

## ***Controle Robusto de Sistemas Mecatrônicos***

Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico

Outubro de 2017

### **Resumo**

Técnicas modernas de controle robusto vem sendo desenvolvidas com frequência na literatura. No entanto, na grande maioria dos casos, a validação de tais controladores é feita via simulações simples. Dentro deste contexto, este projeto visa explorar aspectos práticos de implementação de técnicas de controle robusto em sistemas mecatrônicos. O foco será na aplicação de controladores robustos  $H_2$  com incertezas paramétricas sintetizados via LMIs e em controle por modos deslizantes.

Assim sendo, o resultado final esperado pelo desenvolvimento deste projeto de pesquisa consiste na produção de conhecimento científico e tecnológico, os quais serão moldados pelo desenvolvimento de métodos, técnicas e ferramentas que permitam projetar e implementar controladores robustos modernos em sistemas físicos.

## ***Controle Robusto de Sistemas Mecatrônicos***

Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico

October, 2017

### **Abstract**

Modern robust control techniques have been developed frequently in the literature. However, in the vast majority of cases, the validation of such controllers is done via simple simulations. Within this context, this project aims to explore practical implementation aspects of robust control techniques in mechatronic systems. The focus will be on the application of robust  $H_2$  controllers with parametric uncertainties synthesized via LMIs and in sliding mode control.

Thus, with the development of the project it is expected to produce scientific and technological knowledge, which will be shaped by the development of methods, techniques and tools that allow the design and implementation of modern robust controllers in physical systems.

# 1 Enunciado do problema

Sistemas mecatrônicos são sujeitos a várias incertezas, como por exemplo os coeficientes de atrito das juntas, as matrizes de inércia, entre outros. Assim, um projeto feito para o modelo nominal pode não ter o desempenho satisfatório, ou ainda nem conseguir estabilizar o sistema real.

Dentro deste contexto, técnicas de controle robusto podem ser uma solução viável [15]. Dentre as técnicas de controle robusto modernas pode-se destacar o controle por modos deslizantes (SMC, *Sliding Mode Control*) [16], [11] e a síntese de controladores robustos via desigualdades matriciais lineares (LMIs, *Linear Matrix Inequalities*) [3], [6]. Tratam-se de duas abordagens muito diferentes, como descrito a seguir.

A primeira consiste basicamente em reduzir um problema genérico de controle de ordem  $n$  nos estados a um sistema de primeira ordem em  $s$ , conhecida como superfície de escorregamento. A lei de controle, que apresenta um termo descontínuo em  $s$ , deve ser projetada de modo a garantir que os estados atinjam  $s$  em um dado intervalo de tempo finito, e que sigam deslizando exponencialmente sobre ela até que alcancem os estados desejados,  $\mathbf{x}_d$ .

A segunda abordagem surge do critério de estabilidade de Lyapunov. Tal problema pode ser enunciado como encontrar um ganho  $K$  de realimentação de estados que estabilize o sistema, segundo Lyapunov, cuja formulação é escrita como uma LMI. Além de estabilização, pode-se considerar um índice de desempenho, como minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema que também aparece como uma restrição na forma de LMIs. Pode-se garantir robustez ao sistema pela minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , o que vem do Teorema do Ganho Pequeno [7], ou mesmo considerar incertezas paramétricas [6].

Sistemas mecatrônicos podem ser convenientemente modelados na notação de *quaternions*. Trata-se de uma notação compacta na qual qualquer rotação de um corpo rígido pode ser descrita como uma simples rotação em torno de um eixo específico. Não há muitos trabalhos na literatura que abordam controle diretamente na forma de *quaternions*. Os trabalhos mais comuns sobre isso são na área de quadrrrotores [13]. Portanto, há espaço para contribuição de controle robusto na notação de *quaternions*, o que também será explorado neste projeto. O Apêndice A (arquivo adicional), apresenta uma boa revisão sobre a utilização de *quaternions* para modelar o sistema Cubli. Tal trabalho foi desenvolvido pelo aluno de doutorado que trabalhará nesse sistema.

O foco principal do projeto será na aplicação de técnicas modernas de controle robusto em sistemas mecatrônicos práticos, com programação embarcada em hardwares de baixo custo. Sobre SMC, o foco será em uma estrutura que una um controlador por modos deslizantes com um controlador linear (por exemplo, o LQR, *Linear Quadratic Regulator*). Sobre LMIs, o escopo será na síntese de controladores com critério de mínima norma  $\mathcal{H}_2$ , mas com a inserção de incertezas paramétricas. Além disso, será avaliada a utilização das técnicas de controle robusto na notação de *quaternions*.

Além de sistemas já existentes no Laboratório de Controle Aplicado (LCA), dois novos sistemas serão construídos no projeto: um pêndulo invertido com duas rodas de reação e um cubo autoequilibrado com três rodas de reação.

## 2 Resultados esperados

Durante e após a execução do trabalho de pesquisa, os seguintes resultados e benefícios são esperados:

- Domínio de técnicas de controle robusto modernas;
- Controle robusto na notação de *quaternions*;
- Validação práticas de controle robusto em sistemas mecatrônicos;
- Promoção de iniciação científica e a formação técnico-científica de estudantes de graduação e pós-graduação;
- Desenvolvimento de um pêndulo invertido com duas rodas de reação;
- Desenvolvimento de um cubo auto equilibrado controlado por rodas de reação;
- Publicação de artigos em congressos e em periódicos especializados.

