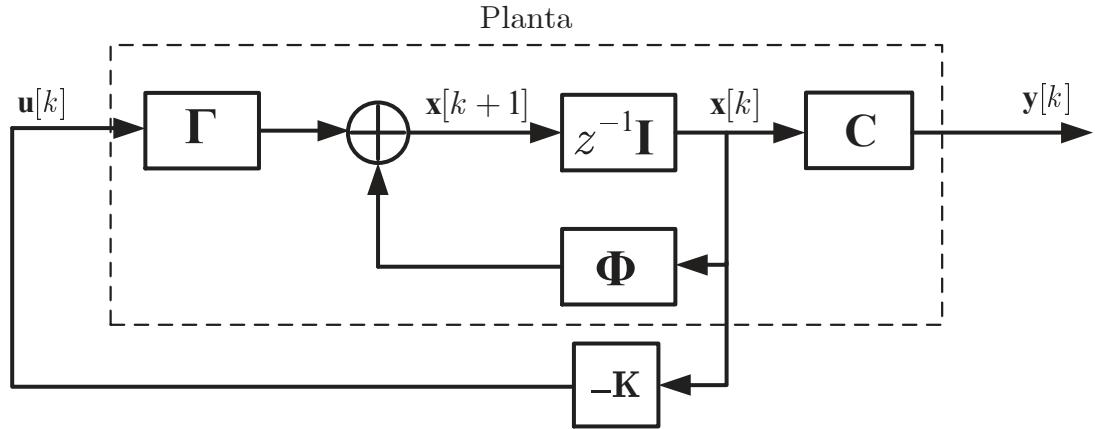


Figura 9.3: Diagrama do sistema com realimentação de estados.

$$\det(z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}) = (z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdots (z - p_n) \quad (9.56)$$

Se o par  $(\Phi, \Gamma)$  for completamente controlável, então existe  $\mathbf{K}$ , tal que  $\det(z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}) = p_c(z)$  para qualquer polinômio  $p_c(z)$  de grau  $k$  especificado.

No MATLAB, para sistemas SISO, o comando `acker` pode ser utilizado para encontrar a matriz de realimentação de estados através da fórmula de Ackerman, com a seguinte sintaxe

`K = acker(Phi, Gamma, p_c)`. Apresenta resultado satisfatório para sistemas de ordem menor ou igual a 10. É capaz de alocar polos com multiplicidade. Não se aplica a sistemas MIMO.

Por outro lado, o comando `place` pode ser utilizado satisfatoriamente para sistemas MIMO, como a mesma sintaxe do comando `acker`. No entanto, não é capaz de alocar polos com multiplicidade maior do que o posto de  $\Gamma$ .

#### 9.4.2 Projeto de Observadores

O processo do controlador necessita de acesso às variáveis de estado para realizar a realimentação com os ganhos ajustados. O acesso a tais variáveis pode ser feito através de sensores. Entretanto, em alguns casos, a medição de estados é impraticável por motivos como custo do sensor, inviabilidade física ou mesmo pelo fato de um dado estado não ser explicitamente disponível para medição.

Na impossibilidade de realimentar os estados reais, a ideia é fazer  $u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ , onde  $\hat{\mathbf{x}}$  representa uma estimativa dos estados. Considere novamente a seguinte representação

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma u[n] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \end{aligned} \quad (9.57)$$

Apesar de se conhecer  $\Phi$ ,  $\Gamma$  e  $\mathbf{C}$ , algumas das variáveis de estado podem ser inacessíveis. Assim, as

estimativas de estado são obtidas através de um modelo do sistema, tal como representado na Figura 9.4.

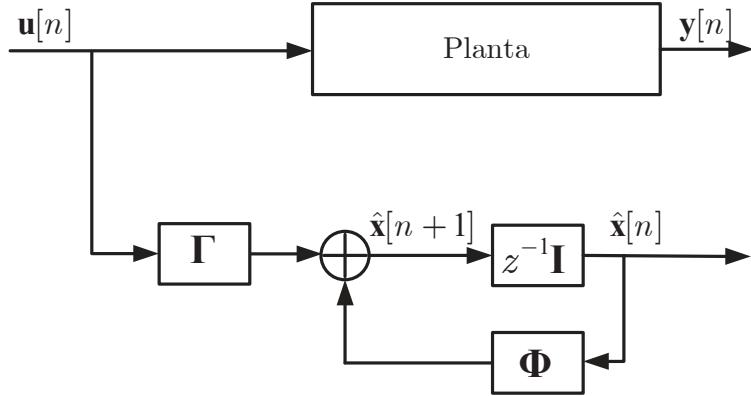


Figura 9.4: Diagrama do estimador em malha aberta.

Note que na Figura 9.4 o estimador não está utilizando qualquer medida do sistema real, o que pode fazer com que a estimativa divirja do valor desejado. Para corrigir o erro de estimação, pode-se utilizar uma realimentação deste erro, como mostrado na Figura 9.5, onde  $\mathbf{L}$  ( $k \times m$ ).

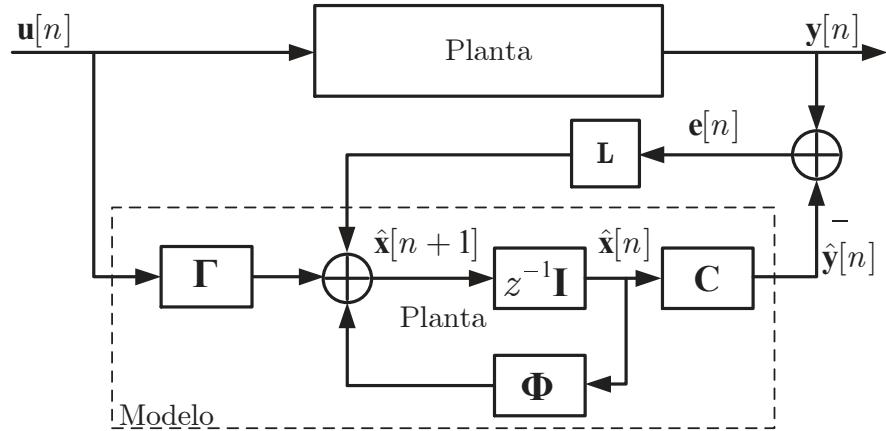


Figura 9.5: Diagrama do estimador de predição em malha fechada.

E equação do estimador é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{x}[n+1] &= \Phi\hat{x}[n] + \Gamma u[n] + \mathbf{L}(y[n] - \hat{y}[n]) \\ &= \Phi\hat{x}[n] + \Gamma u[n] + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}[n] - \hat{x}[n])\end{aligned}\tag{9.58}$$

Ao definir  $\tilde{x}[n] = \mathbf{x}[n] - \hat{x}[n]$ , tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n+1] &= \mathbf{x}[n+1] - \hat{x}[n+1] = \Phi(\mathbf{x}[n] - \hat{x}[n]) - \mathbf{L}\mathbf{C}\tilde{x}[n] \\ &= (\Phi - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{x}[n]\end{aligned}\tag{9.59}$$

Se o sistema for completamente observável, pode-se dar a  $\tilde{\mathbf{x}}[n]$  o desempenho desejado. Em geral, deseja-se que  $\tilde{\mathbf{x}}[n]$  converja rapidamente para zero. Note que o erro de estimação depende dos autovalores de  $(\Phi - \mathbf{LC})$ . Portanto, se estes autovalores são estáveis, o erro tende a zero assintoticamente. Por este motivo, tal estimador é denominado **Estimador Assintótico de Estados**. É importante notar que polos do observador devem possuir dinâmica mais rápida que os do sistema de controle em malha fechada, para que a convergência seja relativamente rápida. Entretanto, quanto mais rápido for o observador, mais ruído é agregado à estimação.

Se o sistema for completamente observável, então existe  $\mathbf{L}$ , tal que  $\det(z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LC}) = p_o(z)$  para qualquer polinômio  $p_o(z)$  de grau  $n$  especificado.

Note que o projeto do observador consiste em resolver o problema de alocação de polos para o sistema

$$\mathbf{z}[n+1] = \Phi^\top \mathbf{z}[n] + \mathbf{C}^\top \mathbf{v}[n] \quad (9.60)$$

pois os autovalores de  $(\Phi^\top - \mathbf{C}^\top \mathbf{L}^\top)$  são os mesmos de  $(\Phi - \mathbf{LC})$ . Assim como no problema de alocação de polos, pode-se também utilizar o comando `place` do MATLAB, com a seguinte sintaxe `L = place(Phi', C', p_o)'`, sendo  $\Phi$ ,  $C$  as matrizes de estado e de saída, e  $p_o$  o vetor com a posição dos polos desejada.

Este esquema é denominado estimador de predição, pois utiliza a medida da saída atual para estimar o estado um período à frente, ou seja, a estimação do estado atual depende da medida no instante anterior.

### Estimador de Ordem Reduzida

Se parte do vetor de estados é disponível para medição, não há necessidade de um estimador para todos os estados. Dessa ideia surge o estimador de ordem reduzida. Considere a seguinte representação, em que  $\mathbf{x}_b$  ( $m$  elementos) representa parte do vetor de estados medida diretamente na saída, e  $\mathbf{x}_a$  ( $k - m$  elementos) a parcela a ser estimada.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a[n+1] \\ \mathbf{x}_b[n+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a[n] \\ \mathbf{x}_b[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} \mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a[n] \\ \mathbf{x}_b[n] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.61)$$

A dinâmica da parcela não medida é dada por

$$\mathbf{x}_a[n+1] = \Phi_{aa}\mathbf{x}_a[n] + \underbrace{\Phi_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \Gamma_a \mathbf{u}[n]}_{\text{entrada equivalente}} \quad (9.62)$$

Já para a parcela medida, tem-se

$$\mathbf{x}_b[n+1] = \Phi_{bb}\mathbf{x}_b[n] + \Phi_{ba}\mathbf{x}_a[n] + \Gamma_b\mathbf{u}[n], \quad (9.63)$$

que pode ser rearranjada como

$$\underbrace{\mathbf{x}_b[n+1] - \Phi_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \Gamma_b\mathbf{u}[n]}_{\text{medidas conhecidas}} = \Phi_{ba}\mathbf{x}_a[n]. \quad (9.64)$$

Considere a Equação (9.58) do estimador, bem como as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\leftarrow \mathbf{x}_a \\ \boldsymbol{\Phi} &\leftarrow \boldsymbol{\Phi}_{aa} \\ \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n] &\leftarrow \boldsymbol{\Phi}_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \boldsymbol{\Gamma}_a\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &\leftarrow \mathbf{x}_b[n+1] - \Phi_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \Gamma_b\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{C} &\leftarrow \boldsymbol{\Phi}_{ba} \\ \mathbf{L} &\leftarrow \mathbf{L}_r \end{aligned}$$

Assim, (9.58) pode ser adaptada para

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_a[n+1] &= \boldsymbol{\Phi}_{aa}\hat{\mathbf{x}}_a[n] + \boldsymbol{\Phi}_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \boldsymbol{\Gamma}_a\mathbf{u}[n] + \\ &\quad \mathbf{L}_r(\mathbf{x}_b[n+1] - \Phi_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \Gamma_b\mathbf{u}[n] - \boldsymbol{\Phi}_{ba}\hat{\mathbf{x}}_a[n]) \end{aligned} \quad (9.65)$$

Mas,

$$\mathbf{x}_a[n+1] = \boldsymbol{\Phi}_{aa}\mathbf{x}_a[n] + \boldsymbol{\Phi}_{ab}\mathbf{x}_b[n] + \boldsymbol{\Gamma}_a\mathbf{u}[n] \quad (9.66)$$

Ao subtrair (9.65) de (9.66) e definir  $\tilde{\mathbf{x}}_a[n] = \mathbf{x}_a[n] - \hat{\mathbf{x}}_a[n]$ , chega-se em:

$$\tilde{\mathbf{x}}_a[n+1] = \boldsymbol{\Phi}_{aa}\tilde{\mathbf{x}}_a[n] - \mathbf{L}_r(\mathbf{x}_b[n+1] - \Phi_{bb}\mathbf{x}_b[n] - \Gamma_b\mathbf{u}[n] - \boldsymbol{\Phi}_{ba}\hat{\mathbf{x}}_a[n]) \quad (9.67)$$

Ao substituir (9.63) em (9.67) e efetuar as devidas simplificações, tem-se que

$$\tilde{\mathbf{x}}_a[n+1] = (\boldsymbol{\Phi}_{aa} - \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{ba})\tilde{\mathbf{x}}_a[n] \quad (9.68)$$

Em [Gopinath 1971] é provado que se o observador de ordem completa da Equação (9.58) existir, então o estimador de ordem reduzida da Equação (9.65) também existe, ou seja, as raízes da equação característica dada por

$$\det(z\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_{aa} + \mathbf{L}_r\boldsymbol{\Phi}_{ba}) = 0 \quad (9.69)$$

podem ser alocadas de forma arbitrária. Note ainda que o comando `place` do MATLAB pode ser utilizado para tal alocação com a seguinte sintaxe: `L_r = place(Φ_aa', Φ_ba', p_or)'`, onde `p_or` é a posição desejada dos polos do observador de ordem reduzida.

Se a ordem do observador de ordem reduzida for a mínima possível, o observador é denominado **observador de ordem mínima**.

Note que em (9.65),  $\hat{x}_a[n + 1]$  depende de  $x_b[n + 1]$ . Para escrever a equação de diferenças de uma forma mais conveniente, efetua-se uma manipulação em (9.65), tal que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_a[n+1] - \mathbf{L}_r \mathbf{x}_b[n+1] &= (\Phi_{aa} - \mathbf{L}_r \Phi_{ba}) \hat{\mathbf{x}}_a[n] + \\ &\quad (\Phi_{ab} - \mathbf{L}_r \Phi_{bb}) \mathbf{x}_b[n] + (\Gamma_a - \mathbf{L}_r \Gamma_b) \mathbf{u}[n] \end{aligned} \quad (9.70)$$

Ao subtrair e somar o termo  $(\Phi_{aa} - \mathbf{L}_r \Phi_{ba}) \mathbf{L}_r \mathbf{x}_b[n]$  do lado direito de (9.70), e definir  $\hat{\mathbf{z}}[n] = \hat{\mathbf{x}}_a[n] - \mathbf{L}_r \mathbf{x}_b[n]$ , chega-se em:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}}[n+1] &= (\Phi_{aa} - \mathbf{L}_r \Phi_{ba}) \hat{\mathbf{z}}[n] + (\Phi_{aa} - \mathbf{L}_r \Phi_{ba}) \mathbf{L}_r \mathbf{x}_b[n] + \\ &\quad (\Phi_{ab} - \mathbf{L}_r \Phi_{bb}) \mathbf{x}_b[n] + (\boldsymbol{\Gamma}_a - \mathbf{L}_r \boldsymbol{\Gamma}_b) \mathbf{u}[n]\end{aligned}\quad (9.71)$$

Assim, a equação de diferenças (9.71) pode ser utilizada para representar a dinâmica do estimador de ordem reduzida. A lei de controle por realimentação de estados é então dada por:

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_a[n] \\ \mathbf{x}_b[n] \end{bmatrix} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}[n] + \mathbf{L}_r \cdot \mathbf{y}[n] \\ \mathbf{y}[n] \end{bmatrix} \quad (9.72)$$

Com isso, pode-se ter a representação da Figura 9.6.

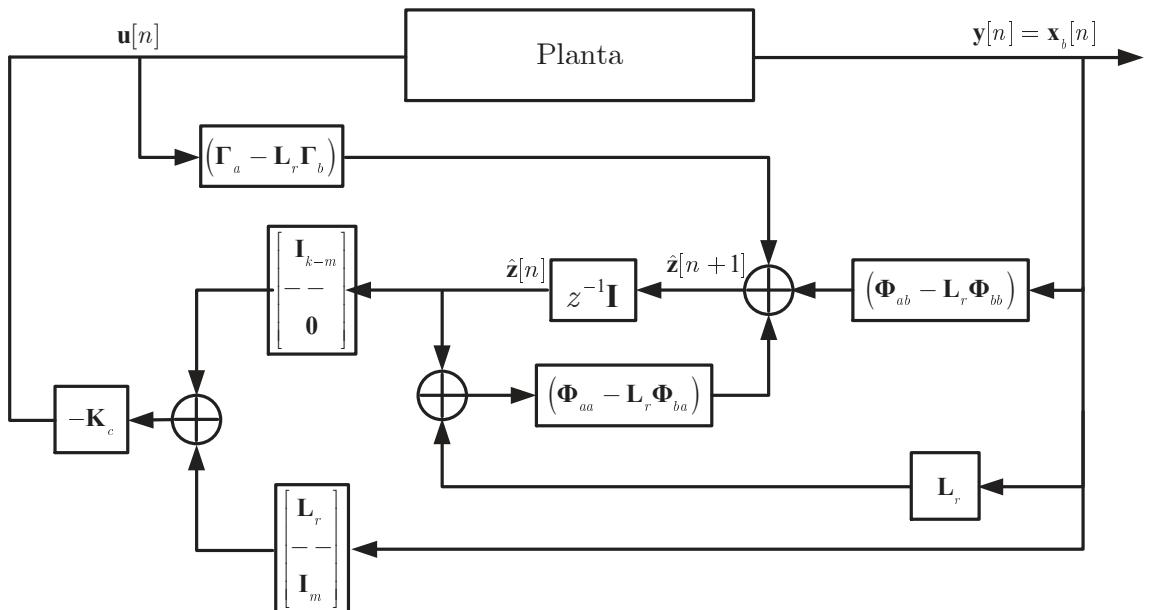


Figura 9.6: Diagrama do estimador ordem reduzida com controle em malha fechada.

No entanto, na presença de ruídos de medição, o estimador de ordem completa tende a apresentar um desempenho superior.

## 9.5 Princípio da Separação

Ao utilizar  $\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  no sistema com observador de estados, as dinâmicas do sistema e do erro de estimativa são dadas por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \tilde{\mathbf{x}}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma\mathbf{K} & 0 \\ 0 & \Phi - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ e[n] \end{bmatrix} \quad (9.73)$$

Note que os autovalores desse sistema aumentado são dados pelos autovalores de  $(\Phi - \Gamma\mathbf{K})$  e  $(\Phi - \mathbf{L}\mathbf{C})$ . Assim, os ganhos de controle  $\mathbf{K}$  e de observação  $\mathbf{L}$  podem ser calculados separadamente, ou seja, os autovalores do observador e da planta são alocados independentemente, o que é denominado *Princípio da Separação*.

Para que os estados sejam estimados rapidamente, os polos de  $\Phi - \mathbf{L}\mathbf{C}$  devem possuir módulo menor que os polos de  $\Phi - \Gamma\mathbf{K}$ ;

## 9.6 Problema de Rastreamento

Esquemas como o da Figura 9.3 são reguladores que levam o estado do sistema a zero a partir de qualquer condição inicial, com velocidade determinada pela equação característica do sistema em malha fechada. No entanto, caso as saídas do sistema precisem seguir uma referência com erro assintótico nulo (rastreamento), não se pode garantir a ausência de erro em regime pela realimentação de estados.

### 9.6.1 Realimentação Estados com Entrada de Referência

Considere o diagrama em blocos da Figura 9.7, e que o sistema possua o mesmo número de entradas e saídas,  $\mathbf{r}[n] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ .

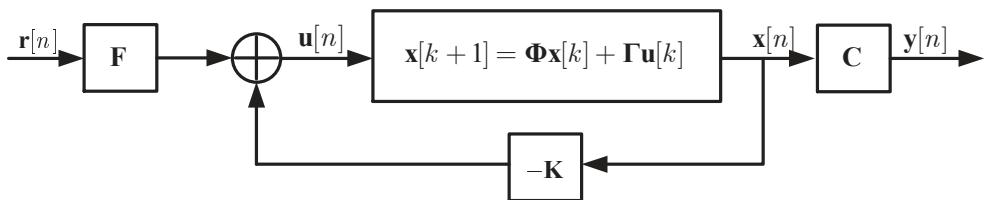


Figura 9.7: Realimentação de estados com entrada de referência.

A alocação de polos geralmente altera o ganho total do sistema, o que sugere o uso de um pré-filtro para ajustar saída quando há uma variação degrau na referência. Na Figura 9.7 o pré-filtro é representado por  $\mathbf{F}$  ( $m \times m$ ). O sistema em malha fechada é regido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= (\Phi - \Gamma\mathbf{K}_c) \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{F} \mathbf{r}[n] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x}[n] \end{aligned} \quad (9.74)$$

Na condição de regime permanente, tem-se

$$\mathbf{x}_{ss} = (\Phi - \Gamma \mathbf{K}_c) \mathbf{x}_{ss} + \Gamma \mathbf{F} \mathbf{r}_{ss} \quad (9.75)$$

e,

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{ss} \quad (9.76)$$

De (9.75) segue que:

$$\mathbf{x}_{ss} = (\mathbf{I}_{k,k} - \Phi + \Gamma \mathbf{K}_c)^{-1} \Gamma \mathbf{F} \mathbf{u}_{ss} \quad (9.77)$$

Logo,

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C} (\mathbf{I}_{k,k} - \Phi + \Gamma \mathbf{K}_c)^{-1} \Gamma \mathbf{F} \mathbf{r}_{ss} \quad (9.78)$$

Para a condição de erro nulo em regime permanente, tem-se  $\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{r}_{ss}$ . Isso ocorre se:

$$\mathbf{C} (\mathbf{I}_{k,k} - \Phi + \Gamma \mathbf{K}_c)^{-1} \Gamma \mathbf{F} = \mathbf{I}_{m \times m}. \quad (9.79)$$

Assim<sup>2</sup> sistema não pode possuir zero em  $z = 1$ , a equação do pré-filtro resulta em:

$$\mathbf{F} = \left( \mathbf{C} (\mathbf{I} - \Phi + \Gamma \mathbf{K}_c)^{-1} \Gamma \right)^{-1}. \quad (9.80)$$

O pré-filtro apenas amplifica o sinal de referência e não altera a dinâmica do sistema. Ele é calculado com base no modelo, ou seja, se esses parâmetros forem imprecisos, o esquema não vai funcionar como esperado. Além disso, ele só é valido para referência constante. Na prática, isso não elimina, de fato, o erro estacionário.

---

<sup>2</sup>O

Outra forma de resolver este problema consiste em utilizar a estrutura da Figura 9.8.

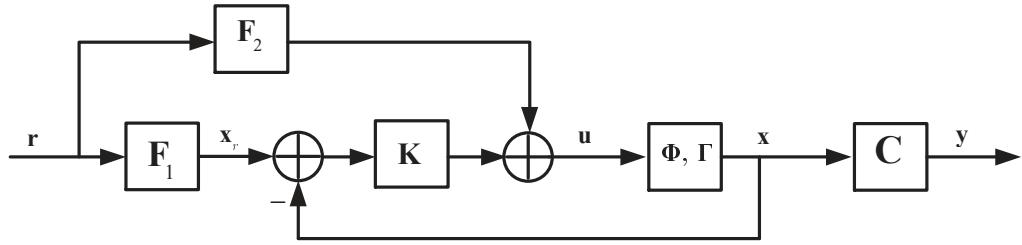


Figura 9.8: Realimentação de estados com entrada de referência.

A ideia consiste em rastrear o estado final e a saída em regime estacionário.

Deseja-se que

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{r} = \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_{ss}, \quad (9.81)$$

e que

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{r}, \quad (9.82)$$

ou seja,

$$\mathbf{C} \mathbf{F}_1 \mathbf{r} = \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{C} \mathbf{F}_1 = \mathbf{I}_{m \times m}. \quad (9.83)$$

Em regime estacionário, tem-se ainda que

$$\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{ss} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{ss} \Rightarrow (\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}_{k,k}) \mathbf{x}_{ss} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_{ss} = 0. \quad (9.84)$$

Como em regime estacionário  $\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{F}_2 \mathbf{r}$ , tem-se que

$$(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{I}_{k,k}) \mathbf{F}_1 \mathbf{r} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{F}_2 \mathbf{r} = 0. \quad (9.85)$$

De (9.83) e (9.85), pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}_{k,k}) & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (9.86)$$

Portanto<sup>3</sup>,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{\Phi} - \mathbf{I}_{k,k}) & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (9.87)$$

O sistema da Figura 9.8 pode ser representado como na Figura 9.9, sendo  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{K} \mathbf{F}_1$ .

<sup>3</sup>O sistema não tem solução se a planta possuir zero em  $z = 1$

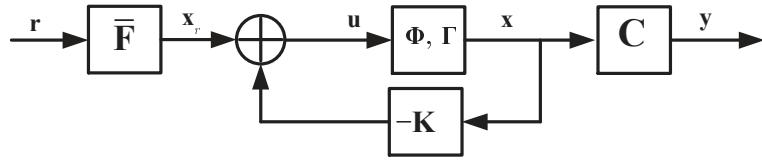


Figura 9.9: Realimentação de estados com entrada de referência.

### 9.6.2 Inserção de Integrador

Muitas vezes é necessária a inserção de integradores na malha de controle. Uma forma de inserir um integrador consiste em introduzir um novo vetor de estados que integre o erro entre o vetor de saída  $y$  e o vetor de comando de entrada  $r$ , ambos com  $m$  elementos, como apresentado no diagrama da Figura 9.10.

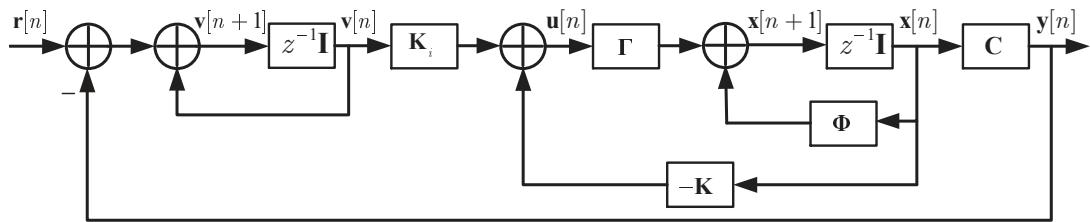


Figura 9.10: Servossistema com realimentação de estados e e controle integral.

