

**Juliana Martins de Oliveira  
Victor Pacheco Bartholomeu**

**Modelagem e Controle de Mecanismo  
Paralelo de dois graus de liberdade**

**São Paulo**

**2017**

**Juliana Martins de Oliveira  
Victor Pacheco Bartholomeu**

**Modelagem e Controle de Mecanismo Paralelo de  
dois graus de liberdade**

Texto apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como requisito para a conclusão do curso de graduação em Engenharia Mecatrônica, junto ao Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos (PMR)

Orientador: Prof Dr Tarcisio A. Hess Coelho

São Paulo

2017

Este relatório é apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Engenharia Mecatrônica na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. É o produto do meu próprio trabalho, exceto onde indicado no texto. O relatório pode ser livremente copiado e distribuído desde que a fonte seja citada.

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	7
1.1	Descrição do Tema . . . . .	7
1.2	Objetivos . . . . .	8
1.3	Motivação . . . . .	8
1.3.1	interesse sócio-econômico . . . . .	8
1.3.2	Mérito técnico-científico . . . . .	9
1.4	Revisão bibliográfica . . . . .	9
2	METODOLOGIA DO PROJETO . . . . .	13
2.1	Modelagem e simulação: . . . . .	13
2.2	Validação experimental: . . . . .	13
2.3	Recursos necessários . . . . .	14
3	MODELAGEM E SIMULAÇÃO . . . . .	16
3.1	Cinemática de Posição . . . . .	16
3.1.1	Cinemática inversa . . . . .	16
3.1.2	Cinemática Direta . . . . .	17
3.2	Cinemática de Velocidade . . . . .	18
3.3	Área de Trabalho . . . . .	19
3.4	Modelagem Dinâmica . . . . .	19
3.4.1	Algoritmo de acoplamento . . . . .	22
3.4.2	Modelo do 5R . . . . .	23
3.4.3	Resultados da simulação . . . . .	26
3.5	Modelagem do motor . . . . .	27
4	PROJETO DO MECANISMO . . . . .	30
5	PROJETO DO CONTROLADOR . . . . .	32
5.1	Descrição do Sistema . . . . .	32
5.2	Sistema de controle . . . . .	33
5.2.1	Derivador . . . . .	33
5.2.2	Cálculo da corrente . . . . .	35
5.3	Identificação de parâmetros do sistema . . . . .	36
5.4	Controlador Linear de posição . . . . .	39
5.5	Controlador de corrente . . . . .	42
5.5.1	Projeto do controlador de corrente . . . . .	42

5.5.2	Rejeição à distúrbios . . . . .	44
5.5.3	Anti Wind-up . . . . .	45
5.6	Controladores não lineares . . . . .	46
5.7	Controle por Torque Computado . . . . .	47
5.8	Sliding Mode Control . . . . .	48
5.8.1	Introdução ao Sliding Mode Control . . . . .	49
5.8.2	Introdução ao Sliding Mode Control modificado . . . . .	50
5.8.3	Sliding Mode Control modificado . . . . .	52
6	RESULTADOS . . . . .	53
6.1	Projeto Mecânico . . . . .	53
6.2	Simulação do controle não linear . . . . .	53
6.3	Implementação das leis Controles . . . . .	57
6.3.1	Implementação nos motores em vazio . . . . .	57
6.3.2	Implementação no mecanismo . . . . .	58
7	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	60
8	EQUIPE DE TRABALHO . . . . .	61
	 REFERÊNCIAS . . . . .	62
	 APÊNDICE A – PROJETO DE DRIVER DE ALTA POTÊNCIA	64
A.1	Funcionamento . . . . .	64
A.2	Fabricação . . . . .	65
	 APÊNDICE B – CINEMÁTICA . . . . .	66
	 APÊNDICE C – ÁREA DE TRABALHO . . . . .	70
	 ANEXO A – PONTE H . . . . .	72
	 ANEXO B – DATASHEET DO MOTOR . . . . .	78

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pentágono Articulado - Fonte: Própria . . . . .	14
Figura 2 – Esquemático de um mecanismo 5R - Fonte: ( <a href="#">COUTINHO, 2016</a> ) . . . . .	16
Figura 3 – Área de trabalho do mecanismo 5R - Fonte: Própria . . . . .	19
Figura 4 – Mecanismo RR modelado - Fonte: ( <a href="#">COUTINHO, 2016</a> ) . . . . .	21
Figura 5 – Perfil dos torques para um ciclo do motor 1 - Fonte:Própria . . . . .	26
Figura 6 – Perfil dos torques para um ciclo do motor 2 - Fonte: Própria . . . . .	26
Figura 7 – Circuito elétrico do motor - Fonte:Própria . . . . .	27
Figura 8 – 5R sem estrutura - Fonte:Própria . . . . .	30
Figura 9 – 5R com estrutura - Fonte:Própria . . . . .	31
Figura 10 – Arquitetura do sistema - Fonte:Própria . . . . .	33
Figura 11 – Arquitetura de controle - Fonte:Própria . . . . .	34
Figura 12 – Curva de velocidade do motor 1 - Fonte:Própria . . . . .	36
Figura 13 – Curva de velocidade do motor 2 - Fonte:Própria . . . . .	36
Figura 14 – Resposta a degrau unitário - Fonte:Própria . . . . .	41
Figura 15 – Malha de controle dos motores - Fonte:Própria . . . . .	43
Figura 16 – Resposta a degrau unitário - Fonte:Própria . . . . .	44
Figura 17 – Rejeição à distúrbios - Fonte:Própria . . . . .	45
Figura 18 – Malha de controle de corrente com Anti Wind-up - Fonte:Própria . . .	46
Figura 19 – Malha de controle por <i>feedback Linearization</i> - Fonte:Própria . . .	48
Figura 20 – Diagrama de blocos da malha de controle por SMC - Fonte:Própria .	52
Figura 21 – Frequência natural $68.40\text{Hz}$ - Fonte:Própria . . . . .	53
Figura 22 – Frequência natural $90.10\text{Hz}$ - Fonte:Própria . . . . .	53
Figura 23 – Protótipo montado - Fonte:Própria . . . . .	54
Figura 24 – Erro na coordenada x - Fonte:Própria . . . . .	55
Figura 25 – Erro na coordenada y - Fonte:Própria . . . . .	55
Figura 26 – Erro na coordenada x - Fonte:Própria . . . . .	56
Figura 27 – Erro na coordenada y - Fonte:Própria . . . . .	56
Figura 28 – Torque aplicado pelo atuador 1 - Fonte:Própria . . . . .	56
Figura 29 – Torque aplicado pelo atuador 2 - Fonte:Própria . . . . .	56

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
<u>R</u> <u>R</u> <u>R</u> <u>R</u> <u>R</u>	mecanismo de cinco juntas rotativas (R), sendo <u>R</u> as juntas que contém acionadores
5R	Refere-se ao mecanismo pentágono articulado, mesma arquitetura do <u>R</u> <u>R</u> <u>R</u> <u>R</u> <u>R</u>
IHM	Interface Homem Máquina
GMSIE	Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impactos em Estruturas
IIR	<i>Infinite Impulse Response</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>

# 1 INTRODUÇÃO

Mecanismos paralelos são amplamente utilizados em simuladores, tarefas de *pick-and-place* e em máquinas de ensaios e manipuladores.

São bem conhecidas as vantagens de mecanismos paralelos em comparação aos de arquitetura serial: baixo peso, resposta dinâmica rápida, alta precisão, alta rigidez e alta capacidade de carga. Entretanto, tais vantagens vêm ao custo de um menor espaço de trabalho e modelo dinâmico mais complexo e de difícil obtenção ([KHALIL, 2002](#)), tais mecanismos podem apresentar uma dinâmica bastante não linear. Em muitas indústrias são utilizados métodos lineares para controlar estes mecanismos, com o intuito de facilitar o projeto. Entretanto, embora muitas vezes seja razoável tal aproximação, em muitos casos é impossível encontrar linearizações válidas para todas as regiões da área de trabalho ([CRAIG, 2005](#), cap. 9).

Parte das vantagens se devem à possibilidade de instalação de todos os acionadores em uma base imóvel do mecanismo. Com isso reduz-se a necessidade de elos mais rígidos e, como consequência, há redução da inércia sem perda de rigidez do mecanismo devido à presença de cadeias cinemáticas paralelas. Tais fatos permitem que o mecanismo atinja altas velocidades e acelerações, superando muito os valores máximos atingidos em mecanismos de arquitetura serial. ([KHALIL, 2002](#); [ALMEIDA, 2013](#))

Mesmo obtendo-se modelos satisfatórios e completos da dinâmica do mecanismo, o uso de técnicas de controle não linear baseadas no modelo dinâmico podem acarretar em grande custo computacional, e pode gerar resultados muito inferiores ao potencial máximo das máquinas ([CRAIG, 2005](#), cap. 9, 10) como a alta precisão e rápida resposta dinâmica caso se utilize hardwares de baixo custo.  $\delta$

## 1.1 Descrição do Tema

O controle de mecanismos de arquitetura paralela é muito difícil de ser feito devido às características altamente não lineares do sistema e devido à grande dificuldade de obtenção dos modelos dinâmicos pelos métodos tradicionais. Mesmo que obtida a modelagem dinâmica, isso apenas garante bom desempenho no controle para *hardwares* de altíssimo desempenho. Um dos motivos disso é a preferência ao uso de métodos de controle com compensação dinâmica exata que aumentam o custo computacional da lei de controle, exigindo *hardwares* mais caros e de alto desempenho. Além disso, algumas leis de controle não linear assumem que o modelo calculado é perfeito e, portanto, são pouco robustos para incertezas grandes.

Diante disso, é proposta a análise dinâmica de um pentágono articulado utilizando o método de Orsino ([ORSINO, 2013](#)) adaptada e otimizada para mecanismos paralelos. O microprocessador proposto para ser usado é o Raspberry Pi2. Serão implementadas 2 leis de controle: A primeira é o *sliding mode control* devido à grande robustez ([COUTINHO, 2016](#)). Podem ser encontradas referências em que esta técnica é aplicada em conjunto com outros métodos ([ABDELLATIF B. HEIMANN, 2010; EBRAHIMI FARZIN PILTAN; NABAEE, 2013](#)) ou simulada a partir de outra técnica([CHEMORI GUILHERME SARTORI NATAL, 2013](#)); A segunda é o Torque Computado, caso particular de *feedback linearization*, técnica amplamente utilizada em controle de mecanismos ([CRAIG, 2005](#), cap. 10).

## 1.2 Objetivos

Após concepção do mecanismo, o trabalho tem como objetivos:

- Realizar a modelagem dinâmica de um mecanismo paralelo do tipo pentágono articulado.
- Estudar e projetar sistemas de controle não lineares de trajetórias considerando incertezas do modelo do mecanismo em questão.
- Obter resultados experimentais de aplicação dos controles não lineares em mecanismos paralelos
- Avaliar o desempenho do mecanismo através das técnicas aplicadas.

Como resultados, espera-se obter alta precisão e acurácia e tornar possível atingir altas velocidades (com tempo de resposta na ordem de 28ms) e acelerações em mecanismos que apresentam arquitetura paralela através de técnicas de controle, de forma que seja pouco custoso para microcontroladores.

## 1.3 Motivação

### 1.3.1 interesse sócio-econômico

Devido às vantagens de mecanismos paralelos como o baixo peso, alta precisão e alta capacidade de carga, este tipo de mecanismo apresenta grandes vantagens no ramo industrial, sobretudo àqueles que utilizam mecanismos com a tarefa de *pick-and-place*.

A grande vantagem deste mecanismo é que possui baixo custo em relação a um de arquitetura serial com mesma função. O trabalho visa alta performance a médio custo computacional visando microcontroladores de menor custo.

Espera-se que o mecanismo possa ser utilizado de forma didática para apresentar projetos de controladores em disciplinas da graduação de forma a aprimorar o entendimento e motivar os alunos com aplicação real do estudo em questão.

### 1.3.2 Mérito técnico-científico

Este trabalho utilizará métodos para sistematizar a modelagem dinâmica em mecanismos paralelos, o que é pouco encontrado na literatura. A síntese de leis de controle robusto considerando a dinâmica e de alto desempenho para mecanismos de alta complexidade de modelagem é também muito pouco encontrada na literatura.

Dessa forma, este trabalho visa obter resultados de um mecanismo paralelo controlado através de um projeto de controle não linear baseado em sua modelagem dinâmica.

Este trabalho visa, também, estudar e explorar técnicas de controle, e compará-las.

## 1.4 Revisão bibliográfica

Nesta seção será apresentada uma Revisão da literatura com o foco em técnicas de controle de posição para acompanhamento de trajetórias, sobretudo àquelas relativas a mecanismos de arquitetura paralela.

As maneiras mais comuns de se descrever a posição e a orientação de um robô são pelos conjunto de coordenadas dos atuadores e conjunto de coordenadas do efetuador, também denominados espaço das juntas e espaço de tarefas, respectivamente. Usualmente, utiliza-se o espaço de tarefas para a geração de trajetórias e dessa forma, consegue-se passar a trajetória para o espaço dos atuadores por meio das equações de cinemática inversa. Ao aplicar o controle sobre as coordenadas do efetuador mas mantendo a medição sobre as coordenadas dos atuadores, pode-se definir os ganhos de controle de forma que se relacione diretamente com os requisitos de movimentação do efetuador. Também pode-se realizar o controle e as medições sobre as coordenadas do efetuador, assim, não é necessário o cálculo da cinemática direta dentro do laço de controle ([ALMEIDA, 2013](#)).

As principais técnicas de controle identificadas na literatura para arquiteturas paralelas foram:

- Controle por torque computado
- Controle por torque computado *feedforward*
- Controle por torque computado estendido
- Controle preditivo
- Controle adaptativo

- *Sliding mode control* (Controle por modos deslizantes)

Para explorar o potencial de robôs de arquitetura paralela, uma forma é a utilização de técnicas de controle baseada no modelo dinâmico do robô. Pode-se separar as técnicas de controle para robôs paralelos em basicamente dois grupos. O primeiro, controle Descentralizado, em que se controla as juntas ativas independentemente uma das outras. O segundo, Controle Centralizado, em que se considera o robô como um todo e faz-se o controle das juntas ativas considerando o acoplamento entre as juntas ([ZUBIZARRETA I. CABANES, 2008](#)). Dentro desse segundo grupo, a técnica de controle mais explorada é a de Controle de Torque Computado que compensa as não linearidades do robô com a modelagem da dinâmica inversa.

Dentre alguns trabalhos aplicados ao controle de manipuladores paralelos que empregam o controle por torque computado se encontra ([LI, 2009](#)), com a arquitetura 3PRC. Para grandes incertezas na modelagem, o controlador pode obter erros muito grandes, portanto foi introduzido um algoritmo de controle robusto no laço de controle. Entretanto, não se pode afirmar que os resultados foram melhores com esta abordagem em comparação à abordagem sem o controle robusto. Acredita-se ainda que os resultados foram consequência das condições de simulação muito severas, nas quais havia desvios de 20% nos parâmetros de modelagem.

Segundo ([ZUBIZARRETA I. CABANES, 2013](#), et al.), os resultados obtidos utilizando-se técnicas usuais de identificação dinâmica para mecanismos paralelos não possuem a mesma qualidade que os obtidos para mecanismos seriais. Dessa forma, os erros de modelagem podem resultar em instabilidade do sistema mesmo utilizando modelos mais elaborados para o desenvolvimento de leis de controle por torque computado.

Uma variação testada foi a técnica de torque computado *feedforward* (ou *Predictive Dynamic Control* ([KHALIL, 2002](#))), que consiste na adição de uma compensação de não linearidades fora do laço de controle. Como vantagens, podemos citar o fato de ser possível calcular a parte *feedforward* antes da movimentação do robô ([CRAIG, 2005](#), cap. 10), permitindo altas taxas de amostragem e baixo custo computacional. Entretanto, este método só obtém resultados realmente bons, para pequenos erros de controle durante a realização da trajetória. Por esse motivo, este método não garante grande robustez. Como exemplos, podemos citar ([WANG JUN WU, 2009](#), et al.) com uma arquitetura Stewart-Gough ou ([CODOUREY, 1996](#)) para a arquitetura delta.

Outra variação proposta foi uma ampliação da técnica de torque computado em que são inseridos sensores nas juntas passivas e é realizado o controle sobre variáveis redundantes para atenuar o efeito dos erros de modelagem. Essa técnica é denominada controle por torque computado estendido e foi implementada para o controle de mecanismo do tipo pentágono articulado ([ZUBIZARRETA I. CABANES, 2008](#), et al.), plataforma

Stewart-Gough ([ZUBIZARRETA I. CABANES, 2013](#), et al.), e mecanismo plano do tipo 3RRR ([ZUBIZARRETA I. CABANES, 2012](#), et al.). Em geral, os resultados são melhores com a adição de sensores nas juntas passivas. Porém, foi constatado que, em alguns casos, não há ganho com a adição desses sensores ao robô.

Outra técnica de controle que pode ser utilizada é a de controle adaptativo. Nesta técnica, busca-se a convergência de parâmetros de controle, que são calculadas continuamente e em tempo real. Como vantagens, soluciona-se problema de o controlador não ser válido em determinadas regiões ([CRAIG, 2005](#)). No trabalho de ([WANG JUN WU, 2009](#), et al.) esta técnica não apresentou resultados satisfatórios em manipuladores de alto desempenho, devido ao alto custo computacional verificado. Já ([CHEMORI GUILHERME SARTORI NATAL, 2013](#)) utiliza controle adaptativo no projeto para controlar um mecanismo paralelo com tarefa de *pick and place* em trajetórias 2D. Como o período transitório apresenta erros muito grandes, neste período foi criada uma lei de adaptação que se comporta de maneira similar a um controlador por modos deslizantes, reduzindo os erros. Esta abordagem permitiu robustez nos resultados testados a altas acelerações. A questão de custo computacional não foi abordada neste trabalho

O controle preditivo, também encontrado na literatura, faz uso de predição de saídas da planta em malha fechada, do cálculo de esforços de controle a fim de minimização e avaliação de uma função objetivo em um intervalo de tempo futuro ([CAMACHO, 2000](#)).

([DUCHAINE S. BOUCHARD, 2007](#)) trabalharam com um modelo não linear de um robô paralelo com 6 graus de liberdade utilizando o controle preditivo. No entanto, varias simplificações foram feitas, com o objetivo de se obter uma relação entre a precisão do modelo e o tempo computacional.

Diferente dos métodos apresentados anteriormente o *sliding mode control* tem a capacidade de lidar com incertezas do modelo. Isto é, o controlador é robusto mesmo com incertezas estruturais (erros nos termos considerados no modelo) ou com incertezas não estruturais (dinâmicas não modeladas) ([SLOTINE, 1991](#), cap. 7).

O método define uma superfície de deslizamento que caracteriza uma função erro do acompanhamento à trajetória. A lei de controle visa garantir que o erro atinja a superfície em um tempo finito e em seguida tenda exponencialmente a zero. Neste método, é usado um termo descontínuo de compensação de incertezas na modelagem. Erros de modelagem desprezadas e com dinâmicas rápidas podem resultar em uma oscilação em torno da trajetória pretendida (*chattering*) ([GULDNER, 2006](#)). A oscilação pode ser suavizada com a imposição de uma camada limite em torno da superfície, com isto, não é mais necessário o termo descontínuo. Como consequência desta abordagem, o acompanhamento da trajetória pode ser comprometido ([SLOTINE, 1991](#), cap. 7).

Em ([EBRAHIMI FARZIN PILTAN; NABAEE, 2013](#)) é realizado o projeto de

controlador pelo método de *sliding mode control*, e é implementada a teoria de lógica Fuzzy para compensar incertezas do controle dinâmico. Então foram comparados o uso de um controle por *sliding mode* puro e um controle por *sliding mode* com lógica Fuzzy em paralelo. Os resultados por simulação em um modelo de mecanismo serial mostraram que é possível reduzir o efeito de chattering do método de *Sliding Mode*.

Em ([BEGON F. PIERROT, 1995](#)) a abordagem testada foi baseada em controle de estrutura variável com *sliding mode*. Além disso, foi aplicada a lógica Fuzzy, para minimizar o *chattering* em um mecanismo paralelo de seis graus de liberdade. Foi possível perceber que o *sliding mode control* associado à lógica Fuzzy reduziu os erros para movimentos de alta velocidade. Entretanto, devido à magnitude das entradas de controle, determinadas pela lógica Fuzzy, não foi possível garantir estabilidade, além de ter havido dificuldades na determinação de parâmetros para o controlador Fuzzy.

## 2 METODOLOGIA DO PROJETO

Este trabalho será dividido em duas etapas. Na primeira etapa será feita a modelagem e simulação do mecanismo e do controlador, já a segunda etapa será a validação experimental.

