UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG

ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

BRUNO MACHADO LÖBELL

124846

Solução Numérica de EDO

Rio Grande - RS

2020

Solução Numérica de EDO

Curso: Eng. Computação **Prof.:** Sebastião Cicero P. Gomes

1- Considere o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

a) Ao definir $y1 = x1$; $y2 = x2$; $y3 = \dot{x}1$; $y4 = \dot{x}2$, prove que o sistema pode ser reduzido à primeira ordem e escrito na forma:

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} + Bu(t)$$

Sendo: $A = \begin{bmatrix} [0]_{2x2} & [I]_{2x2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1}D \end{bmatrix}$

$$M\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = Du(t)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)\dot{x}_1 - k_2\dot{x}_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = u(t)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{-(c_1 + c_2)\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - (k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2}{m_1}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{u(t) + c_2\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + k_2x_1 - k_2x_2}{m_2}$$

Sendo que: $y_1 = x_1$; $y_2 = x_2$; $y_3 = \dot{x}_1$; $y_4 = \dot{x}_2$

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = y_3 \quad \dot{x}_2 = \dot{y}_2 = y_4$$

$$\dot{y}_3 = \frac{-(c_1 + c_2)\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - (k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2}{m_1}$$

$$\dot{y}_4 = \frac{u(t) + c_2\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + k_2x_1 - k_2x_2}{m_2}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1 + c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{c_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} u(t)$$

$$\dot{\vec{y}} = \begin{bmatrix} [0]_{2x2} & [I]_{2x2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}\vec{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1}D \end{bmatrix}u(t)$$

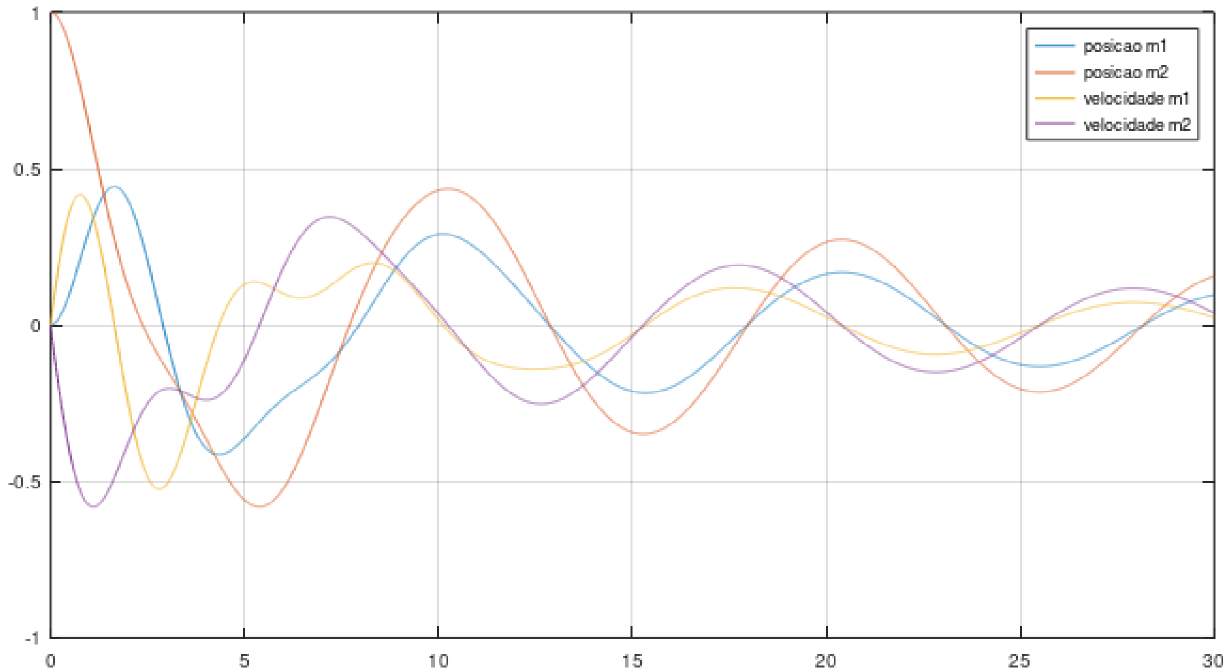
Nome: Bruno Machado Löbell **Matrícula:** 124846

b) Considerando o sistema homogêneo ($u(t)$ = 0), a solução analítica pode ser obtida na forma:

$$\vec{y} = e^{At}\vec{y}_0$$

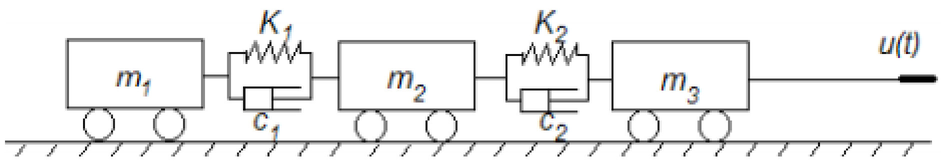
onde $\vec{y}_0$ é a condição inicial. Considere $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e mostre os resultados gráficos de uma simulação analítica.