A equação de estados do integrador inserido é dada por

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{v}[n] + \mathbf{r}[n] - \mathbf{y}[n] \Rightarrow \mathbf{v}[n+1] = \mathbf{v}[n] + \mathbf{r}[n] - \mathbf{C}\mathbf{x}[n] \quad (9.88)$$

A equação de estados do sistema em malha fechada é dada por:

$$\mathbf{x}[n+1] = (\Phi - \Gamma\mathbf{K})\mathbf{x}[n] + \Gamma\mathbf{K}_i\mathbf{v}[n] \quad (9.89)$$

Tem-se, portanto, a seguinte equação para o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \mathbf{v}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma\mathbf{K} & \Gamma\mathbf{K}_i \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{v}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}[n], \quad (9.90)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \mathbf{v}[n+1] \end{bmatrix} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0}_{k \times m} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix}}_{\hat{\Phi}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}}_{\hat{\Gamma}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{v}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times m} \\ \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}[n] \quad (9.91)$$

Assim, basta determinar o ganho  $\hat{\mathbf{K}}$  que aloca os polos para o sistema aumentado da Equação (9.91).

### Estimador pelo Valor Atual

Pode-se projetar um estimador no instante  $n$  para uma medida de saída no instante  $n$ , tal como apresentado na Equação (9.92).

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c(\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[n]), \quad (9.92)$$

onde  $\bar{\mathbf{x}}[n]$  é dado por

$$\bar{\mathbf{x}}[n] = \Phi\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \Gamma\mathbf{u}[n-1], \quad (9.93)$$

Ao substituir (9.93) em (9.92), verifica-se que

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \Phi\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \Gamma\mathbf{u}[n-1] + \mathbf{L}_c\mathbf{C}(\mathbf{x}[n] - \bar{\mathbf{x}}[n]), \quad (9.94)$$

Mas,

$$\mathbf{x}[n] - \bar{\mathbf{x}}[n] = (\Phi\mathbf{x}[n-1] + \Gamma\mathbf{u}[n-1]) - (\Phi\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \Gamma\mathbf{u}[n-1]) = \Phi\tilde{\mathbf{x}}[n-1] \quad (9.95)$$

Assim,

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \Phi\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \Gamma\mathbf{u}[n-1] + \mathbf{L}_c\mathbf{C}\Phi\tilde{\mathbf{x}}[n-1] \quad (9.96)$$

Portanto, o erro de estimação possui a seguinte dinâmica

$$\tilde{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n] = (\Phi - \mathbf{L}_c\mathbf{C}\Phi)\tilde{\mathbf{x}}[n-1] \quad (9.97)$$

Ao tomar a transposta de  $(\Phi - \mathbf{L}_c\mathbf{C}\Phi)$ , tem-se  $(\Phi^\top - \Phi^\top\mathbf{C}^\top\mathbf{L}^\top)$ . Portanto, a matriz de ganhos do estimador pode ser encontrada utilizando-se o comando `place` do MATLAB, com a seguinte sintaxe `L = place(Phi', Phi'C', p_o)'`, sendo  $\Phi$ ,  $\mathbf{C}$  as matrizes de estado e de saída, e  $p_o$  o vetor com a posição dos polos desejada.

A Figura 9.11 ilustra o diagrama em blocos do sistema com realimentação de estados utilizando o estimador do valor atual

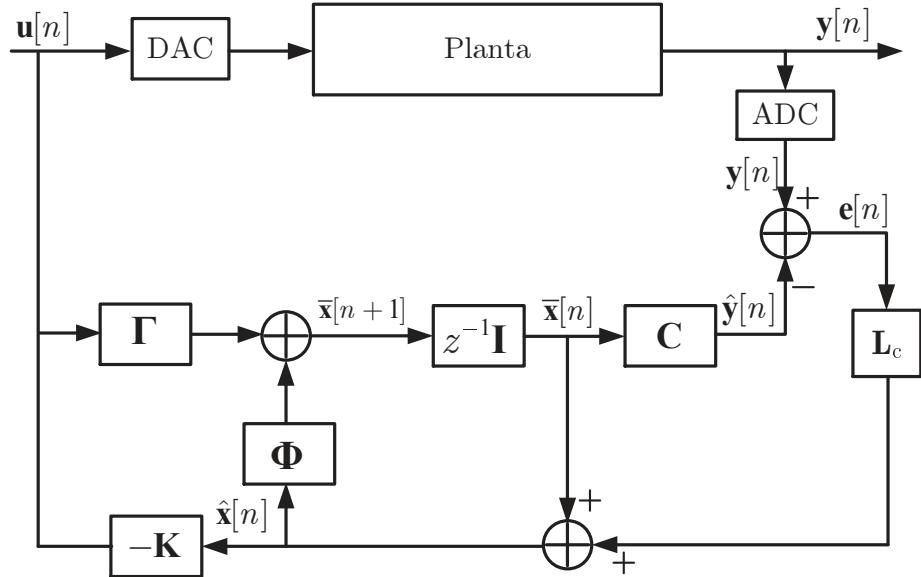


Figura 9.11: Diagrama do estimador de valor atual com o controle em malha fechada.

Exemplo 9.1: Considere o sistema dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,6}{s(s + 0,7)}$$

Projete um controlador digital por realimentação de estados de forma que o sistema em malha fechada apresente  $w_n = 5,0$ ;  $\zeta = 0,7$ . Assuma  $f_s = 20\text{Hz}$ . Considere ainda: a) realimentação com todos os estados medidos; b) realimentação com todos os estados estimados e preditor; c) realimentação de estados com estimador de ordem reduzida e preditor; d) realimentação de estados com todos os estados estimados e estimador de valor atual.

**Solução:** Note que,

$$\ddot{y} + 0,7\dot{y} = 0,6u$$

Define-se  $x_1 = \dot{y}$  e  $x_2 = y$ . Assim,  $\dot{x}_1 = \ddot{y} = -0,7x_1 + 0,6u$ . Portanto,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O restante do exercício será resolvido diretamente no Matlab:

```
clear all; clc; close all;
fs=20; Ts=1/fs;
K_G = 0.6; %Numerador da F. T.
A = [-0.7 0; 1 0]; B = [0.6; 0]; C = [0 1]; D = 0;
[Phi, Gamma] = c2d(A, B, Ts);
wn = 5.0; zeta = 0.7; s1 = wn*(-zeta+j*sqrt(1-zeta^2));
p_c = exp([s1; s1']*Ts); %Polos do sist. de controle em MF
```

```

wn2 = 10.0; xsi2 = 0.707; s2 = wn2*(-xsi2+j*sqrt(1-xsi2^2));
p_o = exp([s2; s2']*Ts); %Polos do sist. observador completo
p_or = real(p_o(1)); %Polos do sist. observador de ordem reduzida
K = place(Phi, Gamma, p_c); % Projeto do Controlador
F = inv(C*inv(eye(2) - Phi + Gamma * K) * Gamma); % Pré-filtro
item = 'd'; %seleciona o item
switch(item)
    case 'a' %realimentação de estados medidos
        sim('SIM_EX1_CHAP_09_a');
    case 'b' %realimentação de estados estimados (observador ordem completa)
        L = place(Phi', C', p_o)'; % Projeto do observador ordem completa
        sim('SIM_EX1_CHAP_09_b');
    case 'c' %realimentação de estados estimados (observador ordem mínima)
        Phi_aa = Phi(1,1); Phi_ba = Phi(2,1);
        %Lr = place(Phi_aa', Phi_ba', p_or)'; % Projeto do observador ordem mínima
        Lr = (Phi_aa - p_or)/Phi_ba;
        sim('SIM_EX1_CHAP_09_c');
    case 'd'
        Lc = place(Phi', (C*Phi)', p_o)';
        sim('SIM_EX1_CHAP_09_d');
    otherwise
        error('item precisa ser ''a'', ''b'', ''c'' ou ''d'' ');
end
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2);
t_d = (0:length(x_1)-1)*Ts;
figure(5); subplot(2,1,1); plot(t,r,'b',t,y,'r');
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex'); ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg=legend('Setpoint', 'Saida');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');
subplot(2,1,2); stairs(t_d,x_1,'b'); hold on; stairs(t_d,x_2,'r');
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg=legend('$x_1(n T_s)$', '$x_2(n T_s)$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');
figure(6); stairs(t_d, u);
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$u(n T_s)$', 'Interpreter', 'latex');

```

Os diagramas de simulação dos itens a), b), c) e d) são apresentados nas Figuras 9.12, 9.13 e 9.15, respectivamente. Os códigos das Matlab Functions de cada exemplo são apresentados a seguir:

```

%a) realimentação de estados mediados
function u = fcn(r, x_1, x_2, K, F)
%#eml
u = F*r-(K(1)*x_1 + K(2)*x_2);

%b) realimentação de estados observados (observador ordem completa preditor)
function [u, x_chap_1, x_chap_2] = fcn(r, y, K, L, F, Phi, Gamma, C)
%#eml
global x_chap_1_ant; global x_chap_2_ant;
u = F*r-(K(1)*x_chap_1_ant + K(2)*x_chap_2_ant);
y_chap = C(1)*x_chap_1_ant+C(2)*x_chap_2_ant;
x_chap_1 = Phi(1,1)*x_chap_1_ant + Phi(1,2)*x_chap_2_ant + ...
Gamma(1)*u + L(1)*(y - y_chap);
x_chap_2 = Phi(2,1)*x_chap_1_ant + Phi(2,2)*x_chap_2_ant + ...
Gamma(2)*u + L(2)*(y - y_chap);
x_chap_1_ant = x_chap_1; x_chap_2_ant = x_chap_2;

%c) realimentação de estados observados (observador ordem mínima preditor)
function [u, x_chap_1] = fcn(r, y, K, Lr, F, Phi, Gamma, C)
%#eml
Phi_aa = Phi(1,1); Phi_ab = Phi(1,2);
Phi_ba = Phi(2,1); Phi_bb = Phi(2,2);
Gamma_a = Gamma(1); Gamma_b = Gamma(2);
global z_chap_ant;
x_2 = y;
x_chap_1 = z_chap_ant+Lr*y;
x_1 = x_chap_1;
u = F*r-(K(1)*x_1 + K(2)*x_2);
z_chap = (Phi_aa-Lr*Phi_ba)*z_chap_ant +(Phi_aa-Lr*Phi_ba)*Lr*x_2 + ...
(Phi_ab-Lr*Phi_bb)*x_2 + (Gamma_a - Lr*Gamma_b)*u;
z_chap_ant = z_chap;

%d) realimentação de estados observados (observador ordem completa e valor atual)
function [u, x_chap_1, x_chap_2] = fcn(r, y, K, Lc, F, Phi, Gamma, C)
%#eml
global x_bar_1; global x_bar_2;
x_chap_1 = x_bar_1 + Lc(1)*(y - (C(1)*x_bar_1 + C(2)*x_bar_2));
x_chap_2 = x_bar_2 + Lc(2)*(y - (C(1)*x_bar_1 + C(2)*x_bar_2));
u = F*r-(K(1)*x_chap_1 + K(2)*x_chap_2);
x_bar_1 = Phi(1,1)*x_chap_1 +Phi(1,2)*x_chap_2 + Gamma(1)*u;
x_bar_2 = Phi(2,1)*x_chap_1 +Phi(2,2)*x_chap_2 + Gamma(2)*u;

```

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 9.16 a 9.19.

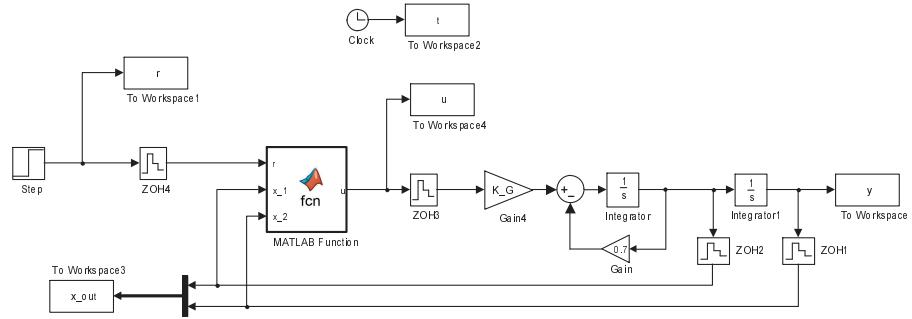


Figura 9.12: Diagrama de simulação do Exemplo 9.1 a.

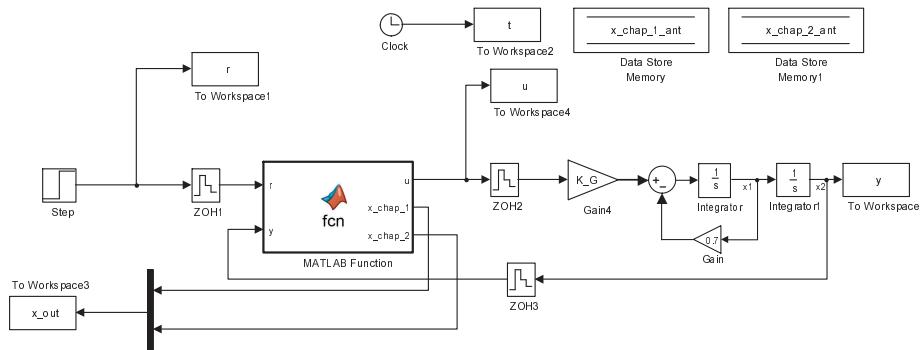


Figura 9.13: Diagrama de simulação do Exemplo 9.1 b.

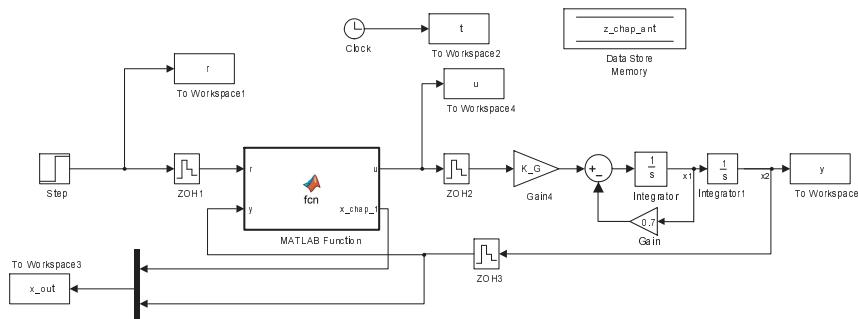


Figura 9.14: Diagrama de simulação do Exemplo 9.1 c.

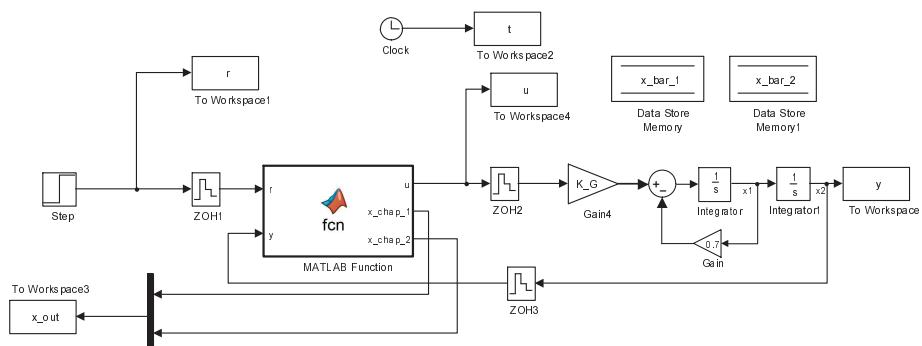
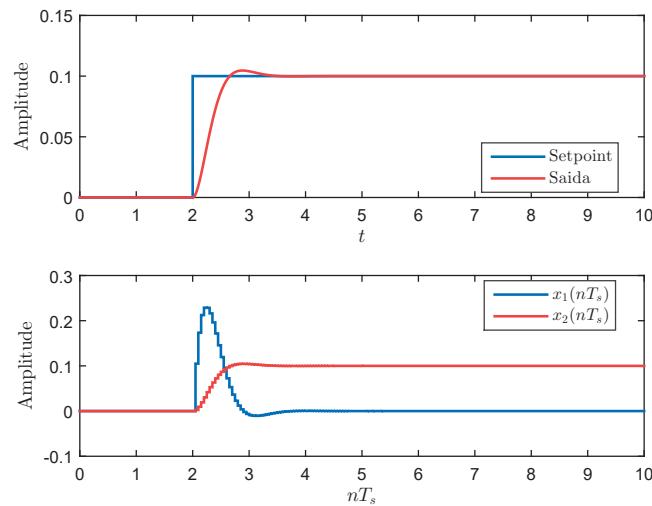
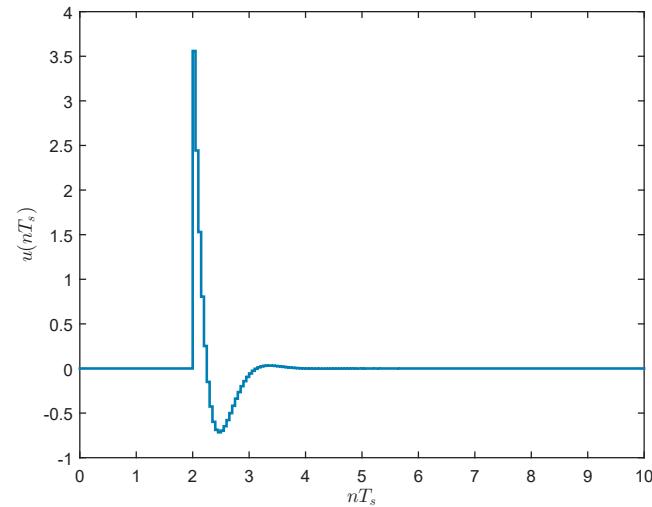


Figura 9.15: Diagrama de simulação do Exemplo 9.1 d.

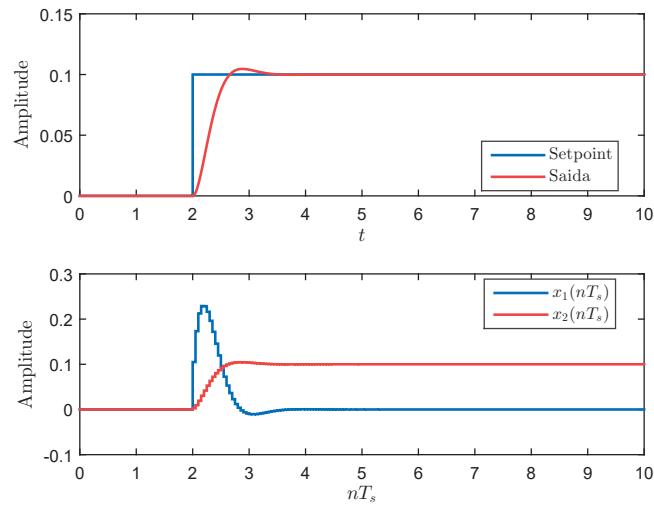


(a) Saída e Estados

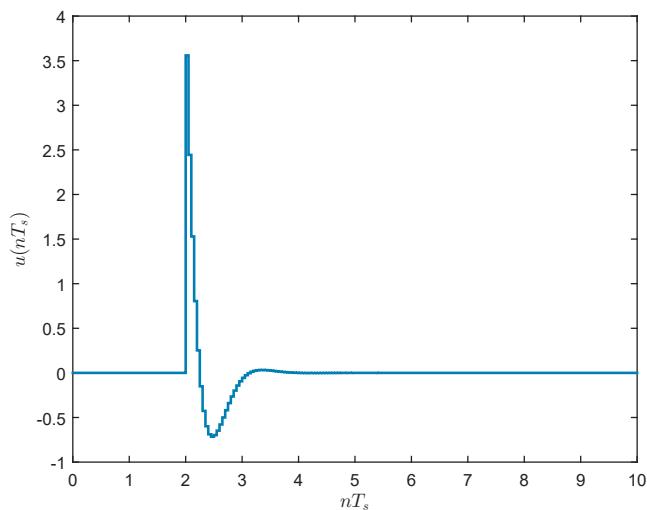


(b) Sinal de Controle

Figura 9.16: Resposta do Exemplo 9.1 a.

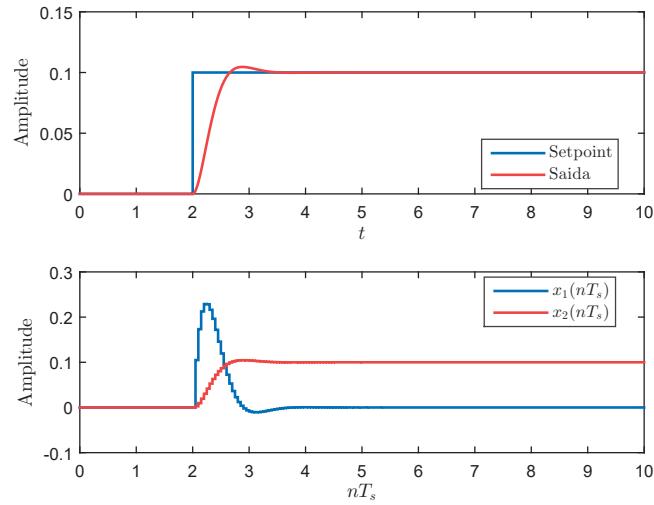


(a) Saída e Estados

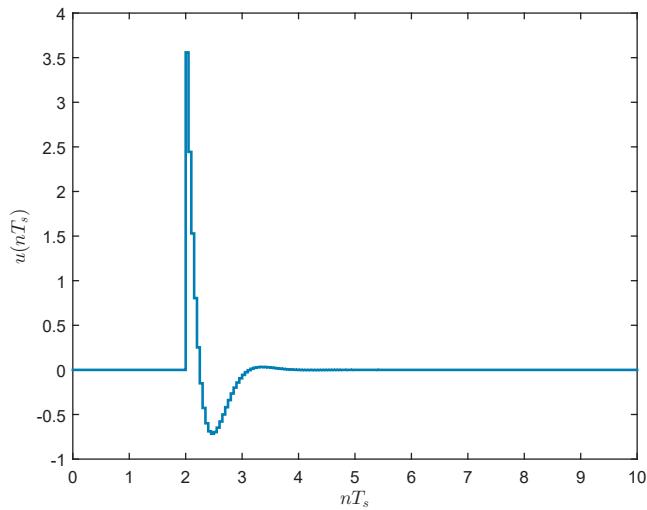


(b) Sinal de Controle

Figura 9.17: Resposta do Exemplo 9.1 b.

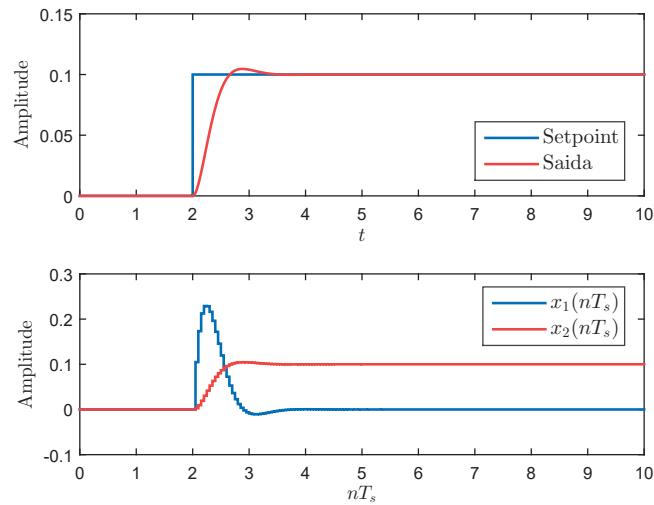


(a) Saída e Estados

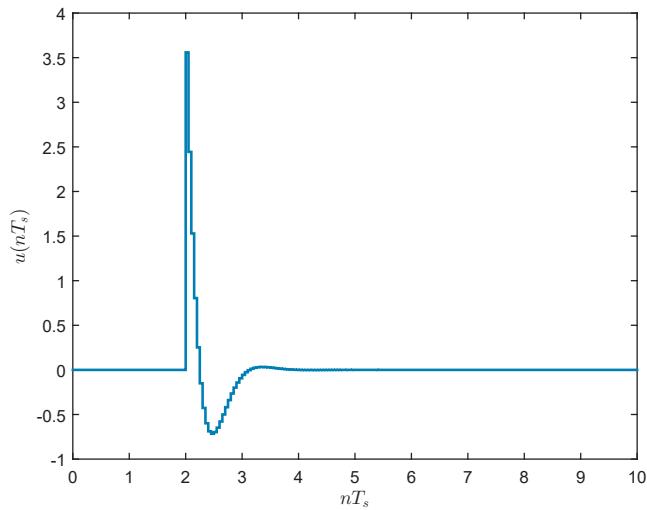


(b) Sinal de Controle

Figura 9.18: Resposta do Exemplo 9.1 c.



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle

Figura 9.19: Resposta do Exemplo 9.1 d.

Exemplo 9.2: Considere o sistema dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

Adicione um integrador ao sistema e projete um controle digital por realimentação de estados para o sistema aumentado. Assuma  $f_s = 20$  Hz e as seguintes especificações para os polos dominantes de malha fechada:  $\omega_n = 5, 71$ ;  $\zeta = 0, 7$ .

**Solução:** Ao definir  $x_2 = y$  e  $x_1 = \dot{y}$ , tem-se a seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O restante do exercício será resolvido diretamente no Matlab:

```
clear all; clc; close all;
fs=20; Ts=1/fs;
A = [-11 -10; 1 0]; B = [1; 0]; C = [0 1];
%OBS: no bloco State-Space foi feito C=eye(2) para obter na saída todos os
%estados para a realimentação. Para obter y, tomou-se a 2a saída
[Phi, Gamma] = c2d(A,B,Ts);
Phi_ = [Phi zeros(2,1); -C 1]; Gamma_ = [Gamma; 0];
wn = 5.71; zeta = 0.7;
s1 = wn*(-zeta+j*sqrt(1-zeta^2));
p_c = exp([s1; s1']*Ts); %Polos do sist. de controle em MF
p_c = [p_c; 0.2]; %O terceiro polo foi inserido em z = 0.2
K_ = place(Phi_, Gamma_, p_c); % Projeto do Controlador
K = K_(1:2); Ki = -K_(3);
sim('SIM_EX2_CHAP_09');
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2);
t_d = (0:length(x_1)-1)*Ts;
figure(5); subplot(2,1,1); plot(t,r,'b',t,y,'r');
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg = legend('Setpoint', 'Saida');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');
subplot(2,1,2); stairs(t_d,x_1,'b'); hold on; stairs(t_d,x_2,'r');
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg = legend('$x_1(n T_s)$', '$x_2(n T_s)$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');
figure(6); stairs(t_d, u);
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$u(n T_s)$', 'Interpreter', 'latex');
```

O digrama de simulação é apresentado na Figura 9.20. O código do bloco Matlab Function é apresentado a seguir:

```
function u = fcn(r, x_1, x_2, K, Ki)
%#eml
global v
y=x_2;
u = -(K(1)*x_1 + K(2)*x_2) + Ki*v;
v = v+(r-y);
```

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 10.12.