### 3 Desafios científicos e tecnológicos e os meios e métodos para superá-los

Os principais desafios científicos estão listados a seguir:

1. desenvolver/projetar controladores robustos utilizando técnicas modernas;
2. aplicar as estratégias de controle robusto modernas em sistemas práticos;
3. **modelar sistemas na notação de *quaternions* e projetar controle robusto nessa notação;**
4. desenvolver dois sistemas controlados por roda de reação;

#### 3.1 Metodologia para superar item 1

Para o item 1 listado, as seguintes técnicas de controle serão utilizadas:

##### 3.1.1 Controle por Modos Deslizantes Integrativo com LQR

Em [16] é apresentado um controle por modos deslizantes , cuja superfície é dada por:

$$\sigma(t) = \dot{\tilde{x}}(t) + 2\lambda\tilde{x}(t) + \lambda^2 \int_0^t \tilde{x}(\tau)d\tau, \quad (1)$$

com  $\lambda$  sendo uma constante positiva que leva a superfície para zero e  $\tilde{x}(t) = x(t) - x^d(t)$ , i.e., a diferença entre o estado real e o desejado. Tal equação pode ser reescrita como:

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \\ \int_0^t \tilde{x}(\tau)d\tau \end{bmatrix}, \quad (2)$$

a qual possui duas características interessantes:

- está na forma  $\sigma(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t)$ , tal como apresentado na metodologia proposta em [9];
- o vetor de estados é equivalente a uma forma aumentada com integradores na entrada

Seja um sistema linear a invariante no tempo (LIT), já aumentado com integradores, representado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_{aug}(t) = \mathbf{A}_{aug}\mathbf{x}_{aug}(t) + \mathbf{B}_{aug}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{aug}\mathbf{D}\xi(t, x) \quad (3)$$

com  $\mathbf{x}_{aug}(t)$  sendo o vetor de estados,  $\mathbf{u}(t)$  o sinal de controle,  $\mathbf{A}_{aug}$  e  $\mathbf{B}_{aug}$  as matrizes de estado e entrada, respectivamente, e  $\xi(t, x)$  o modelo da incerteza ou de perturbações externas. Uma lei de controle SMC típica é dada por:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_l(t) + \mathbf{u}_n(t), \quad (4)$$

em que  $\mathbf{u}_l(t)$  vem de um controlador linear por realimentação de estados, e  $\mathbf{u}_n(t)$  é a parcela de controle não-linear associado a uma função de chaveamento. Assim,

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_{aug}\mathbf{x}_{aug}(t) - \rho(t, x)(\mathbf{G}\mathbf{B}_{aug})^{-1} \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|}, \quad (5)$$

onde  $\sigma(t)$  é a superfície de escorregamento,  $\mathbf{G}$  é uma matriz a ser encontrada tal que  $(\mathbf{G}\mathbf{B}_{aug})^{-1}$  é invertível e  $\rho(t, x)$  deve ser tal que a condição de escorregamento seja satisfeita.

Seja  $\sigma(t)$  uma superfície dependente do erro de rastreamento, tal que:

$$\sigma(t) = \mathbf{G} (\mathbf{x}_{aug}(t) - \mathbf{x}_{aug}^d(t)). \quad (6)$$

Ao derivar essa equação, chega-se em:

$$\dot{\sigma}(t) = \mathbf{G} [\dot{\mathbf{x}}_{aug}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{aug}^d(t)] \quad (7)$$

$$= \mathbf{G} [\mathbf{A}_{aug}\mathbf{x}_{aug}(t) + \mathbf{B}_{aug}\mathbf{u}_l(t) + \mathbf{B}_{aug}\mathbf{u}_n(t) + \mathbf{B}_{aug}\mathbf{D}\xi(t, x) - \dot{\mathbf{x}}_{aug}^d(t)], \quad (8)$$

que, ao substituir (5), resulta em

$$\dot{\sigma}(t) = \mathbf{G} [(\mathbf{A}_{aug} - \mathbf{B}_{aug}\mathbf{K}_{aug})\mathbf{x}_{aug}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{aug}^d(t)] - \rho(t, x) \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} + \mathbf{G}\mathbf{B}_{aug}\mathbf{D}\xi(t, x). \quad (9)$$

O controlador linear deve garantir que a primeira parcela convirja para zero, o permite a seguinte simplificação

$$\dot{\sigma}(t) = -\rho(t, x) \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|} + \mathbf{G}\mathbf{B}_{aug}\mathbf{D}\xi(t, x). \quad (10)$$

Ao multiplicar a Eq. (10) na esquerda por  $\sigma^T(t)$ , e observando que  $\sigma^T(t)\sigma(t) = \|\sigma(t)\|^2$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) &= -\rho(t, x)\|\sigma(t)\| + \sigma^T(t)\mathbf{G}\mathbf{B}_{aug}\mathbf{D}\xi(t, x) \\ &\leq \|\sigma(t)\|(-\rho(t, x) + \|\mathbf{G}\mathbf{B}_{aug}\mathbf{D}\xi(t, x)\|). \end{aligned} \quad (11)$$

Seja a versão multivariável da condição de escorregamento ( *$\eta$ -reachability*) [9]

$$\sigma^T(t)\dot{\sigma}(t) \leq -\eta\|\sigma(t)\|, \quad (12)$$

onde  $\eta$  é uma constante positiva, o que pode ser garantido ao escolher  $\rho(t, x)$  tal que

$$\rho(t, x) \geq \|\mathbf{G}\mathbf{B}_{aug}\mathbf{D}\xi(t, x)\| + \eta. \quad (13)$$