### 2.1 Modelagem e simulação:

Esta etapa será dividida nas seguintes tarefas:

1. **Modelagem cinemática:** Esta tarefa consiste em encontrar os modelos cinemáticos de posição, inverso e direto, velocidade e aceleração para o mecanismo 5R.
2. **Obtenção da área de trabalho:** Será obtida através do modelo cinemático, juntamente com as posições das singularidades.
3. **Modelagem dinâmica:** Serão obtidos os modelos dinâmicos dos atuadores e do mecanismo através do método Orsino ([ORSINO, 2013](#)).
4. **Simulação dinâmica inversa:** Será utilizada para obtenção dos torques máximos necessários para trajetórias definidas.
5. **Cálculo das frequências naturais:** Será feita utilizando o método de elementos finitos para diversas configurações do mecanismo. Será utilizada para restrição dos ganhos do controlador.
6. **Projeto do Controlador:** será realizada em duas etapas:

A primeira etapa consiste em projetar e simular um controlador seguidor de corrente para os motores em vazio, projetar um controlador linear de posição para os motores.

A segunda etapa consiste em projetar e simular um controlador não linear com os métodos de *feedback linearization* ([CRAIG, 2005](#), cap. 10) e de *sliding mode control* ([SLOTINE, 1991](#)) baseado no modelo dinâmico do mecanismo e utilizando o controlador de corrente na malha de controle, considerando as incertezas paramétricas e a dinâmica dos atuadores, para o controle de trajetória do mecanismo.

### 2.2 Validação experimental:

A parte experimental será dividida em quatro áreas de acordo com os pilares da mecatrônica: Mecânica, Elétrica, Controle e *Software*.

1. **Elétrica:** A parte elétrica consiste na construção de drivers para motores, assim como da escolha destes, dos *encoders*, sensores de corrente, interfaces entre os componentes e do microcontrolador a ser utilizado. Inicialmente será testada a leitura de corrente dos motores utilizando materiais já disponíveis no laboratório de mecanismos da EPUSP e posteriormente com os materiais selecionados.
2. **Mecânica:** Esta área será dividida em duas partes:
  - Projeto do mecanismo através de um *software CAD*.
  - Construção do protótipo.
3. **Controle:** Esta área consiste na identificação dos parâmetros do sistema para obtenção da planta e a implementação dos controladores descritos anteriormente.
4. **Firmware:**  
Esta parte está diretamente relacionada à implementação do controlador ao micro-controlador

## 2.3 Recursos necessários

Um protótipo de mesma arquitetura que encontrava-se no laboratório de mecanismos da EPUSP (Figura 1). Este protótipo foi alterado de forma a reduzir folgas e atritos, utilizando novas peças de alumínio fabricadas na oficina da EPUSP.

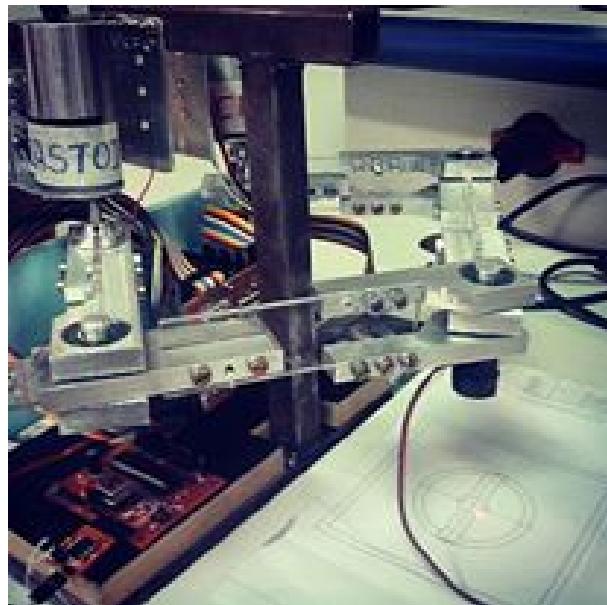


Figura 1 – Pentágono Articulado - Fonte: Própria

Os equipamentos e a infraestrutura para a construção do protótipo foram fornecidas pelo laboratório GMSIE e pelo departamento PMR da EPUSP.

Para testes iniciais, foram utilizados motores do laboratório de mecanismos. Posteriormente, estes elementos foram comprados. Os drivers dos motores foram produzidos utilizando transistores do tipo MOSFET de alta capacidade de corrente e alta velocidade de chaveamento. Para testes, foi também utilizado um driver modelo Pololu Dual VNH5019 Motor Driver Shield. O microcontrolador utilizado foi um Raspberry Pi2®. Como conversor A/D para leitura de corrente, foi utilizado um arduino uno®.

Foram utilizados também, computadores e periféricos dos membros do grupo deste projeto.

### 3 MODELAGEM E SIMULAÇÃO

Nessa primeira etapa foi feita a modelagem cinemática do mecanismo. Foi utilizada a solução analítica da cinemática inversa e direta de posição baseada em ([COUTINHO, 2016](#)).

A modelagem foi baseada no mecanismo 5R da Figura 2.

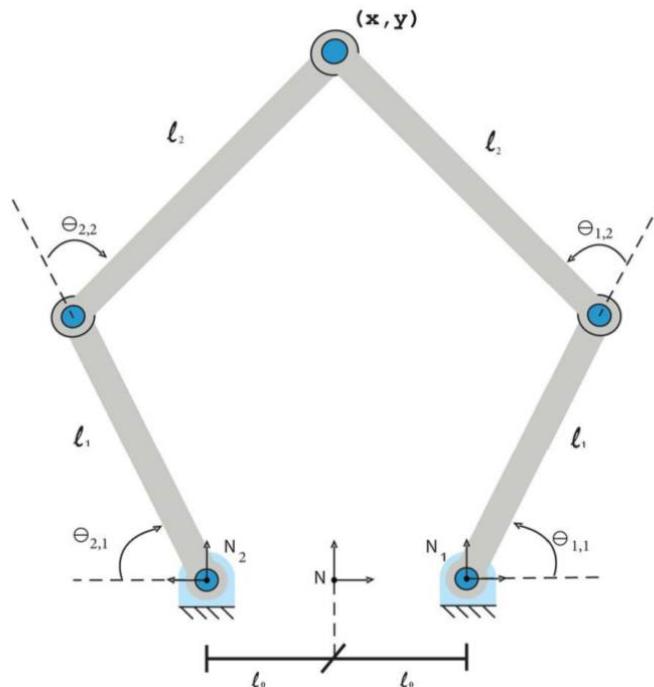


Figura 2 – Esquemático de um mecanismo 5R - Fonte: ([COUTINHO, 2016](#))

#### 3.1 Cinemática de Posição

##### 3.1.1 Cinemática inversa

Definindo as coordenadas do efetuador  $\mathbf{x}$  e dos atuadores  $\mathbf{t}$  como:

$$\mathbf{x} = (x_p, y_p) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{t} = (\theta_{1,1}, \theta_{1,2}) \quad (3.2)$$

Admite-se que as coordenadas  $\mathbf{x}$  sejam conhecidas. A partir delas encontra-se as coordenadas  $\mathbf{t}$ . Assim, pode-se descrever o sistema:

$$\begin{cases} (x_p - (l_0 + l_1 \cos(\theta_{1,1})))^2 + (y_p - (l_1 \sin(\theta_{1,1})))^2 - l_2^2 = 0 \\ (x_p - (-l_0 - l_1 \cos(\theta_{1,2})))^2 + (y_p - (l_1 \sin(\theta_{1,2})))^2 - l_2^2 = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Podemos reescrever as equações na forma:

$$\begin{cases} E_1 \cos(\theta_{1,1}) + F_1 \sin(\theta_{1,1}) + G_1 = 0 \\ E_2 \cos(\theta_{1,2}) + F_2 \sin(\theta_{1,2}) + G_2 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Sendo que,

$$\begin{cases} E_1 = 2(-x_p + l_0)l_1 \\ F_1 = -2y_p l_1 \\ G_1 = x_p^2 + y_p^2 - 2x_p l_0 + l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} E_2 = 2(x_p + l_0)l_1 \\ F_2 = -2y_p l_1 \\ G_2 = x_p^2 + y_p^2 + 2x_p l_0 + l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

A solução analítica da equação (3.4) pode ser encontrada em ([COUTINHO, 2016](#)). Dessa forma, tem-se que os valores de  $\mathbf{t}$  são:

$$\begin{cases} \theta_{1,1} = 2\arctan\left(\frac{-F_1 \pm \sqrt[2]{E_1^2 + F_1^2 - G_1^2}}{G_1 - E_1}\right), E_1 \neq G_1 \\ \theta_{1,1} = 2\arctan\left(\frac{-E_1}{F_1}\right), E_1 = G_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \theta_{2,1} = 2\arctan\left(\frac{-F_2 \pm \sqrt[2]{E_2^2 + F_2^2 - G_2^2}}{G_2 - E_2}\right), E_2 \neq G_2 \\ \theta_{2,1} = 2\arctan\left(\frac{-E_2}{F_2}\right), E_2 = G_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

A dedução e simulação da cinemática inversa foi implementada em Python e pode ser encontrada no apêndice B

### 3.1.2 Cinemática Direta

Na cinemática direta será considerado que as coordenadas  $\mathbf{t}$  são conhecidas e, portanto, serão obtidas as coordenadas  $\mathbf{x}$  do mecanismo. Podemos reescrever a equação (3.3) na forma:

$$\begin{cases} (x_p - x_{c1})^2 + (y_p - y_{c1})^2 - r^2 = 0 \\ (x_p - x_{c2})^2 + (y_p - y_{c2})^2 - r^2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Onde,

$$\begin{cases} x_{c1} = l_0 + l_1 \cos(\theta_{1,1}) \\ y_{c1} = l_1 \sin(\theta_{1,1}) \\ x_{c2} = -l_0 - l_1 \cos(\theta_{1,2}) \\ y_{c2} = l_1 \sin(\theta_{1,2}) \\ r = l_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Definindo:

$$\begin{cases} x_m = \frac{x_{c1} + x_{c2}}{2} \\ y_m = \frac{y_{c1} + y_{c2}}{2} \\ dx = x_{c1} - x_{c2} \\ dy = y_{c1} - y_{c2} \end{cases} \quad (3.11)$$

Resolvendo a equação, a qual a solução analítica pode ser encontrada em ([COUTINHO, 2016](#)), tem-se que:

$$x_p = x_m \mp dy \sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.12)$$

$$y_p = y_m \pm dx \sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \quad (3.13)$$

## 3.2 Cinemática de Velocidade

Reescrevendo as equações (3.3), como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} (x_p - (l_0 + l_1 \cos(\theta_{1,1})))^2 + (y_p - (l_1 \sin(\theta_{1,1})))^2 - l_2^2 \\ (x_p - (-l_0 - l_1 \cos(\theta_{1,2})))^2 + (y_p - (l_1 \sin(\theta_{1,2})))^2 - l_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Derivando no tempo:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{t}} \dot{\mathbf{t}} = 0 \quad (3.15)$$

sendo que,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}_x \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{J}_t \quad (3.17)$$

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} -2l_o - 2l_1 \cos(\theta_{1,1}) + 2x_p & -2l_1 \sin(\theta_{1,1}) + 2y_p \\ 2l_o + 2l_1 \cos(\theta_{1,2}) + 2x_p & -2l_1 \sin(\theta_{1,2}) + 2y_p \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{J}_t = \begin{bmatrix} 2l_1(-l_0 \sin(\theta_{1,1}) + x_p \sin(\theta_{1,1}) - y_p \cos(\theta_{1,1})) & 0 \\ 0 & -2l_1(l_0 \sin(\theta_{1,2}) + x_p \sin(\theta_{1,2}) + y_p \cos(\theta_{1,2})) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

### 3.3 Área de Trabalho

A partir da cinemática inversa, foi obtida a área de trabalho do mecanismo.

Na simulação foi realizada uma discretização (de 0,0005m) e em cada ponto da malha foi verificado se o ponto pertencia ou não à área de trabalho. Para a análise dos pontos de singularidade foi considerado um  $\epsilon$  da ordem de  $10^{-4}$  (Valor máximo dos módulos dos determinantes). Sendo assim, caso o módulo do determinante das Jacobianas for menor que  $\epsilon$  então o ponto é considerado singular. A implementação do código para se obter a área de trabalho encontra-se no apêndice C

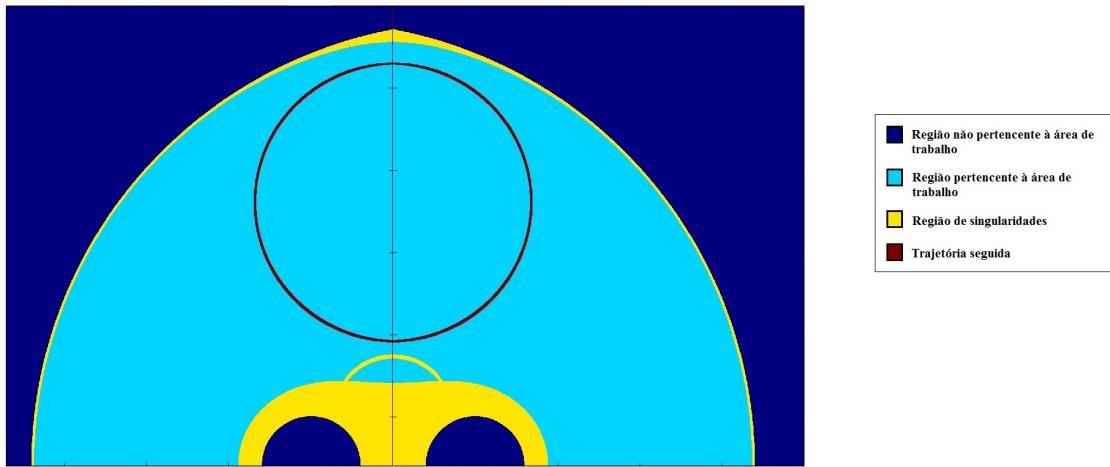


Figura 3 – Área de trabalho do mecanismo 5R - Fonte: Própria

Dessa forma, determinou-se a área de trabalho da figura 3. A cor azul escuro representa a região não pertencente à área de trabalho, já as cores azul clara e vermelho são as regiões em que o mecanismo pode trabalhar sem restrições. A circunferência vermelha é a trajetória de referência para o projeto de controle. Já o amarelo indica as regiões de singularidades do mecanismo.

### 3.4 Modelagem Dinâmica

O modelo desse mecanismo foi obtido usando a técnica de acoplamento de subsistemas do método Orsino ([ORSINO, 2013](#)). Os subsistemas usados são 2 mecanismos RR e uma massa pontual.

É possível descrever o modelo de diversos sistemas mecânicos da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{M}^\#(\mathbf{q}^\#)\ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{v}^\#(\mathbf{q}^\#, \dot{\mathbf{q}}^\#) + \mathbf{g}^\#(\mathbf{q}^\#) - \mathbf{u}^\# = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

Ou seja,

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{q}^\#, \dot{\mathbf{q}}^\#, \ddot{\mathbf{q}}^\#) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Onde,  $\mathbf{M}^\#$  é a matriz de inércia generalizada,  $\mathbf{v}^\#$  são as forças de inércia giroscópicas generalizadas,  $\mathbf{g}^\#$  são os esforços gravitacionais generalizados,  $\mathbf{u}^\#$  são os esforços ativos generalizados, e  $\mathbf{q}^\#$  é o conjunto de coordenadas generalizadas independentes.

Dessa forma, a massa pontual livre pode ser modelada como segue:

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 x_p}{dt^2} = 0 \\ m_0 \frac{d^2 y_p}{dt^2} = -m_0 g \end{cases} \quad (3.22)$$

Passando para a forma matricial temos que:

$$\mathbf{M}^\# = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{q}^\# = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{v}^\# = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{g}^\# = \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 g \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}^\# = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

Já o modelo do mecanismo RR da figura 4 é apresentado como:

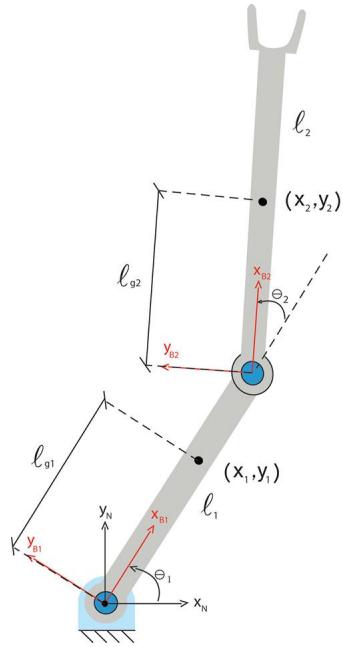
$$\mathbf{M}^\# = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{q}^\# = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{v}^\# = \begin{bmatrix} D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{g}^\# = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{u}^\# = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Figura 4 – Mecanismo RR modelado - Fonte: ([COUTINHO, 2016](#))

Onde os coeficientes são definidos no ([COELHO LIANG YONG, 2004](#)) e são apresentadas como:

$$D_{11} = m_1 l_{g1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{g2}^2) + I_2 + 2l_1 \cos\theta_2 m_2 l_{g2} \quad (3.33)$$

$$D_{21} = D_{12} = m_2 l_{g2}^2 + I_2 + l_1 \cos\theta_2 m_2 l_{g2} \quad (3.34)$$

$$D_{111} = D_{222} = D_{212} = D_{221} = 0 \quad (3.35)$$

$$D_{112} = D_{121} = D_{122} = -l_1 \sin\theta_2 m_2 l_{g2} \quad (3.36)$$

$$D_{22} = m_2 l_{g2}^2 + I_2 \quad (3.37)$$

$$D_{211} = l_1 \sin\theta_2 m_2 l_{g2} \quad (3.38)$$

$$D_1 = g \cos\theta_1 (m_1 l_{g1} + m_2 l_1) + g \cos(\theta_1 + \theta_2) m_2 l_{g2} \quad (3.39)$$

$$D_2 = g \cos(\theta_1 + \theta_2) m_2 l_{g2} \quad (3.40)$$

### 3.4.1 Algorítmo de acoplamento

De acordo com (ORSINO; COUTINHO; COELHO, 2016, et al.) é possível obter o modelo dinâmico de um sistema mecânico a partir dos modelos de seus subsistemas e os vínculos entre eles.

Sejam,  $n + 1$  a quantidade de subsistemas dados pelas equações:

$$\bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i^\#, \dot{\mathbf{q}}_i^\#, \ddot{\mathbf{q}}_i^\#) = 0, i = 0, \dots, n \quad (3.41)$$

Então são definidas as coordenadas generalizadas, onde  $\mathbf{q}^\#$  como coordenadas independentes e  $\mathbf{q}^o$  como coordenada redundante e  $\mathbf{q}_i^\#$  é o conjunto das coordenadas generalizadas independentes do subsistema  $i$ :

$$\mathbf{q}^\# = \mathbf{q}_0^\# \quad (3.42)$$

$$\mathbf{q}^o = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^\# \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^\# \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\# \\ \mathbf{q}^o \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Definindo os vínculos de posição como:

$$\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

Obtém-se a matriz dos vínculos cinemáticos  $\mathbf{C}$  a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}^{-1}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}^\#} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  respeita a seguinte relação cinemática:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^\# \quad (3.47)$$

Sendo assim, obtemos o modelo acoplado a partir da expressão:

$$\bar{\mathbf{f}}' = \mathbf{C}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_0 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_n \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\bar{\mathbf{f}}' = \mathbf{M}'^\#(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{v}'^\#(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}'^\#(\mathbf{q}) - \mathbf{C}^T \mathbf{u}' = 0 \quad (3.49)$$

Onde,

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0^\# & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1^\# & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M}_n^\# \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^\# \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\# \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^\# \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n^\# \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^\# \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\# \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{M}'^\# = \mathbf{C}^T \mathbf{M}' \mathbf{C} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{v}'^\# = \mathbf{C}^T (\mathbf{M}' \dot{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{v}') \quad (3.55)$$

$$\mathbf{g}'^\# = \mathbf{C}^T \mathbf{g}' \quad (3.56)$$

### 3.4.2 Modelo do 5R

Pelo método é possível modelar o mecanismo 5R a partir dos modelos de massa pontual e dos dois mecanismos RR modelados anteriormente.