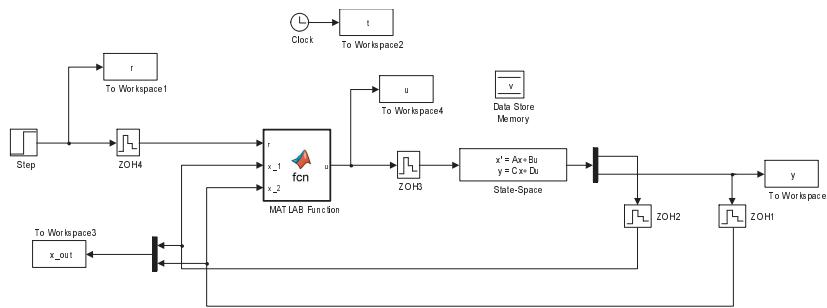
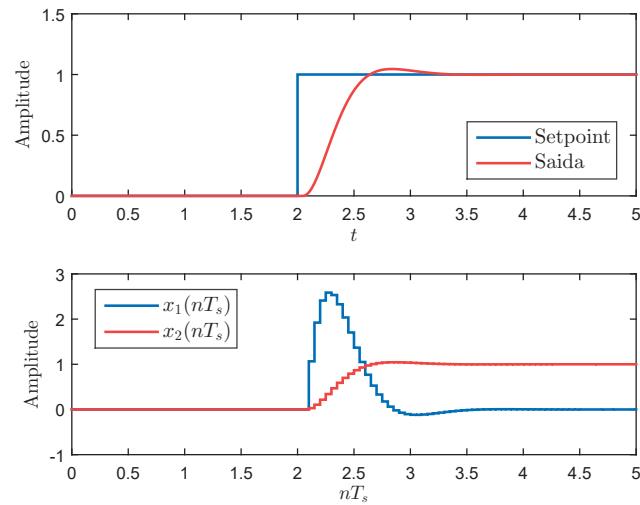
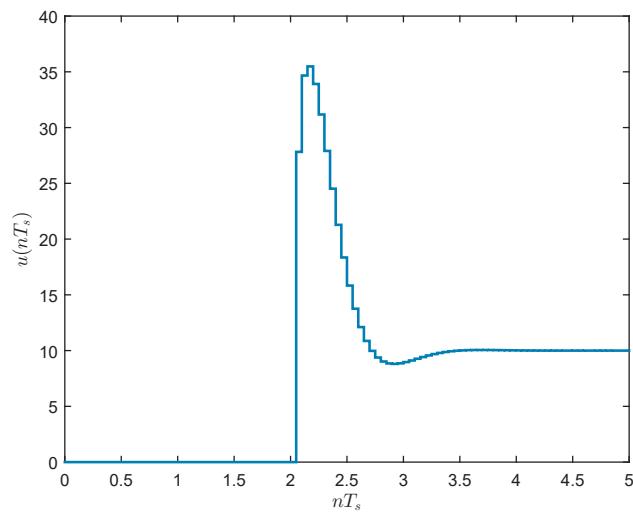


Figura 9.20: Diagrama de simulação do Exemplo 9.2.



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle

Figura 9.21: Resposta do Exemplo 9.2.

## 9.7 Sistemas com perturbações

Considere o sistema da Figura 9.22.

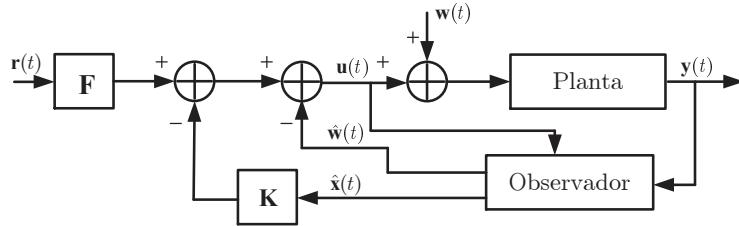


Figura 9.22: Sistema com cancelamento de perturbação modelada.

Suponha que o sistema é afetado por uma perturbação  $w(t)$ , cujo modelo é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_w(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) \quad (9.98)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t) \quad (9.99)$$

Se  $\mathbf{w}(t)$  for constante, então  $\mathbf{A}_w = \mathbf{C}_w = \mathbf{I}$ . O sistema aumentado pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_w \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t) \quad (9.100)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{bmatrix} \quad (9.101)$$

O equivalente discreto desse sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \mathbf{x}_w[n+1] \end{bmatrix} = \Phi_w \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{x}_w[n] \end{bmatrix} + \Gamma_w u[n] \quad (9.102)$$

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{x}_w[n] \end{bmatrix} \quad (9.103)$$

O ganho de realimentação de estados  $\mathbf{K}$  é obtido a partir de  $\Phi$  e  $\Gamma$  não aumentados. O par  $(\Phi_w, \Gamma_w)$  não é controlável. A intenção não é controlar  $\mathbf{w}[n]$ , apenas rejeitá-lo.

Pode-se projetar um observador em tempo discreto para, além de observar os estados que serão realimentados, observar a perturbação  $\hat{\mathbf{w}}[n]$  e cancelá-la. Portanto, para o cálculo do ganho do estimador  $\mathbf{L}$ , é necessário utilizar as matrizes aumentadas  $\Phi_w$  e  $\Gamma_w$ .

O diagrama de blocos em tempo discreto equivalente é apresentado na Figura 9.23 .

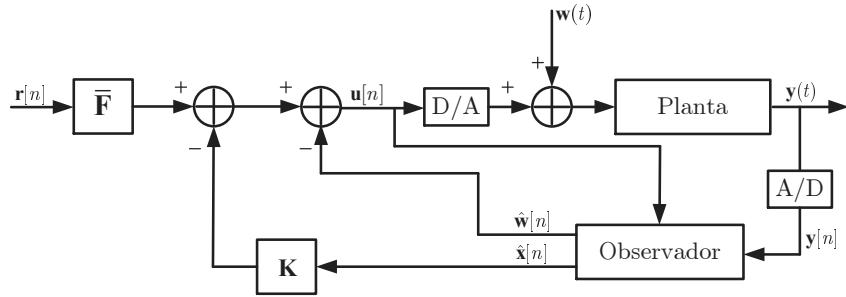


Figura 9.23: Sistema em tempo discreto com cancelamento de perturbação modelada.

**Exemplo 9.3:** Considere o sistema dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s + 0,7)}$$

Projete um controlador digital por realimentação de estados de forma que o sistema em malha fechada apresente  $w_n = 3,5$ ;  $\zeta = 0,7$ . Considere  $f_s = 10\text{Hz}$ . Assuma que há uma perturbação senoidal com amplitude unitária e frequência de 15 RPM. Projete um controlador por realimentação de estados, assumindo que os estados serão estimados por um observador na forma preditor, que também deve observar a perturbação para ser cancelada.

**Solução:** Define-se  $x_1 = \dot{y}$  e  $x_2 = y$ . Assim, o sistema em espaço de estados é representado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Se  $w(t) = \sin(\omega_0 t)$  é o sinal de perturbação, então  $\ddot{w}(t) = -\omega_0^2 w(t)$ . Portanto, a perturbação é modelada como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_w} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_w} \underbrace{\begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_w}$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_w$$

O restante do exercício será resolvido diretamente no Matlab:

```

clear all; clc; close all;
fs=10; Ts=1/fs;
A = [-0.7 0; 1 0]; B = [1; 0]; C = [0 1]; D = 0;
[Phi, Gamma] = c2d(A, B, Ts);
%Polos do sist. de controle em MF
wn = 3.5; zeta = 0.7; s1 = wn*(-zeta+j*sqrt(1-zeta^2));
p_c = exp([s1; s1']*Ts); %Polos do sist. de controle em MF
wn2 = 10.0; xsi2 = 0.7; s2 = wn2*(-xsi2+j*sqrt(1-xsi2^2));
wn3 = 7.0; xsi3 = 0.99; s3 = wn3*(-xsi3+j*sqrt(1-xsi3^2));
p_o = exp([s2; s2'; s3; s3']*Ts); %Polos do sist. observador completo
K = place(Phi, Gamma, p_c); % Projeto do Controlador
F = inv(C*inv(eye(2) - Phi + Gamma * K) * Gamma); % Pré-filtro
% Observador aumentado para rejeitar distúrbio
w0 = 15*2*pi/60; %RPM to rad/s
%x_aum = [x1; x2; w; \dot w]
A_d = [0 1; -w0^2 0]; C_d = [1 0];
A_aum = [A B*C_d; zeros(2) A_d];
B_aum = [B; zeros(2,1)];
[Phi_aum, Gamma_aum] = c2d(A_aum, B_aum, Ts);
C_aum = [C, zeros(1,2)];
L = place(Phi_aum', C_aum', p_o)';
sim('SIM_EX3_CHAP_DIST_2')
figure(1);
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2);
t_d = (0:length(x_1)-1)*Ts;
subplot(2,1,1); plot(t, r, 'b', t, y, 'r');
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg = legend('Setpoint', 'Saida');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');
subplot(2,1,2); stairs(t_d, x_1, 'b'); hold on; stairs(t_d, x_2, 'r');
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg = legend('$x_1(n T_s)$', '$x_2(n T_s)$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');
figure(2); stairs(t_d, u);
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$u(n T_s)$', 'Interpreter', 'latex');
figure(3); plot(t, w_in); hold on; stairs(t_d, w_out);
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Perturbação');
leg = legend('$w(t)$', '$\hat{w}[n]$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');

```

O digrama de simulação é apresentado na Figura 9.24. O código do bloco Matlab Function é apresentado a seguir:

```
function [u, x_chap_1, x_chap_2,w_out] = fcn(r, y, K, L, F, Phi_aum, ...
Gamma_aum, C_aum)
%#eml
global x_chap_ant, global w_chap;
w_out = w_chap;
u = F*r-K*x_chap_ant(1:2) - w_chap;
y_chap = C_aum*x_chap_ant;
x_chap = Phi_aum*x_chap_ant+ Gamma_aum*u + L*(y - y_chap);
x_chap_1 = x_chap(1); x_chap_2 = x_chap(2); w_chap = x_chap(3);
x_chap_ant = x_chap;
```

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 9.25.

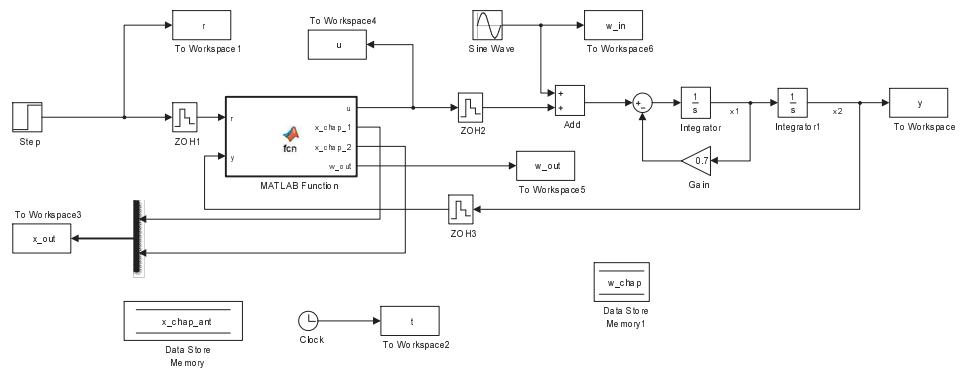
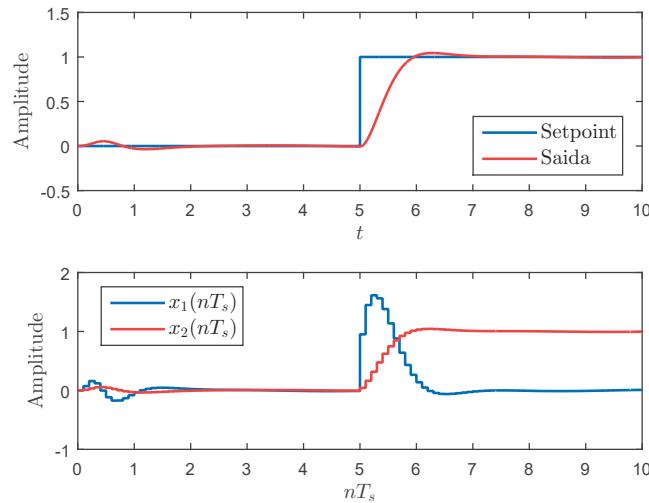
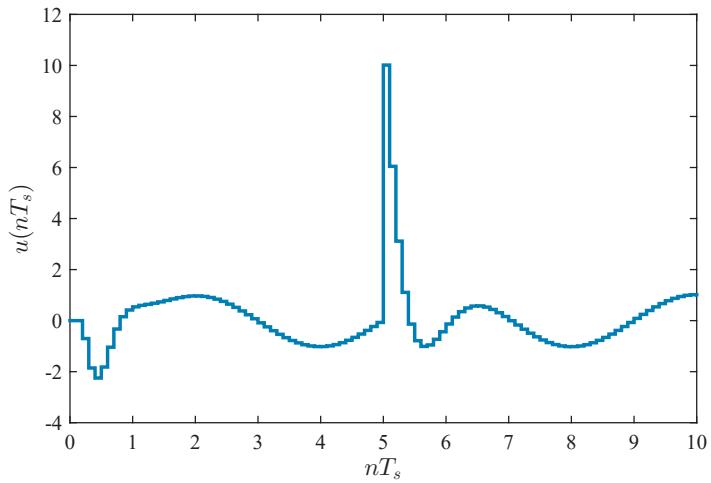


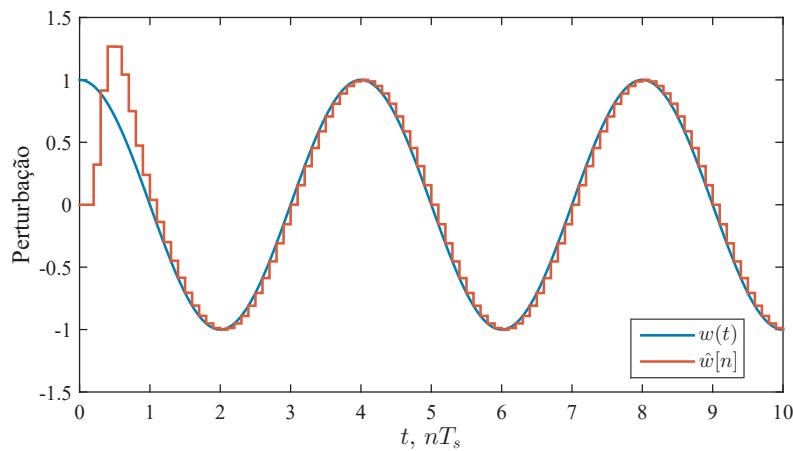
Figura 9.24: Diagrama de simulação do Exemplo 9.3.



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle



(c) Sinal de Perturbação

Figura 9.25: Resposta do Exemplo 9.3.

## 9.8 Atrasos

Dois tipos de atrasos podem ser considerados: atrasos nos sensores e atrasos nos atuadores. A ideia aqui consiste em considerar essas formas de atraso no modelo em espaço de estados e, consequentemente, na síntese de controladores. Será tratado apenas o caso SISO.

Na Figura 9.26 é apresentado o caso em que o sensor apresenta um atraso.

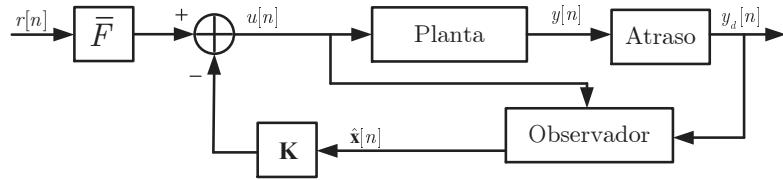


Figura 9.26: Sistema com atraso no sensor.

Pode-se incorporar as saídas atrasadas como estados do sistema, e calcular tanto  $\mathbf{K}$  quanto  $\mathbf{L}$  usando o sistema aumentado. O modelo para um círculo de atraso é dado por  $y_{1d}[n+1] = y[n]$ . Para dois círculos,  $y_{2d}[n+1] = y_{1d}[n]$ , e assim por diante.

**Exemplo 9.4:** Suponha que o sensor é afetado por um atraso de 3 amostras. O sistema aumentado é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ y_{1d}[n+1] \\ y_{2d}[n+1] \\ y_{3d}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ y_{1d}[n] \\ y_{2d}[n] \\ y_{3d}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y_d[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ y_{1d}[n] \\ y_{2d}[n] \\ y_{3d}[n] \end{bmatrix},$$

onde  $y_d$  é a saída atrasada por três ciclos.

No esquema da Figura 9.27 o atraso é considerado no elemento atuador.

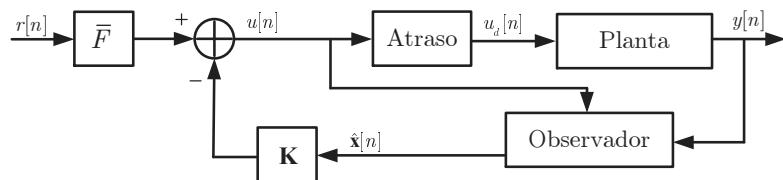


Figura 9.27: Sistema com atraso no atuador.

Neste caso, pode-se incorporar a entrada de controle atrasada como um estado do sistema, e calcular

tanto  $\mathbf{K}$  quanto  $\mathbf{L}$  usando o sistema aumentado.

Exemplo 9.5: Suponha que o atuador é afetado por um atraso de 3 amostras. O sistema aumentado é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ u_{1d}[n+1] \\ u_{2d}[n+1] \\ u_{3d}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ u_{1d}[n] \\ u_{2d}[n] \\ u_{3d}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ u_{1d}[n] \\ u_{2d}[n] \\ u_{3d}[n] \end{bmatrix}$$

# 10

## Introdução ao Controle Ótimo

Inicialmente, o termo controle ótimo não poder ser confundido como o controle ideal. Quando nos referimos a controle ótimo, significa que ele maximiza ou minimiza uma certa função ou funcional (denominada aqui de índice de desempenho) com possíveis restrições.

Como em sistemas MIMO as matrizes **K** e **L** não são únicas, técnicas de controle ótimo podem ser adotadas para utilizar de forma inteligente este “grau de liberdade” de sistemas MIMO [Franklin, Powell e Workman 2006].

A primeira parte deste capítulo trata de um controle quadrático ótimo variante no tempo para o problema de regulação. Em seguida, uma forma estacionária desse controle ótimo é obtida, o que resulta no Regulador Linear Quadrático, LQR (do inglês, *Linear Quadratic Regulator*). Na sequência, o Filtro de Kalman é introduzido como estimador ótimo na presença de ruídos e perturbações com características Gaussianas. Por fim, a combinação do regulador ótimo com a forma estacionária do Filtro de Kalman será apresentada, o que recebe o nome de Regulador Linear Gaussiano (do inglês, *Linear Gaussian Regulator*).

### 10.1 Controle Quadrático Ótimo

O controle ótimo quadrático pode ser enunciado como segue:

$$\min_{\mathbf{u}} J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T[N] \mathbf{S} \mathbf{x}[N] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^T[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \quad (10.1)$$

sujeito a

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n], \quad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_i, \quad (10.2)$$

onde,

- **Q** matriz  $(k \times k)$  simétrica definida semi positiva;
- **R** matriz  $(r \times r)$  simétrica definida positiva;

- $\mathbf{S}$  matriz  $(k \times k)$  simétrica definida semi positiva;

são matrizes de ponderação do índice de desempenho relativas ao estado, ao sinal de controle e ao estado final, respectivamente. Se o estado final for imposto, tal que  $\mathbf{x}[N] = \mathbf{x}_f$ , então o primeiro termo à direita de (10.1) é eliminado. Note que o termo  $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top(N)\mathbf{S}\mathbf{x}[N]$ , no índice de desempenho, implica fazer com que o estado final seja o mais próximo possível da origem.

A solução do problema de minimização de  $J$  pode ser feita de algumas formas diferentes, como por programação dinâmica [Kirk 2004] e o método de multiplicadores de Lagrange [Ogata 1995] [Franklin, Powell e Workman 2006]. Aqui será reproduzida a solução pelo método de multiplicadores de Lagrange.

Deseja-se minimizar o índice de desempenho descrito em (10.1) sujeito às restrições impostas em (10.2). Considere um vetor de multiplicadores de Lagrange,  $\boldsymbol{\lambda}[n+1]$ , para cada instante  $n$ . Assim, o seguinte índice de desempenho é definido

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top(N)\mathbf{S}\mathbf{x}[N] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \mathbf{x}^\top[n]\mathbf{Q}\mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^\top[n]\mathbf{R}\mathbf{u}[n] \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\lambda}^\top[n+1](-\mathbf{x}[n+1] + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n]) \right) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Dando sequência ao procedimento de otimização, as seguintes equações são obtidas:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}[n]} = \mathbf{u}^\top[n]\mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}^\top[n+1]\boldsymbol{\Gamma} = 0 \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}[n+1]} = -\mathbf{x}[n+1] + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n] = 0 \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}[N]} = \mathbf{S}\mathbf{x}[N] - \boldsymbol{\lambda}[N] = 0 \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}[n]} = \mathbf{x}^\top[n]\mathbf{Q} - \boldsymbol{\lambda}^\top[n] + \boldsymbol{\lambda}^\top[n+1]\boldsymbol{\Phi} = 0 \quad (10.7)$$

Note que (10.5) é simplesmente a equação de estados, ou seja,

$$\mathbf{x}[n+1] = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}[n] \quad (10.8)$$

Equação (10.6) especifica o valor final de  $\boldsymbol{\lambda}[n]$ . O termo  $\boldsymbol{\lambda}[n]$  é frequentemente denominado vetor adjunto e, por isso, (10.7) é denominada equação adjunta, que pode ser escrita como uma equação de diferenças para trás, tal que:

$$\boldsymbol{\lambda}[n] = \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\lambda}[n+1] + \mathbf{Q}\mathbf{x}[n]. \quad (10.9)$$

A Equação (10.9) pode ainda ser reescrita como uma equação de diferenças para frente, ou seja,

$$\boldsymbol{\lambda}[n+1] = \boldsymbol{\Phi}^{-\top} \boldsymbol{\lambda}[n] - \boldsymbol{\Phi}^{-\top} \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] \quad (10.10)$$

A solução de (10.4) é dada por:

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{\top} \boldsymbol{\lambda}[n+1] \quad (10.11)$$

Sobre as condições de contorno,  $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_i$  deve ser dado. Entretanto,  $\boldsymbol{\lambda}[0]$  não é usualmente conhecido, sendo  $\boldsymbol{\lambda}[N]$  a condição de contorno, dada por (10.6), ou seja,

$$\boldsymbol{\lambda}[N] = \mathbf{S} \mathbf{x}[N]. \quad (10.12)$$

Com isso, o conjunto de equações que descreve a solução do problema de otimização está completamente especificada, tal que,

---


$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}[n] &= \boldsymbol{\Phi}^{\top} \boldsymbol{\lambda}[n+1] + \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{x}[n+1] &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}[n] \\ \mathbf{u}[n] &= -\mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{\top} \boldsymbol{\lambda}[n+1] \\ \mathbf{x}[0] &= \mathbf{x}_i \\ \boldsymbol{\lambda}[N] &= \mathbf{S} \mathbf{x}[N] \end{aligned}$$


---

A solução desse problema com valor de contorno em dois pontos não é trivial. Um método denominado varredura de Bryson e Ho, consiste em assumir

$$\boldsymbol{\lambda}[n] = \mathbf{P}[n] \mathbf{x}[n]. \quad (10.13)$$

Com tal definição, o problema com valor de contorno em dois pontos em  $\mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$ , é transformado para um problema com condição de contorno em um ponto em  $\mathbf{P}$ . De (10.13) e (10.11), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{u}[n] &= -\boldsymbol{\Gamma}^{\top} \mathbf{P}[n+1] \mathbf{x}[n+1] \\ &= -\boldsymbol{\Gamma}^{\top} \mathbf{P}[n+1] (\boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}[n]) \end{aligned} \quad (10.14)$$

Resolvendo para  $\mathbf{u}[n]$ , obtém-se

$$\mathbf{u}[n] = -\left(\mathbf{R} + \boldsymbol{\Gamma}^{\top} \mathbf{P}[n+1] \boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{\top} \mathbf{P}[n+1] \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}[n] \quad (10.15)$$

De (10.13) e (10.10), segue que

$$\mathbf{P}[n]\mathbf{x}[n] = \Phi^\top \mathbf{P}[n+1]\mathbf{x}[n+1] + \mathbf{Q}\mathbf{x}[n]. \quad (10.16)$$

Ao substituir (10.8) em (10.16), tem-se

$$\mathbf{P}[n]\mathbf{x}[n] = \Phi^\top \mathbf{P}[n+1](\Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n]) + \mathbf{Q}\mathbf{x}[n]. \quad (10.17)$$

Ainda, substituindo  $\mathbf{u}[n]$  de (10.15) em (10.17), chega-se em

$$\mathbf{P}[n]\mathbf{x}[n] = \Phi^\top \mathbf{P}[n+1] \left( \Phi\mathbf{x}[n] - \Gamma \left( \mathbf{R} + \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1]\Gamma \right)^{-1} \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1]\Phi\mathbf{x}[n] \right) + \mathbf{Q}\mathbf{x}[n], \quad (10.18)$$

que pode ser reescrita como

$$\left( \mathbf{P}[n] - \Phi^\top \mathbf{P}[n+1]\Phi + \Phi^\top \mathbf{P}[n+1]\Gamma \left( \mathbf{R} + \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1]\Gamma \right)^{-1} \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1]\Phi - \mathbf{Q} \right) \mathbf{x}[n] = 0. \quad (10.19)$$

Como (10.19) deve valer para qualquer  $\mathbf{x}[n]$ , o termo que o multiplica deve ser nulo, o que resulta na solução de  $\mathbf{P}[n]$ .

$$\mathbf{P}[n] = \Phi^\top \left( \mathbf{P}[n+1] - \mathbf{P}[n+1]\Gamma \left( \mathbf{R} + \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1]\Gamma \right)^{-1} \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1] \right) \Phi + \mathbf{Q}, \quad (10.20)$$

que é frequentemente escrita como

$$\mathbf{P}[n] = \Phi^\top \mathbf{M}[n+1]\Phi + \mathbf{Q}, \quad (10.21)$$

em que

$$\mathbf{M}[n+1] = \mathbf{P}[n+1] - \mathbf{P}[n+1]\Gamma \left( \mathbf{R} + \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1]\Gamma \right)^{-1} \Gamma^\top \mathbf{P}[n+1] \quad (10.22)$$

A Equação (10.20) é denominada **Equação de Riccati**. De (10.12) e (10.13) pode-se verificar que

$$\mathbf{P}[N] = \mathbf{S}, \quad (10.23)$$

e, portanto, a solução é descrita pelas Equações recursivas (10.21) e (10.22), com a condição de contorno dada por (10.23). A recursão deve ser resolvida de trás para frente, pois a condição de contorno é um ponto final.