Para sistemas SISO, a Eq. (6) pode ser escrita como

$$\sigma(t) = [G_1 \quad G_2 \quad G_3] \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \\ \int_0^t \tilde{x}(\tau) d\tau \end{bmatrix}, \quad (14)$$

ou ainda como,

$$\sigma(t) = G_1x_1(t) + G_2x_2(t) + G_3x_3(t), \quad (15)$$

e observando que  $\dot{x}_3(t) = x_1(t)$  e  $\ddot{x}_3(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t)$ , resulta em

$$\sigma(t) = G_2\ddot{x}_3(t) + G_1\dot{x}_3(t) + G_3x_3(t), \quad (16)$$

de onde é possível afirmar que a variedade  $\sigma(t)$  representa um sistema de segunda ordem. Logo, a matriz  $\mathbf{G}$  define a dinâmica da variedade.

Para sistemas multivariáveis, pode-se definir  $\mathbf{G}$  que resulte em variedades desacopladas, mesmo para sistemas fisicamente acoplados. Com exemplo, considere um sistemas MIMO  $2 \times 2$  com saídas  $a(t)$  e  $b(t)$ . Pode-se então definir

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} G_1^a & 0 & G_2^a & 0 & G_3^a & 0 \\ 0 & G_1^b & 0 & G_2^b & 0 & G_3^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}(t) \\ \tilde{b}(t) \\ \dot{\tilde{a}}(t) \\ \dot{\tilde{b}}(t) \\ \int_0^t \tilde{a}(\tau) d\tau \\ \int_0^t \tilde{b}(\tau) d\tau \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Outra metodologia é proposta em [4], onde  $\mathbf{G}$  é escolhida a fim de evitar a ampliação de distúrbios não casados, tal que

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B}_{aug}^T \mathbf{B}_{aug})^{-1} \mathbf{B}_{aug}^T. \quad (18)$$

### 3.1.2 Controle Robusto $\mathcal{H}_2$ com Incertezas Paramétricas

Nesta técnica de projeto, a metodologia por LMI será utilizada.

- Desigualdades Matriciais Lineares

Considere um sistema LIT dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (19)$$

o qual é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz simétrica  $\mathbf{P}$ , tal que

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}, \quad (20)$$

satisfaça o Teorema de Lyapunov [8],

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}; \quad (21)$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < \mathbf{0}. \quad (22)$$

- Norma  $\mathcal{H}_2$

Eqs. (21) e (22) formam uma desigualdade linear matricial (LMI). Pode-se sintetizar um controlador estabilizante via LMI. Além disso, no projeto, pode-se considerar um índice de desempenho como, por exemplo, minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$ .

A norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema com resposta impulsiva  $h(t) = \mathbf{C}_z e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}_w$  é calculada como

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^\infty \text{Tr}(h(t)h(t)')dt = \int_0^\infty \text{Tr}(\mathbf{C}_z e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w' e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{C}_z')dt, \quad (23)$$

ou seja,

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{C}_z \int_0^\infty \text{Tr}(e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w' e^{\mathbf{A}'t})dt \mathbf{C}_z' = \text{Tr}(\mathbf{C}_z \mathbf{W}_c \mathbf{C}_z'), \quad (24)$$

onde  $\mathbf{W}_c$  é o Gramiano de controlabilidade.

Considere agora o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_w\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_z\mathbf{x} + \mathbf{D}_z\mathbf{u},\end{aligned}\tag{25}$$

cuja forma em malha fechada é dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x} + \mathbf{B}_w\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{26}$$

onde  $\mathbf{A}_{cl} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})$  e  $\mathbf{C}_{cl} = (\mathbf{C}_z + \mathbf{D}_z\mathbf{K})$ . O controlador ótimo  $\mathcal{H}_2$  é calculado como

$$\min_{\mathbf{P}=\mathbf{P}'>\mathbf{0}} Tr(\mathbf{C}_{cl}\mathbf{P}\mathbf{C}_{cl}')\tag{27}$$

sujeito a

$$\mathbf{A}_{cl}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{cl}' + \mathbf{B}_w\mathbf{B}_w' < \mathbf{0}.\tag{28}$$

Tal problema é equivalente a

$$\min_{\mathbf{X}=\mathbf{X}'>\mathbf{0}} Tr(\mathbf{X})\tag{29}$$

sujeito a

$$\mathbf{C}_{cl}\mathbf{P}\mathbf{C}_{cl}' - \mathbf{X} < \mathbf{0},\tag{30}$$

$$\mathbf{A}_{cl}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{cl}' + \mathbf{B}_w\mathbf{B}_w' < \mathbf{0}.\tag{31}$$

A seguir é enunciado o Lema de Finsler [5].

**Lema de Finsler 1** Considere  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , com  $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$  e  $\mathcal{B}^\perp$  sendo uma base do espaço nulo de  $\mathcal{B}$ . Assim, as seguintes condições são equivalentes:

- $\mathbf{v}'\mathcal{Q}\mathbf{v} < 0, \forall \mathbf{v} \neq 0 : \mathcal{B}\mathbf{v} = 0$
- $\mathcal{B}^{\perp'}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp < 0$
- $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$
- $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0$

Se uma condição do Lema é satisfeita, pode-se reescrevê-la como uma das outras três condições.