Utilizando do algoritmo demonstrado em aula, tendo como variáveis m1=m2=2, c1=c2=0.5 e k1=k2=2, com um passo de integração h = 0.01 segundo, variando entre 0 e 30 segundos.



2- O modelo dinâmico do sistema massa-mola-amortecedor da figura abaixo pode ser aproximado a partir da seguinte equação:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = 0$$
$$m_3\ddot{x}_3 + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2(x_3 - x_2) = u(t)$$



a) Reduza o modelo dinâmico à primeira ordem;
b) Escreva o sistema de equações de primeira ordem na forma de estado Utilizando os cálculos e resultados obtido no trabalho 2:

$$\dot{y}_1 = y_4 \qquad \dot{y}_2 = y_5 \qquad \dot{y}_3 = y_6$$

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_1\dot{y}_4 + c_1(y_4 - y_5) + k_1(y_1 - y_2) = 0$$
$$\dot{y}_4 = -\frac{c_1(y_4 - y_5) + k_1(y_1 - y_2)}{m_1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = 0$$
$$m_2\dot{y}_5 + c_1(y_4 - y_5) + c_2(y_5 - y_6) + k_1(y_1 - y_2) + k_2(y_2 - y_3) = 0$$
$$\dot{y}_5 = -\frac{c_1(y_4 - y_5) + c_2(y_5 - y_6) + k_1(y_1 - y_2) + k_2(y_2 - y_3)}{m_2}$$

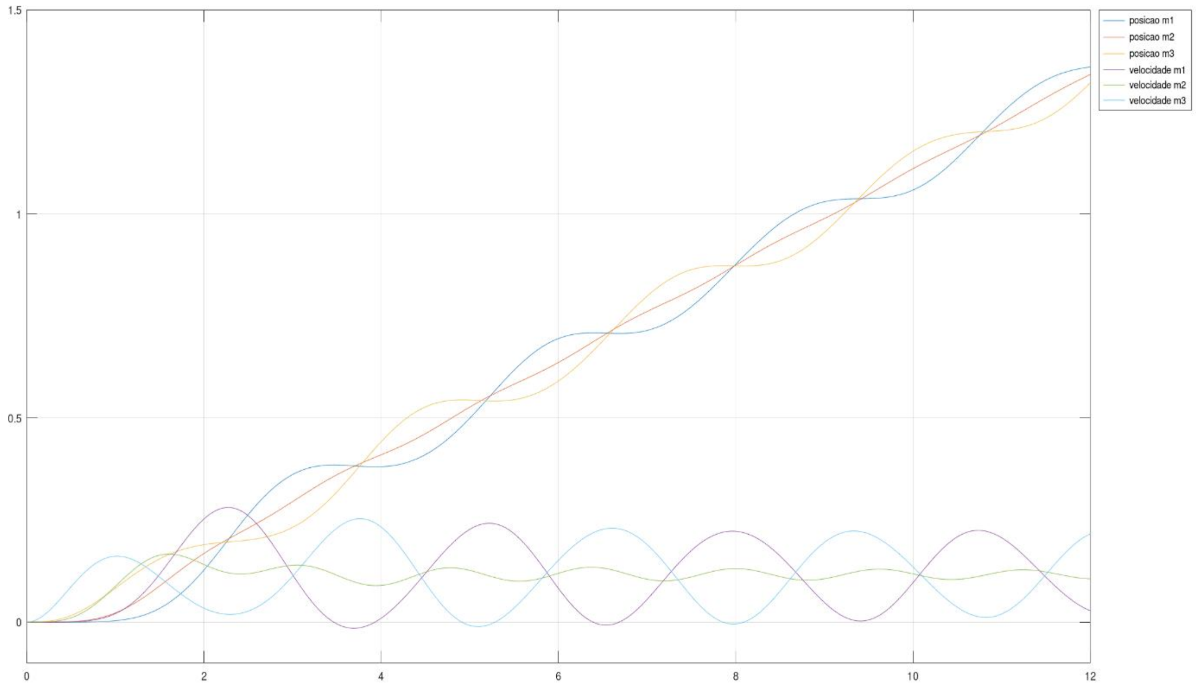
$$m_3\ddot{x}_3 + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2(x_3 - x_2) = u(t)$$
$$m_3\dot{y}_6 + c_2(y_6 - y_5) + k_2(y_3 - y_2) = u(t)$$

$$\dot{y}_6 = -\frac{c_2(y_6 - y_5) + k_2(y_3 - y_2) - u(t)}{m_3}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{-k_1-k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & \frac{-c_1-c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & 0 & \frac{c_2}{m_3} & -\frac{c_2}{m_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_3} \end{bmatrix} u(t)$$