A ação ótima de controle é dada por:

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}[n]\mathbf{x}[n], \quad (10.24)$$

em que, de (10.15),

$$\mathbf{K}[n] = \left( \mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}[n+1] \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}[n+1] \mathbf{\Phi} \quad (10.25)$$

Os cálculos são resumidos no seguinte procedimento:

1. Faça  $\mathbf{P}[N] = \mathbf{S}$  e  $\mathbf{K}[N] = 0$ ;
2. Faça  $n = N$ ;
3. Calcule  $\mathbf{M}[n] = \mathbf{P}[n] - \mathbf{P}[n]\mathbf{\Gamma} (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}[n]\mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}[n]$ ;
4. Calcule  $\mathbf{K}[n-1] = (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}[n]\mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}[n] \mathbf{\Phi}$ ;
5. Armazene  $\mathbf{K}[n-1]$ ;
6. Calcule  $\mathbf{P}[n-1] = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M}[n] \mathbf{\Phi} + \mathbf{Q}$ ;
7. Faça  $n = n - 1$ ;
8. Vá para o passo 3.

Para uma dada condição inicial  $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_i$ , para efetuar o controle, utiliza-se os valores de  $\mathbf{K}[n]$  armazenados e

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}[n] + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}[n], \quad (10.26)$$

onde

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}[n]\mathbf{x}[n] \quad (10.27)$$

Portanto, uma vez conhecido o modelo do sistema e as matrizes de peso  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , e a duração do problema  $N$ , os valores de  $\mathbf{K}[n]$  devem ser previamente calculados e armazenados.

Pode-se verificar que o custo ótimo é dado por

$$J_{\min} = \mathbf{x}^T[0] \mathbf{P}[0] \mathbf{x}[0] \quad (10.28)$$

Exemplo 10.1: [Ogata 1995] Considere um sistema descrito por

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi\mathbf{x}[n] + \Gamma u[n]$$

onde,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine a sequência ótima de controle  $u[n]$  que minimiza o seguinte índice de desempenho

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top[8]\mathbf{S}\mathbf{x}[8] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^7 (\mathbf{x}^\top[n]\mathbf{Q}\mathbf{x}[n] + u^\top[n]Ru[n]),$$

onde,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: O seguinte *script* foi utilizado para resolver o problema

```

clear all; clc; close all;
Phi = [1 1; 1 0]; Gamma = [1; 0];
Q = eye(2); R=1;
N = 8;
P = zeros(2,2,N+1); P(:,:,N+1) = Q;
K = zeros(N+1,2);
% Cálculo de K
for n=N+1:-1:1
    M=P(:,:,n)-P(:,:,n)*Gamma*inv(R+Gamma'*P(:,:,n)*Gamma)*Gamma'*P(:,:,n);
    if (n>1)
        K(n-1,:) = inv(R+Gamma'*P(:,:,n)*Gamma)*Gamma'*P(:,:,n)*Phi;
        P(:,:,n-1) = Phi'*M*Phi+Q;
    end
end
x = zeros(2,N+1); u = zeros(1,N+1);
x(:,1) = [1; 0];
% Cálculo de u
for n=1:N+1
    u(n) = -K(n,:)*x(:,n);
    x(:,n+1) = Phi*x(:,n)+Gamma*u(n);
end

```

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 10.1:

Tabela 10.1: Resultados do exemplo 10.1.

$n$	$\mathbf{P}[n]$	$\mathbf{K}[n]$	$\mathbf{x}[n]$	$u[n]$
0	$\begin{bmatrix} 3,7913 & 1,0000 \\ 1,0000 & 1,7913 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0000 & 0,7913 \\ 0,7913 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0 \end{bmatrix}$	-1
1	$\begin{bmatrix} 3,7911 & 0,9999 \\ 0,9999 & 1,7913 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9999 & 0,7913 \\ 0,7913 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	-0,7913
2	$\begin{bmatrix} 3,7905 & 0,9997 \\ 0,9997 & 1,7911 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9997 & 0,7911 \\ 0,7911 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,2087 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$	-0,2087
3	$\begin{bmatrix} 3,7877 & 0,9986 \\ 0,9986 & 1,7905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9986 & 0,7905 \\ 0,7905 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,2087 \end{bmatrix}$	-0,1651
4	$\begin{bmatrix} 3,7740 & 0,9932 \\ 0,9932 & 1,7877 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9932 & 0,7877 \\ 0,7877 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0437 \\ 0,0001 \end{bmatrix}$	-0,0435
5	$\begin{bmatrix} 3,7097 & 0,9677 \\ 0,9677 & 1,7742 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9677 & 0,7742 \\ 0,7742 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0003 \\ 0,0437 \end{bmatrix}$	-0,0342
6	$\begin{bmatrix} 3,4286 & 0,8571 \\ 0,8571 & 1,7143 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8571 & 0,7143 \\ 0,7143 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0099 \\ 0,0003 \end{bmatrix}$	-0,0087
7	$\begin{bmatrix} 2,5000 & 0,5000 \\ 0,5000 & 1,5000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5000 & 0,5000 \\ 0,5000 & 1,0000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0015 \\ 0,0099 \end{bmatrix}$	-0,0057
8	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0057 \\ 0,0015 \end{bmatrix}$	0

## 10.2 Controle LQR

Como visto na seção anterior, o Controle Ótimo Quadrático é dado por um ganho variante no tempo,  $\mathbf{K}[n]$ . Se for considerado a condição em regime, ter-se-á um ganho constante  $\mathbf{K}_{ss}$ , que é muito mais fácil de se obter do que o ganho variante no tempo. De fato, para um problema de tempo infinito, denominado **regulador**, a solução com ganho constante é ótima. Assim, tal solução é denominada **regulador linear quadrático (LQR)**.

Para  $N \rightarrow \infty$ , o índice de desempenho poder ser modificado para

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^T[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \quad (10.29)$$

O termo  $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}[N]$  não aparece neste representação, pois ao assumir estabilidade no regulador ótimo  $\mathbf{x}_{ss}$  converge para zero.

Uma forma de se obter  $\mathbf{K}_{ss}$  consiste em calcular  $\mathbf{P}[n]$  até que a mesma se encontre na condição de regime, ou seja,  $\mathbf{P}_{ss}$ , e assim utilizar esse valor em 10.24 para obter  $\mathbf{K}_{ss}$ . A desvantagem desse método é o elevado esforço computacional.

Outra forma consiste em utilizar na Equação de Riccati na forma estacionária, denominada **Equação Algébrica de Riccati**. Em regime estacionário, tem-se

$$\mathbf{P}_{ss} = \Phi^T \left( \mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{ss} \Gamma \left( \mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{P}_{ss} \Gamma \right)^{-1} \Gamma^T \mathbf{P}_{ss} \right) \Phi + \mathbf{Q} \quad (10.30)$$

Devido ao fato da equação ser quadrada em  $\mathbf{P}_{ss}$ , há mais de uma solução. A solução escolhida deve ser definida positiva. Em muitos casos não é possível obter uma solução analítica de (10.27), o que exige métodos numérico para sua solução.

No MATLAB, há o comando `dlqr` que, de acordo com a notação utilizada aqui, possui a seguinte sintaxe: `[K, P, E] = dlqr(Phi, Gamma, Q, R, N)`.

Tal comando calcula a matriz de realimentação de estados  $\mathbf{K}$ , de forma que  $u[n] = -\mathbf{K}\mathbf{x}[n]$  minimize o seguinte índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T[n] \mathbf{Q} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^T[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n] + 2\mathbf{x}^T[n] \mathbf{N} \mathbf{u}[n]),$$

para o sistema descrito por

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n],$$

Por *default*,  $\mathbf{N} = 0$ , valor este assumido quando o parâmetro é omitido. Adicionalmente, o comando retorna solução da Equação algébrica de Riccati,  $\mathbf{P}$ , e os autovalores de malha fechada do sistema,  $\mathbf{E}$ .

Em relação ao projeto do controlador LQR, ainda há uma questão em aberto: como escolher as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ ? A resposta para tal pergunta pode ser um pouco decepcionante, pois requer uma certa quantidade de tentativa e erro utilizando.

Um aumento em  $\mathbf{Q}$  aumenta a velocidade de convergência da solução ao ponto de equilíbrio. Um aumento em  $\mathbf{R}$  reduz o esforço de controle considerado:

Há algumas diretrizes que podem conduzir a uma boa escolha, ou pelo menos restringir a busca, de forma a torná-la menos exaustiva.

A regra de Bryson, mencionada em [Franklin, Powell e Emami-Naeini 2002], sugere escolher  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  diagonais, tais que:

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{Máximo valor aceitável para } x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

$$R_{ii} = \frac{1}{\text{Máximo valor aceitável para } u_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Tal regra é frequentemente utilizada como um ponto de partida para um método interativo de tentativa e erro, a fim de se obter um sistema em malha fechada com propriedades desejadas.

As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são apenas fracamente conectadas com as especificações de desempenho. O procedimento *pincer* mencionado em [Franklin, Powell e Workman 2006] possibilita introduzir outro grau de liberdade ao problema, de forma a tentar manter polos de malha fechada no interior do círculo de raio  $1/\alpha$ , com  $\alpha > 1$ . Com isso, a resposta oscilatória decairá pelo menos com taxa igual a  $1/\alpha^n$ .

Suponha a seguinte função custo modificada:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (\alpha^n \mathbf{x}[n])^\top \mathbf{Q} (\alpha^n \mathbf{x}[n]) + (\alpha^n \mathbf{u}[n])^\top \mathbf{R} (\alpha^n \mathbf{u}[n]) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \mathbf{z}[n]^\top \mathbf{Q} \mathbf{z}[n] + \mathbf{v}[n]^\top \mathbf{R} \mathbf{v}[n] \right] \end{aligned} \tag{10.31}$$

onde  $\mathbf{z}[n] = \alpha^n \mathbf{x}[n]$  e  $\mathbf{v}[n] = \alpha^n \mathbf{u}[n]$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}[n+1] &= \alpha^{(n+1)} \mathbf{x}[n+1] = \alpha^{(n+1)} (\Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n]) \\ &= \alpha \Phi (\alpha^n \mathbf{x}[n]) + \alpha \Gamma (\alpha^n \mathbf{u}[n]) \\ &= \alpha \Phi \mathbf{z}[n] + \alpha \Gamma \mathbf{v}[n] \end{aligned} \tag{10.32}$$

Assim, o problema de controle ótimo é reformulado, tal que a solução ótima é dada por  $\mathbf{v}[n] = -\mathbf{K} \mathbf{z}[n]$ , ou seja,  $\alpha^n \mathbf{u}[n] = -\mathbf{K} (\alpha^n \mathbf{x}[n])$ , ou ainda,

$$\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K} \mathbf{x}[n] \tag{10.33}$$

Portanto, utilizando a lei de controle da Equação (10.32), a trajetória resultante é ótima para a função custo definida em (10.31).

Para garantir a estabilidade de  $\mathbf{z}[n]$ , o vetor  $\mathbf{x}[n]$  precisa decair com taxa pelo menos igual a  $1/\alpha^n$ .

Suponha que seja definido o tempo de assentamento  $t_s$  para um estado  $x_j$ , tal que  $x_j(0) = 1$  e  $x_j(nT_s) \leq 0,01x_j(0)$ . Considere que os demais estados são nulos para  $n = 0$ . Assim, ao considerar

$$x_j(nT_s) \approx x_j(0)(1/\alpha)^n,$$

conclui-se que

$$(1/\alpha)^n \leq 0,01 \Rightarrow \alpha \geq 100^{1/n} = 100^{T_s/t_s} \quad (10.34)$$

Para aplicar o procedimento *pincer* considerando o critério de 1% para o tempo de assentamento  $t_s$  e período de amostragem  $T_s$ , encontre o valor de  $\alpha$  utilizando (10.34) e encontre a matriz  $\mathbf{K}$  do LQR para as matrizes  $\alpha\Phi$  e  $\alpha\Gamma$ .

 **Exemplo 10.2:** [Franklin, Powell e Workman 2006] Considere um sistema com a seguinte equação de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

onde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 & 1 \\ -0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e a seguinte equação de saída

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx},$$

com

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O projeto deve seguir as seguintes especificações:

1. Máxima frequência de amostragem igual a 5 Hz;
2. Tempo de assentamento (1%) para  $x_1$  menor do que 2,4 s;
3. Tempo de assentamento (1%) para  $x_2$  menor do que 8 s;
4. Máximo desvio em  $x_1$  menor do que 2 e em  $x_2$  menor do que 1.
5. Máximo desvio em  $u_1$  menor do que 5 e em  $u_2$  menor do que 10.

Assume-se  $T_s = 0,2\text{s}$ . Assim:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,9607 & 0,0196 & 0,1776 \\ -0,0098 & 0,9999 & -0,0009 \\ 0 & 0 & 0,8187 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0,0185 & 0,1974 \\ -0,0001 & 0,1390 \\ 0,1813 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtenção de  $\alpha$ , considera-se a restrição mais forte:  $\alpha \geq 100^{0,2/2,4} = 1,4678$ . As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são obtidas a partir das restrições 4 e 5:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/5^2 & 0 \\ 0 & 1/10^2 \end{bmatrix}$$

O seguinte código em Matlab foi utilizado:

```
clear all; clc; close all;
fs=5; Ts=1/fs;
A = [-0.2 0.1 1; -0.05 0 0; 0 0 -1]; B = [0 1; 0 0.7; 1 0];
C = [1 0 0; 0 1 0]; D = zeros(3,2);
%OBS: no bloco State-Space foi feito C=eye(3) para obter na saída todos os
%estados para a realimentação. Para obter y, tomou-se as 2 primeiras saídas
[Phi, Gamma] = c2d(A,B,Ts);
alpha = 1.4678;
Q = diag([1./[2^2 1^2] 0]); R = diag(1./[5^2 10^2]);
K = dlqr(alpha*Phi, alpha*Gamma, Q, R);
x_ini = [1 0 0];
sim('SIM_EX3_CHAP_12');
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2); x_3 = x_out(:,3);
t_d = (0:length(x_1)-1)*Ts;
subplot(2,1,1)
stairs(t_d,x_1,'b'); hold on; stairs(t_d,x_2,'r'); stairs(t_d,x_3,'g'); grid on;
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg = legend('$x_1(n T_s)$', '$x_2(n T_s)$', '$x_3(n T_s)$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best', 'FontSize', 12);
subplot(2,1,2); stairs(t_d, u); grid on
leg = legend('$u_1(n T_s)$', '$u_2(n T_s)$');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best', 'FontSize', 12);
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$u(n T_s)$', 'Interpreter', 'latex');
```

O diagrama de simulação é apresentado na Figura 10.1. A matriz de ganhos é dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,8137 & -9,7876 & 3,7946 \\ 0,9548 & 4,9424 & 0,1045 \end{bmatrix}$$

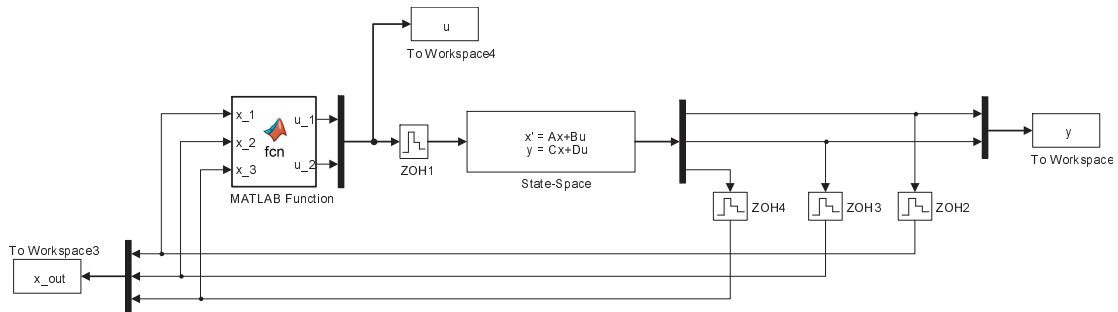


Figura 10.1: Diagrama de blocos da simulação o Exemplo 10.2.

O código do Bloco Matlab Function é apresentado abaixo:

```
function [u_1, u_2] = fcn(x_1, x_2, x_3, K)
%#eml
u_1 = -( K(1,1)*x_1 + K(1,2)*x_2 + K(1,3)*x_3 );
u_2 = -( K(2,1)*x_1 + K(2,2)*x_2 + K(2,3)*x_3 );
```

Os resultados obtidos são apresentados nas Figura 10.2. Observe que os tempos de assentamento estão muito mais baixo do que os especificados, especialmente para  $x_2$ . No entanto, o esforço de controle  $u_1$  não satisfez o limite máximo especificado. Para melhorar este aspecto, pode-se tentar aumentar o tempo de assentamento. Por exemplo, para  $t_s = 5$ , chega-se em:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.5006 & -5.0086 & 2.3797 \\ 1.1031 & 4.3946 & 0.1646 \end{bmatrix}$$

A Figura 10.3 apresenta os resultados obtidos. Note que os resultados agora satisfazem todas as especificações. Entretanto, os requisitos para  $x_2$  ainda são bem conservadores, o que sugere uma relaxação no custo relativo a  $\mathbf{Q}$ , resultando em

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, a seguinte matriz de ganhos é obtida:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,9570 & -2,6986 & 1,7547 \\ 2,9805 & 0,6968 & 0,5816 \end{bmatrix}$$

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 10.4, Note que o esforço de controle diminuiu e os requisitos de projetos continuam sendo satisfeitos, exceto para o tempo de assentamento de  $x_2$ , que parece estar ligeiramente acima do especificado.

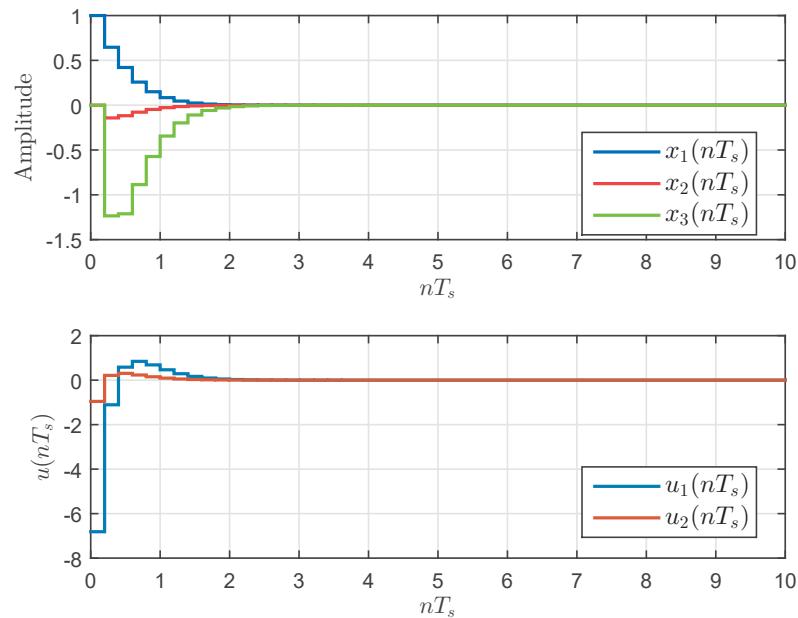
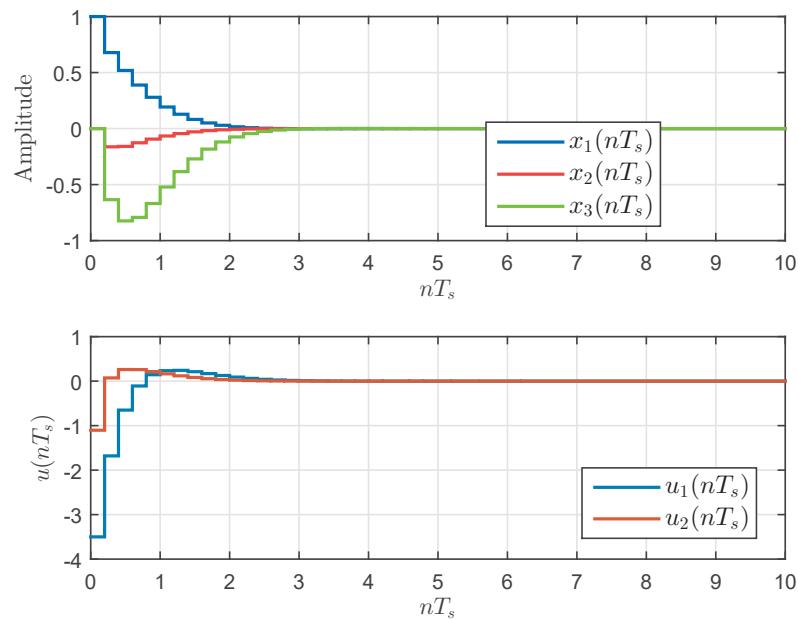


Figura 10.2: Resposta do Exemplo 10.2.

Figura 10.3: Resposta do Exemplo 10.2 com especificação  $t_s = 5s$ .

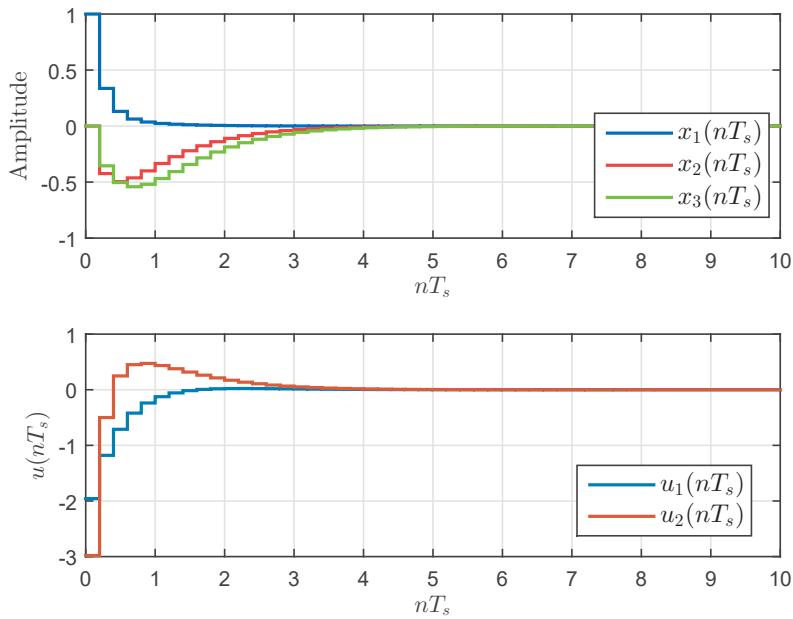


Figura 10.4: Resposta do Exemplo 10.2 com especificação  $t_s = 5\text{s}$  e relaxação no custo de  $x_2$ .

Se a equação de saída do sistema é dada por  $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n]$ , e  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^\top \mathbf{C}$ , então a função custo do LQR pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{x}^\top[n] \mathbf{C}^\top \mathbf{C} \mathbf{x}[n] + \mathbf{u}^\top[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{y}^\top[n] \mathbf{y}[n] + \mathbf{u}^\top[n] \mathbf{R} \mathbf{u}[n]) \end{aligned} \quad (10.35)$$

Quando a matriz  $\mathbf{R}$  é da forma  $\mathbf{R} = \rho \mathbf{I}$ , e  $\rho \rightarrow 0^+$  o problema é denominado LQR *cheap control*.