A desigualdade em (30) pode ser escrita como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}_{cl} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^{\perp'}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{cl}' \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^\perp} < 0,\tag{32}$$

o que é equivalente à segunda condição do Lema. Ao reescrevê-la como a quarta condição, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}'} \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{cl}' & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{cl} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}'} \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{F}' & -\mathbf{G}' \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}'} < 0,\tag{33}$$



o que equivale a

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} + \mathbf{F}\mathbf{C}'_{cl} + \mathbf{C}_{cl}\mathbf{F}' & -\mathbf{F} + \mathbf{C}_{cl}\mathbf{G}' \\ -\mathbf{F}' + \mathbf{G}\mathbf{C}'_{cl} & \mathbf{P} - \mathbf{G} - \mathbf{G}' \end{bmatrix} < 0. \quad (34)$$

A desigualdade em (31) pode também ser escrita como a segunda condição do Lema de Finsler:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_w \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^{\perp'}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}'_{cl} \\ \mathbf{B}'_w \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^{\perp}} < 0. \quad (35)$$

De forma equivalente, pela quarta condição,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_4 \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_5 \\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_6 \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{cl} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{cl} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_w \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1 & \mathbf{X}'_2 & \mathbf{X}'_3 \\ \mathbf{X}'_4 & \mathbf{X}'_5 & \mathbf{X}'_6 \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}'} < 0. \quad (36)$$

Portanto, ao se fazer  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{G}'$ ,  $\mathbf{X}_2 = \xi \mathbf{G}'$ ,  $\mathbf{X}_6 = \mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_5 = 0$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{K}\mathbf{G}$  e substituindo  $\mathbf{A}_{cl}$  e  $\mathbf{C}_{cl}$ , o problema de estabilização como minimização da norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser escrito como

$$\min_{\mathbf{X}=\mathbf{X}'>0} Tr(\mathbf{X}) \quad (37)$$

subjeito a

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{C}_z\mathbf{G} + \mathbf{D}_z\mathbf{Z} \\ \star & \mathbf{P} - \mathbf{G} - \mathbf{G}' \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{B}\mathbf{Z} + \mathbf{G}'\mathbf{A}' + \mathbf{Z}'\mathbf{B}' & \mathbf{P} - \mathbf{G}' + \xi(\mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{B}\mathbf{Z}) & \mathbf{B}_w\mathbf{H} \\ \star & -\xi(\mathbf{G} + \mathbf{G}') & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}' \end{bmatrix} < 0. \quad (39)$$

- Incertezas Paramétricas

Com a metodologia de síntese via LMI, pode-se inserir incertezas paramétricas [6]. O sistema com incertezas paramétricas pode ser representado como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u}, \quad (40)$$

onde

$$\mathbf{A}(\alpha) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{A}_k, \quad (41)$$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{B}_k. \quad (42)$$

Em malha fechada, tem-se

$$\mathbf{A}_{cl}(\alpha) = \mathbf{A}(\alpha) + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}. \quad (43)$$

Considerando o conjunto de pontos dos valores extremos de  $n$  parâmetros incertos, pode-se construir um conjunto politopo convexo com  $N = 2^n$  vértices, tal que a combinação convexa desses pontos resulta em um ponto no interior do politopo. O simplex unitário formado por esse conjunto é dado por:

$$\Xi = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N \mid \alpha_i > 0, \quad \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1 \right\}, \quad (44)$$

O sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{cl}(\alpha)\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}_{cl}(\alpha) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{A}_{clk}, \quad (45)$$

é estável para todo  $\alpha \in \Xi$  se existir  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' > 0$  tal que

$$\mathbf{A}'_{cl}(\alpha)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{cl}(\alpha) < \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Xi, \quad (46)$$

sendo  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\alpha)$  um polinômio de primeira ordem. A condição (28) é idêntica à (46) e, portanto, a LMI resultante é da forma apresentada em (39), mas agora  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dependem de  $\alpha$ , como descrito em (41) e (42).

## 3.2 Metodologia para superar item 2

Para o item 2, busca-se validar as estratégias de controle alguns sistemas práticos já disponíveis no LCA, tais como o giroscópio atuador, o monociclo auto equilibrado com roda de reação, o helicóptero 2DOF, o helicóptero 3dof e o robô auto equilibrado sobre bola (atualmente em construção), bem como em dois outros sistemas que serão construídos: o pêndulo invertido com duas rodas de reação e o cubo auto equilibrado controlado por roda de reação. Vale ressaltar que tais equipamentos são de caráter multiusuário, pois poderão ser utilizados por outros pesquisadores da instituição e de instituições parceiras para realização de pesquisas aplicadas. Por exemplo, o giroscópio adquirido no projeto FAPESP 2013/25605-2 e o monociclo construído no projeto 2016/00729-9 já estão sendo utilizados em pesquisas conjuntas com parceiros. Por fim, apresenta-se alguns itens que serão importantes para o desenvolvimento do projeto, como sistema de aquisição de dados para bancada de teste, fresadora de circuito impresso e licenças de softwares.

### 3.2.1 Giroscópio

Os Giroscópios de Controle de Momento, ou do inglês Control Moment Gyroscope (CMG), são utilizados como atuadores em aplicações como controle de atitude de satélites, estabilização de veículos com duas rodas, para evitar o balanço (arfada) de um navio, entre outros. O LCA possui um exemplar da fabricante ECP (Educational Control Products), modelo 750, adquirido no processo FAPESP 2013/25605-2 [1].