Definindo os vínculos de posição como:

$$\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_p - l_0 - l_1 \cos \theta_{1,1} - l_2 \cos(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) \\ y_p - l_1 \sin \theta_{1,1} - l_2 \sin(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) \\ x_p + l_0 + l_1 \cos \theta_{2,1} + l_2 \cos(\theta_{2,1} + \theta_{2,2}) \\ y_p - l_1 \sin \theta_{2,1} - l_2 \sin(\theta_{2,1} + \theta_{2,2}) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.57)$$

Assim, temos que  $\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}^\#}$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} l_1 s(\theta_{1,1}) + l_2 s(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) & l_2 s(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) & 0 & 0 \\ -l_1 c(\theta_{1,1}) - l_2 c(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) & -l_2 c(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 s(\theta_{2,1}) - l_2 s(\theta_{2,1} + \theta_{2,2}) & -l_2 s(\theta_{2,1} + \theta_{2,2}) \\ 0 & 0 & -l_1 c(\theta_{2,1}) - l_2 c(\theta_{2,1} + \theta_{2,2}) & -l_2 c(\theta_{2,1} + \theta_{2,2}) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Note que os cossenos e senos foram abreviados por c e s, respectivamente.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

E, portanto, calcula-se  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\theta_{1,1} + \theta_{1,2})}{l_1 \sin(\theta_{1,2})} & \frac{\sin(\theta_{1,1} + \theta_{1,2})}{l_1 \sin(\theta_{1,2})} & \frac{\cos(\theta_{2,1} + \theta_{2,2})}{l_1 \sin(\theta_{2,2})} & \frac{\sin(\theta_{2,1} + \theta_{2,2})}{l_1 \sin(\theta_{2,2})} \\ -\frac{l_1 \cos(\theta_{1,1}) + l_2 \cos(\theta_{1,1} + \theta_{1,2})}{l_1 l_2 \sin(\theta_{1,2})} & -\frac{l_1 \sin(\theta_{1,1}) + l_2 \sin(\theta_{1,1} + \theta_{1,2})}{l_1 l_2 \sin(\theta_{1,2})} & -\frac{l_1 \cos(\theta_{2,1}) + l_2 \cos(\theta_{2,1} + \theta_{2,2})}{l_1 l_2 \sin(\theta_{2,2})} & -\frac{l_1 \sin(\theta_{2,1}) + l_2 \sin(\theta_{2,1} + \theta_{2,2})}{l_1 l_2 \sin(\theta_{2,2})} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Sendo assim, o modelo do mecanismo 5R é definido pela equação (3.49), sendo:

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0^\# & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1^\# & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_2^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{1,11} & D_{1,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{1,12} & D_{1,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2,11} & D_{2,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2,12} & D_{2,22} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^\# \\ \mathbf{v}_1^\# \\ \mathbf{v}_2^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{1,111}\dot{\theta}_{1,1}^2 + D_{1,122}\dot{\theta}_{1,2}^2 + D_{1,112}\dot{\theta}_{1,1}\dot{\theta}_{1,2} + D_{1,121}\dot{\theta}_{1,1}\dot{\theta}_{1,2} \\ D_{1,211}\dot{\theta}_{1,1}^2 + D_{1,222}\dot{\theta}_{1,2}^2 + D_{1,212}\dot{\theta}_{1,1}\dot{\theta}_{1,2} + D_{1,221}\dot{\theta}_{1,1}\dot{\theta}_{1,2} \\ D_{2,111}\dot{\theta}_{2,1}^2 + D_{2,122}\dot{\theta}_{2,2}^2 + D_{2,112}\dot{\theta}_{2,1}\dot{\theta}_{2,2} + D_{2,121}\dot{\theta}_{2,1}\dot{\theta}_{2,2} \\ D_{2,211}\dot{\theta}_{2,1}^2 + D_{2,222}\dot{\theta}_{2,2}^2 + D_{2,212}\dot{\theta}_{2,1}\dot{\theta}_{2,2} + D_{2,221}\dot{\theta}_{2,1}\dot{\theta}_{2,2} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^\# \\ \mathbf{g}_1^\# \\ \mathbf{g}_2^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 g \\ D_{1,1} \\ D_{1,2} \\ D_{2,1} \\ D_{2,2} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^\# \\ \mathbf{u}_1^\# \\ \mathbf{u}_2^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{1,1} \\ \tau_{1,2} \\ \tau_{2,1} \\ \tau_{2,2} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

### 3.4.3 Resultados da simulação

Como resultado da simulação da dinâmica inversa, para uma trajetória circular, foram obtidos os torques máximos admissíveis dos motores.

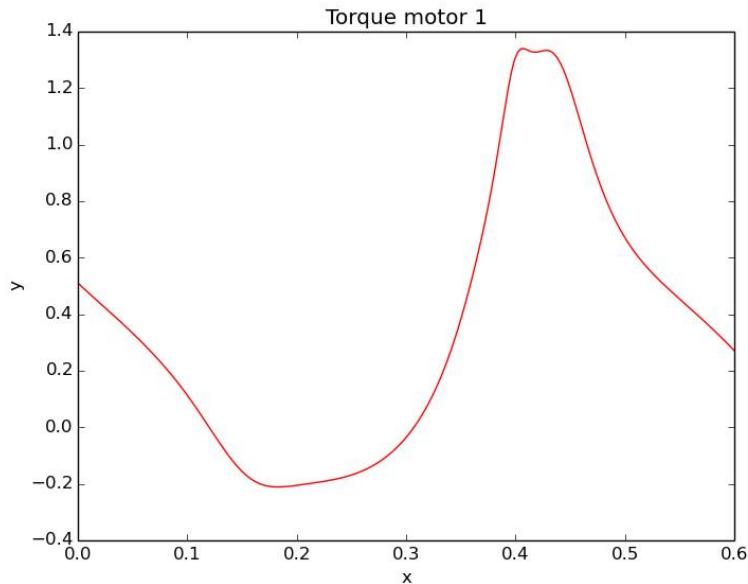


Figura 5 – Perfil dos torques para um ciclo do motor 1 - Fonte:Própria

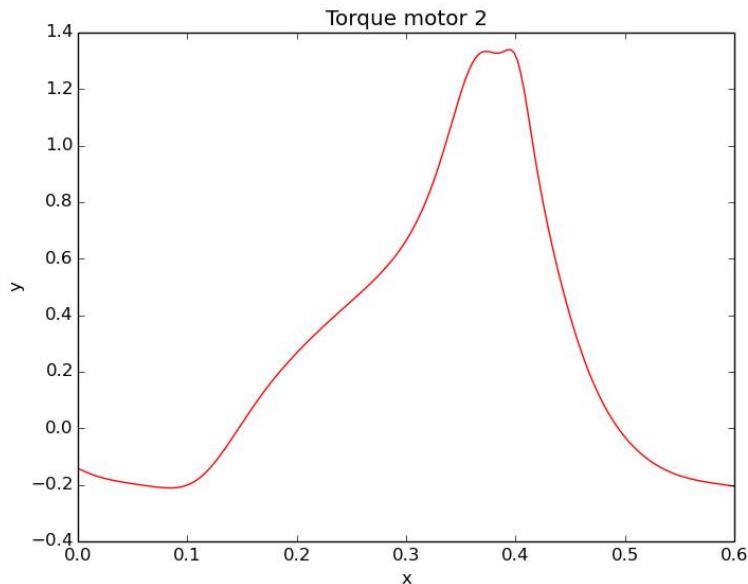


Figura 6 – Perfil dos torques para um ciclo do motor 2 - Fonte: Própria

A parametrização da trajetória usada na simulação é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r\cos(wt) \\ y(t) = y_0 + r\sin(wt) \end{cases} \quad (3.65)$$

Para:  $r = 0.085m$ ;  $x_0 = 0.0m$ ;  $y_0 = 0.16m$  e  $w = 11.765rad/s$

Além disso, foi considerada uma velocidade tangencial de  $1.0m/s$  e uma discretização no tempo de  $0.003s$ . Os parâmetros do mecanismo foram considerados como:

Tabela 1 – Parâmetros do mecanismo

Parâmetros
$l_0 = 0.05m$
$l_1 = 0.12m$
$l_2 = 0.16m$
$l_{m1g1} = 0.06m$
$l_{m1g2} = 0.078m$
$l_{m2g1} = 0.06m$
$l_{m2g2} = 0.058m$
$m_{m11} = 0.062kg$
$m_{m12} = 0.124kg$
$m_{m21} = 0.062kg$
$m_{m22} = 0.097kg$
$J_{m1z1} = 0.000107307kgm^2$
$J_{m1z2} = 0.000438kgm^2$
$J_{m2z1} = 0.000296045kgm^2$
$J_{m2z2} = 0.000980kgm^2$
$g = 9.8m/s^2$

### 3.5 Modelagem do motor

Para a modelagem dos motores, será considerado o seguinte circuito de modelo dos motores:

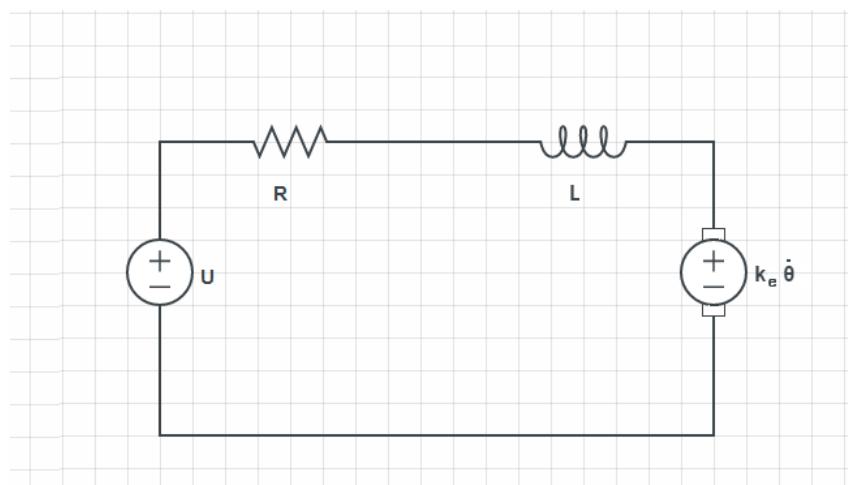


Figura 7 – Circuito elétrico do motor - Fonte:Própria

Pela lei de Ohm, temos que:

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + k_e \omega \quad (3.66)$$

Sendo  $J$  a inércia do rotor e  $b$  o coeficiente de atrito viscoso e  $\mu$  o coeficiente de atrito seco do mancal do eixo do motor, obtemos pelo teorema do momento angular:

$$J\dot{\omega} = T - b\omega - \mu sign(\omega) - \tau_d \quad (3.67)$$

Sendo  $\tau_d$  o torque que o mecanismo aplica no motor e será considerado um distúrbio.

Como hipótese, será considerado que o torque fornecido pelo motor é proporcional à corrente de armadura:

$$T = k_t i \quad (3.68)$$

Substituindo (3.68) em (3.67),

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di}{dt} + Ri + k_e = u \\ J\dot{\omega} + b\omega + \mu sign(\omega) = k_t i - \tau_d \end{array} \right. \quad (3.69)$$

$$(3.70)$$

Considerando  $\mu = 0$  e aplicando Laplace para condições iniciais nulas nas equações (3.69) e (3.70), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (Ls + R)I(s) + k_e W(s) = U(s) \\ (Js + bs)W(s) = k_t I(s) - \tau_d(s) \end{array} \right. \quad (3.71)$$

$$(3.72)$$

Isolando  $W(s)$  da equação (3.72),

$$W(s) = \frac{k_t I(s) - \tau_d(s)}{Js + b} \quad (3.73)$$

- Função de transferência de corrente

Substituindo (3.73) na equação (3.71) temos,

$$I(s) = \frac{Js + b}{(Ls + R)(Js + bs) + k_t k_e} U(s) + \frac{k_e}{(Ls + R)(Js + bs) + k_t k_e} \tau_d(s) \quad (3.74)$$

Com isso, as funções de transferência do sistema, serão:

$$G_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{Js + b}{(Ls + R)(Js + b) + k_t K_e} \quad (3.75)$$

$$G_{Id}(s) = \frac{I(s)}{\tau_d(s)} = \frac{k_e}{(Ls + R)(Js + b) + k_t K_e} \quad (3.76)$$

- Função de transferência de velocidade

Substituindo as equações (3.74) na equação (3.73) encontramos,

$$W(s) = \frac{k_t}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} U(s) - \frac{(Ls + R)}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \tau_d(s) \quad (3.77)$$

Logo, temos função de transferência do motor na forma:

$$G_v(s) = \frac{k_t}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \quad (3.78)$$

$$G_{vd}(s) = -\frac{(Ls + R)}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \quad (3.79)$$

- Função de transferência de posição

Integrando em  $s$  a equação (3.78) obtemos a função de transferência de posição do motor.

$$G_p(s) = \frac{k_t}{s((Js + b)(Ls + R) + k_e k_t)} \quad (3.80)$$

$$G_{pd}(s) = -\frac{(Ls + R)}{s((Js + b)(Ls + R) + k_e k_t)} \quad (3.81)$$

## 4 PROJETO DO MECANISMO

O mecanismo foi projetado visando a minimização de folgas, procurando reduzir as massas e os custos. Por esse motivo, o mecanismo foi projetado em alumínio nas regiões em que haveriam maiores esforços, e acrílico na região central dos elos. O mecanismo 5R é apresentado na figura 8, sem a estrutura.

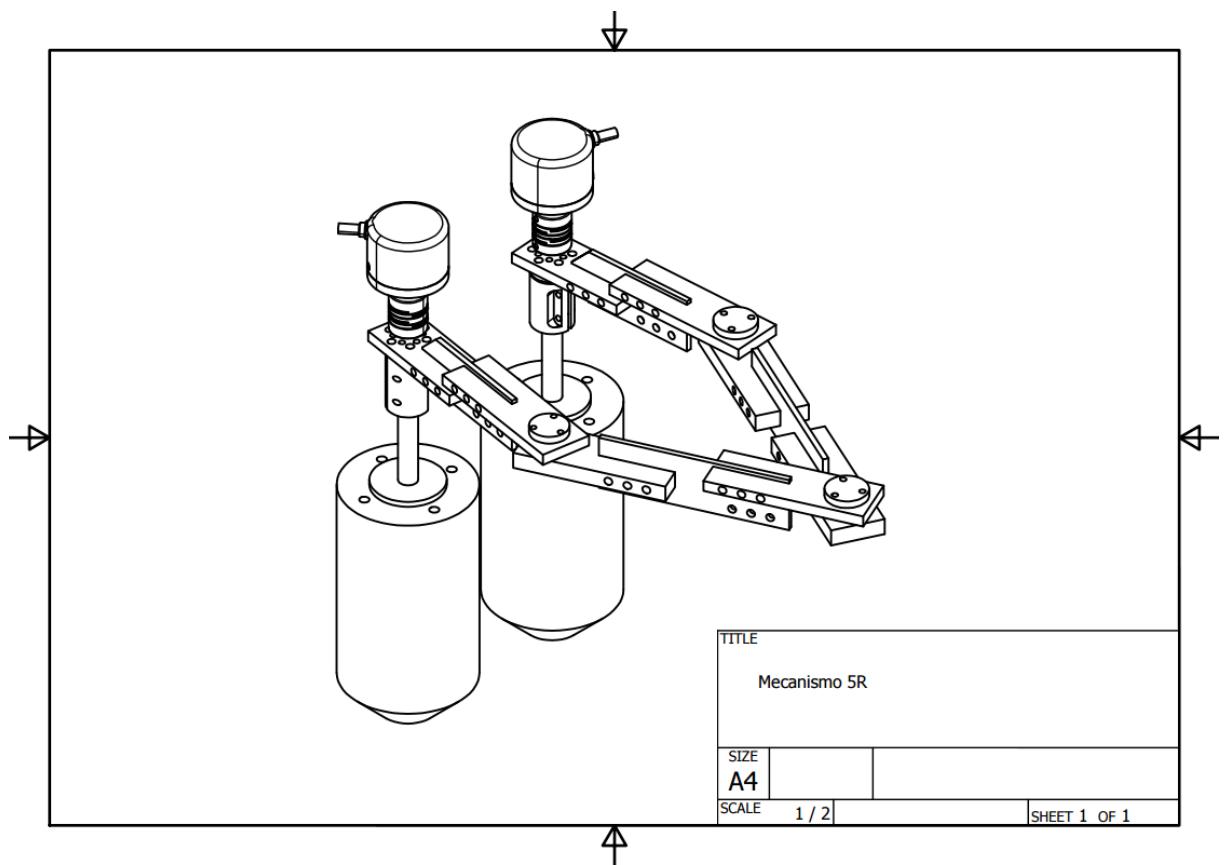


Figura 8 – 5R sem estrutura - Fonte:Própria

A estrutura foi confeccionada em madeira, devido à simplicidade de fabricação e ao baixo custo. A estrutura é responsável por sustentar o mecanismo, bem como por reduzir vibrações e por armazenar demais componentes utilizados no projeto.

O mecanismo apresentado na figura 9 não possui uma das paredes para permitir a visualização do interior da estrutura.

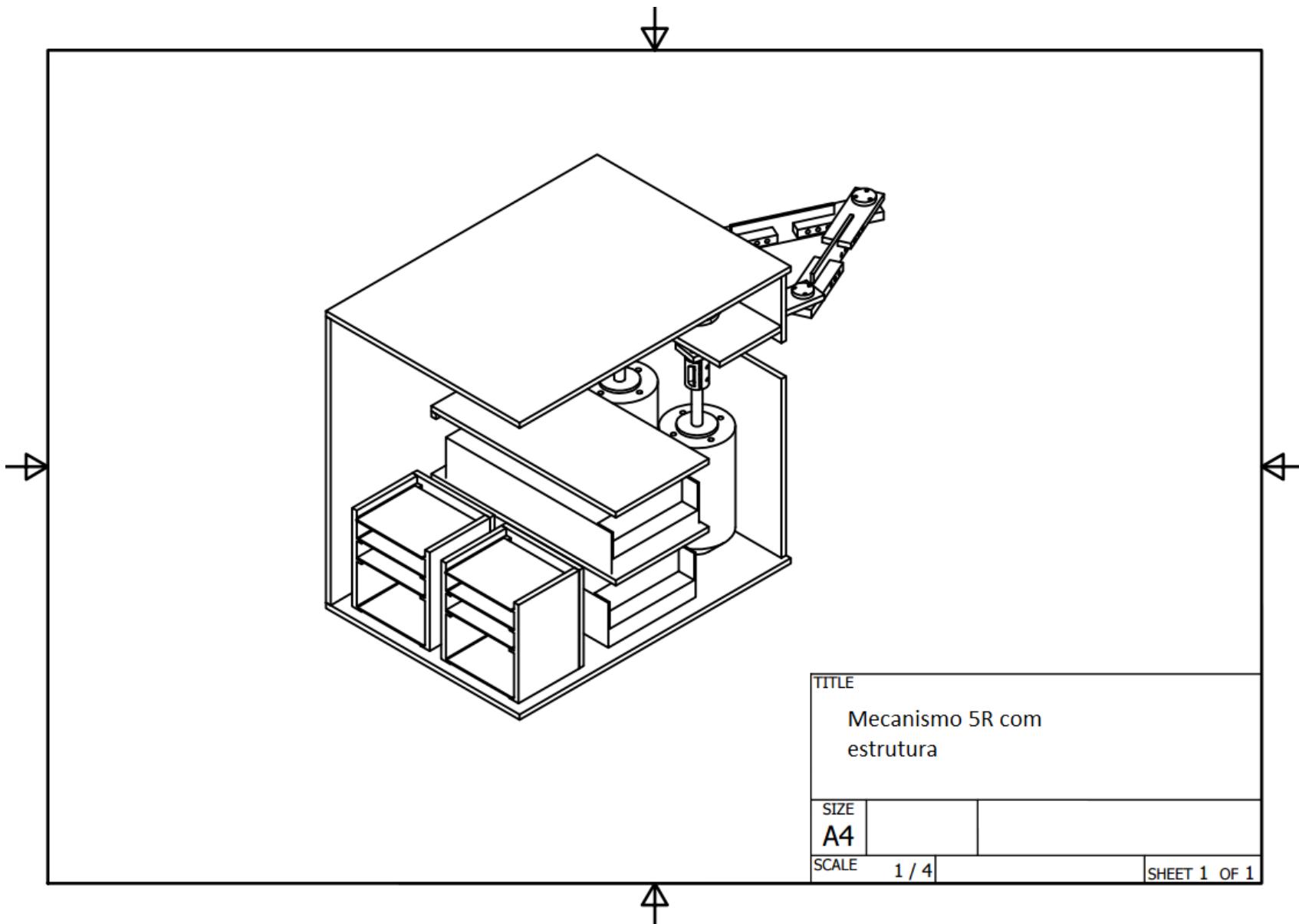


Figura 9 – 5R com estrutura - Fonte:Própria

# 5 PROJETO DO CONTROLADOR

## 5.1 Descrição do Sistema

O sistema é constituído de:

- 2 motores DC modelo PM70 da AMETEK com as seguintes características:
  - Corrente nominal de  $13A$
  - Torque nominal de  $0,5Nm$
  - Potência útil de  $200W$
  - Tensão de alimentação de  $24V$
  - Rotação de  $3600rpm$
  - Peso de  $1.80kg$
- 2 encoders incrementais do modelo E40S com as seguintes características:
  - Resolução de  $5000pulsos/volta$ .
  - Tensão de alimentação de  $12V$  a  $24V$
  - 3 canais de saída A, B e Z
- 1 driver modelo Pololu Dual VNH5019 Motor Driver Shield com as seguintes características.
  - Tensões de operação:  $5,5V$  a  $24V$
  - Corrente de saída: até  $12A$  contínuos ( $30A$  de pico)
  - Dois canais de saída para motor
  - Entrada de tensão do sistema pode ser tanto  $5V$  quanto  $3.3V$
  - Frequência de operação do PWM de até  $20kHz$
- 1 Microprocessador responsável pela execução das malhas de controle. O modelo utilizado foi o *Raspberry Pi 2 Model B* com as seguintes características:
  - Processador: quadcore ARMv7
  - 1GB RAM
  - alimentação de  $5V$ ,  $2A$

A arquitetura do sistema pode ser vista na figura 10.

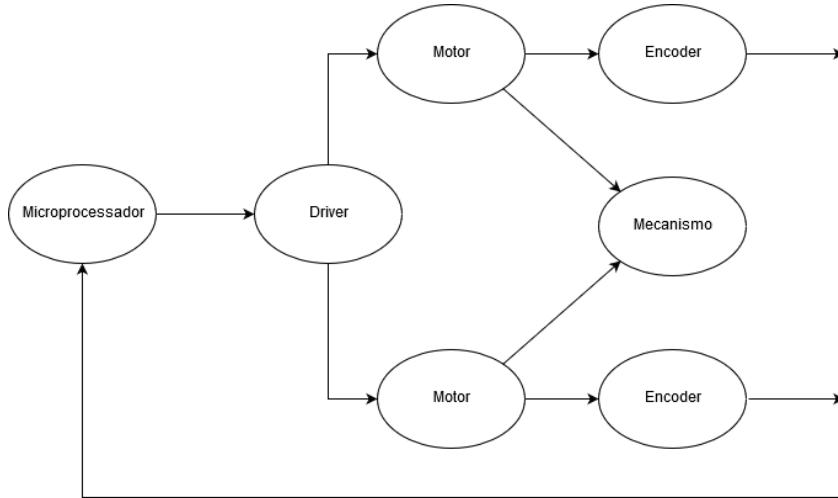


Figura 10 – Arquitetura do sistema - Fonte:Própria

## 5.2 Sistema de controle

O sistema de controle é constituído de:

- 2 derivadores para a obtenção da velocidade e aceleração dos motores
- Cálculo da corrente que passa pelos motores
- Malhas de controles, sendo uma linear (controle de corrente) e uma não linear

Pelo encoder obtemos a posição dos motores, com os derivadores obtemos a velocidade e a aceleração. Esses três sinais juntos com suas respectivas referências são utilizadas na malha de controle não linear. A velocidade, junto com a tensão que é enviada ao motor são utilizadas para calcular a corrente que passa no motor. Com o erro entre o valor calculado e a corrente de referência, o controlador calcula e envia a tensão ao motor. A arquitetura pode ser visualizada na figura 11.

### 5.2.1 Derivador

A partir da posição angular obtida através da leitura do encoder, é possível determinar a velocidade usando um derivador numérico. Uma das formas de se obter o derivador é pelo método das diferenças finitas:

$$\dot{x}_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T} \quad (5.1)$$

No entanto, como há ruídos nos sinais obtidos, a utilização do método das diferenças finitas amplificaria muito os ruídos de alta frequência. Diante disso, optamos por usar um

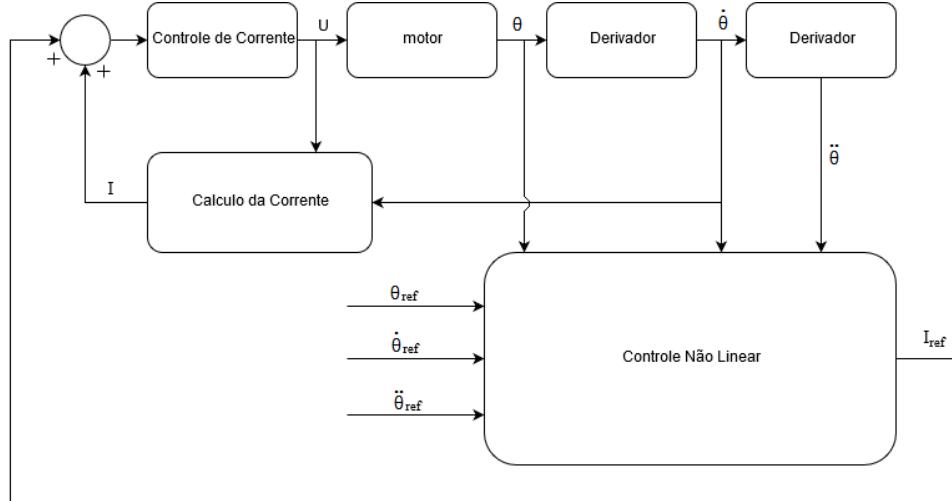


Figura 11 – Arquitetura de controle - Fonte:Própria

derivador ( $D(s)$ ), que atua em conjunto com um filtro passa baixa ( $H(s)$ ):

$$D(s) = sH(s) \quad (5.2)$$

Como filtro passa-baixas, foi utilizado um filtro Bessel de  $6^{\circ}$  ordem. A função de transferência de um filtro Bessel de ordem  $n$  (BIANCHI, 2007) é dado por:

$$H(s) = \frac{\theta_n(0)}{\theta_n(s/\omega_0)} \quad (5.3)$$

Sendo  $\omega_0$  a frequência de corte e  $\theta_n(s)$  o polinômio reverso de Bessel definido como:

$$\theta_n(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k \quad (5.4)$$

Onde,

$$a_k = \frac{(2n - k)!}{2^{n-k} k! (n - k)!} \quad (5.5)$$

Os filtros digitais IIR de alta ordem podem ser altamente sensíveis à erros de quantização em seus coeficientes, o que pode torná-los facilmente instáveis. Como uma maneira de contornar esse problema o filtro foi dividido em 3 estágios de segunda ordem em série.

Como os pólos do sistema em malha fechada serão alocados em  $s = -20\text{rad}/s$ , projetamos o filtro de modo que a parte real de seu pôlo mais à direita seja  $-60\text{rad}/s$ , ou seja, uma dinâmica 3 vezes mais rápida que a do sistema em malha fechada, para que o filtro não influencie de forma significativa na resposta do sistema.

Obtivemos, então, as seguintes funções de transferência para cada um dos estágios do filtro:

$$H_1(s) = \frac{10692.7s}{10692.7 + 202.63s + s^2} \quad (5.6)$$

$$H_2(s) = \frac{11859.6}{11859.6 + 178.178s + s^2} \quad (5.7)$$

$$H_3(s) = \frac{15079.3}{15079.3 + 120s + s^2} \quad (5.8)$$

As funções de transferência foram discretizadas pelo método da transformação bilinear. Para o cálculo da velocidade considerando um período  $T = 0.002$

$$H_{v1}(z) = \frac{42.7709(z^2 - 1)}{3.23225 - 7.91446z + 4.85329z^2} \quad (5.9)$$

$$H_{v2}(z) = \frac{0.0474383(1 + z)^2}{3.33472 - 7.90512z + 4.76015z^2} \quad (5.10)$$

$$H_{v3}(z) = \frac{0.0603171(1 + z)^2}{3.58032 - 7.87937z + 4.54032z^2} \quad (5.11)$$

A aceleração foi obtida de modo análogo, considerando um período  $T = 0.010$ .

$$H_{a1}(z) = \frac{213.885(z^2 - 1)}{1.01667 - 5.86145z + 9.12187z^2} \quad (5.12)$$

$$H_{a2}(z) = \frac{1.18596(1 + z)^2}{1.62239 - 5.62808z + 8.74953z^2} \quad (5.13)$$

$$H_{a3}(z) = \frac{1.50793(1 + z)^2}{3.10793 - 4.98415z + 7.90793z^2} \quad (5.14)$$

### 5.2.2 Cálculo da corrente

Para o cálculo da corrente foi considerada a equação elétrica do motor (3.66):

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + k_e \omega \quad (3.66)$$

A dinâmica elétrica é muito mais rápida que a mecânica, portanto ela será desprezada ( $\frac{di}{dt} = 0$ ). Com isso, obtemos a seguinte equação para o cálculo da corrente:

$$I = \frac{u - k_e \omega}{R} \quad (5.15)$$

### 5.3 Identificação de parâmetros do sistema

A curva de velocidade foi obtida aplicando o derivador descrito na seção 5.2.1 no sinal de posição fornecido pelo encoder . Foi utilizada uma entrada degrau de tensão 6.5V. As curvas dos motores 1 e 2 podem ser observadas nas figuras 12 e 13 respectivamente.

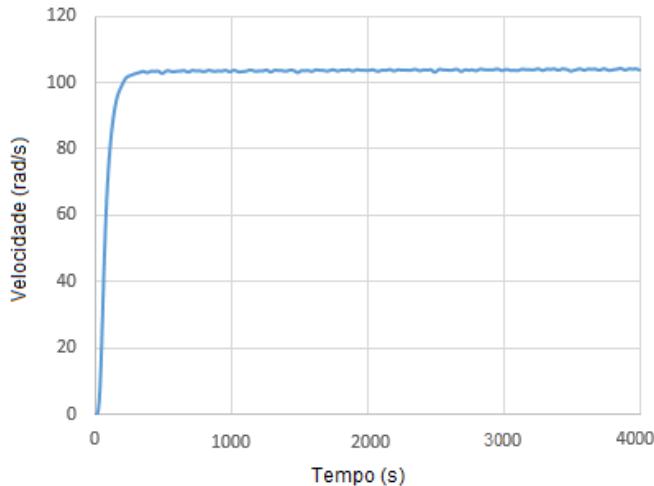


Figura 12 – Curva de velocidade do motor 1 - Fonte:Própria

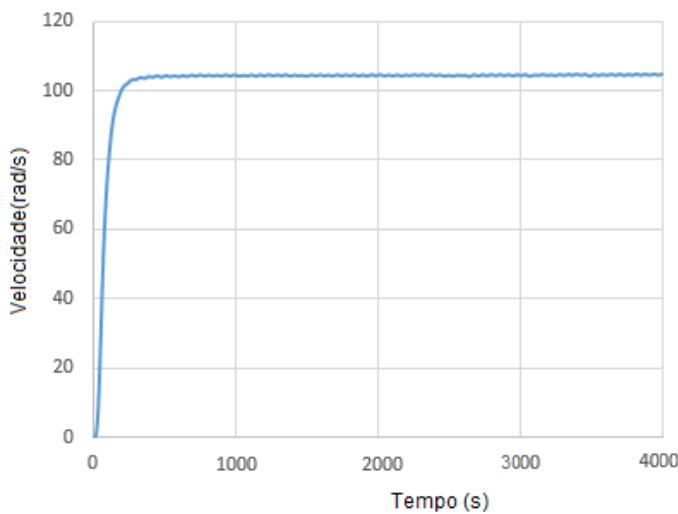


Figura 13 – Curva de velocidade do motor 2 - Fonte:Própria

Para obtenção dos parâmetros do motor, foram realizados os seguintes procedimentos:

- O valor de indutância ( $L$ ) foi medido através de um multímetro e considerado constante independente da velocidade do motor.
- O valor da constante de força contra-eletromotriz ( $k_e$ ) e da resistência ( $R$ ) foram obtidos através do método dos mínimos quadrados implementado sobre os valores

medidos da tensão, corrente e velocidade apresentados na tabela 2. Utilizando a equação elétrica do motor (3.66) em regime permanente ( $\frac{di}{dt} = 0$ ):

$$u = Ri + k_e \omega \quad (5.16)$$

Tabela 2 – Medições para obtenção de  $k_e$  do motor 1

$u(V)$	$i(A)$	$\omega(rad/s)$
1.524	0.79	12.272
2.52	0.84	31.390
3.51	0.89	49.755
4.6	0.94	68.079
5.49	0.98	86.322
6.51	1.02	105.736
7.49	1.05	123.683
8.5	1.09	140.924
9.49	1.11	161.111

Aplicando o método dos mínimos quadrados, temos:

$$\begin{bmatrix} \langle \omega, \omega \rangle & \langle \omega, i \rangle \\ \langle \omega, i \rangle & \langle i, i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \omega, u \rangle \\ \langle i, u \rangle \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Sendo o produto interno definido como  $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i$  obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 87991.6 & 799.092 \\ 799.092 & 8.5289 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400.99 \\ 50.4493 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Obtivemos como resultados

$$R = 1.10098 \Omega \quad (5.19)$$

$$k_e = 0.0513822 Vs/rad \quad (5.20)$$

- $k_t$  foi obtido seguindo a proporção:

$$k_t = \frac{k'_t}{k'_e} k_e \quad (5.21)$$

Sendo  $k'_t$  e  $k'_e$  valores obtidos da curva fornecida no datasheet do motor (Anexo B) dados por:

$$k'_t = 0.0467188 Nm/A \quad (5.22)$$

$$k'_e = 0.0428786 \text{ Vs/rad} \quad (5.23)$$

Substituindo os valores na equação (5.21), temos que:

$$k_t = 0.055984 \text{ Nm/A} \quad (5.24)$$

- As constantes de atrito viscoso ( $b$ ) e seco ( $\mu$ ) foram obtidas a partir da equação dinâmica mecânica do motor (3.67) em regime permanente ( $\dot{\omega} = 0$ ) com  $\omega > 0$ , ou seja:

$$b\omega + \mu = k_t i \quad (5.25)$$

Aplicando novamente o método dos mínimos quadrados, temos:

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle \omega, 1 \rangle \\ \langle \omega, 1 \rangle & \langle \omega, \omega \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, k_t i \rangle \\ \langle \omega, k_t i \rangle \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 9 & 779.272 \\ 779.272 & 87991.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.487621 \\ 44.7364 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Logo, temos que:

$$\mu = 0.0435651 \text{ Nm} \quad (5.28)$$

$$b = 0.000122595 \text{ Nms/rad} \quad (5.29)$$

- $J$  foi obtido a partir da curva de velocidades do motor figura 12. Como não houve sobressinal, o tempo de assentamento foi de  $0.207s$ .

$$t_{98\%} = \frac{4}{\sigma} \quad (5.30)$$

Da equação (5.30) temos que  $p = -19.3237$ . Então, igualando o denominador da função de transferência do motor (3.75) a zero e substituindo o valor do pólo:

$$[(Ls + R)(Js + b) + k_t k_e]_{s=p} = 0 \quad (5.31)$$

Obtemos  $J = 1.469 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

Os valores dos parâmetros obtidos são apresentados na tabela 3

Analogamente determinamos os parâmetros do motor 2 apresentados na tabela 5. Sendo que foi considerado como tempo de assentamento  $0.198s$ . A tabela de medições correspondente a esse motor pode ser observada na tabela 4.

Tabela 3 – Parâmetros do Motor 1

Parâmetros	Valores	Unidades
$R$	1.10098	$\Omega$
$L$	0.667	$mH$
$b$	0.000122595	$Ns$
$k_t$	0.055984	$Nm/A$
$\mu$	0.0435651	$N$
$k_e$	0.0513822	$Vs/rad$
$J$	$1.469 * 10^{-4}$	$kg.m^2$

Tabela 4 – Medições para obtenção de  $k_e$  do motor 2

$u(V)$	$i(A)$	$\omega(rad/s)$
1.49	0.92	13.696
2.48	0.99	31.747
3.47	1.06	49.909
4.47	1.14	67.889
5.46	1.20	86.067
6.47	1.27	104.681
7.47	1.32	122.742
8.48	1.37	140.553

Tabela 5 – Parâmetros do Motor 2

Parâmetros	Valores	Unidades
$R$	0.829383	$\Omega$
$L$	0.667	$mH$
$b$	0.000203914	$Ns$
$k_t$	0.0566596	$Nm/A$
$\mu$	0.0499202	$N$
$k_e$	0.0520023	$Vs/rad$
$J$	$1.88738 * 10^{-4}$	$kg.m^2$

## 5.4 Controlador Linear de posição

Para comparação com os demais controladores implementados, foi realizado o projeto de um controlador linear de posição.

Sabendo-se que a função de transferência de posição do motor (3.80) é:

$$G_p(s) = \frac{k_t}{s((Js + b)(Ls + R) + k_e k_t)} \quad (3.80)$$

Substituímos os parâmetros obtidos do motor 1(tabela 3) na função de transferência do equação (3.80). Logo, temos que:

$$G_p(s) = \frac{574071}{s^3 + 1658.93s^2 + 30881.1s} \quad (5.32)$$

Para a discretização foi utilizado um período  $T = 0.001s$  e pelo método *Zero Order Hold*, obtivemos a seguinte função de transferência em tempo discreto:

$$G_p(z) = \frac{-0.0000661465z^2 - 0.000184227z - 0.0000291181}{-z^3 + 2.17531z^2 - 1.36565z + 0.190342} \quad (5.33)$$

Afim de se obter um controlador robusto, estabelecemos como requisitos de margem de ganho e margem de fase:

- Margem de Ganho  $\geq 6\text{dB}$
- Margem de Fase  $\geq 30^\circ$

Também foi considerado que, para melhor desempenho, o sobressinal deve ser pequeno. Com os pólos dos controladores alocados em  $s = -20.00\text{rad/s}$ , consideraremos um tempo de assentamento máximo como:

- tempo de assentamento (5%)  $\leq 220ms$
- sobressinal  $\leq 5\%$

A função de transferência do controlador projetado possui a seguinte forma:

$$G_c(z) = \frac{a_1 z + a_2}{a_3 + z} \quad (5.34)$$

A partir das funções de transferência da planta (5.33) e do controlador (5.34), podemos obter a função de transferência em malha aberta e fechada, respectivamente:

$$G_{ma}(z) = G_p(z)G_c(z) \quad (5.35)$$

$$G_{mf}(z) = \frac{G_{ma}(z)}{1 + G_{ma}(z)} \quad (5.36)$$

O denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$\begin{aligned} P(z) = & -0.0000291181a_2 + 0.190342a_3 + (0.190342 - 0.0000291181a_1 \\ & - 0.000184227a_2 - 1.36565a_3)z + (-1.36565 - 0.000184227a_1 \\ & - 0.0000661465a_2 + 2.17531a_3)z^2 + (2.17531 - 0.0000661465a_1)z^3 \\ & - 1a_3z^3 - 1z^4 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Alocamos dois pólos, um em  $s = -20\text{rad}/\text{s}$  e outro em  $s = -400\text{rad}/\text{s}$ . Utilizando a equivalência de pólos de  $s$  para  $z$  temos que os pólos em  $z$  são dados por:

$$z = e^{sT} \quad (5.38)$$

Logo igualando o denominador à zero obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} P(e^{-0.04}) = 0 \\ P'(e^{-0.04}) = 0 \\ P(e^{-0.8}) = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

Finalmente, a função de transferência fica:

$$G_c(z) = \frac{20.0119z + -19.6374}{-0.647091 + z} \quad (5.40)$$

Logo, temos a função de transferência em malha fechada:

$$G_{mf}(z) = \frac{0.000571805 + 0.00303504z - 0.00238779z^2 - 0.00132372z^3}{-0.122597 + 1.07708z - 2.77566z^2 + 2.82107z^3 - 1.z^4} \quad (5.41)$$

Para a função de transferência em malha fechada os resultados obtidos foram satisfatórios e podem ser observados na figura 14 e são listados em seguida:

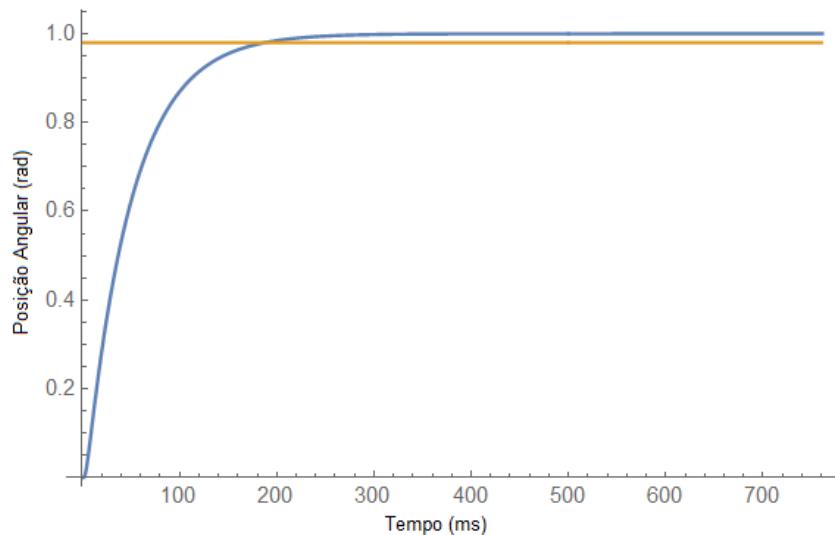


Figura 14 – Resposta a degrau unitário - Fonte:Própria

- Margem de Ganho:  $34.368dB$
- Margem de Fase:  $\infty$
- Sobressinal: 0
- Tempo de assentamento 98%:  $190ms$

## 5.5 Controlador de corrente

### 5.5.1 Projeto do controlador de corrente

Para o projeto do controlador de corrente são consideradas as funções de transferências de corrente e distúrbio do motor, equações (3.75) e (3.76) respectivamente.

$$G_{Ip}(s) = \frac{Js + b}{(Ls + R)(Js + b) + k_t K_e} \quad (3.75)$$

$$G_{Ipd}(s) = \frac{k_e}{(Ls + R)(Js + b) + k_t K_e} \quad (3.76)$$

Substituindo os valores dos parâmetros obtidos para o motor 1 (tabela 3), temos:

$$G_{Ip}(s) = \frac{0.000122595 + 0.000146869s}{0.00301156 + 0.000161781s + 9.7521 * 10^{-8}s^2} \quad (5.42)$$

$$G_{Ipd}(s) = \frac{0.0513822}{0.00301156 + 0.000161781s + 9.7521 * 10^{-8}s^2} \quad (5.43)$$

Para a discretização foi considerado o período  $T = 0.002$ . As funções de transferência obtidas pelo método *Zero Order Hold*, foram:

$$G_I(z) = \frac{-0.859256 + 0.860703z}{0.03623 - 1.00066z + z^2} \quad (5.44)$$

$$G_{Id}(z) = \frac{0.159647 + 0.447184z}{0.03623 - 1.00066z + z^2} \quad (5.45)$$

O controlador de corrente proposto em tempo discreto apresenta o seguinte formato:

$$G_{cd}(z) = \frac{xz^2 + yz + w}{(z - 1)(z - \alpha)} \quad (5.46)$$

A malha de controle de corrente é apresentada na figura 15. Onde  $N(z)$  e  $Nd(z)$  são os numeradores respectivamente da função de transferência  $G_I(z)$  (3.75) e  $G_{Id}(z)$  (3.76), e  $Den(z)$  é o denominador de ambos.