### 10.3 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman consiste em um conjunto de equações recursivas para estimar os estados do sistema descrito pelas seguintes equações de diferenças

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n] + \Psi \mathbf{w}[n], \quad (10.36)$$

e

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{v}[n], \quad (10.37)$$

onde  $\mathbf{w}[n]$  e  $\mathbf{v}[n]$  representam, respectivamente, o ruído de processo e o ruído de medição, ambos caracterizados como ruído branco Gaussiano, tais que

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{v}[k] \mathbf{w}^\top[j] \right\} = 0, \quad (10.38)$$

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{v}[k] \mathbf{v}^\top[j] \right\} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \mathbf{R}_v, & k = j \end{cases}, \quad (10.39)$$

e

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{w}[k] \mathbf{w}^\top[j] \right\} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \mathbf{R}_w, & k = j \end{cases} \quad (10.40)$$

Considere um estimador com a mesma estrutura do estimador de valor atual (filtro), tal que

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[n]), \quad (10.41)$$

$$\bar{\mathbf{x}}[n] = \Phi\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \Gamma\mathbf{u}[n-1], \quad (10.42)$$

onde (10.42) é denominada atualização temporal e (10.41) atualização de medida. Definem-se:

$$\tilde{\mathbf{x}}[n] = \hat{\mathbf{x}}[n] - \mathbf{x}[n], \quad (10.43)$$

e

$$\tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] - \mathbf{x}[n], \quad (10.44)$$

como os erros de estimação. Suas respectivas covariâncias (medidas das magnitudes dos ruídos) são dadas por:

$$\mathbf{P}[n] = \mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \right\}, \quad (10.45)$$

e

$$\mathbf{M}[n] = \mathbb{E} \left\{ \tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n] \tilde{\bar{\mathbf{x}}}^\top[n] \right\} \quad (10.46)$$

Ao substituir (10.43) e (10.41) em (10.45), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[n] &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n] \tilde{\bar{\mathbf{x}}}^\top[n] (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C})^\top \right\} + \mathbb{E} \left\{ \mathbf{L}_c[n]\mathbf{v}[n] \mathbf{v}^\top[n] \mathbf{L}_c^\top[n] \right\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C})^\top + \mathbf{L}_c[n] \mathbf{R}_v \mathbf{L}_c^\top[n] \end{aligned} \quad (10.47)$$

O ganho  $\mathbf{L}_c[n]$  é obtido ao minimizar o seguinte custo:

$$\min_{\mathbf{L}_c[n]} J = \text{Tr}(\mathbf{P}[n]) \quad (10.48)$$

Antes de prosseguir, considere as seguintes propriedades: sejam  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{P}$  matrizes de dimensões compatíveis, então

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{Tr} \left[ (\mathbf{G} + \mathbf{AXB}) \mathbf{P} (\mathbf{G} + \mathbf{AXB})^\top \right] = 2\mathbf{A}^\top (\mathbf{AXB} + \mathbf{G}) \mathbf{PB}^\top$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{Tr} \left( \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X}^\top \right) = \mathbf{X} \left( \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \right)$$

Com isso, verifica-se que:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{L}_c[n]} \text{Tr} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C})^\top \right] = -2(\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top, \quad (10.49)$$

e,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{L}_c[n]} \text{Tr} \left( \mathbf{L}_c[n] \mathbf{R}_v \mathbf{L}_c^\top[n] \right) = \mathbf{L}_c[n] \left( \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_v^\top \right) = 2\mathbf{L}_c[n]\mathbf{R}_v. \quad (10.50)$$

Logo,

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{L}_c[n]} = -2(\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] \mathbf{C}^\top + 2\mathbf{L}_c[n]\mathbf{R}_v. \quad (10.51)$$

Ao igualar (10.51) a zero, encontra-se  $\mathbf{L}_c[n]$ , tal que

$$\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \left( \mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v \right)^{-1} \quad (10.52)$$

Considere novamente a Equação (10.47). Ao expandir os termos, chega-se em:

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}\mathbf{M}[n] + \mathbf{L}_c[n] \left( \mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v \right) \mathbf{L}_c^\top[n] - \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{L}_c^\top[n]. \quad (10.53)$$

Substituindo (10.52) no terceiro termo do lado direito de (10.53), obtém-se:

$$\mathbf{P}[n] = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}) \mathbf{M}[n] \Rightarrow \mathbf{P}[n](\mathbf{M}[n])^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}). \quad (10.54)$$

A Equação (10.52) pode ser rearranjada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c[n] &= \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{R}_v \left( \mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v \right)^{-1} \\ &= \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} \left( \mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} + \mathbf{I} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (10.55)$$

Com isso,

$$\mathbf{L}_c[n] \left( \mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} + \mathbf{I} \right) = \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1} \quad (10.56)$$

ou seja,

$$\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top\mathbf{R}_v^{-1} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top\mathbf{R}_v^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c[n]\mathbf{C})\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top\mathbf{R}_v^{-1} \quad (10.57)$$

Portanto, de (10.54) e (10.57), chega-se em:

$$\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{P}[n]\mathbf{C}^\top\mathbf{R}_v^{-1}. \quad (10.58)$$

Ao substituir (10.58) de volta em (10.54), verifica-se que:

$$\mathbf{P}[n] = \left( \mathbf{M}^{-1}[n] + \mathbf{C}^\top\mathbf{R}_v^{-1}\mathbf{C} \right)^{-1} \quad (10.59)$$

Uma forma numericamente mais eficiente de se escrever (10.59) pode ser obtida utilizando-se o seguinte lema.

### Lema 10.3.1 Lema da inversão de matrizes

Considere  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{U}$  matrizes de dimensões  $(N \times N)$ ,  $(N \times K)$ ,  $(K \times K)$  e  $(K \times N)$ , respectivamente, e que não haja problemas de singularidade com as matrizes a serem invertidas, então, a seguinte relação é válida:

$$(\mathbf{R} + \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{U})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}[\mathbf{T}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}]^{-1}\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}$$

Assim:

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \left( \mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v \right)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{M}[n]. \quad (10.60)$$

Note que em (10.58) o ganho  $\mathbf{L}_c[n]$  depende de  $\mathbf{P}[n]$  dada em (10.60), que por sua vez depende de  $\mathbf{M}[n]$ . Para fechar o conjunto de equações recursivas que definem o filtro de Kalman, considere:

$$\tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n+1] = \bar{\mathbf{x}}[n+1] - \mathbf{x}[n+1] \quad (10.61)$$

e,

$$\mathbf{M}[n+1] = \mathbb{E} \left\{ \tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n+1] \tilde{\bar{\mathbf{x}}}^\top[n+1] \right\}. \quad (10.62)$$

De (10.44) e (10.36),

$$\tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n+1] = \Phi\hat{\mathbf{x}}[n] + \Gamma\mathbf{u}[n] - \Phi\mathbf{x}[n] - \Gamma\mathbf{u}[n] - \Psi\mathbf{w}[n] = \Phi\tilde{\bar{\mathbf{x}}}[n] - \Psi\mathbf{w}[n]. \quad (10.63)$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}[n+1] &= \mathbb{E} \left\{ (\Phi \tilde{\mathbf{x}}[n] - \Psi \mathbf{w}[n]) (\Phi \tilde{\mathbf{x}}[n] - \Psi \mathbf{w}[n])^\top \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \Phi \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \Phi^\top \right\} + \mathbb{E} \left\{ \Psi \mathbf{w}[n] \mathbf{w}^\top[n] \Psi^\top \right\} \\
&= \Phi \mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}[n] \tilde{\mathbf{x}}^\top[n] \right\} \Phi^\top + \Psi \mathbb{E} \left\{ \mathbf{w}[n] \mathbf{w}^\top[n] \right\} \Psi^\top
\end{aligned} \tag{10.64}$$

Portanto,

$$\mathbf{M}[n+1] = \Phi \mathbf{P}[n] \Phi^\top + \Psi \mathbf{R}_w \Psi^\top. \tag{10.65}$$

Assim se completa as relações que definem o estimador ótimo variante no tempo, conhecido com filtro de Kalman. Os cálculos são resumidos no seguinte procedimento:

1. Defina  $\mathbf{R}_v$ ,  $\mathbf{R}_w$ ,  $\bar{\mathbf{x}}[0]$  e  $\mathbf{M}[0]$ ;
2. Faça  $n = 0$ ;
3. Calcule  $\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{M}[n]$
4. Calcule  $\mathbf{L}_c[n] = \mathbf{P}[n]\mathbf{C}^\top \mathbf{R}_v^{-1}$ ;
5. Calcule  $\hat{\mathbf{x}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c[n](\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[n])$ ;
6. Atualize  $\bar{\mathbf{x}}[n+1] = \Phi \hat{\mathbf{x}}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n]$ ;
7. Faça  $n = n + 1$ ;
8. Vá para o passo 3.

As equações recursivas para determinar  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{P}$  no filtro de Kalman são repetidas aqui:

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{M}[n] - \mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top \left( \mathbf{C}\mathbf{M}[n]\mathbf{C}^\top + \mathbf{R}_v \right)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{M}[n]$$

$$\mathbf{M}[n+1] = \Phi \mathbf{P}[n] \Phi^\top + \Psi \mathbf{R}_w \Psi^\top$$

Já para o controle ótimo, tinha-se:

$$\mathbf{M}[n] = \mathbf{P}[n] - \mathbf{P}[n]\Gamma \left( \mathbf{R} + \Gamma^\top \mathbf{P}[n]\Gamma \right)^{-1} \Gamma^\top \mathbf{P}[n]$$

$$\mathbf{P}[n-1] = \Phi^\top \mathbf{M}[n] \Phi + \mathbf{Q}$$

Note que as duas formas são semelhantes, exceto pelo sentido da evolução temporal. Assim, da mesma forma que feito no controle ótimo, pode-se considerar a versão em regime estacionário para o estimador, resultando em um ganho constante  $\mathbf{L}_{ss}$ . Por analogia ao controle ótimo, tem-se:

$$\mathbf{L}_{ss} = \mathbf{M}_{ss} \mathbf{C}^{\top} \left( \mathbf{C} \mathbf{M}_{ss} \mathbf{C}^{\top} + \mathbf{R}_v \right)^{-1}, \quad (10.66)$$

onde

$$\mathbf{M}_{ss} = \Phi \mathbf{P}_{ss} \Phi^{\top} + \Psi \mathbf{R}_w \Psi^{\top}, \quad (10.67)$$

e,

$$\mathbf{P}_{ss} = \mathbf{M}_{ss} - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{C}^{\top} \left( \mathbf{R}_v + \mathbf{C} \mathbf{M}_{ss} \mathbf{C}^{\top} \right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_{ss} \quad (10.68)$$

De (10.67) e (10.68), obtém-se:

$$\mathbf{M}_{ss} = \Phi \left( \mathbf{M}_{ss} - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{C}^{\top} \left( \mathbf{R}_v + \mathbf{C} \mathbf{M}_{ss} \mathbf{C}^{\top} \right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}_{ss} \right) \Phi^{\top} + \Psi \mathbf{R}_w \Psi^{\top}, \quad (10.69)$$

No MATLAB, há o comando `dlqe` que, de acordo com a notação utilizada aqui, possui a seguinte sintaxe: `[L, M, P, E] = dlqe(Phi, Psi, C, Rw, Rv)`, sendo `E` os polos resultantes do observador.

O LQR e o FK são duais, ou seja, relações análogas são obtidas nos dois casos, simplesmente fazendo as correspondências apontadas na Tabela 10.2

Tabela 10.2: Parâmetros duais do LQR e do FK em regime estacionário.

LQR	FK
$\Phi$	$\Phi^{\top}$
$\Gamma$	$\mathbf{C}^{\top}$
$\mathbf{Q}$	$\Psi \mathbf{R}_w \Psi^{\top}$
$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}_v$
$\mathbf{K}$	$\mathbf{L}_c$

Exemplo 10.3: Considere o sistema descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{70}{(s+2)(s+5)(s+7)}$$

A representação em espaço de estados pode ser dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -14 & -59 & -70 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assuma que haja ruído branco de medição, com densidade espectral de potência dada por  $\mathbf{R}_v = 0,01$ . Considere também a presença de ruído branco no estado  $x_1$ , tal que  $\mathbf{R}_w = 0,01$ . Note que assim, pode-se considerar

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Projete estimadores de estado considerando: a) observador de Luenberger, alocando os polos com dinâmica cerca de três vezes mais rápida do que a menor constante de tempo do sistema; b) filtro de Kalman variante no tempo; c) filtro de Kalman estacionário. Assuma estado inicial igual a  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ .

Antes de iniciar a solução, observe que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

Assim, para incluir o ruído de processo no modelo, pode-se considerar a matriz aumentada  $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  no modelo em espaço de estados, bem como o vetor de entrada  $\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$ .

A solução é obtida pelo seguinte código Matlab:

```

clear all; clc; %close all;
fs=50; Ts=1/fs; s = tf('s');
G = 1/((s+2)*(s+5)*(s+7)); K_G = 1/dcgain(G); G = K_G*G;
%OBS 1: O ganho foi transferido para a matrix de entrada. Assim y = x_3
[A,B,C,D] = tf2ss(G.num{:},G.den{:}); B = B*K_G; C = C/K_G;
[Phi,Gamma] = c2d(A,B,Ts);
Psi = [1 0 0]';
Rv = 1e-2; Rw = 1e-2;
%OBS 2: no bloco State-Space1 a matrix B foi modificada para considerar a
%entrada de ruído em x_1. Consequentemente, D foi modificada
A1 = A; B1 = [B, Psi]; C1 = C; D1 = [0 0]; % Matrizes do bloco State-Space1
%OBS 3: no bloco State-Space2 foi feito C=eye(3) para obter todos os estados
% para fins de comparação
A2 = A; B2 = B; C2 = eye(3); D2 = [0; 0; 0]; % Matrizes do bloco State-Space2
x_0 = [1 0 1]; %estado inicial
item = 'a';
switch(item)
case 'a' %Luemburger
so = [-21; -22+j*2; -22-j*2]; p_o = exp(so*Ts);
Lc = place(Phi', (C*Phi)', p_o)';
sim('SIM_EX4_CHAP_12_a');
case 'b' %Filtro de Kalman
M_0 = eye(3);
sim('SIM_EX4_CHAP_12_b');
case 'c' %Filtro de Kalman estacionário
Lc = dlqe(Phi, Psi, C, Rw, Rv);
sim('SIM_EX4_CHAP_12_a');
otherwise
error('item precisa se ''a'', ''b'' ou ''c'' ');
end
x_1 = x_out(:,1); x_2 = x_out(:,2); x_3 = x_out(:,3); y = x_3;
x_chap_1 = x_chap_out(:,1); x_chap_2 = x_chap_out(:,2);
x_chap_3 = x_chap_out(:,3); y_chap = x_chap_3;
t_d = (0:length(y_chap)-1)*Ts;
figure(1);
plot(t,y,'b',t_d,y_noisy,'y',t_d,y_chap,'r');
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$y$ sem ruido', '$y$ com ruido', '$\hat{y}$');
set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 12);

```

```

figure(2);
subplot(3,1,1);plot(t,x_1,'b--',t_d,x_chap_1,'r'); axis([0 20 -4 4]);
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$x_1$', '$\hat{x}_1$'); set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'Fontsize',12);
subplot(3,1,2);plot(t,x_2,'b--',t_d,x_chap_2,'r'); axis([0 20 -2 2]);
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$x_2$', '$\hat{x}_2$'); set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'Fontsize',12);
subplot(3,1,3);plot(t,x_3,'b--',t_d,x_chap_3,'r'); axis([0 20 -0.5 1.5]);
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex');
l = legend('$x_3$', '$\hat{x}_3$'); set(l, 'Interpreter', 'Latex', 'Fontsize',12);

```

Os diagramas de simulação estão apresentados nas Figuras 10.5 e 10.6.

Os códigos dos blocos Matlab Function são apresentados a seguir:

```

%a) e c) Luenberger e Kalman Estacionário
function [x_chap_1, x_chap_2, x_chap_3] = ...
fcn(u, y, Phi, Gamma, C, Lc)
 %#eml
global x_bar;
x_chap = x_bar + Lc*(y - C*x_bar);
x_bar = Phi*x_chap+ Gamma*u;
x_chap_1 = x_chap(1); x_chap_2 = x_chap(2); x_chap_3 = x_chap(3);

```

```

%b) Kalman variante no tempo
function [x_chap_1, x_chap_2, x_chap_3] = ...
fcn(u, y, Phi, Gamma, C, Rv, Rw, Psi)
 %#eml
global x_bar;
global M;
P = M-M*C'*inv(C*M*C'+Rv)*C*M;
Lc = P*C'*inv(Rv);
x_chap = x_bar + Lc*(y - C*x_bar);
x_bar = Phi*x_chap+ Gamma*u;
M = Phi*P*Phi'+Psi*Rw*Psi';
x_chap_1 = x_chap(1); x_chap_2 = x_chap(2); x_chap_3 = x_chap(3);

```

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 10.7 a 10.9.

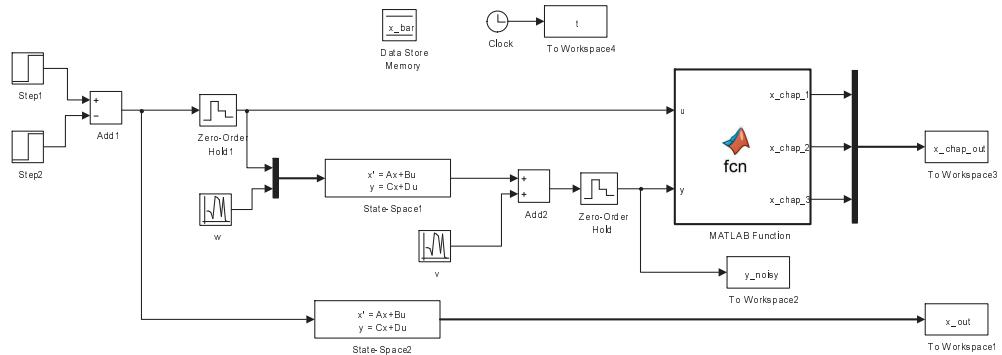


Figura 10.5: Diagrama de blocos da simulação o Exemplo 10.3 a e c.

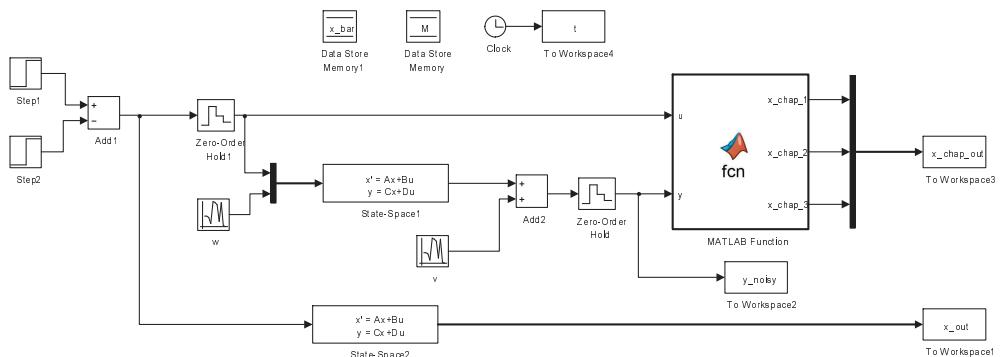
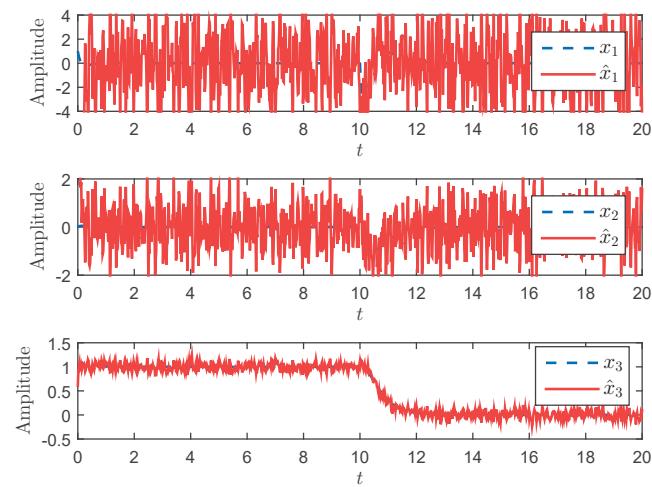
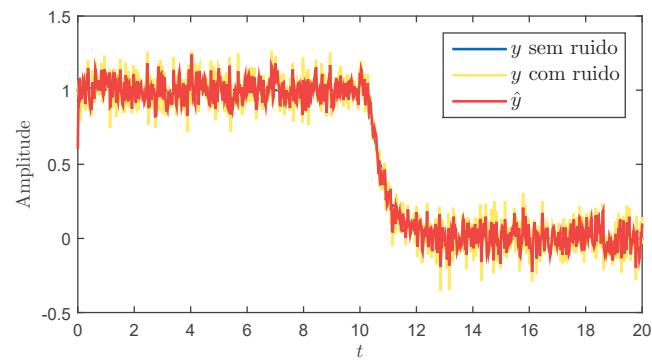


Figura 10.6: Diagrama de blocos da simulação o Exemplo 10.3 b.

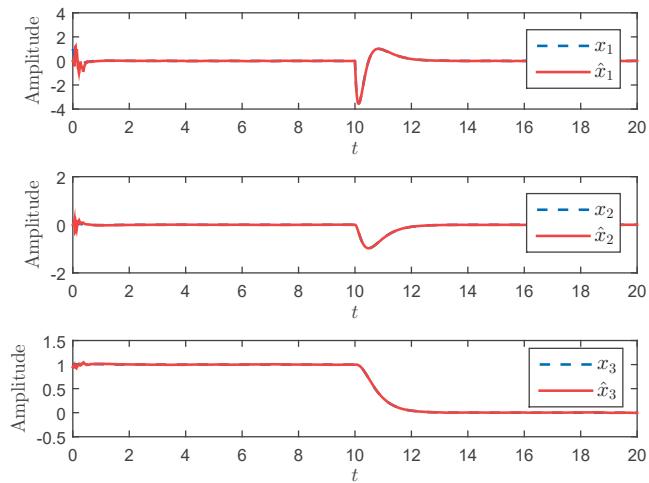


(a) Saída e Estados

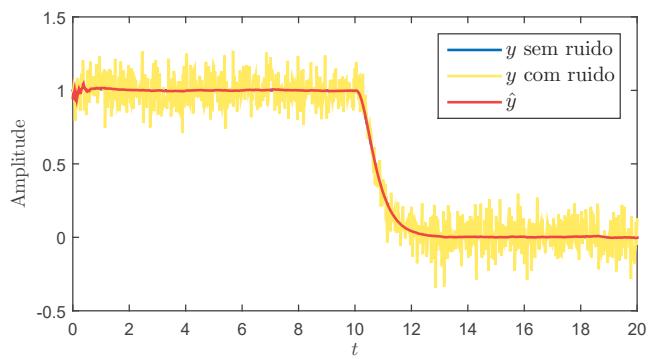


(b) Sinal de Controle

Figura 10.7: Resposta do Exemplo 10.1 a.

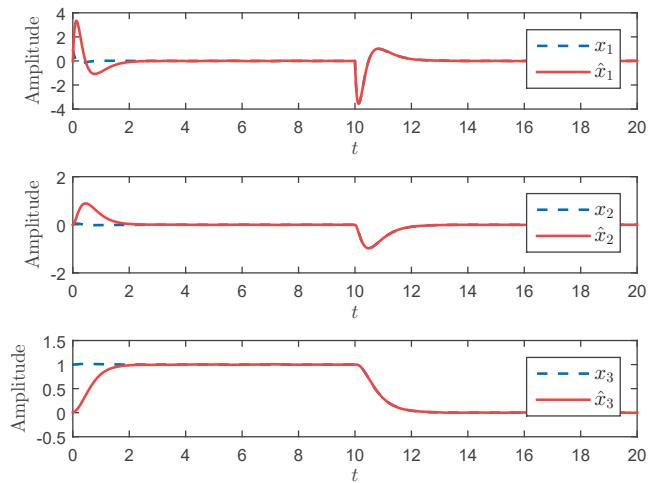


(a) Saída e Estados

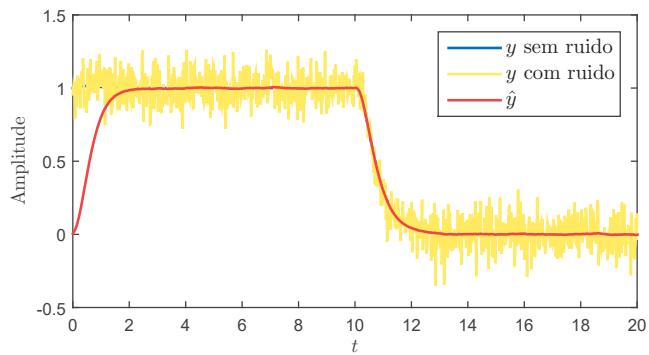


(b) Sinal de Controle

Figura 10.8: Resposta do Exemplo 10.1 b.



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle

Figura 10.9: Resposta do Exemplo 10.1 c.

## 10.4 Controle LQG

O regulador LQG consiste no LQR em conjunto com o estimador LQG (filtro de Kalman estacionário). Se o controle e o estimador forem estáveis, a estabilidade do sistema completo também será estável, conforme o teorema da separação.

Para o LQR, boas propriedades de robustez são garantidas quando a matriz  $\mathbf{R}$  é diagonal [Safonov e Athans 1977]. No entanto, para regulador LQG, não há garantias sobre as margens de estabilidade [Doyle 1978].

Uma forma de recuperar as boas propriedades de robustez do regulador LQG, consiste em utilizar o procedimento de recuperação denominado LTR (*loop transfer recovery*), [da Cruz 1996]. Detalhes sobre essa metodologia são apresentadas no curso PTC5885 - Projeto de Sistemas de Controle Robustos Multivariáveis II, ministrado pelo Prof. José Jaime da Cruz.

Nesta breve introdução ao assunto, assume-se que o par  $(\Phi, \Gamma)$  é controlável, que o par  $(\Phi, \mathbf{C})$  é observável. Além disso, assume-se que o sistema é de fase mínima e que o número de entradas é igual ao de saídas.

Considere novamente o diagrama do estimador pelo valor atual (nesse caso em particular, do filtro de Kalman - FK) da Figura 9.11. Desconsiderando a entrada  $\mathbf{u}[n]$ , o esquema pode ser redesenhadado conforme a Figura 10.10.

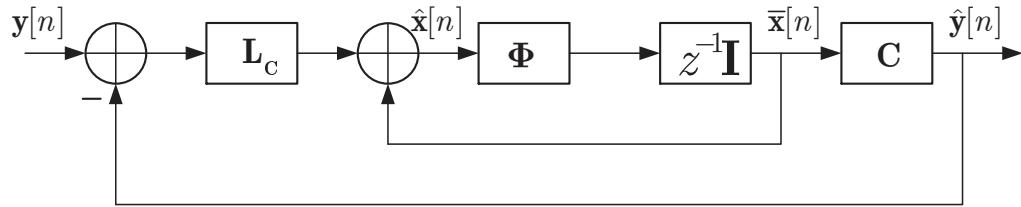


Figura 10.10: Diagrama de blocos do FK.

Verifica-se que

$$\mathbf{G}_{KF}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \Phi \mathbf{L}_c \quad (10.70)$$

Considere um regulador com a estrutura apresentada na Figura 10.11, onde  $\mathbf{G}_N(z)$  representa o modelo nominal do sistema a ser controlado.

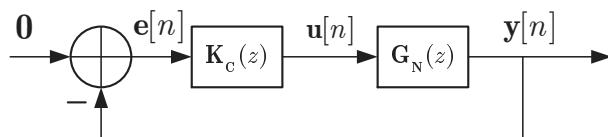


Figura 10.11: Diagrama em blocos de um regulador.