Esta planta eletromecânica é composta por quatro corpos rígidos (Corpos A, B, C e D, ilustradas na figura abaixo), cujas posições angulares são medidas por meio de encoders incrementais (Encoders A, B, C e D), e dois motores DC (Motores #1 e #2). O motor #1 rotaciona o Corpo D, um disco axissimétrico de bronze, e o motor #2 rotaciona o Corpo C, sendo que os Corpos A e B rotacionam livremente apenas por meio das reações geradas na estrutura. A Figura 1 apresenta o diagrama representado do giroscópio a ser adquirido e utilizado no projeto.

O Giroscópio é uma planta conveniente para se modelar e projetar controladores na notação de *quaternions*. O paper apresentado no Apêndice B apresenta a modelagem desenvolvida até agora utilizando *quaternions* pelo grupo do LCA.

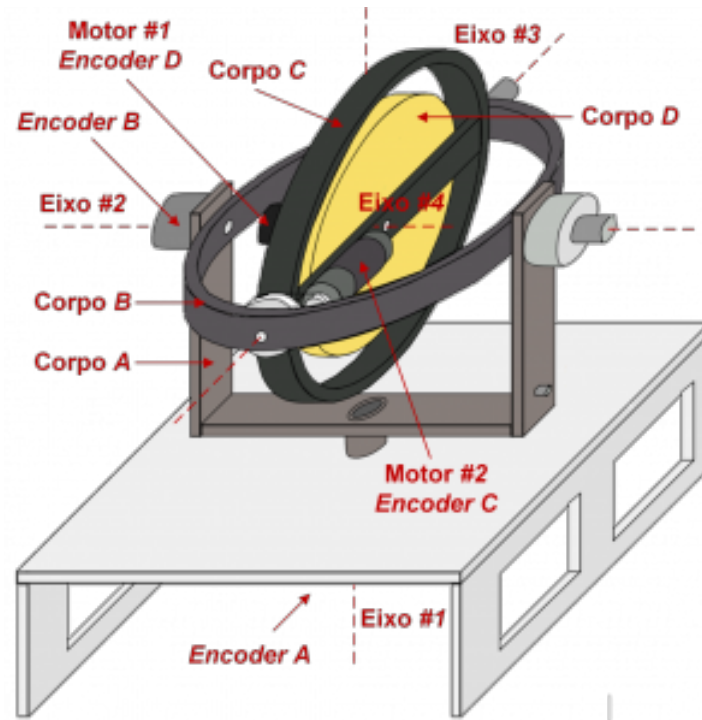


Figura 1: O Giroscópio

### 3.2.2 Monociclo Auto Equilibrado

O monociclo possui apenas uma roda para se mover em contato com o solo e uma roda de reação para compensar eventuais desequilíbrios laterais. O sistema apresenta um grau de dificuldade elevado em termos de modelagem e controle. Até onde se sabe, esse é o primeiro equipamento desse tipo desenvolvido na América Latina. A figura 2 apresenta o monociclo desenvolvido no LCA.

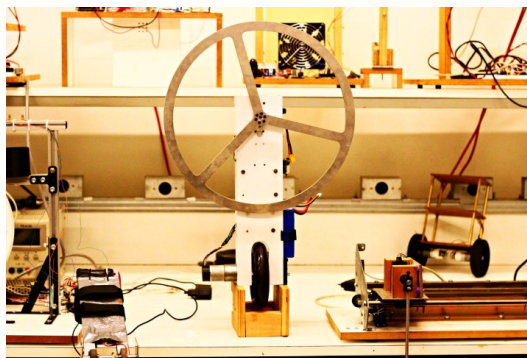


Figura 2: Monociclo auto equilibrado com roda de reação.

Dois vídeos de experimentos diferentes desse sistema podem ser encontrados no canal do LCA no Youtube. Um artigo sobre controle robusto aplicado ao sistema descrito nos vídeos está em fase de submissão para um periódico internacional. Em [10] os autores apresentam a modelagem matemática do sistema, juntamente com um controle LQR para estabilização do ângulo de *pitch* e um controle SMC para o ângulo de *roll*. Não há muitos trabalhos acadêmicos com aplicações práticas em sistemas desse tipo e, até onde o proponente sabe, tal sistema ainda não havia sido desenvolvido por universidades da

América Latina.

### 3.2.3 Helicóptero 2 DOF

O helicóptero com dois graus de liberdade (2DOF) é um sistema que permite o estudo de técnicas avançadas de controle, que podem ser aplicadas em situações reais de controle de voo, comportamento de corpos rígidos de helicópteros e de veículos aéreos. Suas principais características consistem em ser este um sistema multivariável, com não linearidades e acoplamento nas saídas, o que permite a aplicação de uma série de técnicas de controle.

O protótipo consiste em um corpo fixo em uma base, com dois propulsores perpendiculares entre si. Um deles é o responsável por controlar o ângulo de arfada do helicóptero (ângulo *pitch*), enquanto o outro controla o ângulo de guinada (ângulo *yaw*). As variações das posições são registradas por dois encoders, que transmitem os dados coletados. Os controladores desenvolvidos são embarcados em uma plataforma de desenvolvimento FRDM-K64F da NXP. Uma foto ilustrativa do protótipo é apresentada na Figura 3.

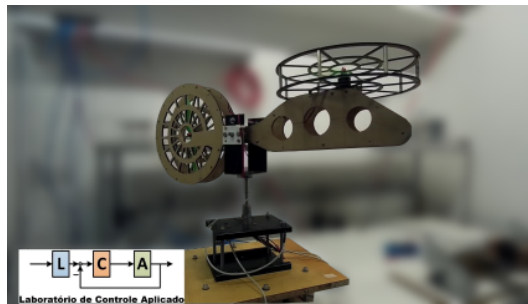


Figura 3: Helicóptero 2DOF.

