

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

Simulação dinâmica e validação experimental de técnicas de controle para robôs de arquitetura paralela

Texto apresentado à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo (EPUSP)
como requisito parcial para a qualificação
no Curso de Doutorado em Engenharia
Mecânica.

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Tarcisio A. Hess Coelho

São Paulo
23 de Setembro de 2016

Nome: André Garnier Coutinho

NUSP: 6846085

Curso: Doutorado Direto

Área de concentração: Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação (3151)

Orientador: Professor Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho

Ano de ingresso no PPGEM: 2014

Bolsista: Sim

Agência de fomento: CNPq

Edital/Chamada: Cota Institucional (Demanda Social)

Prazo Máximo para realização do Exame de Qualificação: 17/10/2016

Resumo

Para realizar o projeto de um sistema de controle, é necessário primeiramente de um modelo da planta a ser controlada. O grau de fidelidade do modelo da planta, dentro das condições de operação desejadas do sistema, influi diretamente na performance do sistema em malha fechada que o projeto do controlador pode oferecer. Quanto mais rico for o modelo, mais fácil de atingir requisitos de performance mais elevados (menor tempo de resposta e menor sobressinal, por exemplo) garantindo a estabilidade do sistema.

Utilizando os métodos tradicionais de modelagem de Sistemas Mecânicos Multicorpos, é difícil e trabalhoso de se obter modelos de sistemas complexos, como mecanismos paralelos. Para contornar esse problema, é comum desprezar alguns efeitos de acoplamentos inerciais, simplificando o processo de modelagem. Porém, essa estratégia gera modelos mais pobres, o que irá limitar a performance que o sistema poderá atingir quando for feito o projeto do sistema de controle.

A solução proposta para ser possível aumentar a performance, garantindo a robustez, de um sistema de controle de mecanismos paralelos é a utilização dos novos métodos de modelagem dinâmica desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Prof. Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho, os quais são adequados para incluir todos os efeitos de dinâmica de corpos rígidos, independentemente da complexidade do sistema.

O presente projeto visa desenvolver um algoritmo de modelagem que inclua todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos para realizar a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos (baseado na metodologia de Orsino), desenvolver uma metodologia de projeto de controle robusto para mecanismos paralelos tradicionais e mecanismos com atuação redundante, e realizar simulações e validações experimentais das leis de controle sintetizadas pela metodologia proposta.

1 Introdução

Os mecanismos de arquitetura paralela são amplamente utilizados em simuladores de voo, simuladores automobilísticos, e tarefas de *pick-and-place*. Além disso, também são empregados em sistemas de posicionamento, sistemas de medição, máquinas de usinagem, entre outras tarefas.

Há uma série de vantagens em utilizar mecanismos paralelos no lugar dos tradicionais seriais. Dentre elas podemos citar sua grande capacidade de carga, alta precisão de posicionamento, alta rigidez estrutural, e uma redução significativa na inércia [5, 9, 10, 17]. Outra característica marcante desse tipo de arquitetura são as altas velocidades e acelerações atingidas, as quais superam muito os valores máximos atingidos utilizando arquitetura serial. Grande parte dessas vantagens se devem à possibilidade de instalação de todos os motores na base imóvel do mecanismo. Como desvantagens podemos citar o menor espaço de trabalho e modelo dinâmico muito mais complexo e de difícil obtenção [1, 5].



Figura 1: Robô industrial Adept Quattro

Levando-se em conta esta dificuldade de obtenção e a complexidade inerente do modelo dinâmico, o controle de mecanismos de arquitetura paralela é uma tarefa desafiadora. A utilização de modelos dinâmicos simplificados limita o desempenho do projeto de controladores baseados no modelo. Porém, mesmo na hipótese do modelo dinâmico completo estar disponível, o emprego de técnicas de controle não linear pode acarretar um custo computacional muito elevado [3, 7, 12]. Este paradigma, aliado à falta de estratégias de controle apropriadas para esse tipo de mecanismos, resulta na exploração insatisfatória dos potenciais promissores de tais máquinas, como resposta dinâmica rápida e alta precisão [19]. Além disso, observa-se na literatura a escassez de trabalhos publicados com comprovação experimental de técnicas de controle aplicáveis a mecanismos paralelos [1].

Uma alternativa para a superação desta dificuldade seria a combinação de técnicas de controle não linear robusto (por exemplo, controle por modos deslizantes [12, 13]) com modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, desenvolvidos a partir de novas metodologias de modelagem de sistemas multicorpos [6, 23, 24, 25]. Com esta estratégia, torna-se possível sintetizar leis de controle de alto desempenho e custo computacional mais adequado, viabilizando a exploração do potencial promissor dos mecanismos paralelos.

2 Objetivos

Os principais objetivos do projeto são:

- Desenvolvimento de um algoritmo gerador de modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, de forma implícita. Pretende-se utilizar a metodologia proposta por Orsino et. al. [25] de acoplamento de subsistemas multicorpos.
- Elaboração de uma metodologia de projeto de controlador não linear robusto, de alto desempenho, baseado na técnica de controle por modos deslizantes [12, 13], aplicável a mecanismos de arquitetura paralela. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [17], além da síntese de leis de controle com custo computacional consideravelmente menor do que as tradicionais, que empregam o Controle por Torque Computado [3, 7].
- Realizar a modelagem cinemática e dinâmica dos mecanismos 5R [24] e 2RSU+PPaP [1, 11], utilizando o algoritmo de modelagem desenvolvido.
- Realizar o projeto de um controlador de trajetória para os mecanismos escolhidos, utilizando a metodologia de projeto de controle proposta.
- Realizar simulações dinâmicas das leis de controle sintetizadas.
- Realizar a validação experimental dos controladores projetados nos protótipos dos mecanismos escolhidos, sendo que o protótipo do mecanismo 2RSU+PPaP se encontra no laboratório de mecanismos da EPUSP e o protótipo do pentágono articulado (5R) está sendo desenvolvido por outros alunos orientados pelo Prof. Dr. Tarcisio A. H. Coelho.

É importante ressaltar que os dois primeiros objetivos citados já foram alcançados e que a arquitetura paralela 2RSU+PPaP foi desenvolvida pelo grupo de pesquisa do Prof. Dr. Tarcio Antonio Hess Coelho, havendo ainda poucos estudos na literatura sobre ela. Sendo assim, pode-se afirmar que simulações dinâmicas e validações experimentais de leis de controle não linear robusto neste mecanismo tem caráter inédito.

3 Revisão da literatura

4 Metodologia do projeto

O estágio atual de desenvolvimento do presente projeto ocorre basicamente em três áreas: aplicação do algoritmo de modelagem e simulação para dos mecanismos 5R [24] e 2RSU + PPaP [11], o projeto de controladores não lineares robustos de alto desempenho baseado no modelo dinâmico para os mecanismos citados, e a simulação e validação experimental das leis de controle sintetizadas.

Os trabalhos no âmbito de modelagem e simulação estão sendo desenvolvidos a partir da aplicação do algoritmo de modelagem cinemática e dinâmica de mecanismos paralelos desenvolvido, baseado na utilização dos parâmetros de Denavit-Hartenberg [3, 15, 16] e no método Orsino de acoplamento de subsistemas [25]. Toda modelagem será feita em C++, utilizando uma biblioteca otimizada de cálculo matricial (Armadillo). As simulações da dinâmica direta do mecanismo serão feitas utilizando o método Runge-Kutta de 8ª ordem [29] para solução de sistemas de EDOs, de modo a garantir estabilidade numérica do método, mesmo utilizando leis de controle quase descontínuas.

Os trabalhos na área de projeto de controle serão feitos utilizando a metodologia desenvolvida de projeto de controladores robustos multivariáveis para mecanismos paralelos, baseada no modelo dinâmico do mecanismo a ser controlado e na técnica de controle por modos deslizantes [12, 13].

Os trabalhos no âmbito da validação experimental das leis de controle sintetizadas serão realizados no protótipo do mecanismo 2RSU + PPaP que encontra-se no laboratório de mecanismos e no protótipo do mecanismo 5R que está sendo construído por outros alunos do grupo de pesquisa. A bancada experimental do mecanismo 2RSU + PPaP já está funcional e já estão sendo realizados ensaios de leis de controle de trajetória baseadas apenas no modelo cinemático do mecanismo. Para realização da validação experimental nest bancada, será realizada a identificação dos parâmetros do sistema e suas respectivas incertezas, projeto do controlador baseado nos parâmetros e incertezas identificadas, e implementação das leis de controle e aquisição de dados em ambiente Labview.

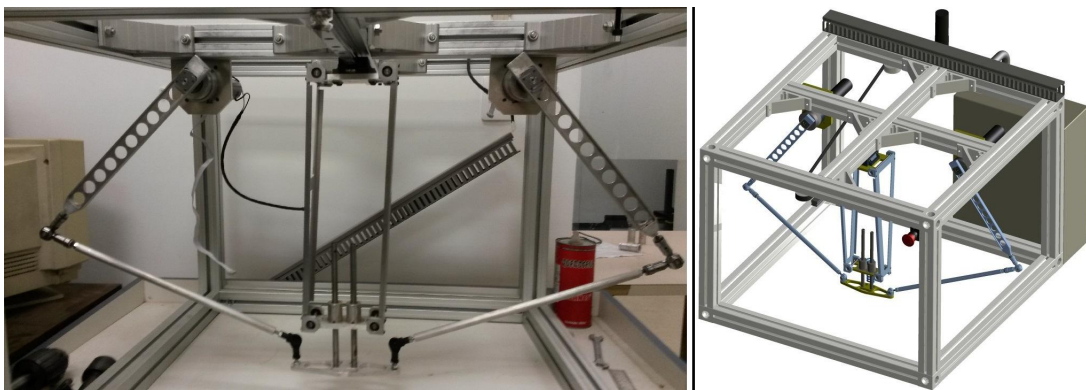


Figura 2: Mecanismo 2RSU + PPaP

5 Síntese de Resultados

Esta seção apresenta uma síntese dos principais resultados teóricos obtidos até o momento.

Convenções de notação

a, b, \dots	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes ou índices
A, B, \dots	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$	Matrizes coluna
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$	Matrizes
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Vetores
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Tensores
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Pontos
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Sistemas de coordenadas
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Corpos rígidos ou referenciais
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Sistemas ou subsistemas mecânicos multicorpos
\underline{a}	Matriz diagonal cuja diagonal é composta pelos parâmetros a_1, a_2, \dots, a_n
$c\theta$	Abreviação de $\cos(\theta)$
d	Operador diferencial
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz coluna cujos elementos são a diagonal de uma matriz quadrada
g	Aceleração gravitacional
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto \mathbf{p} no sistema de coordenadas \mathbf{B} .
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}}$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto \mathbf{p} no sistema de coordenadas \mathbf{B} em coordenadas homogêneas, ou seja: $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} \\ 1 \end{bmatrix}$
$s\theta$	Abreviação de $\sin(\theta)$
$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$	Vetor \mathbf{v} escrito na base do sistema de coordenadas \mathbf{B}
$\mathbf{0}$	Matriz coluna nula ou matriz nula
$\mathbf{0}$	Vetor nulo ou tensor nulo
$\mathbb{1}$	Matriz identidade
$[\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j}$	Matriz de mudança de base, i.e. $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_i} = [\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_j}$

$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j}^H$	Matriz de transformação homogênea, i.e. $[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}_i}^H = [\mathbb{1}]_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j}^H \cdot [\mathbf{p}]_{\mathcal{B}_j}^H$
$\mathbf{1}$	Tensor identidade
$[\cdot]^\top$	Matriz transposta
$[\cdot]^{-1}$	Matriz inversa
$[\cdot]^\dagger$	Matriz pseudo-inversa
$[\emptyset]$	Matriz coluna vazia ou matriz vazia

5.1 Algoritmo para modelagem de mecanismos seriais - Novo

Esta subseção tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo cinemático e dinâmico de mecanismos seriais. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo, são necessários apenas os parametros de Denavit-Hartenberg [3, 15, 16, 27] do mecanismo e as posições dos centros de massa dos ligamentos em relação aos sistemas de coordenadas fixos aos ligamentos.

Seja \mathcal{B} um sistema mecânico serial de ν graus de liberdade. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- \mathcal{N} : referencial inercial.
- $\mathcal{N}, \mathcal{B}_0$: sistema de coordenadas da base, fixo a \mathcal{N} .
- $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, \nu$: i-ésimo ligamento.
- $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, \nu$: sistema de coordenadas solidário a \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{o}_i, i = 0, \dots, \nu$: origem do sistema \mathcal{B}_i .
- $\{\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i\}, i = 0, \dots, \nu$: base ortonormal do sistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{g}_i, i = 1, \dots, \nu$: centro de massa de \mathcal{B}_i .
- \mathbf{x} : ponto no espaço fixo ao efetuador.
- $\boldsymbol{\omega}$: vetor velocidade angular absoluta do efetuador.
- \mathbf{v} : vetor velocidade linear absoluta do efetuador.
- \mathbf{a} : vetor aceleração linear absoluta do efetuador.
- $\boldsymbol{\omega}_i, i = 1, \dots, \nu$: vetor velocidade angular absoluta de \mathcal{B}_i .

- \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, \nu$: vetor velocidade linear absoluta do centro de massa de \mathcal{B}_i .
- \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, \nu$: vetor aceleração linear absoluta do centro de \mathcal{B}_i .
- m_i : massa da barra \mathcal{B}_i .
- \mathbf{I}_i : tensor de inércia da barra \mathcal{B}_i em relação a seu centro de massa.
- q_i , $i = 1, \dots, \nu$: deslocamento relativo (angular ou linear) da i -ésima junta.
- \mathbf{q} : matriz-coluna de ν coordenadas generalizadas independentes. É dada por $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_\nu \end{bmatrix}^\top$.

A) Cinemática de posição

Dados os parâmetros de Denavit-Hartenberg a_i , α_i , d_i e θ_i , com $1 \leq i \leq \nu$, é possível obter as matrizes de transformação homogênea $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1}|\mathcal{B}_i}^H$ a partir da seguinte expressão [27] :

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1}|\mathcal{B}_i}^H = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, \nu \quad (1)$$

Tendo obtido $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1}|\mathcal{B}_i}^H$, é possível obter as transformações homogêneas que relacionam os sistemas solidários aos ligamentos (\mathcal{B}_i) ao sistema da base (\mathcal{N}) pela seguinte expressão recursiva:

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{N}|\mathcal{B}_i}^H = \begin{cases} [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_0|\mathcal{B}_1}^H, & \text{se } i = 1 \\ [\mathbf{1}]_{\mathcal{N}|\mathcal{B}_{i-1}}^H \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1}|\mathcal{B}_i}^H, & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (2)$$

As matrizes $[\mathbf{1}]_{\mathcal{N}|\mathcal{B}_i}^H$ apresentam o seguinte formato:

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{N}|\mathcal{B}_i}^H = \begin{bmatrix} [i]_{\mathcal{N}} & [j]_{\mathcal{N}} & [k]_{\mathcal{N}} & [o]_{\mathcal{N}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, \nu \quad (3)$$

Sendo assim, tendo obtido $[\mathbf{1}]_{\mathcal{N}|\mathcal{B}_i}^H$, automaticamente obtemos $[i]_{\mathcal{N}}$, $[j]_{\mathcal{N}}$, $[k]_{\mathcal{N}}$ e $[o]_{\mathcal{N}}$. Note que também obtemos as coordenadas do efetuador no sistema da base, pois

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{N}} = [o_\nu]_{\mathcal{N}} \quad (4)$$

Além disso, como $[\mathbf{g}_i]_{\mathbf{B}_i}$ são dados de entrada do algoritmo, obtemos as coordenadas dos centros de massa dos ligamentos no sistema da base através da seguinte expressão:

$$[\mathbf{g}_i]_{\mathbf{N}}^{\mathbf{H}} = [\mathbf{1}]_{\mathbf{N}|\mathbf{B}_i}^{\mathbf{H}} \cdot [\mathbf{g}_i]_{\mathbf{B}_i}^{\mathbf{H}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (5)$$

B1) Cinemática de velocidades lineares

A posição do efetuador em relação ao sistema base é função dos deslocamentos relativos das juntas, ou seja:

$$[\mathbf{x}]_{\mathbf{N}} = \mathbf{x}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