Se for assumido o FK em regime estacionário para o estimador de estados e uma lei de controle com realimentação dos estados estimados, é possível obter um controlador  $\mathbf{K}_c(z)$  equivalente, como apresentado na Figura 10.11? A resposta é sim. Vejamos:

Do estimador pelo valor atual, tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \bar{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c (\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[n]), \quad (10.71)$$

e,

$$\bar{\mathbf{x}}[n] = \Phi\hat{\mathbf{x}}[n-1] + \Gamma\mathbf{u}[n-1] \quad (10.72)$$

Como  $\mathbf{u}[n] = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}[n]$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}[n+1] &= -\mathbf{K}(\bar{\mathbf{x}}[n+1] + \mathbf{L}_c(\mathbf{y}[n+1] - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}[n+1])) \\ &= -\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})\bar{\mathbf{x}}[n+1] - \mathbf{K}\mathbf{L}_c\mathbf{y}[n+1] \\ &= -\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi\hat{\mathbf{x}}[n] - \Gamma\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}[n]) - \mathbf{K}\mathbf{L}_c\mathbf{y}[n+1] \end{aligned} \quad (10.73)$$

Assim,

$$-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}[n+1] = -\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi\hat{\mathbf{x}}[n] - \Gamma\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}[n]) - \mathbf{K}\mathbf{L}_c\mathbf{y}[n+1], \quad (10.74)$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1] = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Gamma\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}[n] + \mathbf{L}_c\mathbf{y}[n+1] \quad (10.75)$$

Ao aplicar a transformada- $z$  na Equação 10.75, chega-se em:

$$[z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Gamma\mathbf{K})]\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{L}_c z \mathbf{Y}(z) \quad (10.76)$$

Logo,

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = z([z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Gamma\mathbf{K})]\mathbf{K}^{-1})^{-1}\mathbf{L}_c\mathbf{Y}(z). \quad (10.77)$$

Portanto,

$$\hat{\mathbf{U}}(z) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}(z) = -Kz\mathbf{K}([z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Gamma\mathbf{K})])^{-1}\mathbf{L}_c\mathbf{Y}(z) \quad (10.78)$$

Como,  $\mathbf{E}(z) = -\mathbf{Y}(z)$ , então,

$$\mathbf{U}(z) = z\mathbf{K}([z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Gamma\mathbf{K})])^{-1}\mathbf{L}_c\mathbf{E}(z). \quad (10.79)$$

Portanto,

$$\mathbf{K}_c(z) = z\mathbf{K}([z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Gamma\mathbf{K})])^{-1}\mathbf{L}_c \quad (10.80)$$

Por outro lado, a planta nominal é definida por:

$$\mathbf{G}_N(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma \quad (10.81)$$

Todo o desenvolvimento seguinte é baseado em [Goodman 1984], [Maciejowski 1985] e [Weerasooriya e Phan 1995]. Considerando o LQR *cheap control*, ou seja,  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$  e  $\mathbf{R} = \rho\mathbf{I}$ , a partir de (10.25), verifica-se que:

$$\mathbf{K} = \left(\rho\mathbf{I} + \Gamma^\top\mathbf{P}_{ss}\Gamma\right)^{-1}\Gamma^\top\mathbf{P}_{ss}\Phi, \quad (10.82)$$

onde,

$$\mathbf{P}_{ss} = \Phi^\top \left( \mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{ss}\Gamma \left( \rho\mathbf{I} + \Gamma^\top\mathbf{P}_{ss}\Gamma \right)^{-1}\Gamma^\top\mathbf{P}_{ss} \right) \Phi + \mathbf{C}^\top\mathbf{C} \quad (10.83)$$

Observe que, para  $\rho = 0$ , o que teoricamente pode considerado na versão discreta do LQR, tem-se

$$\mathbf{P}_{ss} = \Phi^\top \left( \mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{ss}\Gamma \left( \Gamma^\top\mathbf{P}_{ss}\Gamma \right)^{-1}\Gamma^\top\mathbf{P}_{ss} \right) \Phi + \mathbf{C}^\top\mathbf{C} \quad (10.84)$$

Assuma que a solução seja dada por  $\mathbf{P}_{ss} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$ . Substituindo isso na Equação 10.84, tem-se

$$\mathbf{C}^\top\mathbf{C} = \Phi^\top \left( \mathbf{C}^\top\mathbf{C} - \mathbf{C}^\top\mathbf{C}\Gamma \left( \Gamma^\top\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\Gamma \right)^{-1}\Gamma^\top\mathbf{C}^\top\mathbf{C} \right) \Phi + \mathbf{C}^\top\mathbf{C} \quad (10.85)$$

Se  $\det(\mathbf{C}\Gamma) \neq 0$ , então,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^\top\mathbf{C} &= \Phi^\top \left( \mathbf{C}^\top\mathbf{C} - \mathbf{C}^\top\mathbf{C}\Gamma(\mathbf{C}\Gamma)^{-1} \left( \Gamma^\top\mathbf{C}^\top \right)^{-1}\Gamma^\top\mathbf{C}^\top\mathbf{C} \right) \Phi + \mathbf{C}^\top\mathbf{C} \\ &= \Phi^\top \left( \mathbf{C}^\top\mathbf{C} - \mathbf{C}^\top\mathbf{C} \right) \Phi + \mathbf{C}^\top\mathbf{C} \\ &= \mathbf{C}^\top\mathbf{C}, \end{aligned} \quad (10.86)$$

ou seja, se  $\det(\mathbf{C}\Gamma) \neq 0$ , então  $\mathbf{P}_{ss} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$  é a solução da ARE. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \left( \Gamma^\top\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\Gamma \right)^{-1}\Gamma^\top\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\Phi = (\mathbf{C}\Gamma)^{-1} \left( \Gamma^\top\mathbf{C}^\top \right)^{-1}\Gamma^\top\mathbf{C}^\top\mathbf{C}\Phi \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{C}\Gamma)^{-1}\mathbf{C}\Phi \end{aligned} \quad (10.87)$$

Define-se  $\Delta(z) = \mathbf{G}_N(z)\mathbf{K}_c(z) - \mathbf{G}_{KF}(z)$ .

**Teorema 10.4.1** [Maciejowski 1985] Se  $\mathbf{G}_N(z)$  não possui zeros de fase não mínima e se  $\det(\mathbf{C}\Gamma) \neq 0$ , então

$$\Delta(z) = 0$$

ou seja, o sistema em malha aberta converge a função de transferência do filtro de Kalman, denominada malha objetivo.

Prova:

De (10.87) e (10.80), tem-se

$$\mathbf{K}_c(z) = z(\mathbf{C}\Gamma)^{-1}\mathbf{C}\Phi\left(\left[z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Gamma(\mathbf{C}\Gamma)^{-1}\mathbf{C}\Phi)\right]\right)^{-1}\mathbf{L}_c \quad (10.88)$$

Ao definir  $\Pi = \Gamma(\mathbf{C}\Gamma)^{-1}\mathbf{C}$  e observar que  $\mathbf{C}(\mathbf{I} - \Pi) = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c(z) &= z(\mathbf{C}\Gamma)^{-1}\mathbf{C}\Phi([z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_c\mathbf{C})(\Phi - \Pi\Phi)])^{-1}\mathbf{L}_c \\ &= z(\mathbf{C}\Gamma)^{-1}\mathbf{C}\Phi([z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \Pi)\Phi])^{-1}\mathbf{L}_c \end{aligned} \quad (10.89)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N(z)\mathbf{K}_c(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\Gamma z(\mathbf{C}\Gamma)^{-1}\mathbf{C}\Phi([z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \Pi)\Phi])^{-1}\mathbf{L}_c \\ &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\Pi\Phi(z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \Pi)\Phi)^{-1}\mathbf{L}_c \end{aligned} \quad (10.90)$$

Mas,  $\Phi(z\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \Pi)\Phi)^{-1} = (z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi))^{-1}\Phi$ . Assim,

$$\mathbf{G}_N(z)\mathbf{K}_c(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}z\Pi(z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi))^{-1}\Phi\mathbf{L}_c \quad (10.91)$$

Portanto,

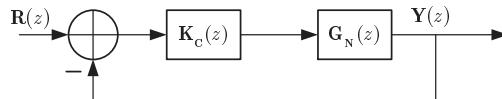
$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \mathbf{G}_N(z)\mathbf{K}_c(z) - \mathbf{G}_{KF}(z) \\ &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}[z\Pi(z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi))^{-1} - \mathbf{I}]\Phi\mathbf{L}_c \\ &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}[z\Pi - (z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi))](z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi))^{-1}\Phi\mathbf{L}_c \end{aligned} \quad (10.92)$$

Observe que

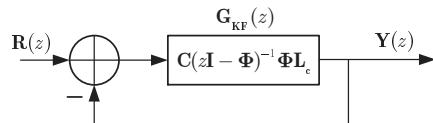
$$z\Pi - (z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi)) = z\Pi - z\mathbf{I} + \Phi - \Phi\Pi = (\Phi - z\mathbf{I})(\mathbf{I} - \Pi) \quad (10.93)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}(\Phi - z\mathbf{I})(\mathbf{I} - \Pi)(z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi))^{-1}\Phi\mathbf{L}_c \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{I} - \Pi)(z\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} - \Pi))^{-1}\Phi\mathbf{L}_c = 0 \end{aligned} \quad (10.94)$$



(a) Saída e Estados



(b) Sinal de Controle

Figura 10.12: (a) sistema nominal em malha fechada; (b) malha objetivo.

Com isso, prova-se que se  $\rho \rightarrow 0$ , se  $G_N(z)$  é de fase mínima e  $\det(C\Gamma) \neq 0$ , então o sistema da Figura 10.12 (a) converge para o da Figura 10.12 (b).

Assim, para fins de projeto, inicialmente deve-se fazer com que a malha objetivo satisfaça as condições de robustez e desempenho especificadas. Deve-se manipular os valores de  $R_w$  e  $R_v$  para atingir, por exemplo, a resposta em frequência desejada para  $G_{KF}$ .

Por exemplo, ao aumentar o valor de  $R_w$ , a banda do filtro de Kalman aumenta. Ao aumentar  $R_v$ , o ganho em baixas freqüências diminui.

Se o sistema for SISO, pode-se utilizar o diagrama de bode para analisar se a passante, bem como as margens de ganho e fase de  $G_{KF}$  atendem aos requisitos de projeto.

Se o sistema for MIMO, deve-se utilizar os valores singulares, que representam uma medida do ganho para sistemas multivariáveis.

#### Exemplo 10.4:

Considere um sistema descrito por:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx$$

com,

$$A = \begin{bmatrix} -0,7 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escolhendo-se  $\Psi = I_{2 \times 2}$ ,  $R_w = I_{2 \times 2}$ ,  $\mu = 100$ ,  $R_v = \mu$ ,  $f_s = 20Hz$ , verifique a condição de convergência para a malha objetivo. Implemente o controle para o sistema e verifique o que acontece com a diminuição do parâmetro  $\rho$ .

O problema é resolvido com o seguinte script em MATLAB. O diagrama em SIMULINK é apresentado na Figura 10.13. Os resultados são mostrados nas Figuras 10.14 a 10.17.

```

clear all; clc; close all;
fs=20; Ts=1/fs;
A = [-0.7 0; 1 0]; B = [0.6; 0]; C = [0 1]; D = 0;
[Phi, Gamma] = c2d(A, B, Ts);
Psi = [1 0; 0 1]; Rw = eye(2); mu = 100; Rv = mu;
Lc = dlqe(Phi, Psi, C, Rw, Rv);
sys_KF = ss(Phi, Phi*Lc, C, 0); sys_KF.Ts = Ts;
sigma(sys_KF); hold on;
K = inv(C*Gamma)*C*Phi
%K = dlqr(Phi, Gamma, C'*C, 1e-4);
z = tf('z'); z.Ts = Ts;
%KC = z*K*inv(z*eye(2)-(eye(2)-Lc*C)*(Phi-Gamma*K))*Lc; Kc.Ts = Ts;
Kc = z*tf(ss((eye(2)-Lc*C)*(Phi-Gamma*K), Lc, K, 0, Ts));
sys_G = ss(Phi, Gamma, C, D); sys_G.Ts = Ts;
sys_G_Kc = minreal(sys_G*Kc);
sigma(sys_G_Kc);
sim('SIM_EX_LQG_CHAP_12_NEW2');
figure(5);
t_d = (0:length(u)-1)*Ts;
plot(t, r, 'b', t, y, 'r');
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Amplitude', 'Interpreter', 'latex')
leg = legend('Setpoint', 'Saida');
set(leg, 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');
figure(6); stairs(t_d, u);
xlabel('$n T_s$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$u(n T_s)$', 'Interpreter', 'latex');

```

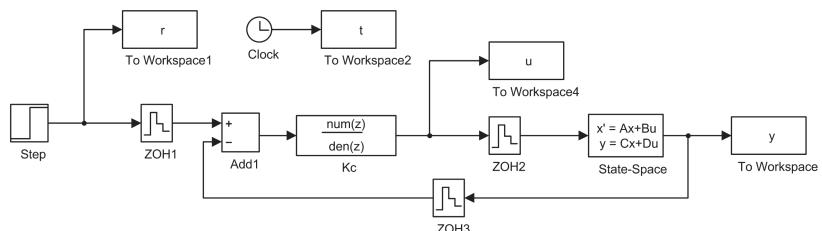
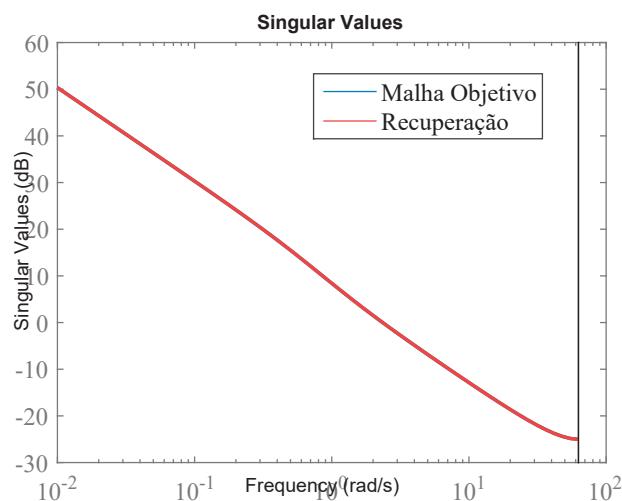
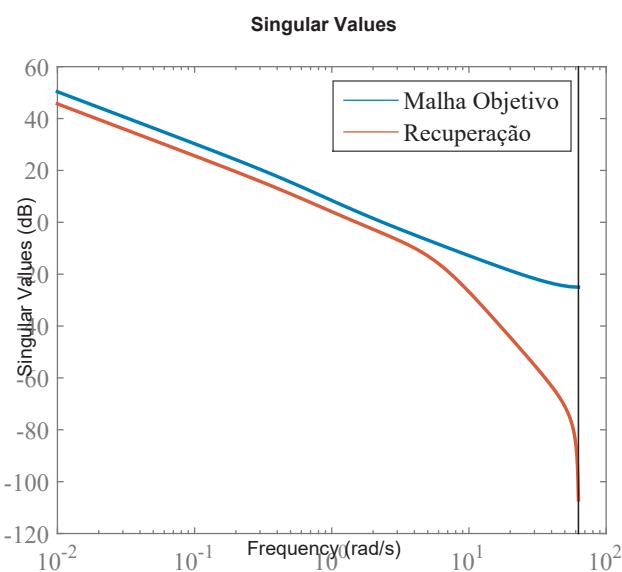
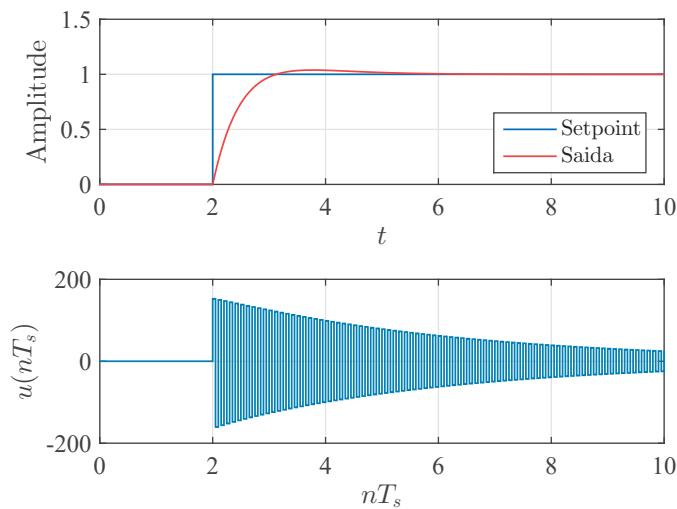
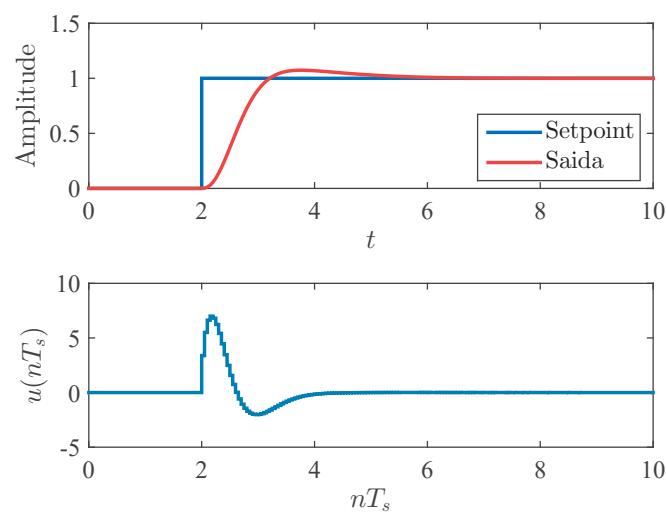


Figura 10.13: Diagrama do Exemplo.

Figura 10.14: Recuperação para  $\rho = 0$ .Figura 10.15: Recuperação para  $\rho = 1e - 3$ .

Figura 10.16: Desempenho para  $\rho = 0$ .Figura 10.17: Desempenho para  $\rho = 1e-3$ .

Considere  $\mathbf{R}_w = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R}_v = \mu\mathbf{I}$ , e, da equação de Riccati do filtro de Kalman (10.69), fazendo-se  $\mathbf{M}_{ss} = \mathbf{Y}$  e  $\mathbf{L}_{ss} = \mathbf{L}$ , tem-se:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Y} \mathbf{C}^\top \left( \mathbf{C} \mathbf{Y} \mathbf{C}^\top + \mu \mathbf{I} \right)^{-1}, \quad (10.95)$$

$$\mathbf{Y} = \Phi \left( \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \mathbf{C}^\top \left( \mu \mathbf{I} + \mathbf{C} \mathbf{Y} \mathbf{C}^\top \right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Y} \right) \Phi^\top + \Psi \Psi^\top, \quad (10.96)$$

A partir da identidade de Kalman em tempo discreto, pode-se verificar a seguinte aproximação:

$$\sigma_i(\mathbf{G}_{KF}) \approx \sqrt{\mu^{-1} \sigma_i^2(\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \Psi)} \quad (10.97)$$

ou seja, variando-se  $\Psi$  e  $\mu$ , pode-se dar forma aos valores singulares da malha objetivo.

Assume-se que o erro de modelagem é multiplicativo, como ilustrado na Figura 10.18 .

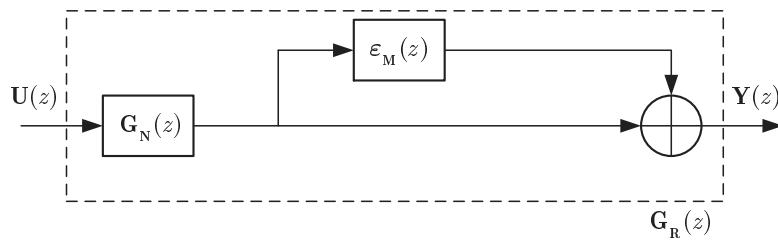


Figura 10.18: representação do sistema real assumindo erro multiplicativo.

Considere que o projetista conheça um limite superior para o erro de modelagem, tal que  $|\epsilon_M(j\omega)| \leq e_M(\omega)$ . Em [da Cruz 1996] é mostrado que a condição de robustez de estabilidade é tal que

$$\frac{1}{e_M(j\omega)} > \sigma_M [\mathbf{T}_N(j\omega)], \quad (10.98)$$

onde  $\sigma_M[\mathbf{T}_N(j\omega)]$  representa o máximo valor singular da matriz de função de transferência em malha fechada  $\mathbf{T}_M$ .

Para o caso SISO, tem-se simplesmente que

$$\frac{1}{e_M(j\omega)} > |T_N(j\omega)| \quad (10.99)$$

A malha objetivo precisa respeitar as barreiras de desempenho e rejeição de ruídos de medição e perturbações. Para determinar as barreiras, considere o seguinte procedimento:

- Escolher a planta nominal  $\mathbf{G}_N(z)$ ;
- Determinar as incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas.

- Determinar o limite superior para o erro de modelagem:

$$\epsilon_M(j\omega) = \frac{G_R(z) - G_N(z)}{G_N(z)}$$

$$|\epsilon_M(j\omega)| = \sigma_M(\epsilon_M(j\omega)) \leq e_M(\omega) \Rightarrow e_M(\omega) = \sigma_M(\epsilon_M(j\omega))$$

- Determinar as barreiras de:

- Alta frequência: rejeição de ruído de medida ( $\delta_m; \omega_m$ );
- Baixa frequência: acompanhamento de referência ( $\delta_r; \omega_r$ ) e rejeição de perturbações ( $\delta_p; \omega_p$ ).

- Incluir o erro de modelagem na definição das barreiras [da Cruz 1996]:

- Seguimento de referência:  $\left| \frac{1}{\delta_r(1-e_M)} \right|$ , para  $\omega \leq \omega_r$ ;
- Rejeição de perturbação:  $\left| \frac{1}{\delta_p(1-e_M)} \right|$ , para  $\omega \leq \omega_p$ ;
- Erro de medida:  $\left| \frac{\delta_m}{(1+e_M)} \right|$ , para  $\omega \geq \omega_m$ .

A Figura 10.19 apresenta um exemplo de definição de barreiras.

Para sistemas em tempo discreto, como a resposta em frequência apresenta distorções para frequências próximas de  $f_s/2$ , deve-se ter uma atenção particular. Pode acontecer da frequência de amostragem ser baixa e a barreira de erro de medida ficar acima de  $f_s/2$ .

Resumo do procedimento de projeto:

- Determinar o erro de modelagem e definir as barreiras de robustez e desempenho;
- Fazer com que a malha objetivo satisfaça as condições de robustez e desempenho especificadas. Para isso, manipular  $\Psi, \mu$  para atingir a resposta em frequência desejada para  $G_{KF}$ ).
- Aplicar o procedimento de recuperação para algum valor de  $\rho$  pequeno;
- Verificar, via simulação se as respostas estão adequadas. Caso negativo, refazer o projeto.

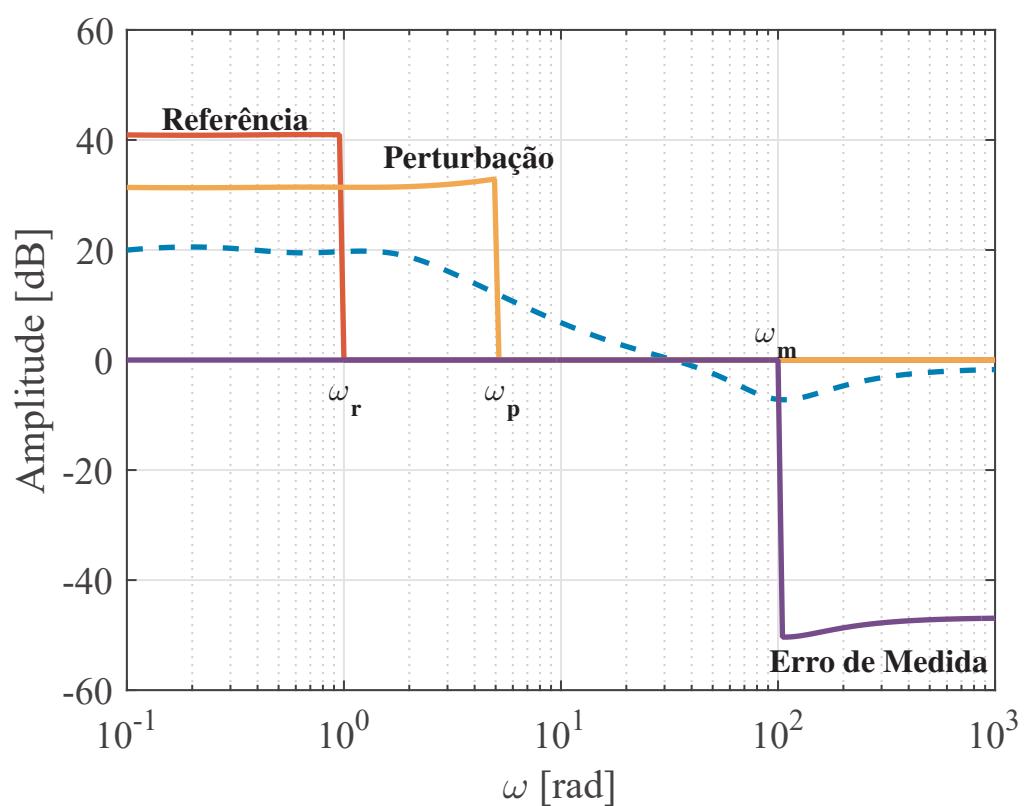


Figura 10.19: Barreiras de robustez.

### 10.4.1 Inserção de Integradores

Inicialmente, considere o integrador na forma *Forward Euler*, como apresentado na Figura 10.20.

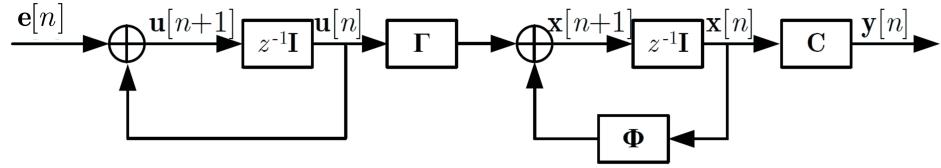


Figura 10.20: Integrador *Forward*.