A partir das equações (5.44) e (5.46) obtemos as funções de transferência em malha aberta (5.47) e fechada (5.48):

$$G_{Ima}(z) = G_I(z)G_{cd}(z) \quad (5.47)$$

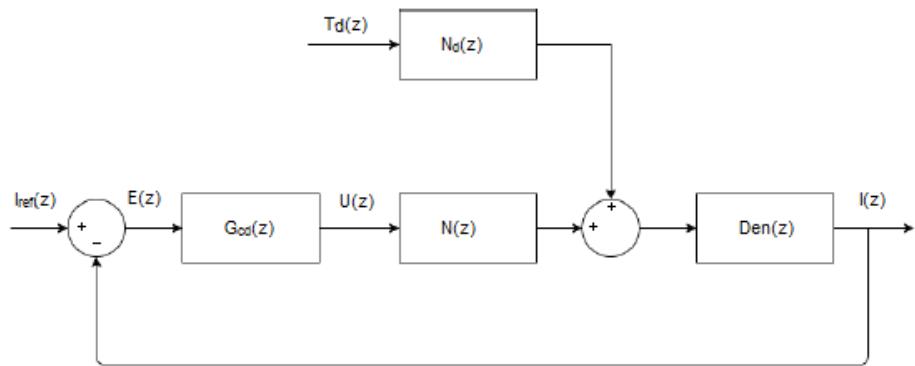


Figura 15 – Malha de controle dos motores - Fonte:Própria

$$G_{Imf}(z) = \frac{G_{Ima}(z)}{1 + I_{Ima}(z)} \quad (5.48)$$

A fim de se obter um controlador robusto, estabelecemos como requisitos de margem de ganho e margem de fase:

- Margem de Ganho  $\geq 6\text{dB}$
- Margem de Fase  $\geq 30^\circ$

Como no controle de corrente é difícil manter um sobressinal muito baixo, então consideramos aceitável um sobressinal de até 15%. Além disso, os pólos dos controladores serão alocados em  $s = -160.00\text{rad/s}$  e consideraremos um tempo de assentamento máximo 5 vezes menor que o tempo de assentamento do controle de posição.

- tempo de assentamento (5%)  $\leq 40ms$
- sobressinal  $\leq 15\%$

O denominador da função de transferência em malha fechada (5.48) é:

$$\begin{aligned} P_I(z) = & -0.859256w + 0.03623\alpha + (-0.03623 + 0.860703w - 0.859256y \\ & -1.03689\alpha)z + (1.03689 - 0.859256x + 0.860703y + 2.00066\alpha)z^2 \\ & + (-2.00066 + 0.860703x - 1\alpha)z^3 + z^4 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Igualando o denominador à zero e alocando dois pólos em  $z = e^{-0.32}$  e dois pólos em  $z = 0$ . Temos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(e^{-0.32}) = 0 \\ P'(e^{-0.32}) = 0 \\ P(0) = 0 \\ P'(0) = 0 \end{array} \right. \quad (5.50)$$

Resolvendo o sistema obtemos a função de transferência em malha fechada.

$$G_{Imf}(z) = \frac{-0.0361691 + 0.544973z - 1.05704z^2 + 0.548365z^3}{-0.526405z + 1.97715z^2 - 2.45062z^3 + z^4} \quad (5.51)$$

Logo a função de transferência do controlador de corrente é dada por:

$$G_{cd}(z) = \frac{0.0420935 - 0.592075z + 0.637113z^2}{(-1 + z)(-0.998318 + z)} \quad (5.52)$$

Os resultados estão dentro dos requisitos estabelecidos e podem ser vizualizados na figura 16 e são listados a seguir:

- Margem de ganho: 11.4181dB
- Margem de Fase:  $\infty$
- Sobressinal: 13, 5%
- Tempo de assentamento 98% : 35ms

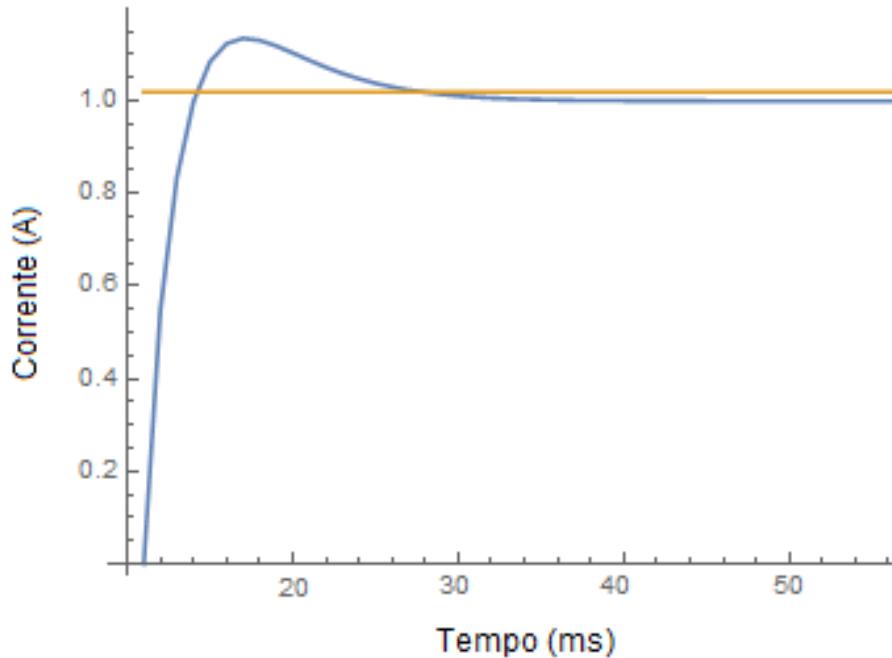


Figura 16 – Resposta a degrau unitário - Fonte:Própria

### 5.5.2 Rejeição à distúrbios

A partir das funções de tranferência (5.44) e (5.45) obtemos a função de transferência em malha fechada do distúrbio como segue:

$$G_{dmf} = \frac{G_{Id}(z)}{1 + G_{Id}(z)G_I(z)} \quad (5.53)$$

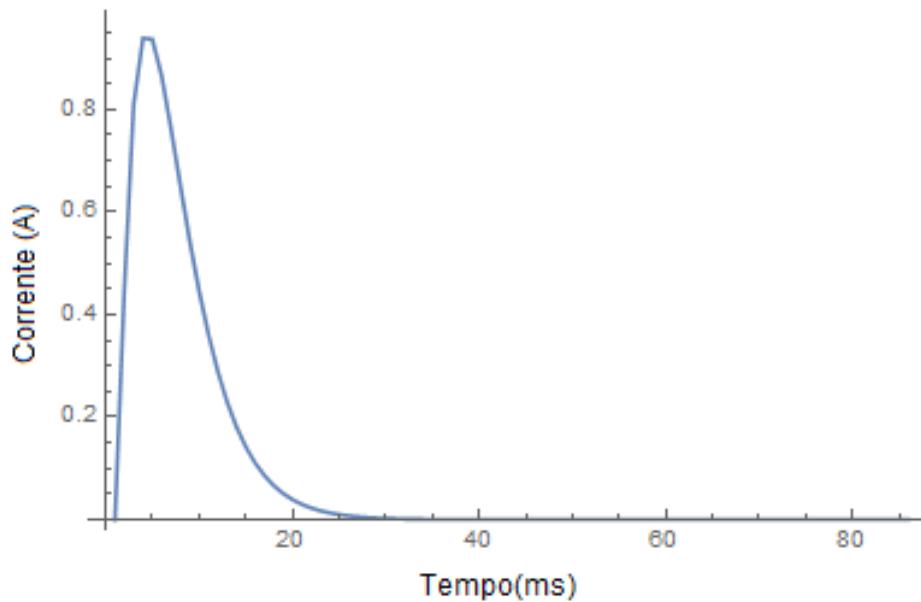


Figura 17 – Rejeição à distúrbios - Fonte:Própria

A resposta dessa função de transferência (5.53) à uma resposta degrau unitário pode ser observada na figura 17. Analisando essa resposta, observamos que a resposta ao distúrbio em regime permanente vai a zero. E possui um pico de corrente de aproximadamente 0.86A.

### 5.5.3 Anti Wind-up

Quando a variável de controle atinge o máximo ou o mínimo do atuador, ocorre a saturação do sinal de controle. Isso faz com que a malha de controle fique limitada. Isto é, o atuador fica limitado para qualquer sinal de saída do controlador maior (em módulo) que o valor de saturação. Entretanto, havendo um integrador no controlador, o erro acumula-se, gerando um efeito indesejado ao controlador.

A fim de evitar este erro, deve-se evitar que o integrador continue operando quando o controlador atingir a saturação. Existem algumas técnicas para realizar esse procedimento, a que será apresentada aqui é a técnica de integração condicional associada ao *back calculation and tracking*.

A técnica consiste em recalcular dinamicamente o termo integral após a saturação. Esta técnica possui a vantagem de não levar o integrador a zero bruscamente. Isto evita efeitos indesejados, por exemplo, havendo ruídos no sinal de entrada que podem causar saturações, efeito muito comum quando há derivadores na malha de controle.

Utilizando  $T_t$  como a constante de tempo. Define-se o erro  $e_s$  entre a entrada e a saída do atuador com realimentação ao integrador com ganho  $\frac{1}{T_t}$ . Assim, quando não há saturação, o erro  $e_s$  é igual a zero, e o controlador permanece como descrito na seção

anterior. Entretanto, na saturação, a entrada do integrador fica:

$$w = \frac{e_s}{T_t} + \frac{Ke}{T_i} \quad (5.54)$$

Assim, faz-se com que  $w$  tenda a zero com constante de tempo  $T_t$ . Afim de evitar os efeitos descritos anteriormente, deve-se obedecer à regra:

$$T_d < T_t < T_i \quad (5.55)$$

Para  $T_d$  a constante de tempo do derivador e  $T_i$  a constante de tempo do integrador.

Para o projeto do *anti Wind-up*, deve-se primeiramente separar o controlador em frações parciais:

$$Gcd(z) = \frac{B}{z-1} + \frac{Az - A\alpha + C}{z - \alpha} \quad (5.56)$$

Assim, comparando as equações (5.52) e (5.56) obtemos os coeficientes:  $A = 0.637113$ ,  $B = 51.7964$ ,  $C = -51.1153$  e  $\alpha = 0.998318$ . Com isso, a nova malha de controle de corrente, fica:

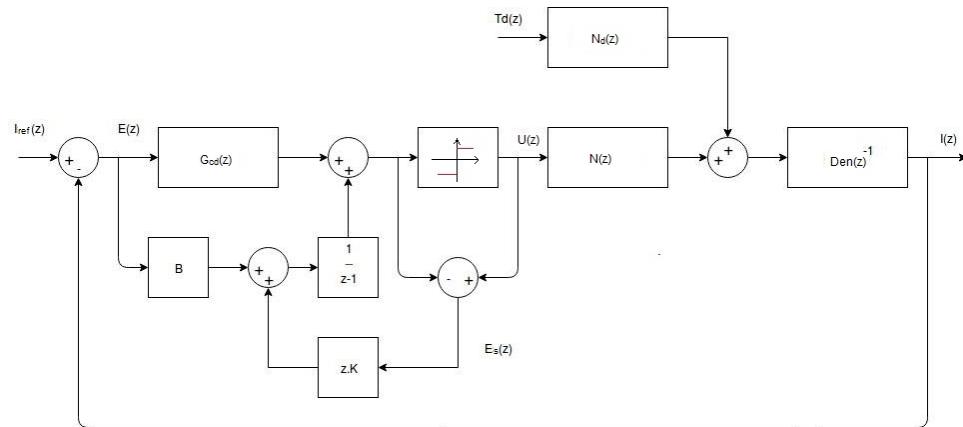


Figura 18 – Malha de controle de corrente com Anti Wind-up - Fonte:Própria

## 5.6 Controladores não lineares

Este trabalho apresenta duas abordagens de controladores não lineares. O Controle por Torque Computado (caso particular de *feedback linearization*) e o Controle por Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control*).

Nesta seção serão apresentadas algumas formulações que serão consideradas nos métodos de projeto de controlador utilizadas.

Como demonstrado na equação (3.49), a equação dinâmica do modelo pode ser escrita na forma:

$$\ddot{\mathbf{f}}' = \mathbf{M}'^\#(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{v}'^\#(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}'^\#(\mathbf{q}) - \mathbf{C}^T \mathbf{u}' = 0 \quad (3.49)$$

Para facilitar a formulação dos projetos dos controladores não lineares, iremos reescrever-la de uma forma mais conveniente. Sabe-se que  $\mathbf{u}'$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}^* \quad (5.57)$$

Sendo  $\mathbf{u}^*$  os esforços aplicados pelos atuadores e  $\mathbf{U}$  uma matriz constante (constituida de zeros e uns).

Sendo assim, temos que:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u}' = \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{u}^* \quad (5.58)$$

Sendo

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}^T \mathbf{C} \quad (5.59)$$

Para o caso de sistemas não sub-atuados e sem atuação redundante, temos que  $\mathbf{Z}$  será inversível em configurações não singulares. Para esses casos, podemos reescrever (3.49) da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}^* \quad (5.60)$$

Sendo:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{Z}^T)^{-1} \mathbf{M}'^\# \quad (5.61)$$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{Z}^T)^{-1} (\mathbf{v}^\#(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}^\#(\mathbf{q})) \quad (5.62)$$

## 5.7 Controle por Torque Computado

Como já citado, este é um dos métodos mais utilizados em controladores não-lineares de mecanismos. O método consiste em compensar as não-linearidades do sistema através da realimentação das mesmas.

Seja  $\mathbf{q}_d^\#$  o vetor de referências de controle, e  $\mathbf{e}$  o vetor de erros de posição, ou seja:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d^\# - \mathbf{q}^\# \quad (5.63)$$

A lei de Controle por Torque Computado:

$$\mathbf{u}^* = \hat{\mathbf{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + k_v \dot{\mathbf{e}} + k_p \mathbf{e} + k_i \int \mathbf{e} dt) + \hat{\mathbf{h}} \quad (5.64)$$

Sendo  $\hat{\mathbf{H}}$  e  $\hat{\mathbf{h}}$  estimadores de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{h}$ . Substituindo (5.89) em (5.60), e desprezando o erro de modelagem ( $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$  e  $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}$ ) obtemos a seguinte dinâmica em malha fechada:

$$\ddot{\mathbf{e}} + k_v \dot{\mathbf{e}} + k_p \mathbf{e} + k_i \int \mathbf{e} dt = 0 \quad (5.65)$$

Desta maneira, o erro de controle vai a zero em regime permanente (para escolhas adequadas de  $k_v$ ,  $k_p$  e  $k_i$ ) e é possível controlar a dinâmica de decaimento do erro.

A equação (5.65) representa a dinâmica de erro de controle na situação ideal em que não há incertezas no modelo. Essa técnica de controle em geral apresenta bom desempenho para pequenos erros de modelagem, porém seu desempenho se degrada significativamente à medida que as incertezas do modelo aumentam.

A malha do controlador por Torque Computado pode ser representada em um diagrama de blocos como o descrito na figura 19.

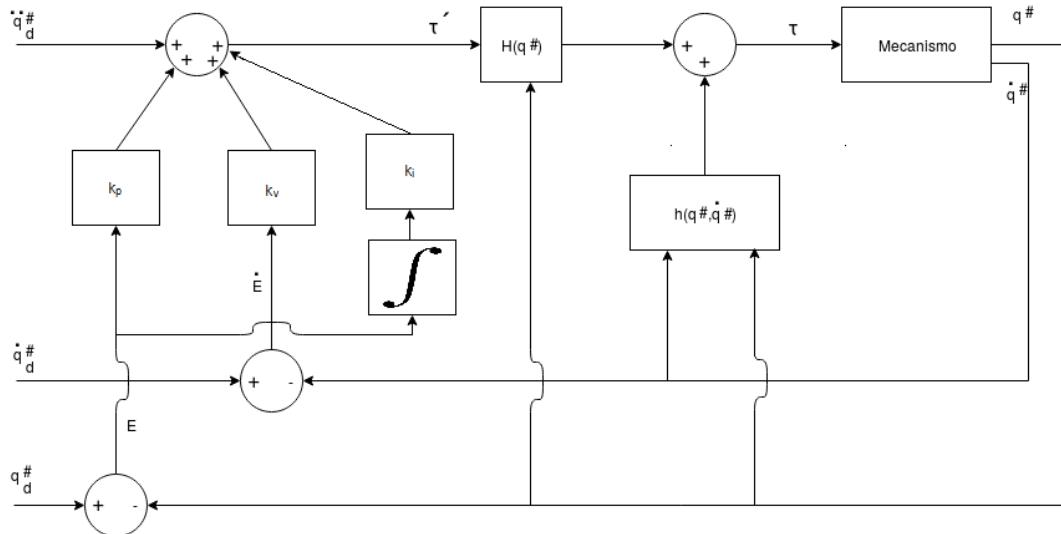


Figura 19 – Malha de controle por *feedback Linearization* - Fonte:Própria

## 5.8 Sliding Mode Control

O *Sliding mode control* (SMC) é uma técnica de controle não linear robusto capaz de compensar incertezas estruturadas (paramétricas) e não estruturadas (dinâmicas não modeladas) (SLOTINE, 1991). É uma técnica ainda pouco utilizada na literatura de controle de mecanismos paralelos.

Primeiramente, faremos uma introdução ao SMC para sistemas de um grau de liberdade.

### 5.8.1 Introdução ao Sliding Mode Control

Seja um sistema dinâmico de um grau de liberdade dado pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = u \quad (5.66)$$

Sendo  $x$  a saída do sistema,  $u$  a entrada do sistema,  $x_d$  o sinal de referência, e  $e = x_d - x$  o erro de controle.

O SMC baseia-se na definição de uma superfície no plano de fase do erro de controle, chamada superfície de escorregamento, de modo que se o sistema é mantido em tal superfície, o erro de controle tenderá exponencialmente a zero. Definindo a seguinte variável  $s$ :

$$s(e, \dot{e}) = -(\dot{e} + \lambda e), \quad \lambda > 0 \quad (5.67)$$

Temos que uma possível superfície de escorregamento para o sistema é dada por:

$$s(e, \dot{e}) = 0 \quad (5.68)$$

A idéia desta técnica de controle é criar uma lei de controle que leve o sistema para a superfície de escorregamento  $s = 0$  e depois o mantenha nela. Isso pode ser feito impondo ao sistema a seguinte condição:

$$\frac{1}{2} \frac{d(s^2)}{dt} \leq -\eta |s|, \quad \eta > 0 \quad (5.69)$$

$s^2$  pode ser interpretado como a distância ao quadrado à superfície de escorregamento. Sendo assim, essa condição implica que a distância à superfície de escorregamento seja sempre decrescente enquanto  $s \neq 0$ .

Desenvolvendo (5.69), temos:

$$\dot{s}s \leq -\eta |s|$$

$$\dot{s} \leq -\eta \text{sign}(s) \quad (5.70)$$

Derivando (5.68), temos:

$$\dot{s} = -(\ddot{e} + \lambda \dot{e}) = \ddot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \quad (5.71)$$

Substituindo a equação dinâmica (5.66) em (5.71):

$$\dot{s} = u - f - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \quad (5.72)$$

Sendo assim, substituindo em (5.72) em (5.70), temos:

$$u - f - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} + \eta \text{sign}(s) \leq 0 \quad (5.73)$$

Para garantir que (5.73) seja respeitada, utiliza-se a seguinte lei de controle:

$$u = \hat{f} + \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} - k \text{sign}(s) \quad (5.74)$$

Sendo  $\hat{f}$  um estimador para  $f$ . Substituindo (5.74) em (5.73), temos:

$$\hat{f} - f - (k - \eta) \text{sign}(s) \leq 0 \quad (5.75)$$

Sendo assim, escolhendo  $k$  tal que

$$k \geq \eta + |\hat{f} - f|_{max} \quad (5.76)$$

garantimos que (5.75) seja respeitada, o que garante que  $s$  vai para 0 e consequentemente o erro de controle também vai a zero.