Há um vídeo do protótipo desenvolvido no canal do LCA no Youtube. Um artigo sobre o helicóptero pode ser encontrado em [2].

### 3.2.4 Helicóptero 3 DOF

Assim como o modelo 2 DOF, o helicóptero 3 DOF também é um sistema não linear, multivariável acoplado, mas agora sub atuado. Há duas hélices propulsoras, mas três graus de liberdade, que são os ângulos *travel*, *elevation* e *pitch*. No modelo construído, as variações das posições angulares são obtidas com uso de encoders incrementais e também com sensores inerciais. As formas de sensoriamento podem ser utilizadas separadamente ou juntas por fusão de sensores. A Figura 4 ilustra o protótipo construído.

Em [18] é apresentado um controle robusto para uma planta semelhante, composto por um controlador para o sistema nominal combinado com outra parcela para lidar com incertezas. Tal sistema foi agraciado com o Prêmio Marcio Rilo de melhor Trabalho de Formatura na Engenharia Elétrica - Ênfase Automação e Controle de 2016.

### 3.2.5 Robô Auto equilibrado Sobre Bola

O robô auto equilibrado sobre bola, proposto em [12], foi desenvolvido no LCA. Ele é composto por três motores DC acoplados a rodas omnidirecionais espaçadas por  $120^\circ$  e com angulação tal que o sistema seja capaz de se apoiar sobre uma bola com área máxima de contato com as rodas. A Figura 5 apresenta o sistema construído.

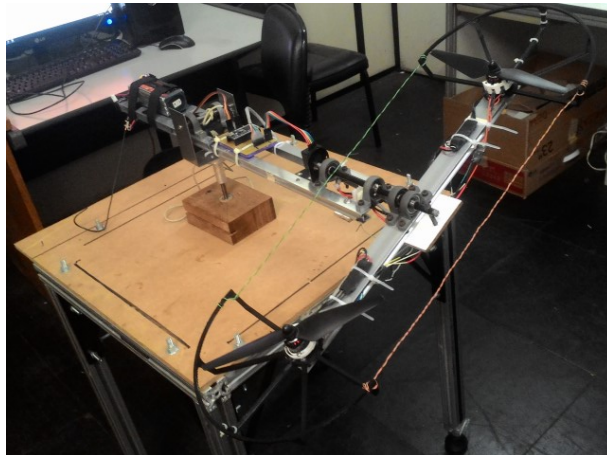


Figura 4: Helicóptero 2DOF.

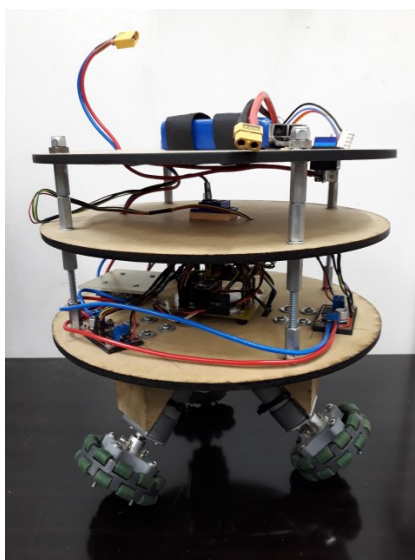


Figura 5: Sistema bola e roda.

Um vídeo experimental desse sistema está no canal Youtube do LCA. Até onde o proponente sabe, tal sistema também não havia sido desenvolvido por universidades latino-americanas.

### 3.2.6 Pêndulo Invertido com Duas Rodas de Reação

Um esboço inicial do pêndulo invertido com duas rodas de reação é apresentado na Figura 6. As duas rodas controlam o balanço dos ângulos de *pitch* e *roll*. A ideia é deixar a bateria, a unidade inercial de medida, o hardware de controle e a eletrônica de acionamento no topo do pêndulo, tal que o sistema de controle seja embarcado e não haja ligação com hardware externo. Pretende-se utilizar motores *brushless* para acionar as rodas, devido ao seu tanho reduzido e elevado torque.

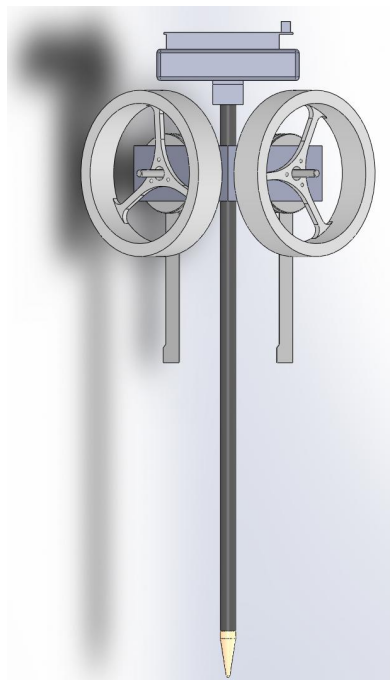


Figura 6: Sistema bola e roda.

### 3.2.7 Cubo Auto equilibrado com Rodas de Reação

O cubo auto equilibrado (Cubli) foi inicialmente proposto em [14]. Trata-se de um sistema com três rodas de reação, onde todos os ângulos espaciais podem ser controlados. Sua construção demanda mecânica de precisão, pois alinhamento e balanceamento são fundamentais, bem como atuadores com boa densidade de potência. Assim como no pêndulo invertido com duas rodas de reação, pretende-se utilizar motores *brushless* e acomodar tudo na estrutura do cubo.