Tem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] = \Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n] \\ \mathbf{u}[n+1] = \mathbf{e}[n] + \mathbf{u}[n] \end{cases} \quad (10.100)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \mathbf{u}[n+1] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\Phi_{AUG}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{u}[n] \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\Gamma_{AUG}} \mathbf{e}[n] \quad (10.101)$$

$$\mathbf{y}[n] = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{AUG}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{u}[n] \end{bmatrix} \quad (10.102)$$

Observa-se que  $\det(\mathbf{C}_{AUG}\Gamma_{AUG}) = 0$ . Ou seja, não há a convergência para malha objetivo.

Considere agora o integrador na forma *Backward* apresentado na Figura 10.21.

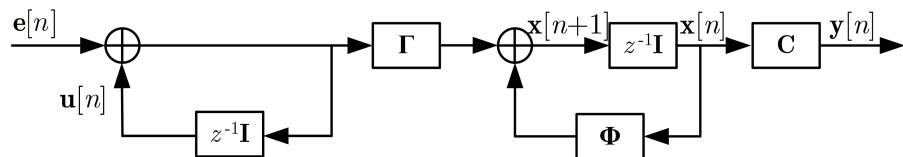


Figura 10.21: Integrador *Backward*.

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] = \Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n+1] \\ \mathbf{u}[n+1] = \mathbf{e}[n] + \mathbf{u}[n] \end{cases} \quad (10.103)$$

Note que:

$$\mathbf{x}[n+1] = \Phi \mathbf{x}[n] + \Gamma \mathbf{e}[n] + \Gamma \mathbf{u}[n] \quad (10.104)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n+1] \\ \mathbf{u}[n+1] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\Phi_{AUG}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{u}[n] \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\Gamma_{AUG}} \mathbf{e}[n] \quad (10.105)$$

$$\mathbf{y}[n] = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{AUG}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{u}[n] \end{bmatrix} \quad (10.106)$$

Observe agora que a condição  $\det(\mathbf{C}_{AUG}\Gamma_{AUG}) \neq 0$  é satisfeita.

# 11

## Aspectos Práticos

### 11.1 Estruturas de Representação de Sistemas Discretos

Equações de diferenças podem ser representadas num diagrama de blocos com símbolos para soma entre duas sequências, multiplicação de uma sequência por uma constante e atraso unitário. Considere, por exemplo, a seguinte equação de diferenças:

$$u[n] = e[n] + be[n - 1] + au[n - 1] \quad (11.1)$$

Graficamente, pode-se ter uma representação como da Figura 11.1

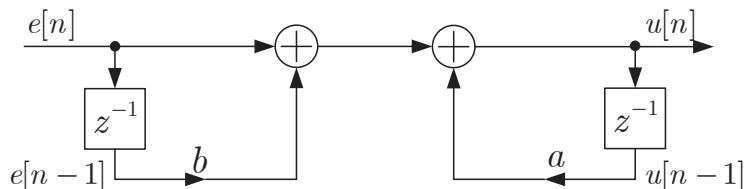


Figura 11.1: Representação gráfica da equação de diferenças em (11.1).

Considere um sistema em tempo discreto de terceira ordem com a seguinte função de transferência

$$C(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (11.2)$$

Há várias formas de representação em diagrama de blocos para este sistema. Algumas destas formas serão vistas a seguir:

#### Forma Direta I

Note que  $C(z)$  pode ser escrita como  $C_1(z)C_2(z)$ , onde,

$$C_1(z) = \frac{W(z)}{E(z)} = B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}, \quad (11.3)$$

e

$$C_2(z) = \frac{U(z)}{W(z)} = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}. \quad (11.4)$$

Tem-se, portanto, a representação da Figura 11.2. A equação de diferenças é dada por

$$u[n] = -a_1 u[n-1] - a_2 u[n-2] - a_3 u[n-3] + b_0 e[n] + b_1 e[n-1] + b_2 e[n-2] + b_3 e[n-3] \quad (11.5)$$

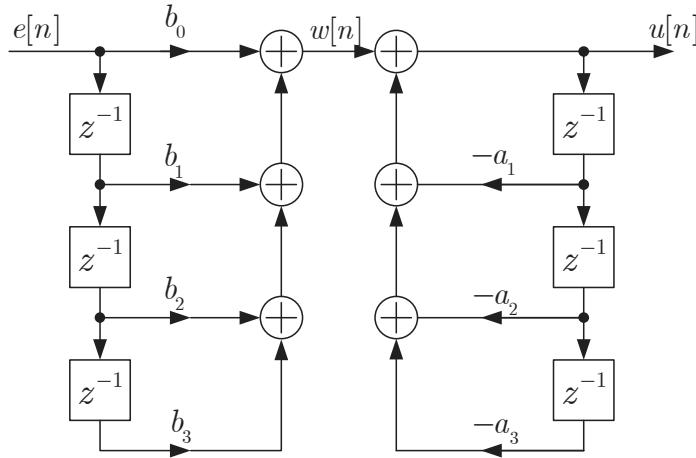


Figura 11.2: Forma Direta I de representação do sistema da Equação 11.2.

## Forma Direta II

O Exemplo a seguir será utilizado para derivar a Forma Direta II.

**Exemplo 11.1:** Mostre que as formas de representação da Figura 11.3 (a) e (b) são equivalentes.

**Solução:** Como já visto, para a Figura 11.3 (a) tem-se

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Por outro lado, analisando o diagrama da Figura 11.3 (b), pode-se concluir que

$$\begin{cases} u[n] = b_0 v[n] + b_1 v[n-1] \\ v[n] = e[n] - a_1 v[n-1] \end{cases} \leftarrow \begin{cases} U(z) = b_0 V(z) + b_1 z^{-1} V(z) \\ V(z) = E(z) - a_1 z^{-1} V(z) \end{cases}$$

Portanto,

$$V(z) = \frac{E(z)}{1 + a_1 z^{-1}},$$

e

$$U(z) = b_0 \frac{E(z)}{1 + a_1 z^{-1}} + b_1 z^{-1} \frac{E(z)}{1 + a_1 z^{-1}} \Rightarrow C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

Logo, os sistemas são equivalentes.

Expandindo o resultado obtido no Exemplo 11.1, o sistema da Equação (11.2) pode ser representado conforme ilustrado na Figura 11.4. Essa é a Forma Direta II. Tal forma é canônica, ou seja, o número de atrasos na representação é igual à ordem do sistema. A equação de diferenças é dada por:

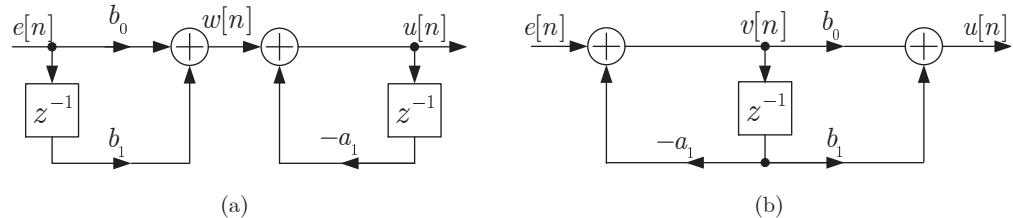


Figura 11.3: Sistemas referentes ao Exemplo 11.1.

$$\begin{aligned}
 v[n] &= e[n] - a_1 v[n-1] - a_2 v[n-2] - a_3 v[n-3] \\
 u[n] &= b_0 v[n] + b_1 v[n-1] + b_2 v[n-2] + b_3 v[n-3]
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

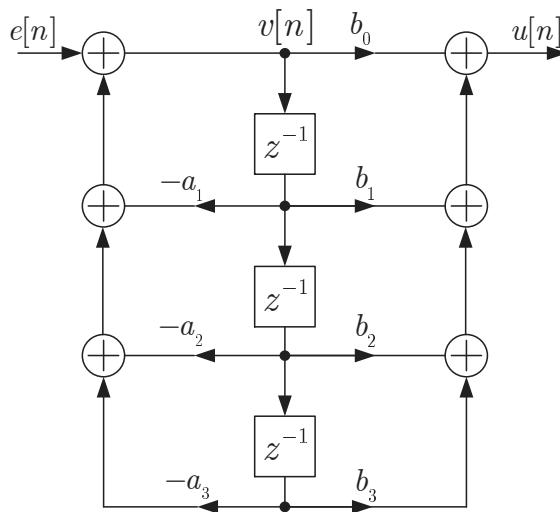


Figura 11.4: Forma Direta II de representação do sistema da Equação 11.2.

A forma direta II, por utilizar um mínimo número de atrasos, economiza memória.

Em relação à precisão na implementação digital há, basicamente, três fontes de erro [Ogata 1995]:

- Erros devido à quantização das variáveis de entrada. Suponha um conversor A/D de  $N$  bits e resolução (nível de quantização) igual a  $Q$ . O erro de quantização pode ser modelado como uma variável aleatória uniformemente distribuída entre  $-Q/2$  a  $+Q/2$ , conforme apresentado na Figura 11.5.

A variância do ruído é dada por

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{Q} \int_{-Q/2}^{Q/2} [e(t) - \bar{e}(t)]^2 dt = \frac{Q^2}{12} \tag{11.7}$$

- Erros devido ao acúmulo de arredondamentos em operações aritméticas.

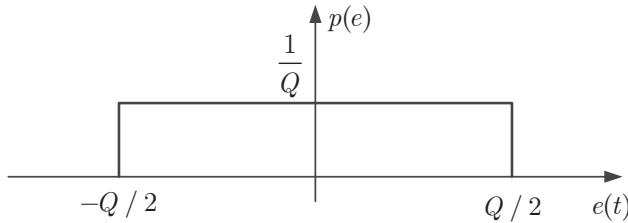


Figura 11.5: Função densidade de probabilidade do ruído de quantização.

- Erros devido à quantização dos coeficientes  $a_i$  e  $b_i$ . Tal erro torna-se maior conforme a ordem do sistema aumenta. Essa é uma enorme desvantagem das formas de implementação diretas I e II. Pequenos erros nos coeficientes podem causar enormes erros na posição dos polos e zeros. Tal problema é ainda agravado para elevadas taxas de amostragem.

Para sistemas de ordens elevadas, algumas formas alternativas podem ser utilizadas para reduzir a sensibilidade a erros de quantização dos coeficientes do filtro, tais como a forma cascata e forma paralela.

### Forma Cascata

Os polinômios do numerador e do denominador de uma função de transferência podem ser escritos como o produto de polinômios de menor ordem, tal que

$$C(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1(z)B_2(z)B_3(z)}{A_1(z)A_2(z)A_3(z)}. \quad (11.8)$$

Usualmente, os polinômios são fatorados em termos de primeira ordem e termos de segunda ordem, ou seja,

$$C(z) = K \frac{\prod_{m=1}^{M_1} (1 - b_{1,m}z^{-1}) \prod_{m=1}^{M_2} (1 - b_{2,m}z^{-1})(1 - b_{2,m}^*z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N_1} (1 - a_{1,n}z^{-1}) \prod_{n=1}^{N_2} (1 - a_{2,n}z^{-1})(1 - a_{2,n}^*z^{-1})}, \quad (11.9)$$

onde  $K$  é uma constante,  $M = M_1 + 2M_2$  é o grau do numerador e  $N = N_1 + 2N_2$  é o grau do denominador. Note que, fatorados desta forma, os polinômios representam a distribuição mais geral de polos e zeros. As Equações (11.8) e (11.9) sugerem representações em cascata para uma função de transferência. Há uma certa liberdade em escolher a composição dos subsistemas a serem cascateados.

Exemplo 11.2: [Mitra 2005] Realização em cascata: Considere o sistema de terceira ordem dado por:

$$C(z) = \frac{0,44z^{-1} + 0,362z^{-2} + 0,02z^{-3}}{1 + 0,4z^{-1} + 0,18z^{-2} - 0,2z^{-3}}$$

Obtenha uma realização em cascata de um sistema de primeira ordem com outro de segunda ordem.

**Solução:** tal sistema pode ser fatorado como

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{(0,44 + 0,362z^{-1} + 0,02z^{-2}) z^{-1}}{0,2(z^{-1} - 2,5)(z^{-2} + 1,6z^{-1} + 2)} \\ &= \frac{5(0,44 + 0,362z^{-1} + 0,02z^{-2}) z^{-1}}{2,5(0,4z^{-1} - 1)2(0,5z^{-2} + 0,8z^{-1} + 1)} \\ &= \frac{(0,44 + 0,362z^{-1} + 0,02z^{-2}) z^{-1}}{(0,4z^{-1} - 1)(0,5z^{-2} + 0,8z^{-1} + 1)} \end{aligned}$$

A Figura 11.6 apresenta a forma gráfica da realização em cascata. As equações de diferenças são:

$$v_1[n] = e[n] + 0,4v_1[n - 1], \quad u_1[n] = v_1[n - 1]$$

$$v_2[n] = u_1[n] - 0,8v_2[n - 1] - 0,5v_2[n - 2]$$

$$u[n] = 0,44v_2[n] + 0,362v_2[n - 1] + 0,02v_2[n - 2]$$

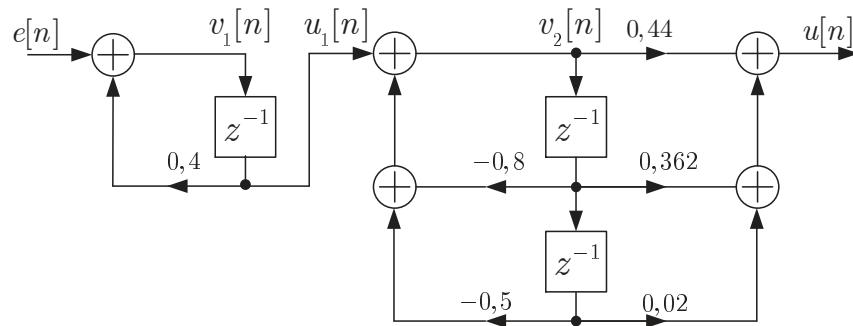


Figura 11.6: Realização em cascata do Exemplo 11.2.

### Forma Paralela

A estrutura de representação paralela é obtida efetuando-se a expansão em frações parciais de funções de transferência. O Exemplo 11.3 apresenta este procedimento.

Exemplo 11.3: [Mitra 2005] Realização paralela: A função de transferência do Exemplo 11.2 pode ser expandida como (mostre!):

$$C(z) = \frac{0,24z^{-1}}{1 - 0,4z^{-1}} + \frac{0,2z^{-1} + 0,25z^{-2}}{1 + 0,8z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

A Figura 11.7 apresenta a forma gráfica de representação em paralelo do exemplo em questão. O sistema pode ser implementado pelas seguintes equações de diferenças.

$$v_1[n] = e[n] + 0,4v_1[n - 1]$$

$$u_1[n] = 0,24v_1[n - 1]$$

$$v_2[n] = e[n] - 0,8v_2[n - 1] - 0,5v_2[n - 2]$$

$$u_2[n] = 0,2v_2[n - 1] + 0,25v_2[n - 2]$$

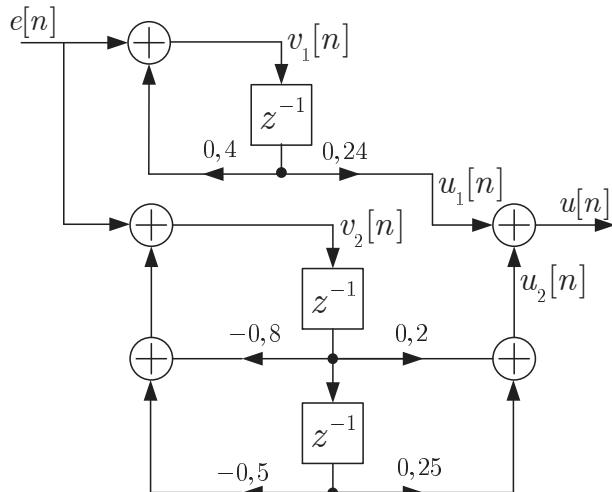


Figura 11.7: Realização em paralelo do Exemplo 11.3.

Na referência [Ingle e Proakis 2012] algumas funções foram desenvolvidas para converter de uma forma de implementação para outra. O exemplo a seguir utiliza algumas dessas funções para ilustrar a utilização.

Exemplo 11.4: [Ingle e Proakis 2012] Considere um controlador digital dado pela seguinte equação de diferenças:

$$16u(n) + 12u(n-1) + 2u(n-2) - 4u(n-3) - u(n-4) = \\ e(n) - 3e(n-1) + 11e(n-2) - 27e(n-3) + 18e(n-4) \quad (11.10)$$

Este sistema está na forma direta, como representado no diagrama da Figura 11.8. Para obter a forma cascata, utiliza-se:

```
b = [1 -3 11 -27 18]./16; a = [16 12 2 -4 -1]./16;
[b0,B,A]=dir2cas(b,a)
```

Os seguintes resultados são obtidos.

```
b0 = 0.0625
B =
1.0000    0.0000    9.0000
1.0000   -3.0000    2.0000
A =
1.0000    1.0000    0.5000
1.0000   -0.2500   -0.1250
```

O diagrama equivalente é apresentado na Figura 11.9. Para obter a forma paralela, utiliza-se:

```
[b0,B,A]=dir2par(b,a)
```

Os seguintes resultados são obtidos.

```
b0 = -18
B =
-10.0500   -3.9500
28.1125  -13.3625
A =
1.0000    1.0000    0.5000
1.0000   -0.2500   -0.1250
```

O diagrama equivalente é apresentado na Figura 11.10.

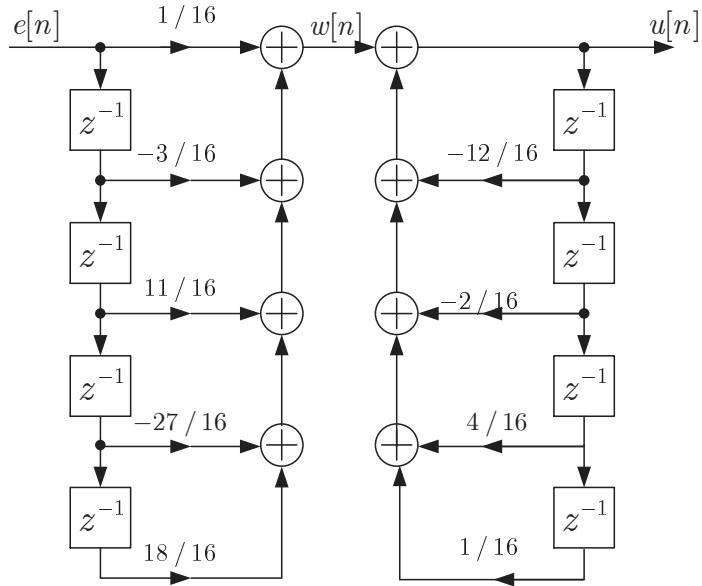


Figura 11.8: Realização na forma direta I do Exemplo 11.6.

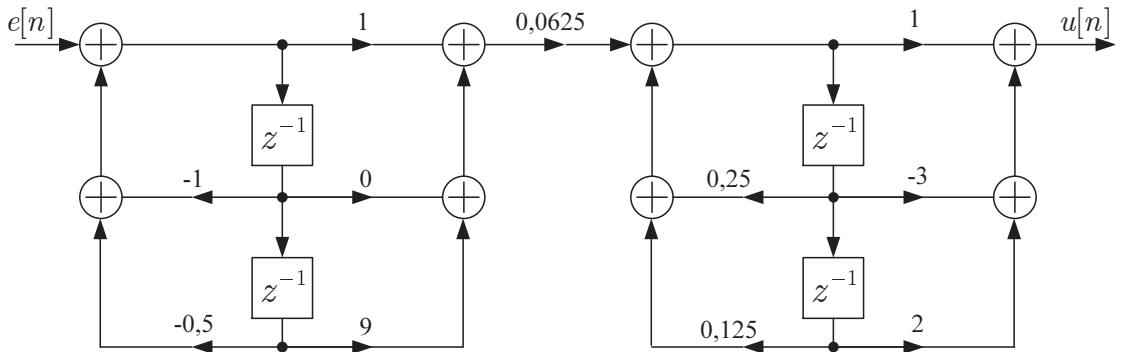


Figura 11.9: Realização na forma cascata do Exemplo 11.6.

**Exemplo 11.5:** Considere uma função de transferência projetada para  $f_s = 100\text{Hz}$ , tal que

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5}}$$

com,  $b_0 = 8,356567981869580$ ;  $b_1 = -23,525378773039559$ ;  $b_2 = 13,706180520187676$ ;  $b_3 = 16,633127576543266$ ;  $b_4 = -22,062736524782242$ ;  $b_5 = 6,892263173771306$ ,  $a_1 = -4,698762974150090$ ;  $a_2 = 8,829044242844596$ ,  $a_3 = -8,292809599331063$ ,  $a_4 = 3,893576728529705$ ,  $a_5 = -0,731048158347647$ .

Para fins de implementação, considere que os coeficientes sejam arredondados para 5 dígitos decimais. Verifique o efeito da quantização dos coeficientes nas formas de implementação direta e cascata.

Esse problema será resolvido no MATLAB.

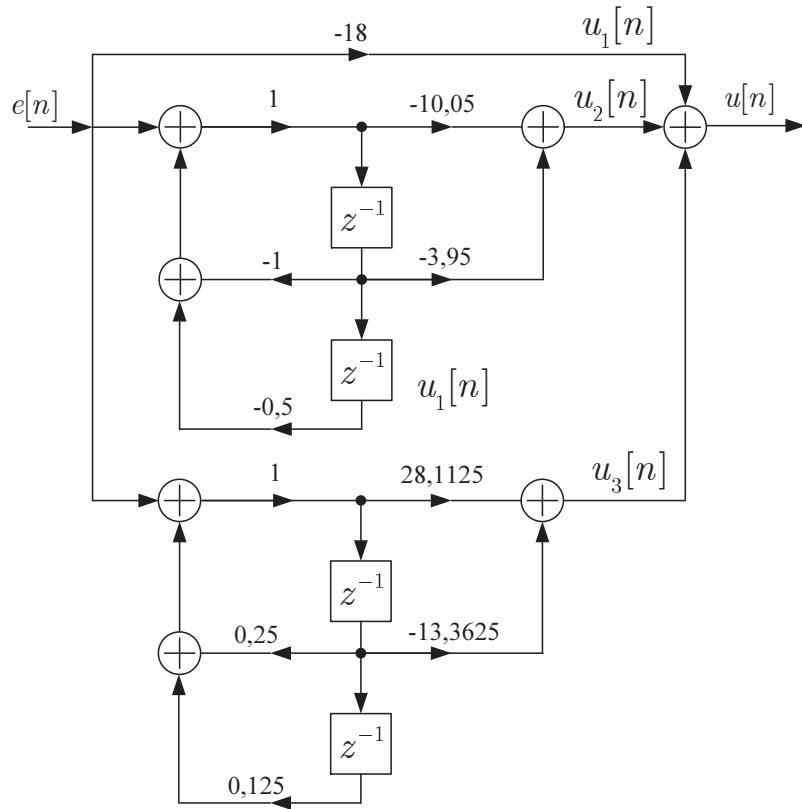


Figura 11.10: Realização na forma paralela do Exemplo 11.6.

```

clear all; close all; clc;
Ts = 1/100; load G_D;
G_D_num = G_D.num{ : };
G_D_den = G_D.den{ : };
pol = pole(G_D);
% Forma direta com arredondamento
G_D_1_num = round(1e5*G_D_num)/1e5;
G_D_1_den = round(1e5*G_D_den)/1e5;
G_D_1 = tf(G_D_1_num,G_D_1_den,Ts);
pol_1 = pole(G_D_1);
% Forma cascata com arredondamento
[b0_2_,B_2_,A_2_] = dir2cas(G_D_num,G_D_den);
b0_2 = round(1e5*b0_2_)/1e5;
B_2 = round(1e5*B_2_)/1e5;
A_2 = round(1e5*A_2_)/1e5;
pol_2 = [pole(minreal(tf(B_2(1,:),A_2(1,:),Ts)));...
pole(minreal(tf(B_2(2,:),A_2(2,:),Ts)));...
pole(b0_2*minreal(tf(B_2(3,:),A_2(3,:),Ts)))];
```

A posição dos polos do sistema sem arredondamento é dada por:

```
pol =  
0.990049750907856  
0.955416506207677  
0.932367143403850  
0.916167671493741  
0.904761902136969
```

Para o sistema na forma direta com arredondamento, tem-se:

```
pol_1 =  
0.99999999919600 + 0.000000000000000i  
0.957659562075216 + 0.037690578779741i  
0.957659562075216 - 0.037690578779741i  
0.891720437964983 + 0.026904046338940i  
0.891720437964983 - 0.026904046338940i
```

Por outro lado, na forma cascata com arredondamento, tem-se:

```
pol_2 =  
0.904760000000000  
0.932376117370627  
0.916153882629373  
0.990152813439120  
0.955317186560880
```

## 11.2 Exemplo de Pseudo Código

A seguir é apresentado um simples pseudo código para uma equação de diferenças em um hardware digital. Alguns aspectos devem ser antes mencionados.

- Em hardwares digitais há registradores para configuração da taxa de amostragem dos conversores A/D.
- No exemplo a seguir, assume-se que a taxa do A/D é bem elevada (ex. 20 kHz), mas deseja-se um período de amostragem para o sistema menor do que isso (ex. 50 Hz).
- Se a frequência de amostragem desejada é bem próxima da máxima taxa do conversor A/D e o tempo de processamento do código ser um “gargalo” na implementação, recomenda-se utilizar um hardware com RTOS (*Real Time Operation System*), onde pode-se criar tarefas múltiplas com prioridades diferentes.

☞ **Exemplo 11.6:** Considere um controlador PI digital dado pela seguinte função de transferência:

$$C(z) = \frac{12,777779z - 12,22221}{z - 1},$$

com período de amostragem igual a  $T_s = 0,02$  segundos. Escreva um pseudo código para esse controlador.

```
% flag deve ser variável global
int flag = 0;
% habilita interrupção de timer
timer tempo;
% Rotina de interrupção
habilita_loop( )
{
flag = 1;
}
% Rotina principal
main()
{
float u = 0, u_ant = 0, e = 0, e_ant = 0;
float y = 0, r = 1; %r é o setpoint igual a 1
float Ts = 0.02; %período de amostragem
% configura rotina de interrupção de timer. O código é desviado para
% habilita_loop() a cada Ts segundos
tempo.attach(&habilita_loop, Ts);
while(true)
{
if (flag == 1)
{
y = read_ADC(ch0); %Lê canal 0 do A/D
e = r - y; %sinal de erro
u = u_ant + 12.777779*e - 12.22221*e_ant;
% Se a saída for sinal analógico
write_DAC(ch0,u); %Escreve no canal 0 do D/A
u_ant = u; e_ant = e; %Atualiza variáveis
flag = 0;
}
}
}
```

Se a saída for do tipo PWM, ao invés da função que escreve o valor na saída do conversor D/A, utiliza-se a função para escrever na saída PWM.

```
    . . .
{
if (flag == 1)
{
    y = read_ADC(ch0); % Lê canal 0 do A/D
    e = r - y; % sinal de erro
    u = u_ant + 12.777779*e - 12.22221*e_ant;
    % Saída PWM foi previamente configurada para o pino PTA1.
    % Nesse caso, u deve ser sinal entre 0 e 1.
    PWMout(PTA1,u); % saída PWM com duty-cycle u
    u_ant = u; e_ant = e; % Atualiza variáveis
    flag = 0;
}
} . . .
```

# A

## Simulação de Sistemas de Controle Digitais no SIMULINK

O MATLAB/SIMULINK será utilizado para simulação de sistemas de controle digitais. Este suplemento explica o procedimento a ser utilizado, com base em um exemplo de aplicação.

Considere o sistema de controle da Figura A.1.

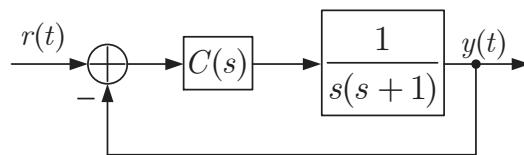


Figura A.1: Sistema de Controle do Exemplo.

Suponha que o controlador  $C(s)$  tenha sido devidamente projetado, vide [Castrucci, Bittar e Sales 2011], resultando na seguinte função de transferência:

$$C(s) = 13,162 \frac{(s+1)}{(s+3,628)} \quad (\text{A.1})$$

Para simular este sistema em tempo contínuo, o seguinte código em Matlab foi utilizado:

```

clear all; close all; clc;
s = tf('s');
G = 1/(s*(s+1)); %G(s)
num_G = G.num{:}; %Colocar no numerador da F.T. da planta
den_G = G.den{:}; %Colocar no denominador da F.T. da planta
C = 13.162*(s+1)/(s+3.628)
num_C = C.num{:}; %Colocar no numerador da F.T. do controlador
den_C = C.den{:}; %Colocar no denominador da F.T. do controlador
t_run = 6; % colocar no simulation stop time do SIMULINK
t_step = 1; % colocar no parâmetro step time do bloco step
sim('controle_01'); %executa o arquivo controle_01 do SIMULINK
subplot(121); plot(tout, y,'k'); %gráfico de saída
xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
subplot(122); plot(tout, u,'k'); %gráfico do sinal de controle
xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
  
```

O arquivo `controle_01.slx` do SIMULINK é apresentado na Figura A.2:

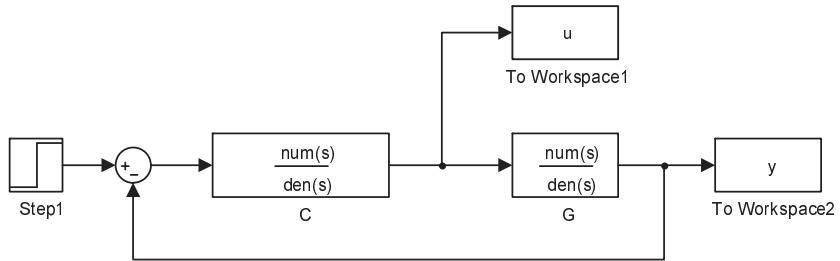


Figura A.2: Diagrama da simulação em tempo contínuo.

O resultado obtido está apresentado na Figura A.3:

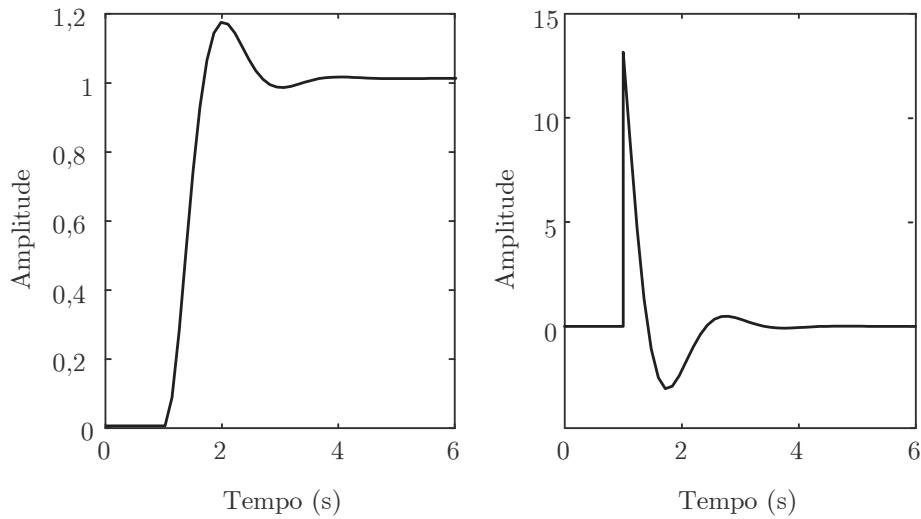


Figura A.3: Resultado da simulação em tempo contínuo (saída e sinal de controle).

Para a simulação do sistema de controle digital, inicialmente será considerada a abordagem utilizando uma função de transferência discreta no SIMULINK. Para discretização do controlador, utilizou-se o método casamento polo zero, com período de amostragem igual a 0,2 segundos. Antes de discretizar o controlador, uma aproximação Padé de primeira ordem foi incluída na planta para representar o efeito do atraso de  $T_s/2$  gerado pelo ZOH (vide [Castrucci, Bittar e Sales 2011]). A função de transferência discreta obtida é dada por:

$$C(z) = 10,462 \frac{(z - 0,8187)}{(z - 0,3205)} \quad (\text{A.2})$$

O seguinte código em Matlab foi utilizado:

```

clear all; close all; clc;
Ts = 0.2; %setar isso nos blocos zoh e na F.T. discreta do controlador
s = tf('s');
G = 1/(s*(s+1)); %G(s)
num_G = G.num{:}; %Colocar no numerador da F.T. da planta
den_G = G.den{:}; %Colocar no denominador da F.T. da planta

```

```

C = 15.88*(s+1)/(s+5.69); %C(s) foi ajustado para considerar o efeito do ZOH
C_d = c2d(C,Ts,'matched'); %Equiv. discreto
num_C_d = C_d.num{:}; %Colocar no numerador da F.T. do controlador digital
den_C_d = C_d.den{:}; %Colocar no denominador da F.T. do controlador digital
t_run = 6; % colocar no simulation stop time do SIMULINK
t_step = 1; % colocar no parâmetro step time do bloco step
sim('controle_02'); %executa o arquivo controle_01 do SIMULINK
subplot(121); plot(tout, y,'k'); %gráfico de saída
xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude');
n = 0:Ts:(length(u)-1); %vetor de tempo discreto
subplot(122); stairs(n, u,'k'); %gráfico do sinal de controle
xlabel('Tempo (nT_s)'); ylabel('Amplitude');

```

O arquivo `controle_02.slx` do SIMULINK é apresentado na Figura A.4:

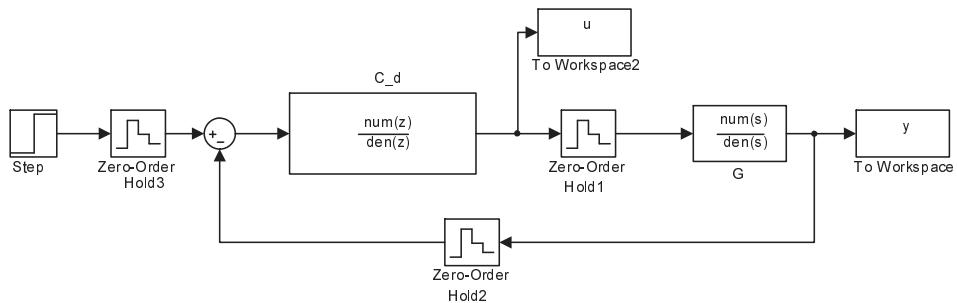


Figura A.4: Diagrama da simulação em tempo discreto.

O resultado obtido está apresentado na Figura A.5:

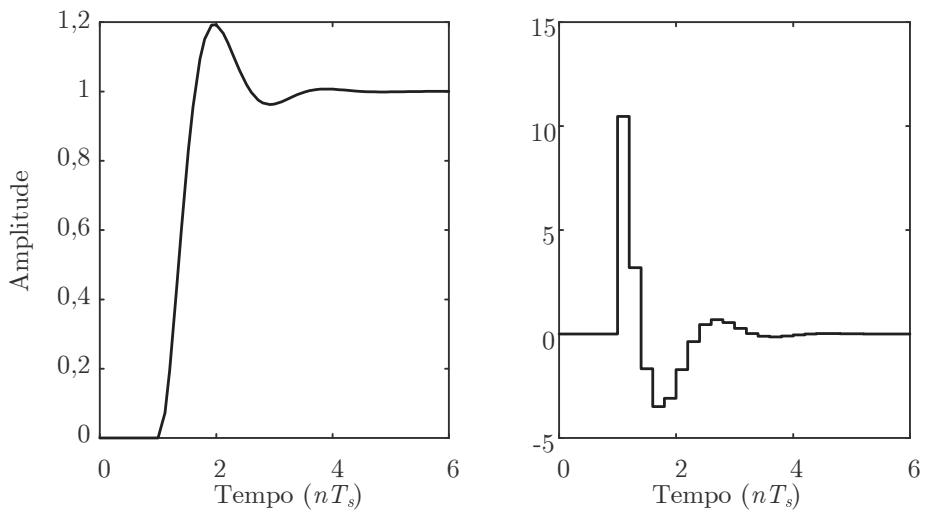


Figura A.5: Resultado da simulação em tempo discreto (saída e sinal de controle).

A seguir será apresentada a metodologia adotada no curso para a simulação de sistemas de controle digitais. A ideia consiste em programar o bloco do controlador digital utilizando a equação de diferenças que descreve sua dinâmica. Nota-se que para o controlador digital considerado,

$$u[n] = 0,3205u[n - 1] + 10,462e[n] - 8,566e[n - 1] \quad (\text{A.3})$$

A equação de diferenças que representa o controlador será implementada em uma estrutura denominada Matlab function, conforme Figura A.6 (diagrama `controle_03.slx` do SIMULINK).

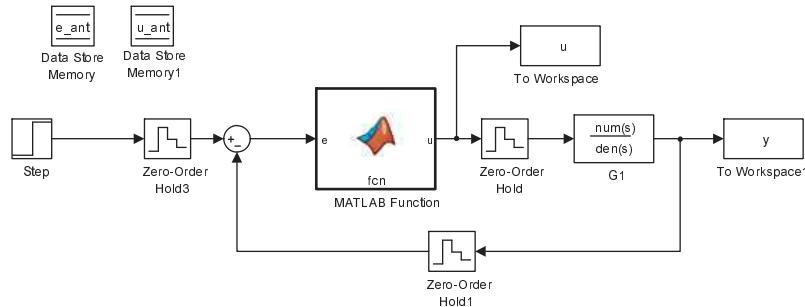


Figura A.6: Diagrama da simulação em tempo discreto - método 2.

Ao clicar duplamente sobre bloco, conforme apresentado na Figura A.7, abre-se o arquivo para edição da função, exatamente como uma função qualquer do MATLAB, permitindo definir mais de uma entrada e mais de uma saída, caso necessário.

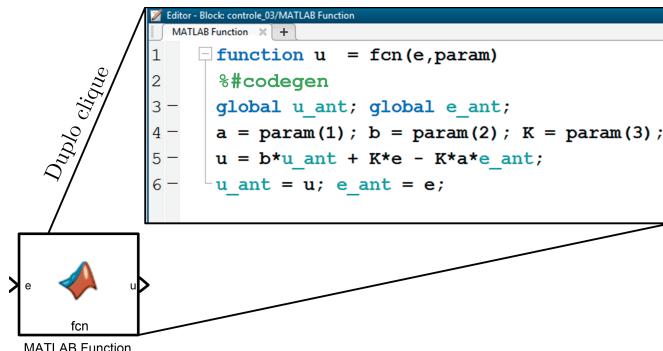


Figura A.7: Acesso ao código do bloco Matlab function.

Uma nova variável incluída na chamada de uma função dentro do bloco Matlab function será inicialmente configurada como do tipo input. Por outro lado, algumas vezes, o usuário desejará passar constantes para a função a partir, por exemplo, de variáveis contidas no espaço de trabalho do MATLAB. Para que isso seja possível, alguns passos de configuração são necessários:

- Defina a variável que deseja passar para a função na sua chamada;
- Abra o editor “Edit Data/Ports”.
- Na opção “Update method”, defina “Discrete” e coloque o período de amostragem definido no projeto.
- Selecione a opção “Parameter” no campo “Scope” e elimine a seleção “Tunable” conforme a Figura A.8:

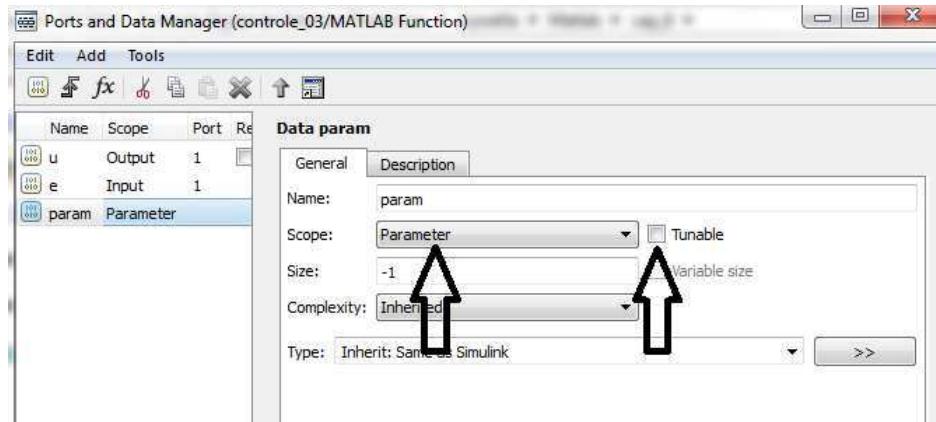


Figura A.8: Seleção do tipo de entrada da Matlab function como parâmetro externo.

A variável `param` agora é, na realidade, uma constante cujo conteúdo está definido no espaço de trabalho do MATLAB.

Note ainda que no conteúdo da Matlab function (Figura A.7) o sinal de erro e o sinal de controle são salvos nas variáveis `e_ant` e `u_ant`, para serem utilizados na próxima iteração do algoritmo. Para fazer isso dentro da Matlab function, o seguinte procedimento deve ser considerado:

- Defina a(s) variável(is) como global(is) dentro da Matlab function;
- Abra novamente o editor “Edit Data/Ports”. Clique em “Add data” (Figura A.9), defina o nome da variável como o mesmo nome da variável global definida no código da função (Figura A.10).
- Selecione a opção “Data Store Memory” no campo Scope Figura (Figura A.10).
- Repita o procedimento para as demais variáveis globais utilizadas para armazenar um dado valor.

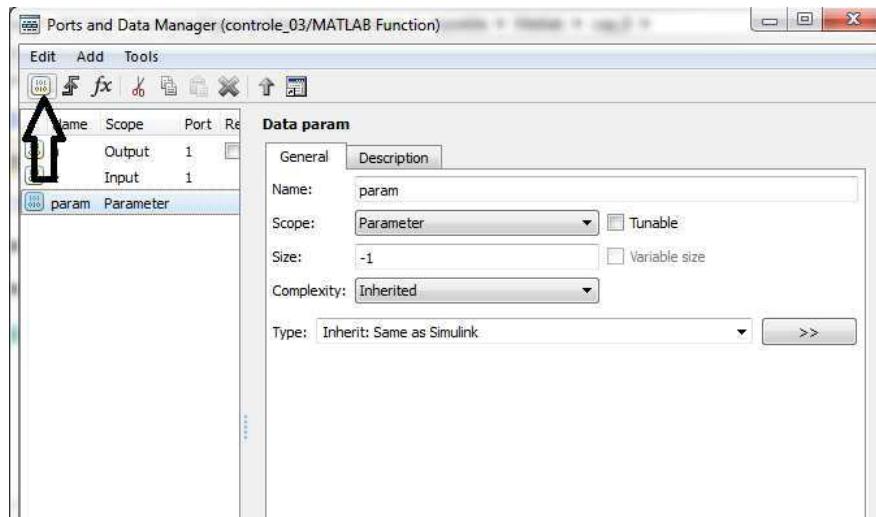


Figura A.9: Inserção de um novo dado para a Matlab function.

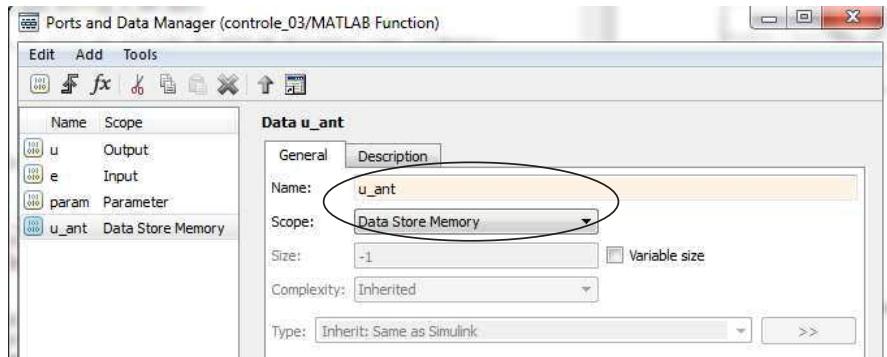


Figura A.10: Seleção do tipo de dado da Matlab function como elemento armazenador de memória.

Para finalizar, no diagrama do Simulink deve-se adicionar um bloco “Data Store Memory” para cada variável que será armazenada. Ao clicar duplamente no bloco, na aba “main” deve-se definir o nome da variável a ser armazenada (mesmo nome definido na Matlab function). Na aba “Signal Attributes” deve-se fazer a seguinte configuração da Figura A.11:

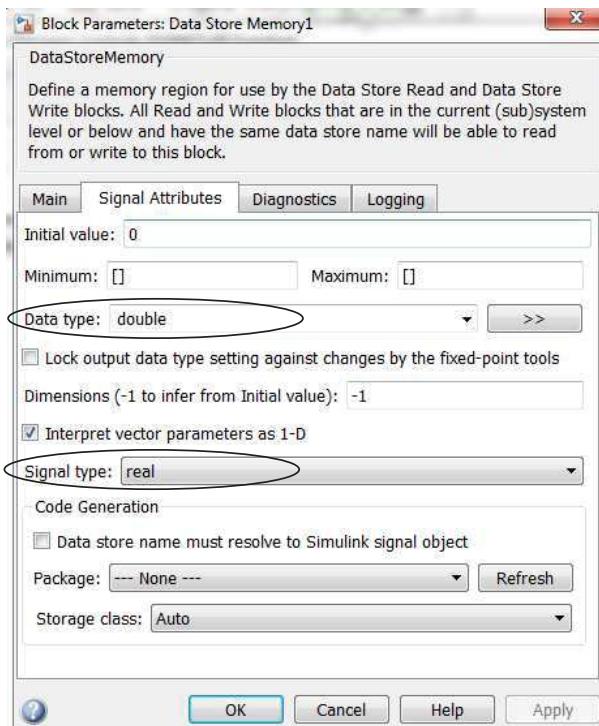


Figura A.11: Configuração dos atributos de sinais do “Data Store Memory”.

Na aba “Diagnosticas”, desabilite todos os warnings, como mostrado na Figura A.12.

Com isso, a simulação é efetuada diretamente com a equação de diferenças. Para efetuar a simulação, o seguinte *script* foi desenvolvido:

```
clear all; close all; clc;
Ts = 0.2; %setar isso nos blocos zoh e na F.T. discreta do controlador
s = tf('s');
```

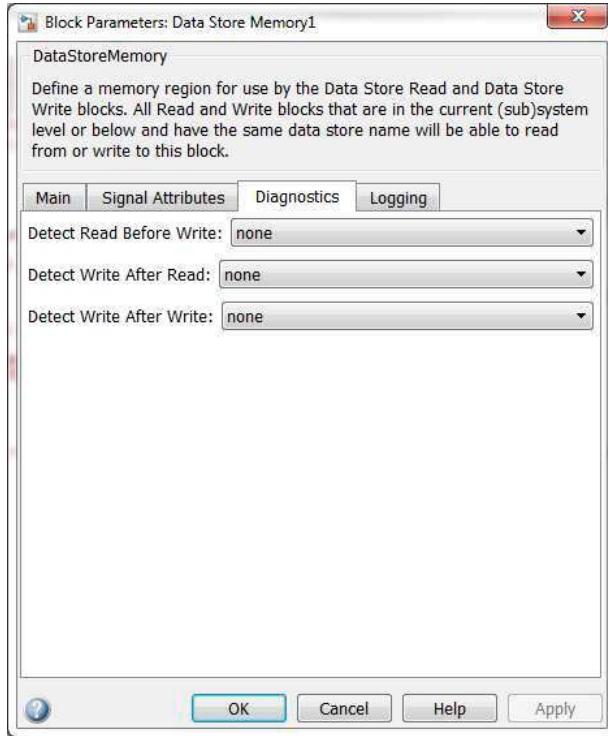


Figura A.12: Desabilitação dos alertas do bloco “Data Store Memory”.

```

G = 1/(s*(s+1)); %G(s)
num_G = G.num{:}; %Colocar no numerador da F.T. da planta
den_G = G.den{:}; %Colocar no denominador da F.T. da planta
C = 15.88*(s+1)/(s+5.69); %C(s) foi ajustado para considerar o efeito do ZOH
C_d = zpk(c2d(C,Ts,'matched'));
a = C_d.z{:}; % Captura o zero da F.T. discreta do controlador
b = C_d.p{:}; % Captura o polo da F.T. discreta do controlador
K = C_d.k; % Captura o ganho da F.T. discreta do controlador
param = [a, b, K];
t_run = 6; % colocar no simulation stop time do SIMULINK
t_step = 1; % colocar no parâmetro step time do bloco step
sim('controle_03'); %executa o arquivo controle_01 do SIMULINK
subplot(121); plot(tout, y,'k'); %gráfico de saída
xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitide');
n = 0:Ts:Ts*(length(u)-1); %vetor de tempo discreto
subplot(122); stairs(n, u,'k'); %gráfico do sinal de controle
xlabel('Tempo (nT_s)'); ylabel('Amplitide');

```

O resultado obtido é idêntico ao da Figura A.5.

## Referências Bibliográficas

- [Aström e Wittenmark 1997]ASTRÖM, K.; WITTENMARK, B. *Computer-controlled Systems: Theory and Design*. 3rd.. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1997.
- [Astrom, Hagander e Sternby 1980]ASTROM, K. J.; HAGANDER, P.; STERNBY, J. Zeros of sampled systems. In: *19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*. [S.l.: s.n.], 1980. p. 1077–1081.
- [Castrucci, Bittar e Sales 2011]CASTRUCCI, P. L.; BITTAR, A.; SALES, R. M. *Controle Automático*. 1a. ed.. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2011.
- [da Cruz 1996]da Cruz, J. J. *Controle Robusto Multivariável*. 1a. ed.. ed. São Paulo, SP: EDUSP, 1996.
- [Doyle 1978]DOYLE, J. Guaranteed margins for lqg regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 4, p. 756–757, Aug 1978.
- [Fadali 2013]FADALI, A. V. M. S. *Digital Control Engineering – Analysis and Design*. 2nd ed.. ed. Waltham, MA, USA: Elsevier Academic Press, 2013.
- [Franklin, Powell e Emami-Naeini 2002]FRANKLIN, G.; POWELL, J.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 4th. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [Franklin, Powell e Workman 2006]FRANKLIN, G.; POWELL, J.; WORKMAN, M. *Digital Control of Dynamic Systems*. 3rd ed. (reprint). ed. [S.l.]: Ellis-Kagle Press, 2006.
- [Goodman 1984]GOODMAN, G. *The LQG/LTR method and discrete-time control systems*. Dissertação (Mestrado) — Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Mechanical Engineering., 1984.
- [Gopinath 1971]GOPINATH, B. On the control of linear multiple input-output systems. *The Bell System Technical Journal*, v. 50, n. 3, p. 1063–1081, March 1971.

- [Hagiwara, Yuasa e Araki 1992] HAGIWARA, T.; YUASA, T.; ARAKI, M. Limiting properties of the zeros of sampled-data systems with zero and first-order holds. In: *31st IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 1949–1954 vol.2.
- [Ingle e Proakis 2012] INGLE, V. K.; PROAKIS, J. G. *Digital Signal Processing Using MATLAB*. 3rd ed.. ed. USA: CL Engineering, 2012.
- [Kirk 2004] KIRK, D. E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [Lathi 2005] LATHI, B. P. *Linear Systems and Signals*. 2nd ed. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, 2005.
- [Maciejowski 1985] MACIEJOWSKI, J. Asymptotic recovery for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, n. 6, p. 602–605, Jun 1985.
- [Mitra 2005] MITRA, S. K. *Digital Signal Processing*. [S.l.]: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2005. ISBN 0073048372.
- [Nise 2012] NISE, N. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 6a.. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2012.
- [Ogata 1995] OGATA, K. *Discrete-Time Control Systems*. 2nd ed.. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [Ogata 2003] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 4 ed.. ed. São Paulo, SP: Prentice-Hall, 2003.
- [Oppenheim, Schafer e Buck 1999] OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. *Discrete-time signal processing (2nd ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1999. ISBN 0-13-754920-2.
- [Safonov e Athans 1977] SAFONOV, M.; ATHANS, M. Gain and phase margin for multiloop lqg regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 2, p. 173–179, Apr 1977.
- [Weerasooriya e Phan 1995] WEERASOORIYA, S.; PHAN, D. Discrete-time LQG/LTR design and modeling of a disk drive actuator tracking servo system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 42, n. 3, p. 240–247, Jun 1995.