O problema principal da lei de controle (5.74) é o a utilização do termo chaveado  $\text{sign}(s)$ , o qual pode gerar oscilações bruscas na entrada do sistema (*chattering*) e consequentemente introduzir vibrações indezejadas. Frequentemente, a função  $\text{sign}(s)$  é substituída por uma função de saturação, de modo a evitar a descontinuidade e diminuir o *chattering*. Porém, mesmo realizando essa substituição, constatamos experimentalmente um *chattering* significativo no controle de posição de motores em vazio utilizando o SMC. Por este motivo, foi utilizada uma formulação modificada do SMC, a qual será apresentada na próxima subseção.

### 5.8.2 Introdução ao Sliding Mode Control modificado

Com o intuito de diminuir significativamente o fenômeno do *chattering*, iremos utilizar uma formulação modificada do SMC. Como exemplo, utilizaremos o mesmo sistema dinâmico da subseção anterior.

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = u \quad (5.66)$$

Dividiremos a lei de controle em 2 partes:

$$u = u_{CTC} + u' \quad (5.77)$$

$u_{CTC}$  é basicamente a lei de Controle por Torque Computado apresentada anteriormente, ou seja:

$$u_{CTC} = \hat{f} + \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (5.78)$$

Substituindo (5.77) e (5.78) em (5.66), temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + f &= \hat{f} + \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + u' \\ \Rightarrow \ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + u' + \hat{f} - f &= 0 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Repare que se não houvesse erros na estimativa de  $f$ , poderíamos fazer  $u' = 0$  e o erro de controle já tenderia a zero (para  $k_v > 0$  e  $k_p > 0$ ). Para compensar o erro de modelagem, definimos a variável de escorregamento  $s$ :

$$s = -(\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e) \quad (5.80)$$

Substituindo (5.80) em (5.79), temos:

$$-s + u' + \hat{f} - f = 0 \quad (5.81)$$

Repare que se  $s = 0$ ,  $u'$  compensa o erro de modelagem. Como foi feito anteriormente, iremos deduzir uma lei de controle que faz com que  $s$  vá a zero. Definindo:

$$\tilde{f} = \hat{f} - f \quad (5.82)$$

Substituindo (5.82) em (5.81) e derivando no tempo:

$$-\dot{s} + \dot{u}' + \dot{\tilde{f}} = 0 \quad (5.83)$$

Isolando  $\dot{s}$  em e substituindo na condição de escorregamento (5.70), temos:

$$\dot{u}' + \dot{\tilde{f}} + \eta \operatorname{sign}(s) \leq 0 \quad (5.84)$$

Para garantir que (5.84) seja respeitada, utiliza-se a seguinte lei de controle:

$$\dot{u}' = -k \operatorname{sign}(s) \quad (5.85)$$

Substituindo (5.85) em (5.84), temos:

$$\dot{\tilde{f}} - (k - \eta) \operatorname{sign}(s) \leq 0 \quad (5.86)$$

Sendo assim, escolhendo  $k$  tal que

$$k \geq \eta + |\dot{\tilde{f}}|_{max} \quad (5.87)$$

garantimos que (5.86) seja respeitada, o que garante que  $s$  vai para 0 e consequentemente o erro de controle também vai a zero.

Repare que a lei de controle  $u$  utilizada é dada por

$$u = \hat{f} + \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e - \int k \operatorname{sign}(s) dt \quad (5.88)$$

a qual não mais utiliza diretamente um termo chaveado, mas sim sua integral, o que diminui consideravelmente o fenômeno do *chattering*. A desvantagem desta lei de controle é a necessidade da estimativa da aceleração do sistema para o cálculo de  $s$ .

### 5.8.3 Sliding Mode Control modificado

A lei de controle Sliding Mode Control modificado utilizada para o caso multivariável é dada por:

$$\mathbf{u}^* = \hat{\mathbf{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + k_v \dot{\mathbf{e}} + k_p \mathbf{e} - k \int \operatorname{sign}(\mathbf{s}) dt) + \hat{\mathbf{h}} \quad (5.89)$$

Sendo:

$$\mathbf{s} = -(\ddot{\mathbf{e}} + k_v \dot{\mathbf{e}} + k_p \mathbf{e}) \quad (5.90)$$

Assim como na seção anterior, é basicamente a lei de Controle por Torque Computado com um termo robusto no lugar do termo integral, de modo a suprimir as incertezas de modelagem. O diagrama de blocos correspondente à essa malha de controle pode ser visto na figura 20

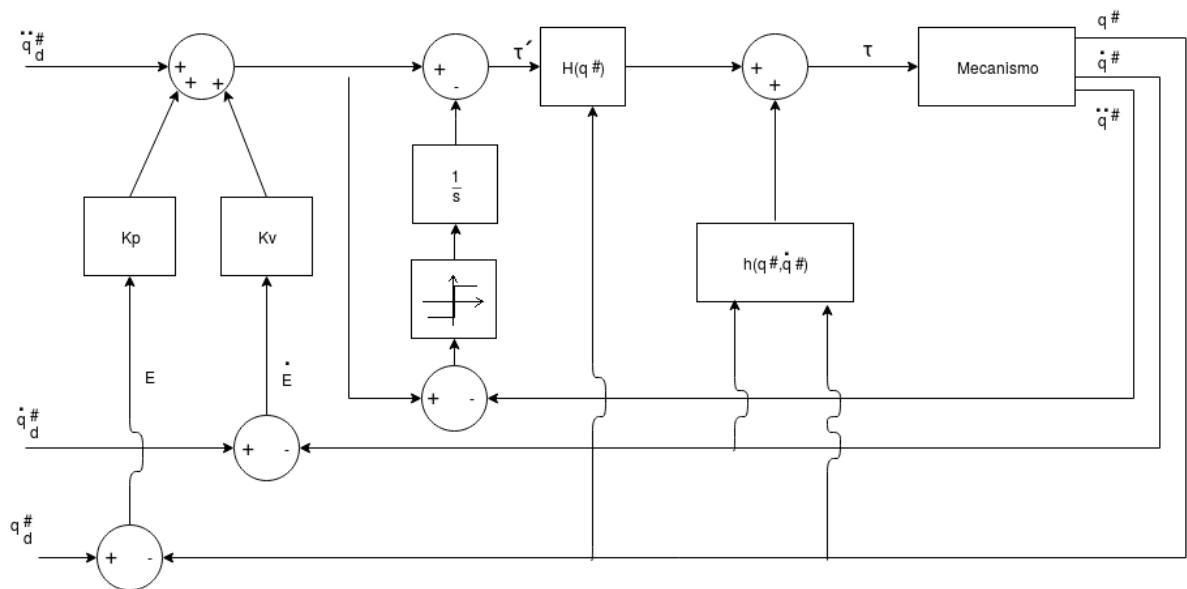


Figura 20 – Diagrama de blocos da malha de controle por SMC - Fonte:Própria

# 6 RESULTADOS

## 6.1 Projeto Mecânico

Para o projeto proposto na capítulo 4, obtivemos as frequências naturais apresentadas nas figuras 21 e 22. A frequência natural tem que ser alta pra nao entrar em ressonância com o motor e os valores obtidos foram considerados satisfatórios. A construção final do protótipo pode ser vista na figura 23.

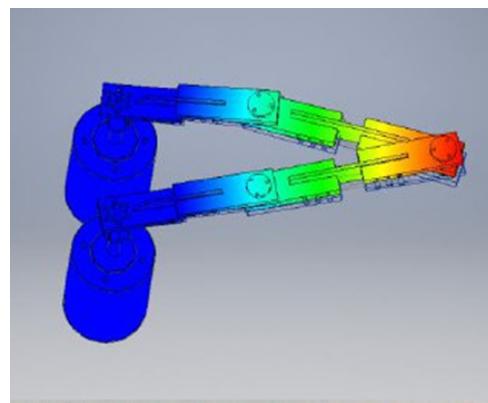


Figura 21 – Frequênci a natural  $68.40Hz$  - Fonte:Própria

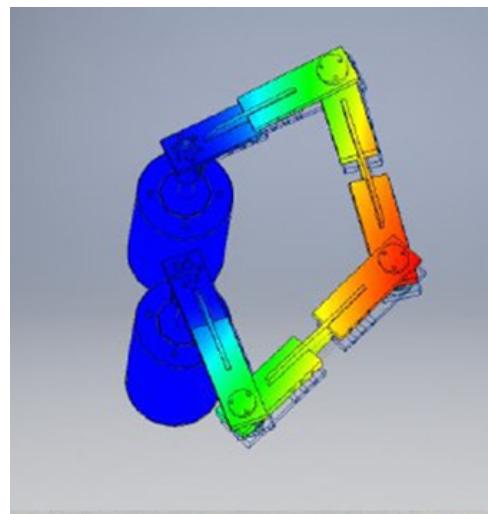


Figura 22 – Frequênci a natural  $90.10Hz$  - Fonte:Própria

## 6.2 Simulação do controle não linear

As simluções do controle por torque computado e do SMC foram realizadas afim de comparação do seu desempenho.



Figura 23 – Protótipo montado - Fonte:Própria

A função  $\text{sign}(x)$  foi substituída pela função de saturação  $\tanh(2.5x)$ , principalmente para que seja possível a convergência da simulação no Mathematica. O uso dessa função de saturação cria um efeito de estabilização numérica na simulação. Além disso, ajuda a diminuir ainda mais o *chattering* nos atuadores. Em contra partida, teremos um erro não nulo em regime permanente.

Utilizamos os parâmetros do mecanismo definidos na tabela 1. As condições iniciadas são definidas a seguir:

$$\begin{cases} x(0) = 0.07 \\ y(0) = 0.17 \\ x'(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

A trajetória de referência é uma circunferência dada pela seguinte equação:

$$\begin{cases} x_d(t) = 0.07 \cos(14.285t) \\ y_d(t) = 0.17 + 0.07 \sin(14.285t) \end{cases} \quad (6.2)$$

Na simulação foram considerados torques de atrito no eixos dos motores dados por:

$$\begin{cases} \tau_{a1} = -0.04 \tanh(1000.\dot{\theta}_{11}) \\ \tau_{a2} = -0.04 \tanh(1000.\dot{\theta}_{21}) \end{cases} \quad (6.3)$$

Essas não linearidades não serão compensadas pelas lei de controle.

Primeiro foi realizada a simulação do Controle por Torque Computado considerando os seguintes parâmetros do controlador:

$$k_v = 40$$

$$k_p = 400$$

$$k_i = 0$$

Os parâmetros foram escolhidos de modo que a alocação dos pólos do sistema sejam em  $s = -20\text{rad/s}$ . Os erros obtidos estão na figura 24 e 25

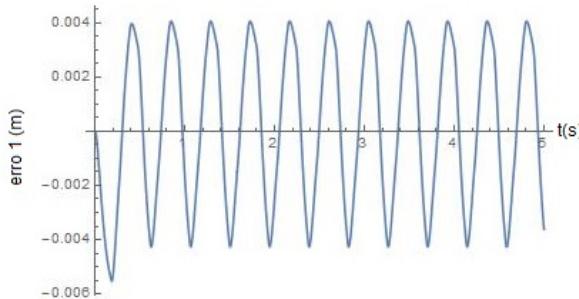


Figura 24 – Erro na coordenada x - Fonte:Própria

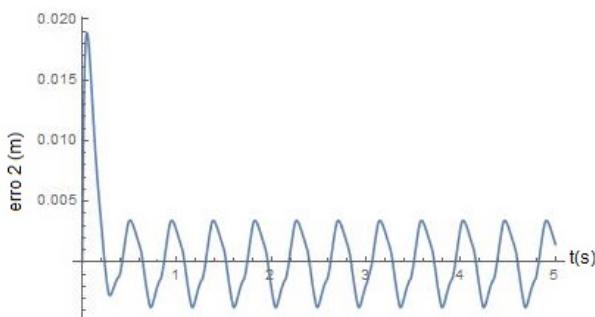


Figura 25 – Erro na coordenada y - Fonte:Própria

Para a simulação do SMC foram considerados os mesmos valores de  $k_p$  e  $k_v$ :

$$k = 100$$

Os erros obtidos com o SMC podem ser observados na figura 26 e 27.

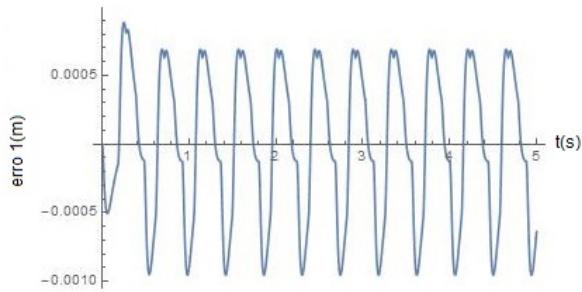


Figura 26 – Erro na coordenada x - Fonte:Própria

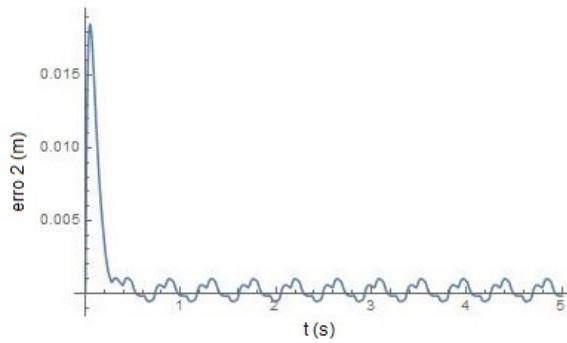


Figura 27 – Erro na coordenada y - Fonte:Própria

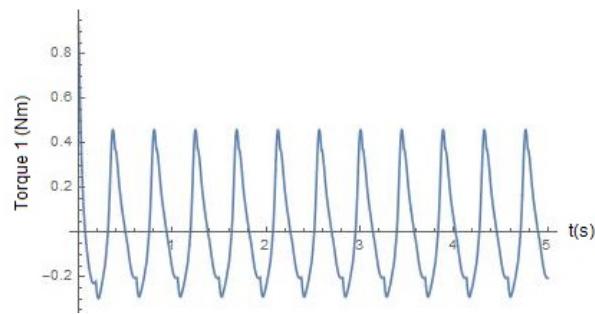


Figura 28 – Torque aplicado pelo atuador 1 - Fonte:Própria

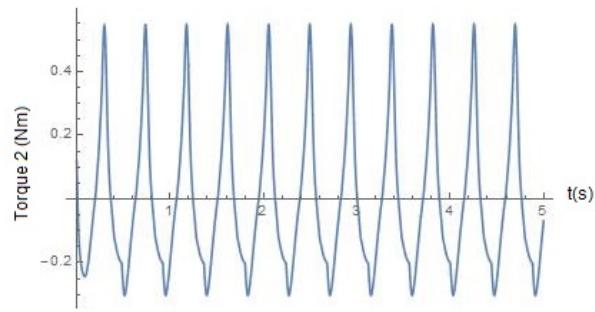


Figura 29 – Torque aplicado pelo atuador 2 - Fonte:Própria

Os torques obtidos na simulação pode ser visto nas figuras 28, 29.

Analizando os resultados obtidos, o erro em regime permanente diminuiu consider-

ravelmente utilizando o SMC, aproximadamente 10 vezes. Também é possível observar que os esforços dos atuadores não apresentaram *chattering*.

## 6.3 Implementação das leis Controles

A implementação dos controladores foi realizada em 2 etapas. Inicialmente os controladores foram implementados nos motores em vazio. E posteriormente, implementados junto com o mecanismo e considerando sua dinâmica.

### 6.3.1 Implementação nos motores em vazio

Para o teste do comportamento dos motores foi preso ao eixo do motor um arame para observar o deslocamento do motor.

- Controle Linear de Posição

Para o teste foi escolhida uma posição de referência e foi analisado o comportamento do motor. Os motores apresentaram uma resposta bastante satisfatória com um erro de posição menor que  $0.002\text{rad}$ . Os valores usados e obtidos nos testes são apresentados na tabela 6:

Tabela 6 – Valores de teste do controle linear de posição

$\theta_{ref}(\text{rad})$	$Erro_{M1}(\text{rad})$	$Erro_{M2}$
1.00	0.0019831	0.0003221
2.00	0.0017652	0.0017394
3.00	0.0003471	0.0009428
$2\pi$	0.0000461	0.0015983

- Controle de corrente.

Para o teste do controlador de corrente um multímetro foi colocado em série com os motores. Foram escolhidos valores de corrente de referência e observamos se a corrente que passava pelo multímetro e a corrente calculada eram próximas e se os motores se mantinham na corrente estabelecida.

Tabela 7 – Valores de teste do controle de corrente

$I_{ref}(A)$	$I_{M1calculado}(A)$	$I_{M1calculado}(A)$	$I_{M1medido}(A)$	$I_{M2medido}(A)$
1.00	1.01737	1.04539	0.98	0.99
1.25	1.19403	1.21387	1.18	1.29
1.50	1.52021	1.47031	1.47	1.51

Não foram testados para valores maiores que  $1,5A$  pois a velocidade do motor atinge valores em que há perda de passos no encoder, o que compromete a medida da

velocidade e consequentemente o cálculo da corrente. Sendo assim, para o teste realizado apresentado na tabela 7 os resultados foram satisfatórios.

- *Controle por Torque Computado*

Para esse teste, foi utilizado o mesmo procedimento que no teste do controle linear e foram realizados para as mesmas posições de referências apresentadas na tabela 6. Apesar dos erros obtidos serem pequenos, apresentaram sobressinal de aproximadamente de até 15.0%, porém de ocorrência menos frequente. Mesmo assim, o teste também foi considerado satisfatório. A tabela 8 motra os erros obtidos nesse teste.

Tabela 8 – Valores de teste do *CTC*

$\theta_{ref}(rad)$	$Erro_{M1}(rad)$	$Erro_{M2}(rad)$
1.00	0.0005401	0.0013935
2.00	0.0012498	0.0000082
3.00	0.0000035	0.0003028
$2\pi$	0.0000729	0.0010629

- *Slinding Mode Control*

Para esse teste, foi utilizado o mesmo procedimento que nos testes dos controles de posição e foram realizados para as mesmas posições de referências apresentadas na tabela 6. Apesar dos erros obtidos ainda menores que nos obtidos no *feedback linearization*, ocorreram sobressinais de aproximadamente 15.0%. Mesmo assim, o teste também foi considerado satisfatório. A tabela 9 motra os erros obtidos nesse teste.

Tabela 9 – Valores de teste do *SMC*

$\theta_{ref}(rad)$	$Erro_{M1}(rad)$	$Erro_{M2}(rad)$
1.00	0.0002017	0.0000302
2.00	0.0000000	0.0000106
3.00	0.0000000	0.0000054
$2\pi$	0.0000625	0.0000000

### 6.3.2 Implementação no mecanismo

Inicialmente testamos apenas os controles por Torque Computado e o *slinding Mode Control* considerando apenas a dinâmica do motor. Com o Torque computado, inicialmente a resposta do mecanismo é muito bruta mas alcança a posição desejada. Já com o controle por modos deslizantes, o mecanismo inicia sua trajetória mais suavemente, no entanto ao chegar próximo a posição desejada observa-se uma pequena vibração antes da estabilização. Provavelmente, essa vibração se deve ao *chattering*, que apesar dele ter diminuído, não é totalmente eliminado.

A compensação da dinâmica do mecanismo nas leis de controle ainda foi implementada.

## 7 TRABALHOS FUTUROS

- Propõe-se a utilização de um sensor de corrente. Inicialmente era proposto o uso de sensores implementado na malha de controladores não-lineares. Entretanto, houve problemas na leitura do sinal. Substituimos pelo cálculo *real-time*, que obteve bons resultados. O primeiro teste foi realizado utilizando comunicação via SPI com um arduino, e a conversão AD deste microcontrolador. Espera-se obter resultados ainda melhores com a utilização deste sensor.
- Propõe-se a implementação de outras abordagens de controlador não-linear para comparar os resultados.
- Propõe-se a criação de uma interface homem-máquina amigável para facilitar o uso dos equipamentos por terceiros.
- Propõe-se a utilização de interrupções para leitura do encoder. Espera-se obter maiores precisões. Este método também foi testado, mas houve perda de passo do encoder.

## 8 EQUIPE DE TRABALHO

A equipe de trabalho é formada por dois alunos da engenharia mecatrônica: Victor Pacheco Bartholomeu e Juliana Martins de Oliveira; E um professor orientador do PMR - departamento de engenharia mecatrônica: Prof. Dr. Tarcisio A. Hess Coelho e sob auxilio do doutorando na EPUSP André Garnier Coutinho.