Derivando no tempo, obtemos:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{N}} = \frac{d}{dt} [\mathbf{x}]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_v(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{vi}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_i \quad (7)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{vi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (8)$$

$$\mathbb{J}_v(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v1}(\mathbf{q}) & \dots & \mathbb{J}_{v\nu}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Analisando a equação (7), pode-se observar que o produto $\mathbb{J}_{vi}\dot{q}_i$ representa a contribuição da i -ésima junta na velocidade do efetuador, com todas as outras juntas paradas [27]. Note que esta constatação está de acordo com a aplicação recursiva do princípio da composição de movimento para velocidades lineares [30]:

$$\mathbf{v}_{abs} = \mathbf{v}_{arr} + \mathbf{v}_{rel} \quad (10)$$

Sendo assim, a contribuição de cada junta na velocidade do efetuador é dada por:

$$\mathbb{J}_{vi}\dot{q}_i = \begin{cases} [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbf{N}} \dot{q}_i, & \text{se a } i\text{-ésima junta for prismática} \\ ([\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbf{N}} \dot{q}_i) \wedge ([\mathbf{x}]_{\mathbf{N}} - [\mathbf{o}_{i-1}]_{\mathbf{N}}), & \text{se a } i\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (11)$$

Ou seja:

$$\mathbb{J}_{vi}(\mathbf{q}) = \begin{cases} [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbf{N}}, & \text{se a } i\text{-ésima junta for prismática} \\ [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbf{N}} \wedge ([\mathbf{x}]_{\mathbf{N}} - [\mathbf{o}_{i-1}]_{\mathbf{N}}), & \text{se a } i\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (12)$$

Para obter as velocidades dos centros de massa dos ligamentos, o raciocínio é análogo:

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathbf{N}} = \frac{d}{dt} [\mathbf{g}_i]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{vi}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{\nu} \mathbb{J}_{vi,j}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (13)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{vi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{vi,1}(\mathbf{q}) & \dots & \mathbb{J}_{vi,\nu}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (14)$$

$$\mathbb{J}_{vi,j}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } j > i \\ [\mathbf{k}_{j-1}]_{\mathbf{N}}, & \text{se } j \leq i \text{ e a } j\text{-ésima junta for prismática} \\ [\mathbf{k}_{j-1}]_{\mathbf{N}} \wedge ([\mathbf{g}_i]_{\mathbf{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbf{N}}), & \text{se } j \leq i \text{ e a } j\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, \nu \quad (15)$$

B2) Cinemática de velocidades angulares

A velocidade angular de cada ligamento pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para velocidades angulares [30]:

$$\boldsymbol{\omega}_{abs} = \boldsymbol{\omega}_{arr} + \boldsymbol{\omega}_{rel} \quad (16)$$

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{N}} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \\ [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{\mathbf{N}}, & \text{se } i > 0 \text{ e a } i\text{-ésima junta for prismática} \\ [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{\mathbf{N}} + [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbf{N}} \dot{q}_i, & \text{se } i > 0 \text{ e a } i\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i = 0, \dots, \nu \quad (17)$$

Sendo assim, a velocidade angular de cada ligamento pode ser obtida pelas seguintes expressões:

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega i,j}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (18)$$

$$\mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{\omega i,1}(\mathbf{q}) & \dots & \mathbb{J}_{\omega i,\nu}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (19)$$

$$\mathbb{J}_{\omega i,j}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } j > i \text{ ou a } j\text{-ésima junta for prismática} \\ [\mathbf{k}_{j-1}]_{\mathbf{N}}, & \text{se } j \leq i \text{ e a } j\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, \nu \quad (20)$$

Note que também obtemos a velocidade angular do efetuator no sistema da base, pois

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\mathbf{N}} = [\boldsymbol{\omega}_{\nu}]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{\omega}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (21)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_\omega(\mathbf{q}) = \mathbb{J}_{\omega\nu}(\mathbf{q}) \quad (22)$$

As velocidades angulares dos ligamentos escritas nas bases dos sistemas de coordenadas solidários aos ligamentos, podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} = [\mathbf{1}]_{\mathbf{N}|\mathbf{B}_i}^T \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (23)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) = [\mathbf{1}]_{\mathbf{N}|\mathbf{B}_i}^T \cdot \mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (24)$$

C1) Cinemática de acelerações lineares

A aceleração do centro de massa de cada ligamento pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para acelerações lineares [30]:

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{arr} + \mathbf{a}_{rel} + 2\boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \mathbf{v}_{rel} \quad (25)$$

$$[\mathbf{a}_{i,j}]_{\mathbf{N}} = \begin{cases} 0, \text{ se } j = 0 \\ [\mathbf{a}_{i,j-1}]_{\mathbf{N}} + \mathbb{J}_{v i,j} \ddot{q}_i + \mathbb{J}_{\omega i,j} \wedge [\mathbb{J}_{\omega i,j} \wedge ([\mathbf{g}_i]_{\mathbf{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbf{N}})] \dot{q}_j^2 + 2[\boldsymbol{\omega}_{j-1}]_{\mathbf{N}} \wedge \mathbb{J}_{v i,j} \dot{q}_j, \text{ se } j > 0 \end{cases} \quad (26)$$

Com $i = 1, \dots, \nu$ e $j = 1, \dots, i$

$$[\mathbf{a}_i]_{\mathbf{N}} = [\mathbf{a}_{i,i}]_{\mathbf{N}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (27)$$

Sendo assim, a aceleração do centro de massa de cada ligamento pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$[\mathbf{a}_i]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{v i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathfrak{a}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (28)$$

Sendo:

$$\mathfrak{a}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^i \mathbb{J}_{\omega i,j} \wedge [\mathbb{J}_{\omega i,j} \wedge ([\mathbf{g}_i]_{\mathbf{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbf{N}})] \dot{q}_j^2 + 2(\mathbb{J}_{\omega j-1} \dot{\mathbf{q}}) \wedge \mathbb{J}_{v i,j} \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (29)$$

Analogamente, para a aceleração do efetuador, temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{x}]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_v(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathfrak{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (30)$$

Sendo:

$$\mathfrak{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega j} \wedge [\mathbb{J}_{\omega j} \wedge ([\mathbf{x}]_{\mathbf{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbf{N}})] \dot{q}_j^2 + 2(\mathbb{J}_{\omega j-1} \dot{\mathbf{q}}) \wedge \mathbb{J}_{v j} \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (31)$$

C2) Cinemática de acelerações angulares

A aceleração angular de cada ligamento pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para acelerações angulares [30]:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{arr} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + \boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \boldsymbol{\omega}_{rel} \quad (32)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbf{N}} = \begin{cases} \mathbb{0}, \text{ se } i = 0 \\ [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}]_{\mathbf{N}} + \mathbb{J}_{\omega i, i} \ddot{q}_i + [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{\mathbf{N}} \wedge \mathbb{J}_{\omega i, i} \dot{q}_i, \text{ se } i > 0 \end{cases} \quad i = 0, \dots, \nu \quad (33)$$

Sendo assim, a aceleração angular de cada ligamento pode ser obtida pelas seguintes expressões:

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (34)$$

Sendo:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^i (\mathbb{J}_{\omega j-1} \dot{\mathbf{q}}) \wedge \mathbb{J}_{\omega i, j} \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (35)$$

Note que também obtemos a aceleração angular do efetuator no sistema da base, pois

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}]_{\mathbf{N}} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\nu}]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{\omega}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (36)$$

Sendo:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\nu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (37)$$

As acelerações angulares dos ligamentos escritas nas bases dos sistemas de coordenadas solidários aos ligamentos, podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbf{B}_i} = [\mathbf{1}]_{\mathbf{N}|\mathbf{B}_i}^{\mathbf{T}} \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_{w i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (38)$$

Sendo:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [\mathbf{1}]_{\mathbf{N}|\mathbf{B}_i}^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (39)$$