Trabalhos práticos com esse sistema são exclusivos do grupo que o desenvolveu na ETH em Zurique. Não há relatos até o momento de modelagem e controle desse sistema na abordagem de *quaternions*. No Apêndice A é apresentada a modelagem desenvolvida até o momento no LCA. O domínio da tecnologia de construção e controle desse sistema pode contribuir para o desenvolvimento nacional de micro satélites, como o CubeSat [17], que possuem características similares ao Cubli, exceto pela ausência da ação da gravidade.



Figura 7: Cubli.

Fonte: [www.idsc.ethz.ch/research-dandrea/research-projects/cubli.html](http://www.idsc.ethz.ch/research-dandrea/research-projects/cubli.html)

### 3.2.8 Itens Importantes para o Projeto

Para calibração de sensores e ensaios iniciais dos protótipos, pretende-se criar uma bancada de testes com entradas e saídas digitais e analógicas e entradas específicas para encoders incrementais. Para isso, será utilizado um sistema de aquisição de dados modular, composto por um módulo principal com soquetes para cartões de entrada e saída, o que permite configurar a quantidade e o tipo de I/Os de acordo com cada teste específico. O sistema de aquisição será conectado a um computador pessoal.

Os protótipos desenvolvidos necessitam da confecção de placas de circuito impresso. A produção artesanal via corrosão tem limitações, o que pode comprometer a qualidade e confiabilidade do sistema. Com base nisso, está sendo solicitada uma fresadora específica para confecção de placas de circuito, o que trará grandes benefícios para o projeto e para o LC de forma geral. Vale-se ressaltar que este equipamento é de caráter multiusuário e ficará à disposição para outros laboratórios parceiros na pesquisa. A máquina será conectada a um computador pessoal.

Solicita-se uma quantia de R\$8000,00 na rubrica materiais de consumo, para compra de insumos para a fresadora de circuitos, insumos para a impressora 3D presente no laboratório, bem como para a aquisição de componentes eletrônicos de uso geral.

O LCA possui licenças do software SolidWorks. Assim, modelos 3D são construídos para obtenção de parâmetros de inércia. Há a possibilidade de importação dos modelos do SolidWorks no Matlab. No entanto, necessita-se de um pacote específico que a Universidade de São Paulo não possui em sua licença. Além disso, a licença do SolidWorks necessita ser renovada. Assim, solicita-se dez licenças do Matlab para o LCA, com os pacotes necessários para o desenvolvimento das atividades de modelagem e simulação dos protótipos desenvolvidos, bem como a renovação das cinco licenças do SolidWorks.

## 4 Cronograma

A seguir é apresentado o cronograma de execução do plano de pesquisa, totalizando um tempo total de dois anos.

ATIVIDADES	ANO 1								ANO 2							
	SEMESTRE 1				SEMESTRE 2				SEMESTRE 3				SEMESTRE 4			
I	■	■	■	■	■	■	■	■								
II			■	■												
III				■	■	■										
IV					■	■	■	■								
V									■	■	■	■				
VI										■	■	■	■	■		
VII									■	■	■	■	■	■	■	
VIII																■

Atividades:

- I. Revisão bibliográfica dos principais assuntos relacionados ao trabalho;
- II. Construção da bancada de teste e instalação da fresadora de circuito impresso.
- III. Construção dos sistema pêndulo invertido com roda de reação e modelagem matemática *com ângulos de Euler e quaternions*;
- IV. Desenvolvimento do controle por modos deslizantes e aplicação via simulação nos sistemas práticos. *Adaptação para controle por quaternions*;
- V. Desenvolvimento do controle  $\mathcal{H}_2$  via LMI e aplicação via simulação nos sistemas práticos. *Adaptação para controle na notação de quaternions*;
- VI. Construção dos sistema cubo auto equilibrado com roda de reação e modelagem matemática;
- VII. Aplicações práticas;
- VIII. Elaboração de relatórios técnicos e publicação de artigos em congressos e em periódicos relevantes.

Inicialmente, como primeira etapa, uma ampla revisão bibliografia será efetuada, contemplando os seguintes assuntos:

- Controle por modos deslizantes;
- Controle robusto via LMI;
- *Modelagem e controle por quaternions*;
- Apliações práticas de controle em sistemas embarcados.



Na segunda etapa será montada a bancada de testes e instalado o sistema de prototipagem de circuito impresso.

A terceira etapa do desenvolvimento da pesquisa estará fortemente baseada preparação e criação sistema pêndulo invertido com roda de reação e em sua modelagem matemática.

Em seguida, na quarta etapa, a estratégia de controle por modos deslizantes será considerada. A abordagem descrita na Seção 3.1.1 já apresenta alguns resultados teóricos. Pretende-se validar a técnica via simulação.

Na quinta etapa serão desenvolvidos os controladores robustos a incertezas paramétricas via LMI, como foco no controle  $\mathcal{H}_2$ . Pretende-se identificar as principais fontes de incertezas paramétricas nos sistemas práticos considerados.

Na sequência, a sexta etapa focará na construção e modelagem do cubo auto equilibrado com roda de reação. Trata-se de um sistema com complexidade elevada, o que demandará mecânica fina de precisão.

A sétima etapa agregará todo o conhecimento adquirido até o momento e visará a validação prática das técnicas de controle considerados.

Por fim, a oitava etapa consistirá na prestação de contas com a FAPESP em termos de resultados obtidos, na disseminação do conhecimento, juntamente com a formação de recursos humanos capacitados.

## 5 Disseminação e avaliação

Disseminação do trabalho na comunidade científica será feita através da publicação de artigos em congressos e periódicos especializados e na publicação de vídeos nas mídias eletrônicas do LCA. Além disso, relatórios técnicos serão gerados semestralmente para acompanhamento do andamento das atividades.

Pretende-se ainda ter duas orientações de dissertação de mestrado e uma orientação de tese de doutorado relacionadas ao desenvolvimento do projeto. Um candidato de mestrado e o de doutorado já foram aprovados no processo seletivo do PPGEE.

## 6 Outros apoios

Não há.

## 7 Referências

- [1] Bruno A. Angélico, Fernando S. Barbosa, and Fabio Y. Toriumi. State feedback decoupling control of a control moment gyroscope. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 28(1):26–35, Feb 2017.
- [2] F. S. Barbosa, G. P. das Neves, and B. A. Angélico. Discrete lqg/ltr control augmented by integrators applied to a 2-dof helicopter. In *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 1238–1243, Sept 2016.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [4] F. Castanos and L. Fridman. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):853–858, May 2006.
- [5] Maurício C. de Oliveira and Robert E. Skelton. *Stability tests for constrained linear systems*. Springer London, London, 2001.
- [6] M.L.C. De Oliveira. Modeling, identification and control of a quadrotor aircraft. Master’s thesis, Czech Technical University, Prague, Czech Rep., 2011.
- [7] Geir E. Dullerud and Fernando Paganini. *A Course in Robust Control Theory Book Subtitle — A Convex Approach*, volume 36 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1 edition, 1991.
- [8] José C. Geromel and Rubens H. Korogui. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. Blucher, 2011.
- [9] Mirza Tariq Hamayun, Christopher Edwards, and Halim Alwi. *Fault Tolerant Control Schemes Using Integral Sliding Modes*. Springer International Publishing, 2016.
- [10] S. I. Han and J. M. Lee. Balancing and velocity control of a unicycle robot based on the dynamic model. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(1):405–413, Jan 2015.
- [11] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.
- [12] Masaaki Kumagai and Takaya Ochiai. Development of a robot balancing on a ball. In *2008 International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 433–438, Oct 2008.
- [13] H. Liu, X. Wang, and Y. Zhong. Quaternion-based robust attitude control for uncertain robotic quadrotors. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 11(2):406–415, April 2015.
- [14] M. Muehlebach and R. D’Andrea. Nonlinear analysis and control of a reaction-wheel-based 3-d inverted pendulum. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(1):235–246, Jan 2017.

- [15] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, 2005.
- [16] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Pearson, 1991.
- [17] R. Sutherland, I. Kolmanovsky, and A. R. Girard. Attitude control of a 2u cubesat by magnetic and air drag torques. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, PP(99):1–13, 2018.
- [18] B. Zheng and Y. Zhong. Robust attitude regulation of a 3-dof helicopter benchmark: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(2):660–670, Feb 2011.

## **8 Planilhas de orçamento e cronogramas físico-financeiros**

## 2- MATERIAL PERMANENTE IMPORTADO

NOME DO INTERESSADO: Bruno Augusto Angélico

PROCESSO:

CÂMBIO (INFORME A SIGLA DA MOEDA E O VALOR DE SUA TAXA EM DÓLAR)

MOEDA 1: USD TAXA: 1,00000

MOEDA 2: TAXA:

MOEDA 3: TAXA:

MOEDA 4: TAXA:

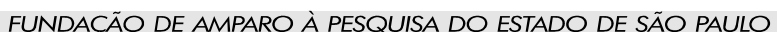
MOEDA 5: TAXA:

MOEDA 6: TAXA:

TOTAL: US\$ 32.195,00

LINK: [BANCO CENTRAL DO BRASIL](#)

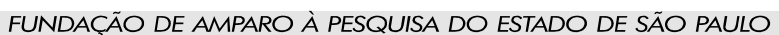
item	quant.	descrição (somente 1 linha para cada item)	referência do orçamento	moeda de origem	preço unitário	custo do item moeda original	custo do item US\$	FAPESP
1	1	PAC cRIO-9024 com chassis e acessórios		USD	11.345,00	11.345,00	US\$ 11.345,00	
1	1	Planta Giroscópio		USD	20.850,00	20.850,00	US\$ 20.850,00	

[illegible]

FAPESP, AGOSTO DE 2008

**Observações:**

1. O primeiro mês será aquele previsto para o início do projeto.
2. A coluna "Indicadores de Progresso" refere-se às comprovações a serem apresentadas, para controle do cumprimento de cada evento.
3. O cronograma deverá ser preenchido em Reais, com padrão unitário equivalente a R\$ 1.000,00. Ex.: R\$ 1.500,00 = 1,5
4. Preencha um formulário para cada ano de projeto.

[illegible]

**FAPESP, AGOSTO DE 2008**

**Observações:**

1. O primeiro mês será aquele previsto para o início do projeto.
2. A coluna "Indicadores de Progresso" refere-se às comprovações a serem apresentadas, para controle do cumprimento de cada evento.
3. O cronograma deverá ser preenchido em Reais, com padrão unitário equivalente a R\$ 1.000,00. Ex.: R\$ 1.500,00 = 1,5
4. Preencha um formulário para cada ano de projeto.

## **9 Documentos adicionais necessários para a análise da proposta**

Não há.