Juliana Martins de Oliveira ingressou na Escola Politécnica da USP em 2012, com previsão de formatura em dezembro de 2016. Linguas: Inglês nível avançado, francês nível básico e espanhol básico. Iniciou um projeto de Iniciação Científica com o Professor Tarcisio A. Hess Coelho em aplicação de novas metodologias de modelagem e mecanismos paralelos em março de 2014. É bolsista do PET (Programa de Educação Tutorial) - Automação e Sistemas desde setembro de 2013 e representante discente do curso de Engenharia Mecatrônica desde julho de 2014. interesse e afinidade na área de programação.

Victor Pacheco Bartholomeu se formou no curso técnico em mechatrônica na ETEC Prof Basilides de Godoy em 2009, ingressou na Escola Politécnica da USP em 2012, com previsão de formatura em dezembro de 2016. Linguas: inglês nível intermediário, italiano nível intermediário. Realizou iniciação científica com o Prof Diolino José dos Santos Filho em controle supervisório de DAVs - Dispositivo auxiliar ventricular - realizada em 2013 . Realizou iniciação científica em métodos de detecção de vazamentos em *offloading* em projeto temático da petrobras sob orientação do Prof. Doutor Diolino José dos Santos Filho em 2014, e foi co-autor em publicação no SIICUSP em setembro de 2015. Realizou projeto de Iniciação Científica com o Professor Tarcisio A. Hess Coelho em aplicação de novas metodologias de modelagem de mecanismos paralelos iniciada em agosto de 2014. É bolsista do PET (Programa de Educação Tutorial) - Automação e Sistemas desde dezembro de 2012. Participou da IDC - robocon em 2013. Possui interesse nas áreas de controle e mecanismos.

# REFERÊNCIAS

ABDELLATIF B. HEIMANN, J. K. T. O. H. Practical model-based and robust control of parallel manipulators using passivity and sliding mode theory. *Robotics 2010: Current and Future Challenges*, 2010. Citado na página 8.

ALMEIDA, R. Z. H. de. *Modelagem Dinâmica e Controle de Robô Manipulador de Arquitetura Paralela Assimétrica de Três Graus de Liberdade*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 9.

BEGON F. PIERROT, P. D. P. Fuzzy sliding mode control of a fast parallel robot. *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference*, v. 1, p. 1178–1183, 1995. Citado na página 12.

BIANCHI, G. *Electronic Filter Simulation & Design*. McGraw-Hill Education, 2007. ISBN 9780071494670. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5S3LCIxnyCcC>. Citado na página 34.

CAMACHO, C. B. E. F. *Model Predictive Control*. 2nd. ed. [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 11.

CHEMORI GUILHERME SARTORI NATAL, F. P. A. Control of parallel robots: Towards very high accelerations. In: *SSD'2013: 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 8. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 11.

CODOUREY, A. Dynamic modeling and mass matrix evaluation of the delta parallel robot for axes decoupling control. In: *IEEE International Conference on intelligent robots and systems*. Osaka: [s.n.], 1996. Citado na página 10.

COELHO LIANG YONG, V. F. A. T. A. Decoupling of dynamic equations by means of adaptive balancing of 2-dof open-loop mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, v. 39, p. 871–881, 2004. Citado na página 21.

COUTINHO, T. A. H.-C. A. G. *Simulação dinâmica e validação experimental de técnicas de controle para robôs de arquitetura paralela*. [S.l.], 2016. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos. Plano de Pesquisas de Doutorado. Citado 6 vezes nas páginas 5, 8, 16, 17, 18 e 21.

CRAIG, J. J. *Introduction to robotics: mechanics and control*. 3rd. ed. [S.l.]: Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 10, 11 e 13.

DUCHAINE S. BOUCHARD, C. M. G. V. Computationally efficient predictive robot control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 12, n. 5, p. 570–578, 2007. Citado na página 11.

- EBRAHIMI FARZIN PILTAN, M. B. M. M.; NABAEE, A. Intelligent robust fuzzy-parallel optimization control of a continuum robot manipulator. *International Journal of Control and Automation*, v. 6, n. 3, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 11.
- GULDNER, V. I. U. J. The chattering problem in sliding mode system. *International Workshop on Variable Structure Systems*, p. 346–350, 2006. Citado na página 11.
- KHALIL, D. W. *Modeling Identification and Control of Robots*. [S.l.]: Hermes Penton Ltd, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 10.
- LI, Q. X. Y. Dynamic modeling and robust control of a 3-prc translational parallel kinematic machine. *Robotics and computer-integraed manufacturing*, v. 25, 2009. Citado na página 10.
- ORSINO, R. M. M.; COUTINHO, A. G.; COELHO, T. A. H. Dynamic modelling and control of balanced parallel mechanisms. In: \_\_\_\_\_. *Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots*. Cham: Springer International Publishing, 2016. p. 403–445. ISBN 978-3-319-17683-3. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3\\_16](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3_16). Citado na página 22.
- ORSINO, T. A. H.-C. R. M. M. A contribution for developing more efficient dynamic modelling algorithms of prallel robots. In: *International Journal of mechanisms and robotic Systems*. [S.l.: s.n.], 2013. v. 1, n. 1, p. 15–34. Citado 3 vezes nas páginas 8, 13 e 19.
- SLOTINE, W. L. J. J. E. *Applied nonlinear control*. 3rd. ed. [S.l.: s.n.], 1991. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 48.
- WANG JUN WU, L. W. Z. Y. J. Dynamic feed-forward control of a parallel kinematic machine. *Mechatronics*, v. 19, p. 313–324, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- ZUBIZARRETA I. CABANES, M. M. C. P. A. Control of parallel robots using passive sensor data. In: *IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS*. [S.l.: s.n.], 2008. Citado na página 10.
- ZUBIZARRETA I. CABANES, M. M. C. P. A. A redundant dynamic model of parallel robots for model-based control. *Robotica*, v. 31, p. 203–216, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- ZUBIZARRETA I. CABANES, M. M. C. P. E. P. A. Redundant sensor based control of the 3rrr parallel robot. *Mechanism and machine theory*, v. 54, p. 1–17, 2012. Citado na página 11.

# APÊNDICE A – PROJETO DE DRIVER DE ALTA POTÊNCIA

Inicialmente este seria o driver utilizado no projeto. No entanto, devido a alguns imprevistos como a queima de alguns componentes e falta de tempo para a fabricação de um novo driver, optamos pela substituição.

## A.1 Funcionamento

O driver do motor foi projetado de acordo com as características do motor selecionado. O motor utilizado possui tensão nominal de 24V e corrente nominal de 13A. A placa foi projetada com uma alimentação de 24V e corrente limite de 30A, estabelecida para segurança e garantia de bom funcionamento da placa.

Para fornecer a corrente necessária e 24V de tensão, foram utilizadas duas fontes chaveadas que fornecem até 16,7V e ligadas em paralelo com dois diodos para evitar que haja corrente reversa. Além disso, os diodos funcionam como proteção para a placa de tensão, no caso de esta ser ligada errada.

Devido à restrições das máquinas de usinagem de placa de circuito impresso disponíveis nos laboratórios, a placa precisou ser dividida em quatro partes. O esquemático completo do projeto é apresentado no apêndice A. As características da placa serão aqui apresentadas seguindo as separações do circuito, embora a fabricação seja apresentada na seção seguinte.

A placa de lógica, é responsável por receber os sinais do arduino e pela proteção do circuito. A proteção é realizada por portas NAND e inversores lógicos. Esta lógica garante que nunca haja acionamento de dois sinais digitais em HIGH simultaneamente. Para evitar efeitos eletromagnéticos no circuito de proteção foram colocados optoacopladores que garantem também que o sinal lógico de saída seja de 5V em HIGH, mesmo que o sinal de entrada seja de 3.3V. Esta tensão garante o funcionamento correto dos transistores da placa de controle. O optoacoplador funciona também como inversor lógico.

A placa de Potência contém a ponte H formada por MOSFETs irf3205 de canal N, escolhido devido à alta capacidade de corrente e baixa resistência interna. Os MOSFETs escolhidos conduzem quando a tensão entre o gate e o source ( $V_{GS}$ ) atingem uma faixa de tensão de 4V a 20V, sendo que a resistência interna é mínima para o  $V_{GS}$  máximo. Esta placa contém também um fusível de 30A para garantir a segurança do motor e da fonte de tensão.

A placa de Tensão é utilizada para fornecer as tensões necessárias para acionamento dos MOSFETs ( $V_{GS}$ ). Este circuito possui uma bomba de carga montada com o CI NE555. Este CI especifica uma tensão máxima recomendada de 15V, como a resistência dos MOSFETs diminui quanto maior a tensão, esta foi a tensão escolhida para alimentar a bomba de carga. A tensão foi gerada utilizando um regulador de tensão. A bomba de carga foi projetada para somar a tensão de 15V à alimentação de 24V, produzindo 39V de saída. Dessa forma obtemos sempre  $V_{GS} = 15V$ . A frequência de oscilação é calculada por  $f = \frac{1.44}{(R_1+2*R_2)C}$  e foi projetada para a frequência de 100kHz que permite o uso de capacitores de poliéster cuja resistência interna é inferior à do eletrolítico

A placa de controle é responsável pelo chaveamento dos MOSFETs. O sinal recebido pela placa de lógica deve ser invertida devido ao optoacoplador. Devido à capacidade parasita dos MOSFETs, a constante de tempo de chaveamento é  $T = (R_{pullup} + R_{gate})C$  sendo  $R_{pullup}$  a resistência de pullup do inversor lógico. Como esta constante de tempo é muito alta, foi implementado um totem pole, reduzindo a constante de tempo para  $T = (\frac{R_{pullup}}{\beta} + R_{gate})C$ . Para garantir que os transistores do inversor lógico não irão saturar, foram utilizados diodos schottky entre a base e o coletor. Para permitir os testes e garantir a segurança desta placa sem o uso da placa de lógica, foram adicionados resistores de pullup na base dos inversores lógicos, garantindo que as saídas sejam sempre nulas.

## A.2 Fabricação

Como citado anteriormente, a placa foi dividida em quatro partes. O projeto foi realizado no software Eagle 7.3. Os layouts são apresentados no anexo A.

Devido à alta corrente que poderá passar pela placa de tensão, não foi possível utilizar uma placa de fenolite para a maioria das ligações. Por esse motivo, decidiu-se por utilizar fios conectados entre os MOSFETs, e somente os sinais da base e o terra foram usinados na placa. As bitolas de fio são tabeladas, para garantir a corrente máxima estabelecida precisamos utilizar fios de mínimo  $6mm^2$  que garantem 36A. Há também um fusível de 30A, responsável tanto pela proteção deste circuito, quanto para a proteção das fontes chaveadas utilizadas.

## APÊNDICE B – CINEMÁTICA

```

from sympy import *
from math import pi as Pi
init_printing(use_unicode = True)
t=symbols('t')

#parametros do mecanismo
l0 ,l1 ,l2=symbols('l0 ,l1 ,l2 ')

#Coordenadas generalizadas
theta_ = Matrix([Function('theta_1')(t),Function('theta_2')(t)])
#Angulos dos motores
x_     = Matrix([Function('x')(t),Function('y')(t)])
#Coordenadas do efetuador
q_     = Matrix([x_,theta_])
#Vetor com todas as coordenadas generalizadas

#####
#      Deducacao da Cinematica Inversa      #
#####

##          ##
#      Cinematica de Posicao      #
##          ##

#Coordenadas dos elos intermediarios em funcao de theta
a1_= Matrix([ 10+l1*cos(theta_[0]),l1*sin(theta_[0])])
a2_= Matrix([-10-l1*cos(theta_[1]),l1*sin(theta_[1])])

#Vinculos de posicao
Eq1=(x_[0]-a1_[0])**2+(x_[1]-a1_[1])**2-12**2
Eq2=(x_[0]-a2_[0])**2+(x_[1]-a2_[1])**2-12**2
phi_ = Matrix([Eq1,Eq2]) #Vetor com as equacoes vinculares

#Solucao analitica das equacoes vinculares

```

```

E1=phi_[0].expand().simplify().diff(cos(theta_[0]))
F1=phi_[0].expand().simplify().diff(sin(theta_[0]))
G1=(phi_[0]-E1*cos(theta_[0])-F1*sin(theta_[0])).simplify()

E2=phi_[1].expand().simplify().diff(cos(theta_[1]))
F2=phi_[1].expand().simplify().diff(sin(theta_[1]))
G2=(phi_[1]-E2*cos(theta_[1])-F2*sin(theta_[1])).simplify()

##                                     ##
#      Cinematica de Velocidade   #
##                                     ##

Jx_=phi_.jacobian(x_)
Jt_=phi_.jacobian(theta_)

from InvKinDeduction import *

# Dicionario dos paramentros geometricos do mecanismo
par = {10: 0.05, 11:0.12, 12:0.15}

####                                     #####
# Solucao Numerica da Cinematica Inversa #
####                                     #####
fE1=lambda xn_: E1.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i] for i in range(2)})
fF1=lambda xn_: F1.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i] for i in range(2)})
fG1=lambda xn_: G1.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i] for i in range(2)})

fE2=lambda xn_: E2.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i] for i in range(2)})
fF2=lambda xn_: F2.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i] for i in range(2)})
fG2=lambda xn_: G2.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i] for i in range(2)})

ftheta_1 = lambda xn_: 2*atan((-fF1(xn_)-sqrt(fE1(xn_)**2 +fF1(xn_)**2 -fG1(xn_)**2))/(fG1(xn_)-fE1(xn_)))
if fG1(xn_)!=fE1(xn_)
else 2*atan(-fE1(xn_)/fF1(xn_))

ftheta_2 = lambda xn_: 2*atan((-fF2(xn_)-sqrt(fE2(xn_)**2+fF2(xn_)**2 -fG2(xn_)**2))/(fG2(xn_)-fE2(xn_)))

```

```

if fG2( xn_ )!=fE2( xn_ )
else 2*atan( -fE2( xn_ )/fF2( xn_ ) )
ftheta_ = lambda xn_: Matrix([ ftheta_1( xn_ ), ftheta_2( xn_ ) ] )

#Caculo das posicoes
def fx_( thetan_ ):
    """###                                     #####
    # Solucao Numerica da Cinematica Direta #
    #####                                     #####""
    xc1= ( a1_[ 0 ] ).subs( par ).subs({ theta_[ i ]: thetan_[ i ]
    for i in range(2) })

    yc1= ( a1_[ 1 ] ).subs( par ).subs({ theta_[ i ]: thetan_[ i ]
    for i in range(2) })

    xc2= ( a2_[ 0 ] ).subs( par ).subs({ theta_[ i ]: thetan_[ i ]
    for i in range(2) })

    yc2= ( a2_[ 1 ] ).subs( par ).subs({ theta_[ i ]: thetan_[ i ]
    for i in range(2) })

    r = par[12]

    xm=(xc1+xc2)/2.0
    ym=(yc1+yc2)/2.0
    dx=xc1-xc2
    dy=yc1-yc2

    lamb = sqrt((r**2)/(dx**2 + dy**2) - 0.25)

    xp = xm - lamb*dy
    yp = ym + lamb*dx

    return Matrix([ xp ,yp ])

#Calculo dos angulos intermediarios
def fthetai_( xn_ ,thetan_ ):

```

```

x1 = par[10] + par[11]*cos(theta_n_[0])
y1 = par[11]*sin(theta_n_[0])
x2 = -par[10] - par[11]*cos(theta_n_[1])
y2 = par[11]*sin(theta_n_[1])
theta_i_1 = (atan2(xn_[1] - y1, xn_[0] - x1) - theta_n_[0])
theta_i_2 = (Pi-atan2(xn_[1] - y2, xn_[0] - x2) - theta_n_[1])
return Matrix([theta_i_1, theta_i_2])

#Cinemática inversa de todas as coordenadas generalizadas
def fInvKin(xn_):
    theta_n_ = ftheta_n_(xn_)
    theta_in_ = ftheta_i_(xn_, theta_n_)
    qn_=Matrix(
        [xn_[0], xn_[1], theta_n_[0], theta_in_[0], theta_n_[1], theta_in_[1]])
    return qn_

#Cinemática direta de todas as coordenadas generalizadas
def fDirKin(theta_n_):
    xn_ = fx_(theta_n_)
    theta_in_=ftheta_i_(xn_, theta_n_)
    qn_=Matrix(
        [xn_[0], xn_[1], theta_n_[0], theta_in_[0], theta_n_[1], theta_in_[1]])
    return qn_

#####
#####  

# Calculo Numerico dos Jacobianos #  

#####

fJx_=lambda xn_, theta_n_: Jx_.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i]
for i in range(2)}).subs({theta_[i]: theta_n_[i] for i in range(2)})  
  

fJt_=lambda xn_, theta_n_: Jt_.subs(par).subs({x_[i]: xn_[i]
for i in range(2)}).subs({theta_[i]: theta_n_[i] for i in range(2)})
```

# APÊNDICE C – ÁREA DE TRABALHO

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from InKinNum import *

# 
lx=0.25 # Largura do retangulo
ly=0.28 # Altura do retangulo
dl=0.0005 # discretizacao
nx=int(lx/dl) # quadradinhos em x
ny=int(ly/dl) # quadradinhos em y
M=zeros(ny,nx) # Malha da discretizacao
epsx=0.0004 # valor maximo do modulo do determinante x para o ponto
            # ser considerado singular
epst=0.00007 # valor maximo do modulo do determinante y para o ponto
            # ser considerado singular

# circunferencia para tracar o disco cuja trajetoria sera realizada
r = 0.085
x0 = 0.0
y0 = 0.16

# Preenchimento da matriz M
for i in range(ny):
    for j in range(nx):
        x=j*dl+0.5*dl
        y=i*dl+0.5*dl

        xn_=Matrix([x,y])
        thetan_=ftheta_(xn_)

        if im(thetan_[0])==0 and im(thetan_[1])==0:

```

```

if (abs(det(fJx_(xn_, thetan_)))<epsx or
abs(det(fJt_(xn_, thetan_)))<epst):
    M[i,j]=2 #Se M=2 entao o ponto o ponto eh singular
else:
    M[i,j]=1 #Se M=1 entao o ponto eh nao singular e
                #pertence a area de trabalho

if (x - x0)**2 + (y - y0)**2 < r**2:
    M[i,j]=3 #Se M=3 entao o ponto pertence ao disco
#Se M=0 entao nao pertence a area de trabalho

#Inversao das linhas da matriz para que a origem do sistema
#de coordenadas fique embaixo
M2=M.extract(range(ny-1,-1,-1),range(nx))
pprint(M2)

#plotando a matriz
M3 = np.zeros((ny,nx))
for i in range(ny):
    for j in range(nx):
        M3[i,j] = int(M2[i,j])

plt.matshow(M3)

```

## **ANEXO A – PONTE H**

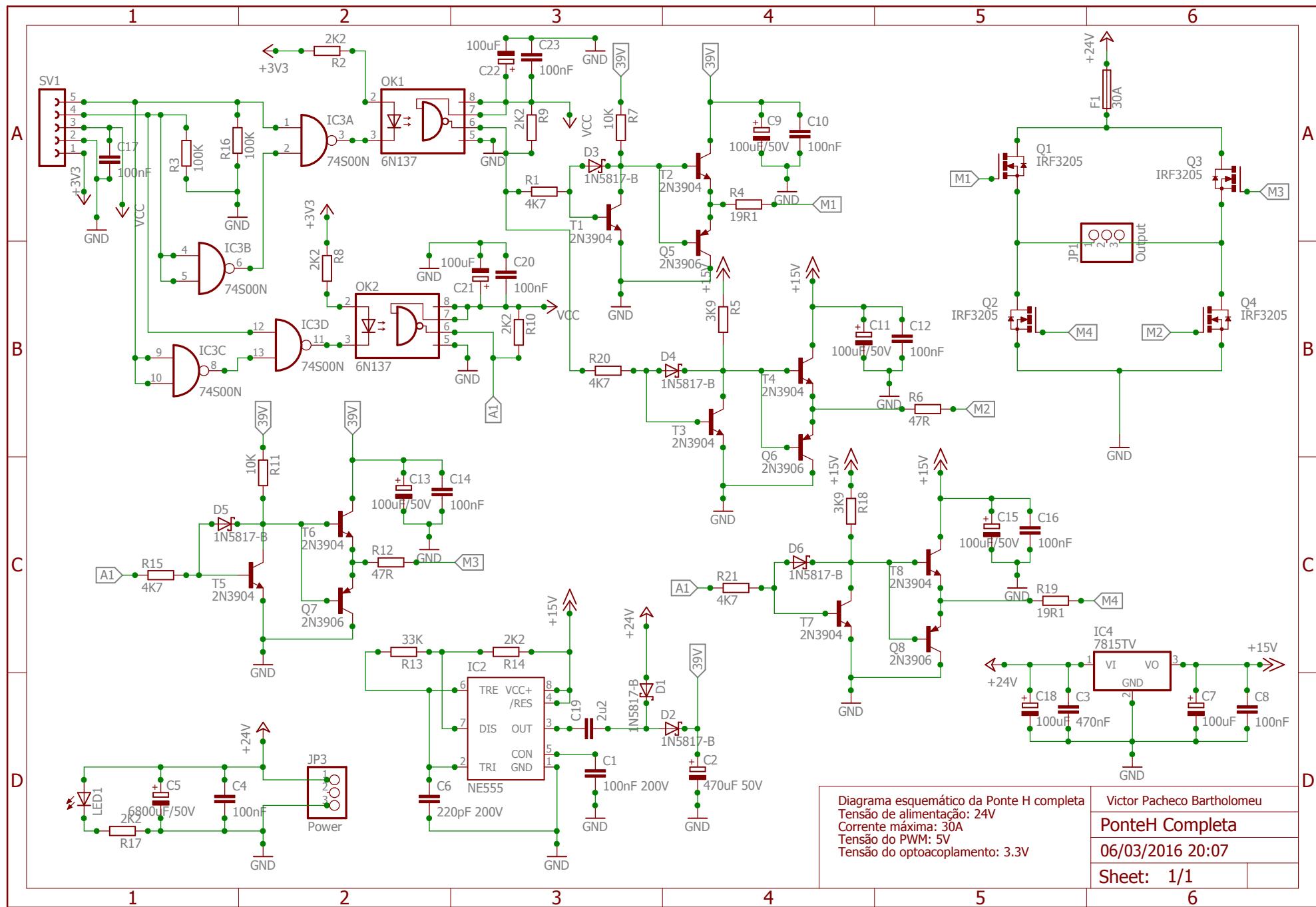
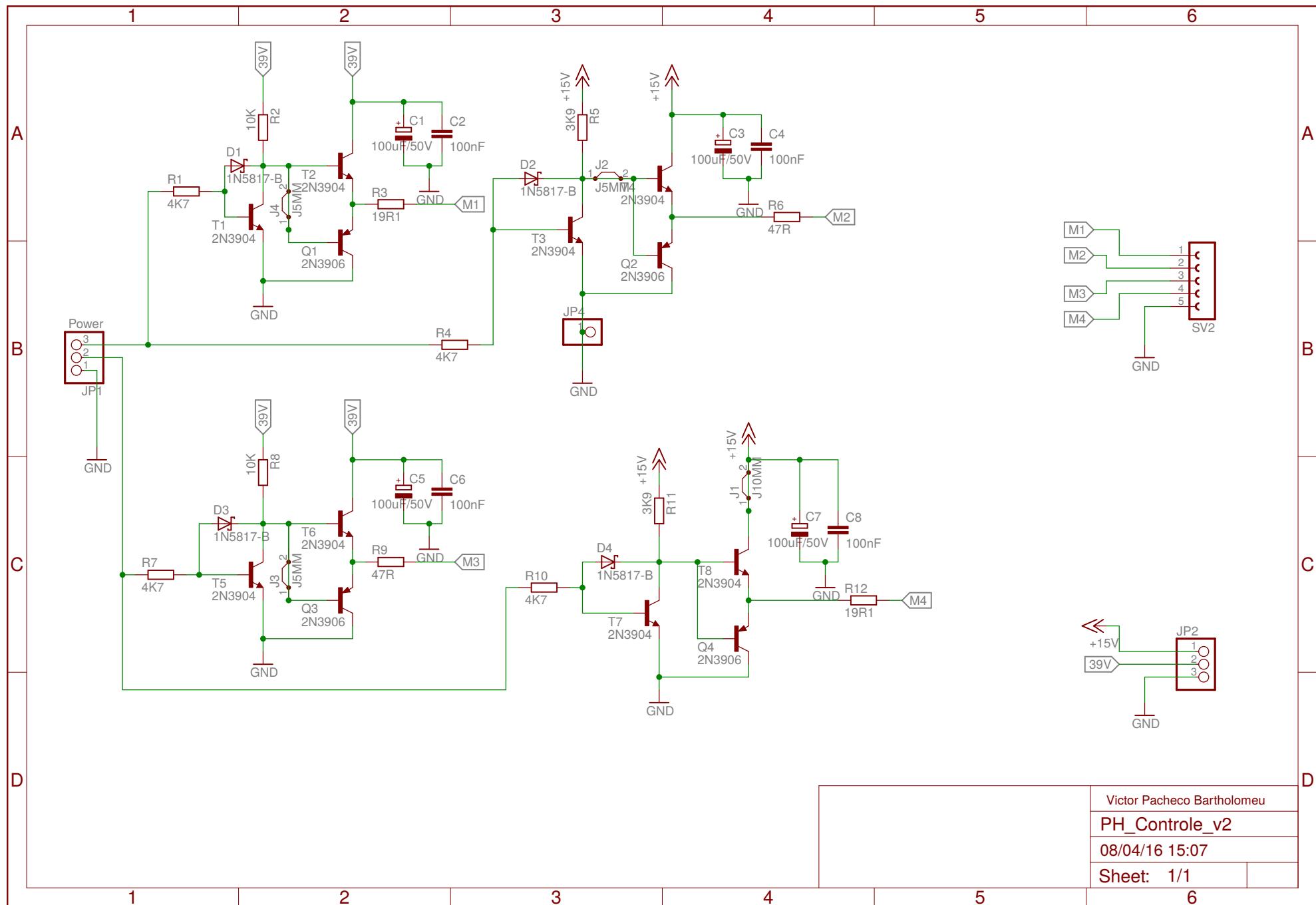
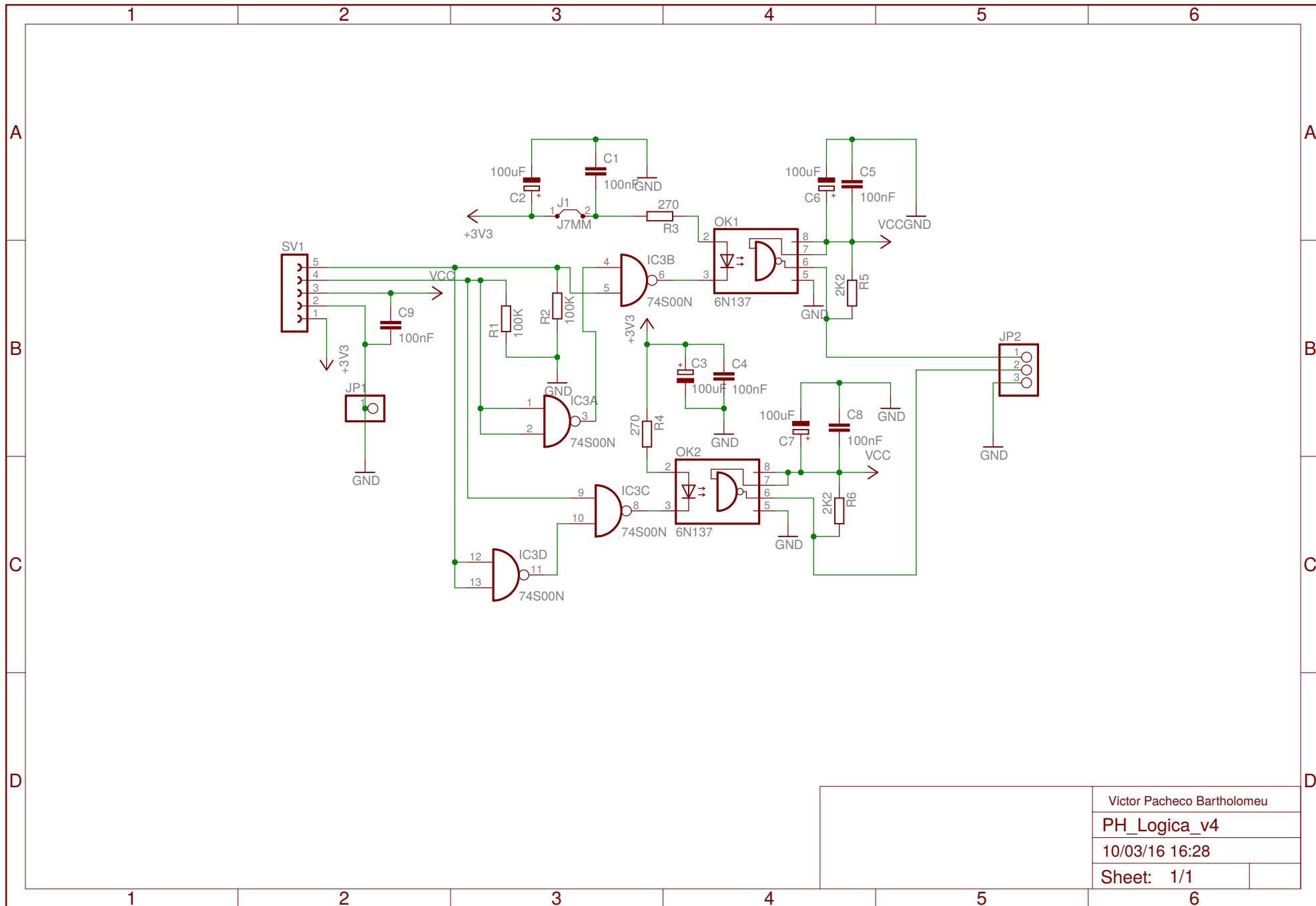


Diagrama esquemático da Ponte H completa  
Tensão de alimentação: 24V  
Corrente máxima: 30A  
Tensão do PWM: 5V  
Tensão do optoacoplamento: 3.3V

Victor Pacheco Bartholomeu
PonteH Completa
06/03/2016 20:07
Sheet: 1/1



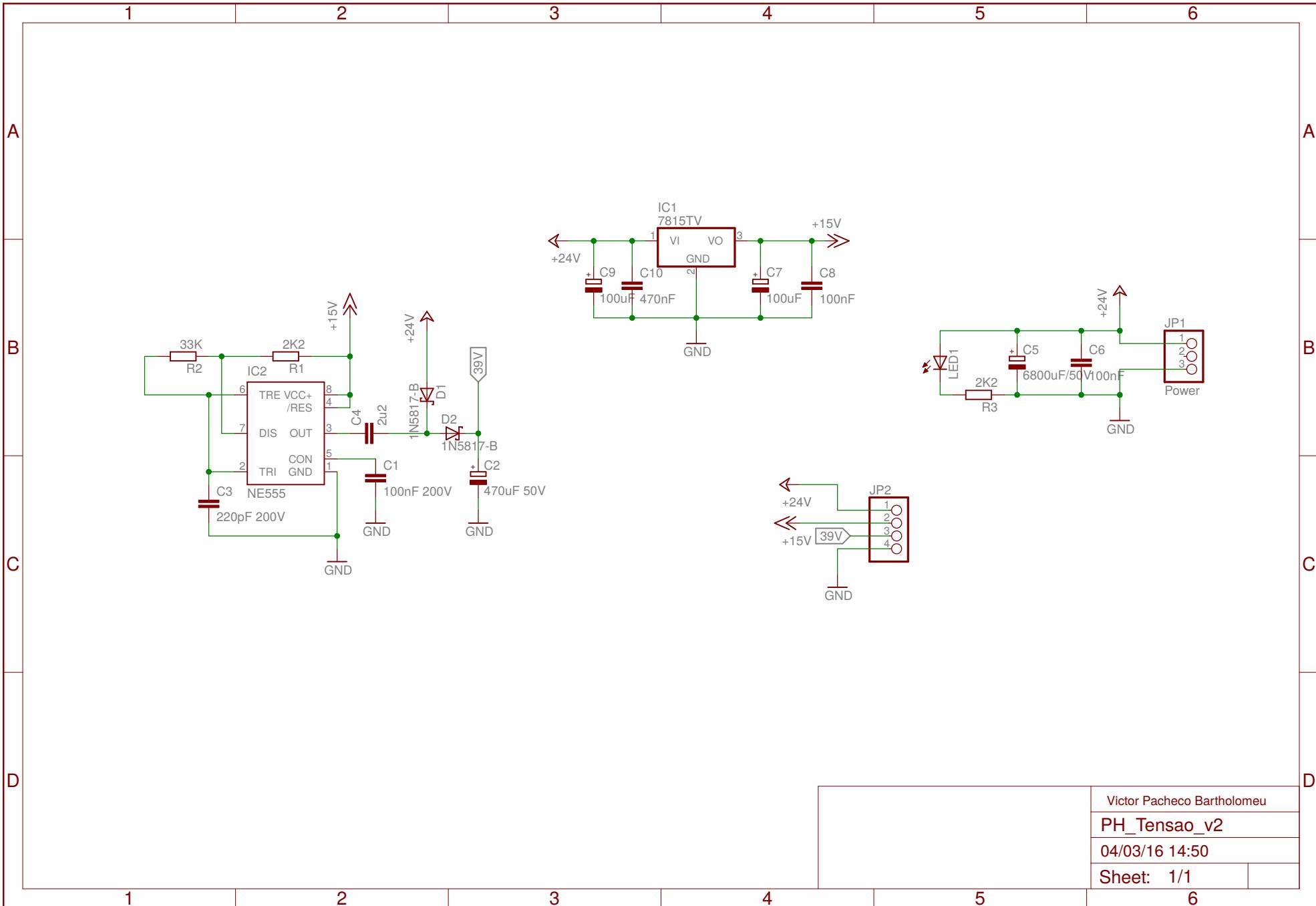


Victor Pacheco Bartholomeu

PH\_Logica\_v4

10/03/16 16:28

Sheet: 1/1

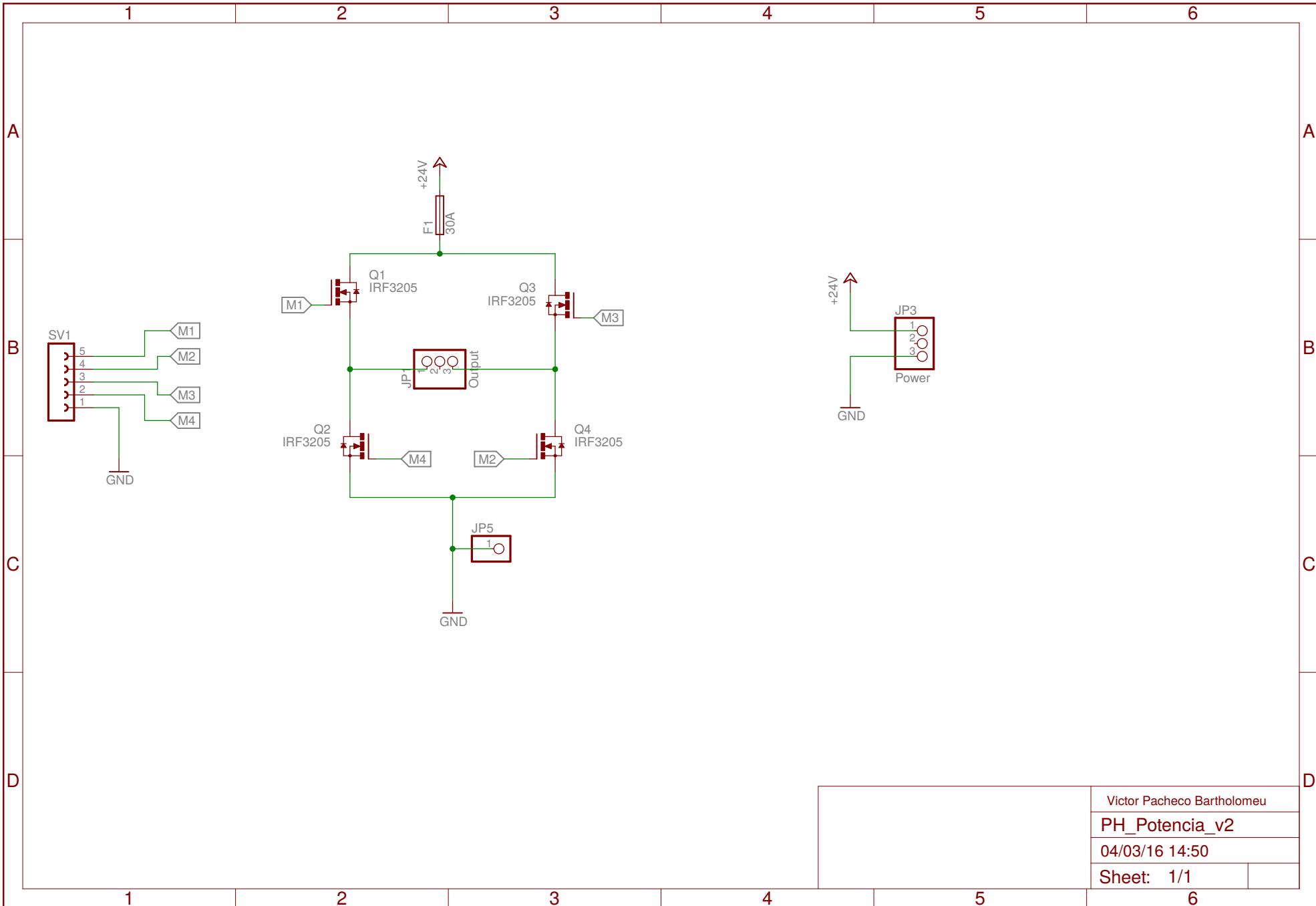


Victor Pacheco Bartholomeu

**PH\_Tensao\_v2**

04/03/16 14:50

Sheet: 1/1



Victor Pacheco Bartholomeu
PH_Potencia_v2
04/03/16 14:50
Sheet: 1/1

## **ANEXO B – DATASHEET DO MOTOR**

# Motor Imã Permanente PM70 S1 CW - 24Vcc 3600 rpm

CÓDIGO: PM7054101

## Especificações

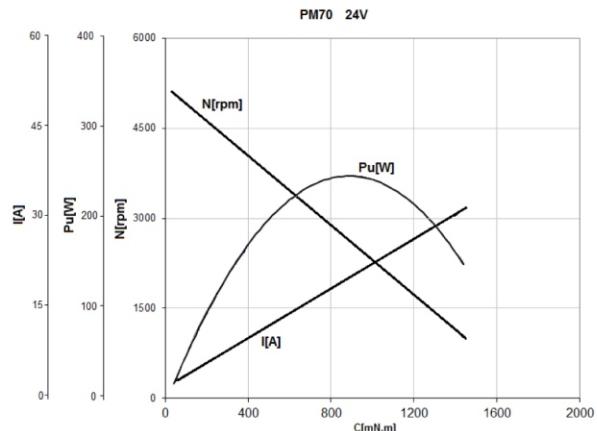
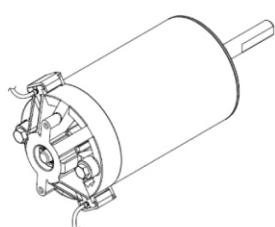
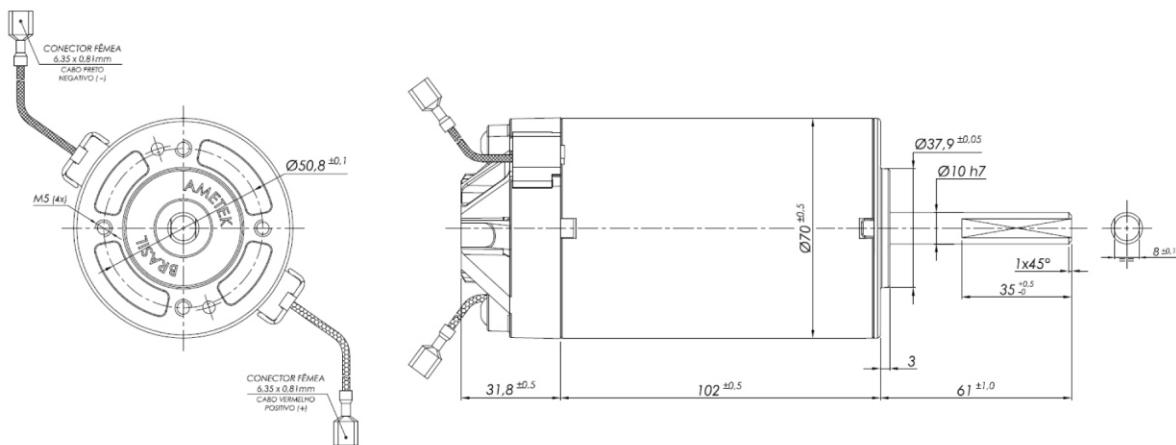
Tensão de Alimentação:	24Vcc
Potência Útil:	1/3 HP
Sistema de Mancais:	Duplo Rolamento
Rotação:	3.600 rpm
Sentido de Giro:	Horário
Protetor Térmico:	Sob consulta
Normas de Construção:	EN60335, RoHS
Classe de Isolação:	B
Grau de Proteção:	IP 10
Peso:	1,8kg
Embalagem:	100 peças/pallet
Conectores de Alimentação:	Padrão Faston 6,3 x 0,8mm



## Descrição

Motor PM70 HD (Heavy Duty) – Imã Permanente  
 3.600 rpm – 1/3 HP

## Dimensões (mm)



**TELEVENDAS (11) 3312.8544**

R. Florêncio de Abreu, 200 - Centro - São Paulo [vendas@salfatis.com.br](mailto:vendas@salfatis.com.br)

**[www.salfatis.com.br](http://www.salfatis.com.br)**



**ISO 9001**