D) Dinâmica

O modelo dinâmico de \mathcal{B} é obtido utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas [25], e é dado por:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbb{G}(\mathbf{q}) = \mathbb{U} \quad (40)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v i}^{\mathbf{T}} \mathbb{J}_{v i} + \mathbb{J}_{w i}^{\mathbf{T}} [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i|\mathbf{B}_i} \mathbb{J}_{w i} \quad (41)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v i}^T \mathbf{q}_i + \mathbb{J}_{w i}^T \{ [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \dot{\mathbf{w}}_i + (\mathbb{J}_{w i} \dot{\mathbf{q}}) \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \mathbb{J}_{w i} \dot{\mathbf{q}}) \} \quad (42)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v i} [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \quad (43)$$

Segue abaixo, a dedução.

i) Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico desacoplado de cada ligamento pode ser obtido facilmente por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos livres no espaço, sujeitos apenas à força peso. Sendo assim, aplicando o Teorema do Movimentos do Baricentro e o Teorema do Momento Angular para cada ligamento, temos:

$$\begin{cases} m_i \mathbf{a}_i - m_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \wedge (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{0} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (44)$$

Aplicando a primeira equação vetorial no sistema N e a segunda no sistema \mathbf{B}_i , temos:

$$\begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_i]_{\mathbf{N}} \\ [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbf{B}_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (45)$$

Definindo:

$$\mathbb{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (46)$$

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (47)$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (48)$$

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_i]_{\mathbf{N}} \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (49)$$

(45) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{M}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i(\mathbf{p}_i) + \mathbf{g}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (50)$$

Seja \mathbb{f}_i o sistema de forças ativas (considerando os esforços de inércia) aplicado no i -ésimo subsistema, na direção das quasi-velocidades \mathbb{p}_i . \mathbb{f}_i pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\bar{\mathbb{f}}_i(\mathbb{p}_i, \dot{\mathbb{p}}_i) = -(\mathbb{M}_i \cdot \dot{\mathbb{p}}_i + \mathbb{v}_i(\mathbb{p}_i) + \mathbb{g}_i), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (51)$$

Portanto, o modelo dinâmico de cada subsistema pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{f}}_i(\mathbb{p}_i, \dot{\mathbb{p}}_i) = \mathbb{0}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (52)$$

ii) Sistemas de forças ativas generalizadas e quasi-velocidades adicionais

Muitas vezes é conveniente definir um conjunto de quasi-velocidades adicionais \mathbb{p}_0 , as quais só fazem sentido para o sistema acoplado, e sistemas de forças ativas generalizadas adicionais \mathbb{f}_0 aplicados na direção das quasi-velocidades adicionais.

Neste algoritmo de modelagem, serão considerados como quasi-velocidades adicionais as derivadas temporais das coordenadas das juntas, ou seja:

$$\mathbb{p}_0 = \dot{\mathbb{q}} \quad (53)$$

Nesse caso, os sistemas de forças ativas generalizadas adicionais serão os esforços que os atuadores aplicam nas juntas, ou seja:

$$\mathbb{f}_0 = \mathbb{u} \quad (54)$$

iii) Vínculos cinemáticos entre subsistemas

Através das equações (13), (23) e (53), é possível relacionar as quasi-velocidades de cada subsistema com as quasi-velocidades adicionais da seguinte maneira:

$$\underline{\mathbb{p}}_i(\mathbb{q}, \mathbb{p}_0) = \mathbb{J}_i(\mathbb{q}) \cdot \mathbb{p}_0, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (55)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_i(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{vi}(\mathbb{q}) \\ \mathbb{J}_{wi}(\mathbb{q}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (56)$$

Seja \mathbb{p}° a matriz coluna que contém as quasi-velocidades de todos os ligamentos:

$$\mathbb{p}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbb{p}_1^\top & \dots & \mathbb{p}_\nu^\top \end{bmatrix}^\top \quad (57)$$

$\underline{\mathbb{p}}^\circ$ pode ser expresso em função apenas das quasi-velocidades $\underline{\mathbb{p}}_0$ da seguinte forma:

$$\underline{\mathbb{p}}^\circ(\mathbf{q}, \underline{\mathbb{p}}_0) = \mathbb{J}(\mathbf{q})\underline{\mathbb{p}}_0 \quad (58)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_1(\mathbf{q})^\top & \dots & \mathbb{J}_\nu(\mathbf{q})^\top \end{bmatrix}^\top \quad (59)$$

Sendo assim, as vínculos de quasi-velocidades entre subsistemas podem ser expressos como:

$$\overline{\mathbb{p}}(\mathbf{q}, \underline{\mathbb{p}}) = \mathbb{J}(\mathbf{q})\underline{\mathbb{p}}_0 - \underline{\mathbb{p}}^\circ = \mathbf{0} \quad (60)$$

iv) Acoplamento de subsistemas

Seja \mathbb{f} a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças ativas generalizadas:

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} \mathbb{f}_0^\top & \mathbb{f}_1^\top & \dots & \mathbb{f}_\nu^\top \end{bmatrix}^\top \quad (61)$$

E seja \mathbb{A} o jacobiano dos vínculos de quasi-velocidades:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \overline{\mathbb{p}}}{\partial \underline{\mathbb{p}}} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}(\mathbf{q}) & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Seja \mathbb{C} a seguinte matriz:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbb{J}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (63)$$

Note que \mathbb{C} é complemento ortogonal de \mathbb{A} , visto que

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{C}(\mathbf{q}) = \mathbb{J}(\mathbf{q}) - \mathbb{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (64)$$

e para configurações não singulares o posto de $\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$ é cheio.

Sendo assim, o modelo dinâmico do mecanismo serial pode ser escrito como:

$$\mathbb{C}^\top \mathbb{f} = \mathbf{0} \quad (65)$$

Ou seja:

$$\mathbf{u} - \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_i(\mathbf{q})^\top (\mathbb{M}_i \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i(\mathbf{p}_i) + \mathbf{g}_i) = \mathbf{0} \quad (66)$$

Substituindo (46), (47), (48), (49) e (56) em (66), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{vi} \\ \mathbb{J}_{wi} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_i]_{\mathbf{N}} \\ [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbf{B}_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \right\} = \mathfrak{u} \quad (67)$$

Substituindo (23), (28) e (38) em (67), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{vi} \\ \mathbb{J}_{wi} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i (\mathbb{J}_{vi} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathfrak{a}_i) \\ [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} (\mathbb{J}_{wi} \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{w}}_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ (\mathbb{J}_{wi} \dot{\mathbf{q}}_i) \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \mathbb{J}_{wi} \dot{\mathbf{q}}_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \right\} = \mathfrak{u} \quad (68)$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente pelas equações (40), (41), (42), (43):

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathfrak{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathfrak{g}(\mathbf{q}) = \mathfrak{u}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{vi}^T \mathbb{J}_{vi} + \mathbb{J}_{wi}^T [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \mathbb{J}_{wi} \\ \mathfrak{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{vi}^T \mathfrak{a}_i + \mathbb{J}_{wi}^T \{ [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \dot{\mathbf{w}}_i + (\mathbb{J}_{wi} \dot{\mathbf{q}}_i) \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i | \mathbf{B}_i} \mathbb{J}_{wi} \dot{\mathbf{q}}_i) \} \\ \mathfrak{g}(\mathbf{q}) &= - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{vi} [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \end{aligned}$$

5.2 Algoritmo para modelagem de mecanismos paralelos - Novo

Esta subseção tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo dinâmico de mecanismos paralelos. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo do mecanismo paralelos, são necessários apenas os modelos de mecanismos seriais deduzidos utilizando o algoritmo apresentado anteriormente, do modelo do efetuador, e de 7 matrizes constantes que são utilizadas para descrever a arquitetura do mecanismo paralelo.

Para realizar a modelagem de mecanismos paralelos a partir de subsistemas seriais já deduzidos, é necessário introduzir mais alguns conceitos:

Sejam $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ $n + 1$ subsistemas mecânicos e \mathcal{M} um sistema mecânico de $\nu^\#$ graus de liberdade gerado pelo acoplamento dos subsistemas citados. Definimos:

- \mathbf{N}_i , $i = 1, \dots, n$: sistema de coordenadas da base de \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{q}^\#, \mathbf{q}_0$: matriz-coluna de $\nu^\#$ coordenadas generalizadas independentes da plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 .
- \mathbf{q}_i , $i = 1, \dots, n$: matriz-coluna de coordenadas generalizadas do subsistema serial \mathcal{B}_i .
- \mathbf{q}° : matriz-coluna de coordenadas generalizadas não pertencentes à plataforma/efetuador. Definida como $\mathbf{q}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^\top & \dots & \mathbf{q}_n^\top \end{bmatrix}^\top$.
- \mathbf{q} : matriz-coluna contendo todas as coordenadas generalizadas do sistema \mathcal{M} . Definida como $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\#^\top & \mathbf{q}^\circ^\top \end{bmatrix}^\top$.
- $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$: matriz-coluna dos vínculos de posição entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$.
- $\bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: matriz-coluna dos vínculos de orientação entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por $\bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$.
- \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$: ponto no espaço fixo ao efetuador de \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i)$, $i = 1, \dots, n$: $[\mathbf{x}_i]_{\mathbf{N}_i}$ escrito em função das coordenadas \mathbf{q}_i .
- $\mathbb{J}_{\mathbf{v}_{\mathcal{B}_i}}(\mathbf{q}_i)$, $i = 1, \dots, n$: jacobiano de velocidades lineares do efetuador de \mathcal{B}_i .
- $\mathbb{J}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}}(\mathbf{q}_i)$, $i = 1, \dots, n$: jacobiano de velocidades angulares do efetuador de \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{a}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, $i = 1, \dots, n$: parcela da aceleração linear do efetuador de \mathcal{B}_i , escrita na base de \mathbf{N}_i , independente de $\ddot{\mathbf{q}}_i$.
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, $i = 1, \dots, n$: parcela da aceleração angular do efetuador de \mathcal{B}_i , escrita na base de \mathbf{N}_i , independente de $\ddot{\mathbf{q}}_i$.
- $\mathbb{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)$, $i = 0, \dots, n$: matriz de inércia generalizada do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{v}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, $i = 0, \dots, n$: matriz-coluna das forças de inércia giroscópica generalizadas do subsistema \mathcal{B}_j .
- $\mathbf{g}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)$, $i = 0, \dots, n$: matriz-coluna dos esforços gravitacionais generalizados do subsistema \mathcal{B}_j .
- \mathbf{u}_i , $i = 0, \dots, n$: matriz-coluna dos esforços ativos externos generalizados do subsistema \mathcal{B}_i .

i) Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada subsistema pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{u}_i, \mathfrak{q}_i, \dot{\mathfrak{q}}_i, \ddot{\mathfrak{q}}_i) = \mathfrak{u}_i - (\mathbb{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{q}_i)\ddot{\mathfrak{q}}_i + \mathbb{V}_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{q}_i, \dot{\mathfrak{q}}_i) + \mathbb{G}_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{q}_i)) = \mathbb{0}, \quad i = 0, \dots, n \quad (69)$$

Sendo que para $i = 0$ temos o modelo do efetuador/plataforma e para $i > 0$ temos os modelos dos mecanismos seriais obtidos anteriormente.

ii) Vínculos cinemáticos entre subsistemas

a) Vínculos de posição

É possível relacionar as coordenadas da plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 com as coordenadas dos efetuadores das cadeias seriais por meio de rotações e translações, ou seja:

$$\mathfrak{q}^\# = \mathfrak{d}_i + \mathbb{E}_i \cdot \mathfrak{x}_i(\mathfrak{q}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (70)$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{q}^\# = \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{d}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{x}_1(\mathfrak{q}_1) \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n(\mathfrak{q}_n) \end{bmatrix} \quad (71)$$

Além disso, em alguns casos é necessário incluir vínculos afins entre as coordenadas generalizadas, ou seja:

$$\mathbb{D}_\oplus \cdot \mathfrak{q}^\# = \mathfrak{d}_\oplus + \mathbb{F}_\oplus \cdot \mathfrak{q}^\circ \quad (72)$$

Juntando a equação (72) à equação (71), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \mathbb{D}_\oplus \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{q}^\# = \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{d}_n \\ \mathfrak{d}_\oplus \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{E}_n \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{x}_1(\mathfrak{q}_1) \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n(\mathfrak{q}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \vdots \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{F}_\oplus \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{q}^\circ \quad (73)$$

Sendo assim, os vínculos de posição entre subsistemas podem ser descritos de

maneira genérica por:

$$\bar{q}(q) = \mathbb{D} \cdot q^\# - d - \mathbb{E} \cdot x(q) - \mathbb{F} \cdot q^\circ = 0 \quad (74)$$

Sendo d , \mathbb{D} , \mathbb{E} e \mathbb{F} matrizes constantes e x dado por:

$$x(q) = \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} \quad (75)$$

b) Vínculos de velocidades lineares

Derivando no tempo a equação (74), temos:

$$\dot{\bar{q}}(q, \dot{q}) = \mathbb{D} \cdot \dot{q}^\# - \mathbb{E} \cdot \dot{x}(q, \dot{q}) - \mathbb{F} \cdot \dot{q}^\circ = 0 \quad (76)$$

A derivada \dot{x} pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\dot{x}(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v \mathcal{B}_1}(q_1) \cdot \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{J}_{v \mathcal{B}_n}(q_n) \cdot \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbb{J}_v(q^\circ) \cdot \dot{q}^\circ \quad (77)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_v(q^\circ) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v \mathcal{B}_1}(q_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{J}_{v \mathcal{B}_n}(q_n) \end{bmatrix} \quad (78)$$

Assim, substituindo (77) em (76), obtemos:

$$\dot{\bar{q}}(q, \dot{q}) = \mathbb{D} \cdot \dot{q}^\# - \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(q^\circ) \cdot \dot{q}^\circ - \mathbb{F} \cdot \dot{q}^\circ = 0 \quad (79)$$

c) Vínculos de velocidades angulares

Em alguns casos, é necessário incluir vínculos entre as velocidades angulares dos efetuadores das cadeias seriais, de modo a restringir suas orientações no espaço.

De maneira análoga à equação (79), os vínculos de velocidades angulares serão definidos por:

$$\dot{\bar{q}}(q) = \mathbb{P} \cdot \dot{q}^\# - \mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(q^\circ) \cdot \dot{q}^\circ - \mathbb{R} \cdot \dot{q}^\circ = 0 \quad (80)$$

Sendo \mathbb{P} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} matrizes constantes e $\mathbb{J}_w(\mathbf{q})$ dado por:

$$\mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{w\mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{J}_{w\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (81)$$

d) Vínculos de quasi-velocidades

Neste caso, as quasi-velocidades do sistema são dadas simplesmente por

$$\mathbb{p} = \dot{\mathbf{q}} \quad (82)$$

Os vínculos de quasi-velocidades são dados pela união dos vínculos de velocidades lineares e dos vínculos de velocidades angulares, ou seja:

$$\overline{\mathbb{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\overline{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ - \mathbb{F} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ \\ \mathbb{P} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ - \mathbb{R} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ \end{bmatrix} = 0 \quad (83)$$

Repare que (83) pode ser reescrita como:

$$\overline{\mathbb{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (84)$$

Sendo \mathbb{A} o jacobiano dos vínculos de quasi-velocidades, o qual é dado por:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \overline{\mathbb{p}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) & \mathbb{A}^\circ(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (85)$$

Sendo:

$$\mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) = \frac{\partial \overline{\mathbb{p}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^\#} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \\ \mathbb{P} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbb{A}^\circ(\mathbf{q}) = \frac{\partial \overline{\mathbb{p}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^\circ} = - \begin{bmatrix} \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) + \mathbb{F} \\ \mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) + \mathbb{R} \end{bmatrix} \quad (87)$$

e) Vínculos de quasi-acelerações

Derivando (83), temos:

$$\dot{\overline{\mathbb{p}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \\ \ddot{\overline{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{E} \cdot (\mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ + \mathfrak{a}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ)) - \mathbb{F} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ \\ \mathbb{P} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{Q} \cdot (\mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ + \dot{\omega}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ)) - \mathbb{R} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ \end{bmatrix} = 0 \quad (88)$$

Sendo:

$$\mathfrak{a}^\circ(\mathfrak{q}^\circ, \dot{\mathfrak{q}}^\circ) = \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_{\mathcal{B}_1}(\mathfrak{q}_1, \dot{\mathfrak{q}}_1)^\top & \dots & \mathfrak{a}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n, \dot{\mathfrak{q}}_n)^\top \end{bmatrix}^\top \quad (89)$$

$$\dot{\omega}^\circ(\mathfrak{q}^\circ, \dot{\mathfrak{q}}^\circ) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{\mathcal{B}_1}(\mathfrak{q}_1, \dot{\mathfrak{q}}_1)^\top & \dots & \dot{\omega}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n, \dot{\mathfrak{q}}_n)^\top \end{bmatrix}^\top \quad (90)$$

Repare que (88) pode ser reescrita como:

$$\dot{\bar{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{q}, \dot{\mathfrak{q}}, \ddot{\mathfrak{q}}) = \mathbb{A}(\mathfrak{q})\ddot{\mathfrak{q}} - \mathbb{b}(\mathfrak{q}, \dot{\mathfrak{q}}) = \mathbb{0} \quad (91)$$

Sendo:

$$\mathbb{b}(\mathfrak{q}, \dot{\mathfrak{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \cdot \mathfrak{a}^\circ(\mathfrak{q}^\circ, \dot{\mathfrak{q}}^\circ) \\ \mathbb{Q} \cdot \dot{\omega}^\circ(\mathfrak{q}^\circ, \dot{\mathfrak{q}}^\circ) \end{bmatrix} \quad (92)$$

iii) Acoplamento de subsistemas

Seja \mathbb{f} a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças ativas generalizadas:

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} \bar{\mathfrak{f}}_{\mathcal{B}_0} \\ \vdots \\ \bar{\mathfrak{f}}_{\mathcal{B}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{u}_0 \\ \vdots \\ \mathfrak{u}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathfrak{q}_0) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{M}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathfrak{q}} - \begin{bmatrix} \mathfrak{v}_{\mathcal{B}_0}(\mathfrak{q}_0, \dot{\mathfrak{q}}_0) \\ \vdots \\ \mathfrak{v}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n, \dot{\mathfrak{q}}_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_{\mathcal{B}_0}(\mathfrak{q}_0) \\ \vdots \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n) \end{bmatrix} \quad (93)$$

Definindo:

$$\mathbb{M}'(\mathfrak{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathfrak{q}_0) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{M}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n) \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\mathfrak{v}'(\mathfrak{q}, \dot{\mathfrak{q}}) = \begin{bmatrix} \mathfrak{v}_{\mathcal{B}_0}(\mathfrak{q}_0, \dot{\mathfrak{q}}_0)^\top & \dots & \mathfrak{v}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n, \dot{\mathfrak{q}}_n)^\top \end{bmatrix}^\top \quad (95)$$

$$\mathfrak{g}'(\mathfrak{q}) = \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_{\mathcal{B}_0}(\mathfrak{q}_0)^\top & \dots & \mathfrak{g}_{\mathcal{B}_n}(\mathfrak{q}_n)^\top \end{bmatrix}^\top \quad (96)$$

$$\mathfrak{u}' = \begin{bmatrix} \mathfrak{u}_0^\top & \dots & \mathfrak{u}_n^\top \end{bmatrix}^\top \quad (97)$$

(93) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{f} = \mathfrak{u}' - \mathbb{M}'(\mathfrak{q}) \cdot \ddot{\mathfrak{q}} - \mathfrak{v}'(\mathfrak{q}, \dot{\mathfrak{q}}) - \mathfrak{g}'(\mathfrak{q}) \quad (98)$$

Um possível complemento ortogonal para o jacobiano dos vínculos de quasi-velocidades (\mathbb{A}) é dado por

$$\mathbb{C}(\mathfrak{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ -\mathbb{A}^\circ(\mathfrak{q})^{-1} \cdot \mathbb{A}^\#(\mathfrak{q}) \end{bmatrix} \quad (99)$$

Pois:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{C}(\mathbf{q}) = \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) - \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) = \mathbb{0} \quad (100)$$

e para configurações não singulares o posto de $\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$ é cheio.

Além disso, repare que \mathbb{C} respeita a seguinte relação:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# \quad (101)$$

Sendo assim, a equação dinâmica do mecanismo paralelo pode ser escrita como:

$$\mathbb{C}^\top \mathbf{f} = \mathbb{0} \quad (102)$$

Ou seja:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q})^\top (\mathbb{M}'(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}'(\mathbf{q})) = \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \mathbf{u}' \quad (103)$$

iv) Simulação dinâmica direta

É possível realizar a simulação dinâmica direta do sistema utilizando a equação dinâmica (103) e os vínculos de quasi-acelerações (88):

$$\begin{cases} \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top (\mathbb{M}'(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}'(\mathbf{q})) = \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \mathbf{u}' \\ \mathbb{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{cases} \quad (104)$$

Reescrevendo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top (\mathbf{u}' - \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}'(\mathbf{q})) \\ \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (105)$$

É necessário que as condições iniciais respeitem os vínculos de posição e velocidades. Com isso, teoricamente, os vínculos continuariam sendo respeitados na solução do sistema de EDOs. Porém, devido a erros numéricos de truncamento e erros associados ao método de integração numérica utilizado, os vínculos de posição e velocidade podem deixar de ser respeitados. Esse problema pode ser resolvido utilizando a técnica das constantes de estabilização de Baumgarte [28]. A idéia é substituir a equação dos vínculos de aceleração pela seguinte equação:

$$\overline{\mathbf{p}}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbf{q}}} + 2\lambda\dot{\overline{\mathbf{q}}} + \lambda^2\overline{\mathbf{q}} \\ \dot{\overline{\omega}} + \lambda\overline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbf{q}}} \\ \dot{\overline{\omega}} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbf{q}}} \\ \overline{\omega} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{q}} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \quad (106)$$

Substituindo (83) e (88) em (106), temos:

$$\overline{\mathcal{P}}'(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \mathbb{A}(q)\ddot{q} - \mathbb{b}(q, \dot{q}) + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{A}(q) \cdot \dot{q} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \overline{q}(q) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (107)$$

Impondo que (107) seja respeitada, garantimos que $\overline{q}(q)$ e $\overline{\omega}(q, \dot{q})$ tenderão exponencialmente a zero, para $\lambda > 0$, ou seja, irá fazer com que os vínculos de posição e velocidades sejam respeitados mesmo havendo erros de truncamento e erros associados ao método de integração numérica de EDOs. É importante ressaltar que λ é superiormente limitado pelo passo de integração h e pelo método de integração, porém, escolhendo $\lambda = 1/h$ já garante a estabilidade do método para praticamente qualquer método de integração numérica de EDOs.

Sendo assim, o sistema de EDOs que será utilizado para realizar a simulação dinâmica direta é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}(q)^T \mathbb{M}'(q) \\ \mathbb{A}(q) \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}(q)^T (u' - v'(q, \dot{q}) - g'(q)) \\ \mathbb{b}(q, \dot{q}) - \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{A}(q) \cdot \dot{q} - \lambda^2 \begin{bmatrix} \overline{q}(q) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (108)$$

v) Simulação dinâmica inversa

Na simulação dinâmica inversa, são dados os perfis de $q^\#$, $\dot{q}^\#$ e $\ddot{q}^\#$ em função do tempo e obtém-se os perfis dos esforços nos atuadores para a trajetória dada. Para isso, será utilizada a equação dinâmica (103):

$$\mathbb{C}(q)^T (\mathbb{M}'(q)\ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = \mathbb{C}(q)^T u'$$

Repare que os termos desta equação dependem de q , \dot{q} e \ddot{q} . Sendo assim, primeiramente é preciso obter q , \dot{q} e \ddot{q} dados $q^\#$, $\dot{q}^\#$ e $\ddot{q}^\#$.

q é obtido resolvendo numericamente a equação dos vínculos de posição (73), a qual é um sistema de equações algébricas não lineares.

$$\overline{q}(q) = 0$$

Tendo obtido q , \dot{q} é obtido pela equação (101):

$$\dot{q} = \mathbb{C}(q) \cdot \dot{q}^\#$$

Para obter $\ddot{\mathbf{q}}$, desenvolvemos a equação dos vínculos de quasi-acelerações (88):

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{A}^\circ(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ &= \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}}^\circ &= \mathbb{A}^\circ(\mathbf{q})^{-1} (\mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\#) \\ \therefore \ddot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{A}^\circ(\mathbf{q})^{-1} \cdot \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{A}^\circ(\mathbf{q})^{-1} \cdot \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# \end{aligned} \quad (109)$$

Substituindo (99) em (109), temos:

$$\therefore \ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (110)$$

Sendo:

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{A}^\circ(\mathbf{q})^{-1} \cdot \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (111)$$

Além disso, normalmente não há atuadores em todas as juntas do mecanismo paralelo. Sendo assim, \mathbf{u}' pode ser reescrito como:

$$\mathbf{u}' = \mathbb{U} \cdot \mathbf{u}^\star \quad (112)$$

Sendo \mathbb{U} uma matriz constante composta por zeros e uns, e \mathbf{u}^\star os esforços aplicados pelos atuadores.

Substituindo (101), (110) e (112) em (103), temos:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \{ \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \cdot [\mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\#)] + \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\#) + \mathbf{g}'(\mathbf{q}) \} = \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \mathbb{U} \cdot \mathbf{u}^\star \quad (113)$$

Definindo:

$$\mathbb{Z}(\mathbf{q})^\top = \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \mathbb{U} \quad (114)$$

Temos:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \{ \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\#) + \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\#) \} + \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \mathbf{g}'(\mathbf{q}) = \mathbb{Z}(\mathbf{q})^\top \mathbf{u}^\star \quad (115)$$

Supondo que não haja atuação redundante, para configurações não singulares, (115) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{M}_\mathcal{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{v}_\mathcal{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^\#) + \mathbf{g}_\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}^\star \quad (116)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) = (\mathbb{Z}(\mathbf{q})^T)^{-1} \cdot \mathbb{C}(\mathbf{q})^T \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \mathbb{C}(\mathbf{q}) \quad (117)$$

$$\mathbb{V}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^\#) = (\mathbb{Z}(\mathbf{q})^T)^{-1} \cdot \mathbb{C}(\mathbf{q})^T \{ \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{c}(\mathbf{q}, \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\#) + \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\#) \} \quad (118)$$

$$\mathbb{G}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) = (\mathbb{Z}(\mathbf{q})^T)^{-1} \cdot \mathbb{C}(\mathbf{q})^T \mathbb{G}'(\mathbf{q}) \quad (119)$$

Sendo assim, a simulação dinâmica inversa é feita utilizando a equação (116) para obter os esforços nos atuadores, dados $\mathbf{q}^\#$, $\dot{\mathbf{q}}^\#$ e $\ddot{\mathbf{q}}^\#$, e obtendo \mathbf{q} através da solução numérica da equação (74).

5.3 Projeto do Controlador

Esta subseção é destinada ao projeto de controladores não lineares robustos, destinados ao controle de posição de plataformas paralelas cujo modelo dinâmico para simulação dinâmica inversa é dado por (116), utilizando a técnica de controle por modos deslizantes [12, 13].

Sejam $\underline{\lambda}$ uma matriz diagonal positiva, $\mathbf{q}_d^\#$ uma matriz-coluna de sinais referência, e \mathbf{s} uma matriz-coluna dada por:

$$\mathbf{s} = -(\dot{\mathbf{e}} + \underline{\lambda}\mathbf{e}) \quad (120)$$

Sendo:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d^\# - \mathbf{q}^\# \quad (121)$$

Seja $V(\mathbf{s})$ uma função de Lyapunov dada por:

$$V(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (122)$$

Pela teoria de estabilidade de Lyapunov, se $\dot{V} < 0 \ \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, \mathbf{s} converge para $\mathbf{0}$ independentemente das condições iniciais do sistema. Para que isso seja possível, é imposta a seguinte condição:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -\varkappa \mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) \quad (123)$$

Sendo \varkappa uma constante positiva. Repare que $\mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s})$ é a soma dos módulos das componentes de \mathbf{s} , o que implica que $-\varkappa \mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) < 0 \ \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Repare também que se $\dot{\mathbf{s}} = -\varkappa \text{sign}(\mathbf{s})$, (123) é satisfeita e cada componente de \mathbf{s} respeita a EDO $\dot{s}_i = -\varkappa \text{sign}(s_i)$, a qual converge para zero em um tempo finito de $t = \frac{|s_i(0)|}{\varkappa}$. Sendo assim, pode-se dizer que se (123) for satisfeita, \mathbf{s} converge para zero em tempo finito e, a partir desse momento, o erro de controle \mathbf{e} converge assintoticamente para zero.

O projeto do controlador é feito utilizando a condição (123), a qual é conhecida como condição de escorregamento. Assim, derivando (120), temos:

$$\dot{s} = \ddot{q}^\# - \sigma \quad (124)$$

Sendo:

$$\sigma = \ddot{q}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{e} \quad (125)$$

Substituindo (124) em (123), temos:

$$s^T(\ddot{q}^\# - \sigma + \varkappa \text{sign}(s)) \leq 0 \quad (126)$$

Com o intuito de deixar um pouco menos carregada a notação, definimos:

$$H(q) = M_{\mathcal{M}}(q) \quad (127)$$

$$h(q, \dot{q}^\#) = v_{\mathcal{M}}(q, \dot{q}^\#) + g_{\mathcal{M}}(q) \quad (128)$$

$$u = u^\star \quad (129)$$

Sendo assim, equação (116) pode ser reescrita como:

$$H(q)\ddot{q}^\# + h(q, \dot{q}^\#) = u \quad (130)$$

(130) será utilizada para realizar o projeto do controlador.

Isolando $\ddot{q}^\#$ em (130) e substituindo em (126), temos:

$$s^T(H^{-1}(u - h) - \sigma + \varkappa \text{sign}(s)) \leq 0 \quad (131)$$

Para satisfazer (131), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$u = \hat{h} + \hat{H}(\sigma - \underline{k} \text{sign}(s)) \quad (132)$$

Sendo \hat{h} e \hat{H} estimadores de h e H , respectivamente, e \underline{k} uma matriz diagonal positiva. Substituindo (132) em (131), temos:

$$s^T(\delta + \Delta\sigma + \varkappa \text{sign}(s) - (\Delta + \mathbb{1})\underline{k} \text{sign}(s)) \leq 0 \quad (133)$$

Sendo:

$$\delta(q, \dot{q}^\#) = H^{-1}(\hat{h} - h) \quad (134)$$

$$\Delta(q) = H^{-1}\hat{H} - \mathbb{1} \quad (135)$$

Pode-se dizer que (133) é sempre satisfeita se:

$$(\Delta + \mathbb{1}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\delta + \Delta\sigma + \varkappa \text{sign}(\underline{s})| \quad (136)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado esquerdo de (136), temos:

$$|\delta + \Delta\sigma + \varkappa \text{sign}(\underline{s})| \leq |\delta|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\sigma| + \text{diag}(\varkappa\mathbb{1}) \quad (137)$$

Além disso, pode-se fazer a seguinte majoração no lado direito de (136):

$$(\Delta + \mathbb{1}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq (\mathbb{1} - |\Delta|_{\max}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \quad (138)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\mathbb{1} - |\Delta|_{\max}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\delta|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\sigma| + \text{diag}(\varkappa\mathbb{1}) \quad (139)$$

(133) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (123) também seja respeitada e conseqüentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Uma possível solução para (139) é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = (\mathbb{1} - |\Delta|_{\max})^{-1}(|\delta|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\sigma| + \text{diag}(\varkappa\mathbb{1})) \quad (140)$$

A qual é válida apenas se $(\mathbb{1} - |\Delta|_{\max})^{-1}$ for positiva.

5.4 Simulações

6 Conclusões Parciais

7 Publicações

A partir dos resultados obtidos no trabalho de formatura realizado na graduação, foi publicado um artigo intitulado “Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies” [14], o qual foi escrito em coautoria com Eng. Guilherme Martinho Dobrianskyj e o Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho. Este trabalho foi apresentado no BioRob 2014 (IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics) na seção de posters, no dia 15 de agosto de 2014. O artigo pode ser acessado por <http://dx.doi.org/10.1109/BIOROB.2014.6913880>.

Um capítulo de livro, intitulado “Dynamic modelling and control of balanced parallel mechanisms” [24], foi escrito em coautoria com o Dr. Renato M. M. Orsino e com o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho, para o livro *Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots* (editado pelo Prof. Dr. Dan Zhang da Universidade do Instituto de Tecnologia de Ontario e publicado pela editora Springer). Este capítulo de livro trata do uso de uma metodologia de modelagem modular para o balanceamento adaptativo e desenvolvimento de algoritmos de controle para mecanismos robóticos paralelos. O capítulo pode ser acessado por http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3_16.

Um artigo, publicado no periódico *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, intitulado “A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms” [26], foi escrito em coautoria com o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho. O artigo pode ser acessado por <http://dx.doi.org/10.1504/IJMRS.2016.077036>.

8 Disciplinas de pós-graduação

Ao longo do programa foram cumpridos 56 créditos, tendo cursado 7 disciplinas de pós-graduação:

- PME-5004 — Complementos de Matemática I
- PMR-5010 — Elementos Finitos em Sistemas Multifísicos: Fundamentos
- PMR-5215 — Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos
- PMR-5238 — Análise e Síntese de Mecanismo Planos e Tridimensionais
- PMR-5211 — Mecânica dos Sólidos Experimental
- PMR-5234 — Técnicas de Ultra-Som e suas aplicações na Indústria e na Medicina
- PMR-5014 — Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

Ressalta-se que em todas as disciplinas foi obtido conceito A, demonstrando bom aproveitamento.

Ainda é necessário cumprir mais 24 créditos de pós-graduação, os quais deverão ser cumpridos realizando a publicação de 3 artigos em periódicos indexados, sendo que um dos 3 artigos já foi publicado.

9 Cronograma de Atividades do Projeto

Serão realizados as seguintes etapas para a realização da proposta:

- (1) Obtenção do espaço de trabalho e singularidades do mecanismo $2\text{RSU}+\text{PPaP}$
- (2) Realização de projeto de controlador por modos deslizantes para o mecanismo $2\text{RSU}+\text{PPaP}$, considerando os esforços dos atuadores como entradas de controle
- (3) Simulação dinâmica direta do mecanismo $2\text{RSU}+\text{PPaP}$ controlado pelo controlador projetado
- (4) Inclusão de atritos nas juntas no algoritmo de modelagem
- (5) Inclusão das inércias efetivas dos atuadores no algoritmo de modelagem
- (6) Dedução dos princípios de composição de movimento para as derivadas das acelerações lineares e angulares
- (7) Aplicações dos princípios de composição de movimento das derivadas das acelerações lineares e angulares para efetuadores e centros de massa de ligamentos de mecanismos seriais
- (8) Inclusão da dinâmica eletro-mecânica dos atuadores no algoritmo de modelagem
- (9) Identificação dos parâmetros dos sistemas e suas respectivas incertezas, utilizando os protótipos
- (10) Realização de projeto de controlador por modos deslizantes para os mecanismos 5R e $2\text{RSU}+\text{PPaP}$, considerando a tensão elétrica nos atuadores como entrada de controle
- (11) Simulação dinâmica direta dos mecanismos controlados pelos controladores descritos no item anterior
- (12) Validação experimental dos controladores projetados, utilizando os protótipos
- (13) Escrever artigo sobre uma nova abordagem para modelagem dinâmica de mecanismos seriais, utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas [25], aliado aos parâmetros de Denavit-Hartenberg [3, 15, 16]
- (14) Escrever artigo sobre modelagem dinâmica de mecanismos paralelos, utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas
- (15) Escrever artigo sobre controle não linear robusto aplicado a mecanismos paralelos
- (16) Avaliação geral dos resultados

(17) Preparo da tese

Aqui segue um cronograma estimado para realização das atividades propostas:

Tabela 2: Cronograma – Planejamento de Atividades por quadrimestre

Ativ./Quad.	3º/16	1º/17	2º/17	3º/17
(1)	■			
(2)	■			
(3)	■			
(4)	■			
(5)	■			
(6)	■			
(7)	■			
(8)	■			
(9)	■	■		
(10)	■	■		
(11)	■	■		
(12)	■	■	■	■
(13)		■		
(14)			■	
(15)				■
(16)			■	■
(17)		■	■	■

10 Sumário estruturado da tese

Referências

- [1] R. Z. H. de Almeida. Modelagem dinâmica e controle e robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade. *Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [2] G. M. Dobriankyj, A. G. Coutinho. Plataforma robótica para reabilitação do membro superior humano. *Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [3] J. J. Craig. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering. Pearson/Prentice Hall, 2005.
- [4] E. Jarzebowska. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):118 – 131, 2009.
- [5] J-P. Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms. In *ASME DETC Conference, Montreal, 2002*, 2002.
- [6] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution for developing more efficient dynamic modelling algorithms of parallel robots. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 1(1):15 – 34, 2013.
- [7] A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto, E. Portillo. Extended CTC control for parallel robots. *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA), 2010 IEEE Conference on*, 2010.
- [8] A.M. Bloch, M. Reyhanoglu, N.H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1992.
- [9] W. Khalil, E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Taylor & Francis, 2002.
- [10] L. W. Tsai. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, 1999.

- [11] V. D. Kumazawa, T. A. Hess Coelho, D. Rinaudi, G. Carbone, M. Ceccarelli. Kinematic analysis and operation feasibility of a 3-dof asymmetric parallel mechanism. In *20th COBEM, Gramado, Brazil*, 2009.
- [12] J-J. E. Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [13] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. Vol. 34. CRC press, 2009.
- [14] G. M. Dobrianskyj, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies. *Biomedical Robotics and Biomechatronics 2014 5th IEEE RAS EMBS International Conference on*, 819 – 825, 2014.
- [15] J. Denavit, R. S. Hartenberg. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *Journal of Applied Mechanics*, 215–221, June 1955.
- [16] H. Lipkin. A note on denavit-hartenberg notation in robotics. *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 921–926, 2005.
- [17] H. Cheng, Y-K. Yiu, Z. Li. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 8(4): 483–491, 2003.
- [18] O. Altuzarra, P. M. Eggers, F. J. Campa, C. Roldan-Paraponiaris, C. Pinto. Dynamic Modelling of Lower-Mobility Parallel Manipulators Using the Boltzmann-Hamel Equations *Mechanisms, Transmissions and Applications*, 31: 157–165, 2015.
- [19] H. Abdellatif, B. Heimann, J. Kotlarski, T. Ortmaier. Practical model-based and robust control of parallel manipulators using passivity and sliding mode theory *Robotics 2010: Current and Future Challenges*, InTech, 2010.
- [20] Y. Li, Q. Xu. Dynamic modeling and robust control of a 3-PRC translational parallel kinematic machine *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(3): 630–640, 2009.
- [21] O. Linda, M. Manic. Uncertainty-robust design of interval type-2 fuzzy logic controller for delta parallel robot *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 7(4): 661–670, 2011.
- [22] S-L. Chen, Y-C. Tsai. Contouring control of a parallel mechanism based on equivalent errors *American Control Conference, 2008*, 2384–2388, 2008.
- [23] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho, C. P. Pesce. Analytical mechanics approaches in the dynamic modelling of Delta mechanism *Robotica*, 33(4): 953–973, 2015.

- [24] R. M. M. Orsino, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Dynamic Modelling and Control of Balanced Parallel Mechanisms, in *Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots*, Springer, 2016:403–445.
- [25] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution on the modular modelling of multibody systems *Proc. Royal Society A*, 471(2183), 2015.
- [26] A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 3(1): 32–47, 2016.
- [27] E. L. L. Cabral. Cinemática Direta de Robôs Manipuladores, in *Análise de Robôs*, [sites.poli.usp.br/p/eduardo.cabral/Cinemática Direta.pdf](http://sites.poli.usp.br/p/eduardo.cabral/Cinemática_Direta.pdf) accessed in 25/08/2016.
- [28] J. Baumgarte. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1): 1–16, 1972.
- [29] P. J. Prince, J. R. Dormand. High order embedded Runge-Kutta formulae *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7(1): 67–75, 1981.
- [30] R. A. Tenenbaum. *Fundamentals of Applied Dynamics*. Springer Science & Business Media, 2006.