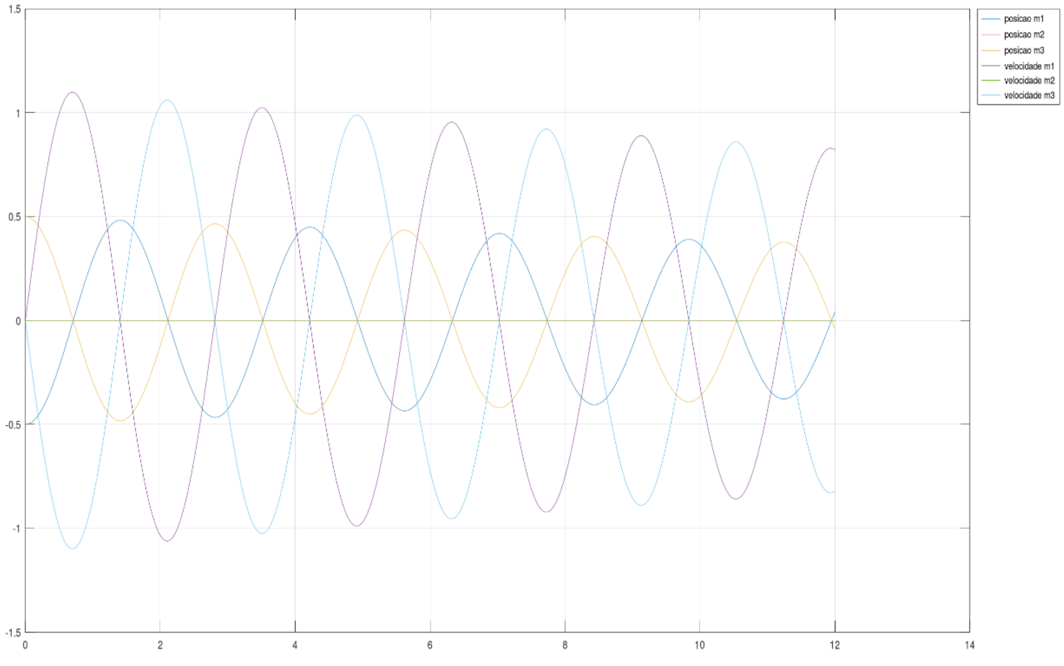
c) Utilizando o RK4, faça uma simulação (resultados na forma gráfica) atribuindo uma condição inicial nula em t=0, considerando como entrada a função $u(t) = 1.35\sin(0.5\pi t)\, e^{-0.75t}$, com um passo de 0.005s, de zero até 12s. Os parâmetros do modelo são: $m_1 = m_2 = m_3 = 2kg$; $k_1 = k_2 = 10N/m$; $c_1 = c2 = 0.15Ns/m$

Implementando, no Octave, o algoritmo mostrado em aula com os parâmetros passados na questão, obtive o gráfico demostrado a baixo. Analisando o gráfico, observa-se que neste intervalo de tempo o amortecimento é baixo e a oscilação da velocidade da massa 2 é menor que as oscilações da massa 1 e 3.



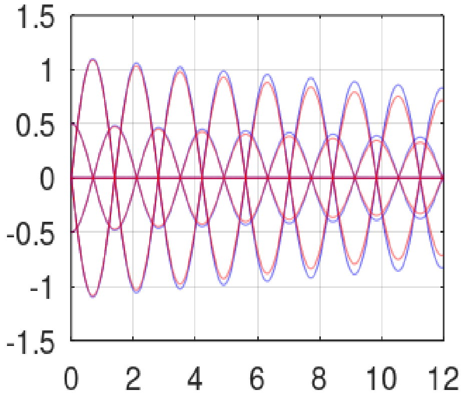
d) Considere as posições das massas 1 e 3, -0.5m e 0.5m, respectivamente e ainda, todos as outras coordenadas do vetor com a condição inicial nulas. Realize uma simulação com o RK4 e a compare com a solução analítica, considerando o problema homogêneo: u(t)=0. Na comparação, mostre gráficos com os erros nas posições.

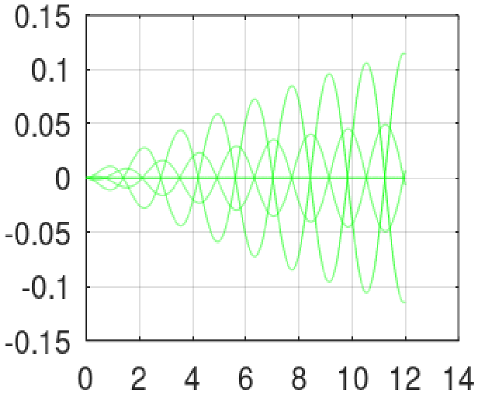
Analisando o 1º gráfico, notasse que a velocidade da massa 2 é constante, pois as forças de m1 e m3 são iguais e se anulam em m2.



Solução Numérica de EDO

Curso: Eng. