# PTC5611 - Controle Digital de Sistemas Dinâmicos

Lista de Exercícios 1 — Entrega em 22/10/2018

Prof. Bruno A. Angélico

**Exercício 1**: Sobre a amostragem periódica de sinais de tempo contínuo...

a) Considere que a sequência $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}\,n\right)$ foi gerada a partir de um sinal de tempo contínuo $x_c(t) = \cos(\omega t)$. Determine $\omega$ dado que a frequência de amostragem é $f_S = 1\,k\text{Hz}$.

b) Dado que a sequência $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}\,n\right)$ foi obtida a partir do sinal de tempo contínuo $x_c(t) = \cos(4000\pi\, t)$ com uma frequência de amostragem $f_S$, determine a frequência de amostragem $f_S$. Considerando um filtro de reconstrução passa-baixas ideal, verifique se sinal $x_c(t)$ pode ser perfeitamente recuperado a partir de $x[n]$. Justifique!

c) Considere a sequência $x[n] = \cos\left(n\frac{\pi}{8}\right)$. Encontre dois sinais senoidais de tempo contínuo, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, que poderiam produzir a sequência $x[n]$ quando amostrados com $f_S = 10$ Hz.

d) Um sinal analógico de tempo contínuo $x_c(t)$ possui espectro $X_c(\omega)$ apresentado na Fig. 1. Represente graficamente:

- o esboço do espectro de amplitude do sinal amostrado, assumindo $\omega_s = \omega_M$, bem como o esboço do espectro do sinal reconstruído com filtro passa-baixas ideal de banda $\omega_M$.
- o esboço do espectro de amplitude do sinal amostrado, assumindo $\omega_s = 3\omega_M$, bem como o esboço do espectro do sinal reconstruído com filtro passa-baixas ideal de banda $\omega_s/2$.

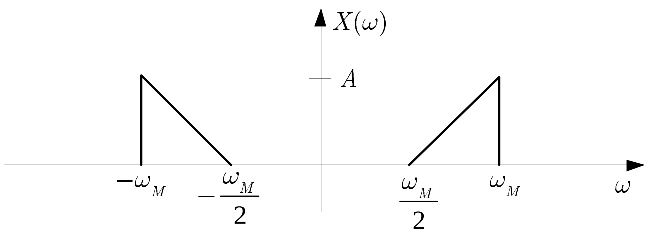


Figura 1: Figura referente ao Exercício 1.c.

**Exercício 2**: Sobre a transformada-$z$...

a) Mostre que $\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n} x[k]\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$, que $\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n} x[k-1]\right\} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}X(z)$, e que $\sum_{k=0}^{\infty} x[k] = \lim\limits_{z\to 1} X(z)$.

b) Obtenha analiticamente a Transformada-$z$ de $x_1(t) = \dfrac{1}{a}(1 - e^{-at})$ e $x_2(t) = t^2 e^{-at}$; ambos com período de amostragem $T_s$.

c) Um sistema LIT causal é descrito pela seguinte equação de diferenças

$$\begin{aligned} y[n] - 0,9737y[n-1] + 0,8151y[n-2] - 0.0515y[n-3] &= 0,4108x[n] \\ -1,0094x[n-1] + 1,0094x[n-2] - 0,4108x[n-3] \end{aligned}$$

Determine sua função de transferência discreta $G(z) = Y(z)/X(z)$. Com auxílio do MATLAB determine seus polos e zeros e ilustre o gráfico do plano-$z$.

d) Considere duas sequências: uma causal dada por $x[n] = a^n u[n]$, para $n > 0$; outra não causal dada por $x[n] = -a^n u[-n-1]$, para $n \leq -1$, sendo $u[n]$ a sequência degrau unitário. Obtenha as expressões para a transformada-$z$ destas sequências, utilizando a definição bilateral (de $-\infty$ a $+\infty$). Apresente também a região de convergência para os dois casos.

**Exercício 3**: Considere o sistema integrador simples em tempo contínuo, $G(s) = 1/s$. Obtenha equivalentes discretos pelo método mapeamento casado polo-zero, considerando:

a) função estritamente própria (grau do denominador > grau do numerador);

b) função biprópria (grau do denominador = grau do numerador).

Em ambos os casos, considere $Ts = 0,1$ e faça com que as respostas sejam casadas em $s_0 = 0,01 \Rightarrow z_0 = e^{T_s s_0}$. Faça o diagrama de Bode dos sistemas obtidos e compare com o do sistema em tempo contínuo.

**Exercício 4**: Obtenha a função de transferência discreta em malha fechada para o sistema da Fig. 2.

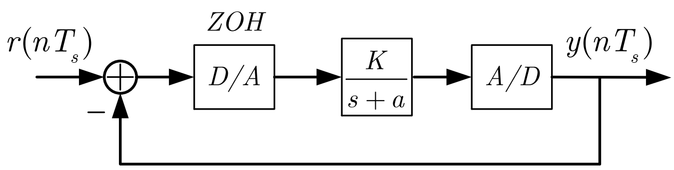


Figura 2: Figura referente ao Exercício 4.

**Exercício 5**: Considere a função de transferência $X(s) = \frac{s+1}{s+10}$. Obtenha os equivalentes discretos no domínio-z, com $T_s = 0,1$ segundos e:

a) retangular para frente;

b) retangular para trás;

c) Tustin;

d) Tustin com pre-distorção em $\omega_c = 3$ rad/s;

e) casamento polo-zero.

OBS: fazer manualmente, sem auxílio de ferramenta computacional.

**Exercício 6**: Leia o apêndice A da apostila. Considere um sistema (planta) com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0,7)}$$

Projete um controlador $C(s)$, tal que o sistema em malha fechada apresente as seguintes características para entrada degrau: tempo de subida igual a 1,0 s; sobressinal igual a 20%.

a) Discretize o controlador pelo método de Tustin considerando $f_s = 4$Hz e $f_s = 20$Hz. Faça as simulações destes casos programando equações de diferenças para os controladores discretos obtidos, utilizando o bloco `Matlab Function`; Compare as respostas com a resposta do sistema de controle em tempo contínuo;

b) considere novamente $f_s = 4$Hz e $f_s = 20$Hz e utilize a aproximação de Padé de primeira ordem para o ZOH. Refaça o projeto dos controladores, apresente as simulações e compare os resultados com a resposta do sistema de controle em tempo contínuo.

OBS: Apresente todos os códigos utilizados.

**Exercício 7**: Considere o sistema apresentado no arquivo `PID_Control_DC_Motor.zip`, que contém o arquivo `dcIntrocomplete.mdl` (Copyright (c) 2010, The MathWorks, Inc. All rights reserved). Trata-se de um sistema de controle digital de um motor CC. Faça inicialmente simulações do PID digital para entender o modelo (não precisa entregar essa etapa).

Atividades para entregar: substitua o controlador original por um a ser programado utilizando o bloco `Matlab Function` com a equação de diferenças do controlador. Readapte o diagrama conforme a Fig. 3, onde o bloco de saturação possui limites ±50V.

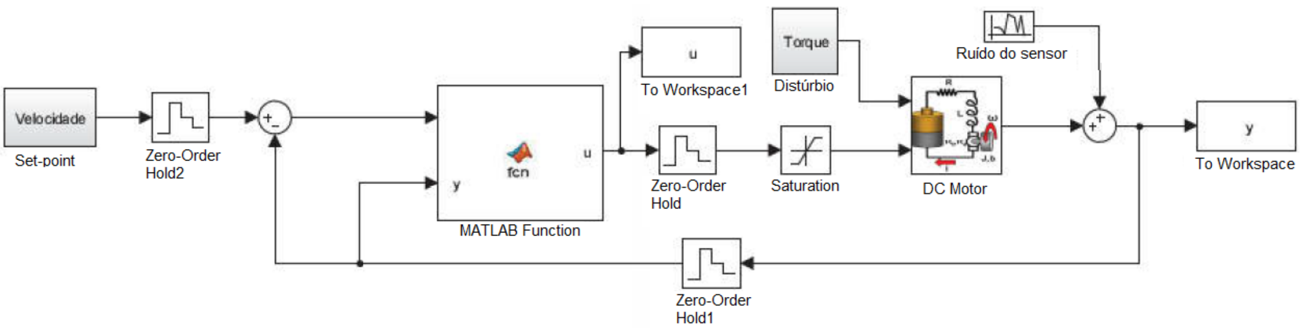


Figura 3: Figura referente ao Exercício 7. Adaptado de `dcIntrocomplete.mdl` (Copyright (c) 2010, The MathWorks, Inc. All rights reserved).

Considere os seguintes casos:

a) PID posicional, com discretização retangular para trás nos termos I e D, sem anti-windup em I, com derivada da saída e sem polo adicional em D;

b) PID posicional, com discretização retangular para trás nos termos I e D, com anti-windup em I, com derivada da saída e sem polo adicional em D;

c) PID posicional, com discretização retangular para trás nos termos I e D, com anti-windup em I, com derivada da saída e com polo adicional em D, tal que $N = 3$.

Em todos os casos, assuma:

- período de amostragem $T_s = 0,01$s;
- duração da simulação igual a 35s;
- sinal de entrada degrau de amplitude 3, com início em $t = 5$s;
- entrada de distúrbio como um pulso retangular de amplitude 0,25, com início em $t = 10$s e término em $t = 25$s;
- ruído de medida com variância igual a 0,01;
- parâmetros do controlador: $K_p = 18$, $T_I = 0,42$, $T_D = 0,05$.

OBS: Ao todo são três simulações. Interprete os resultados. Apresente todos os códigos utilizados.

**Exercício 8**: Escreva uma função no MATLAB para discretização pelo método retangular para trás e outra pelo método retangular para frente, com as seguinte sintaxes: `G_D = backward(G,Ts)` e `G_D = forward(G,Ts)`, sendo `G` um sistema na forma de função de transferência contínua, `G_D` um sistema na forma de função de transferência discreta e `Ts` o período de amostragem.

**Exercício 9**: Escreva uma função no MATLAB para discretização pelo método trapezoidal que resulte em funções de transferências discretas próprias (números de zeros finitos igual ao de polos finitos), com a seguinte sintaxe: `G_D = tustin_prop(G,Ts)`, sendo `G` um sistema na forma de função de transferência contínua, `G_D` um sistema na forma de função de transferência discreta e `Ts` o período de amostragem.

**Exercício 10**: Considere o sistema da Figura 4.

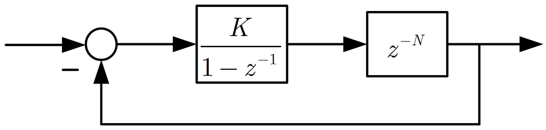


Figura 4: Figura referente ao Exercício 10.

Mostre que para o sistema ser estável, o ganho $K$ precisa set tal que $0 < K < \sqrt{2\left(1 - \cos\left[\frac{\pi}{2N-1}\right]\right)}$.

Dicas:

- Plote o lugar das raízes para o sistema em malha aberta e verifique o comportamento do sistema.
- Avalie a equação característica para $z = e^{j\theta}$, ou seja, no limiar de estabilidade.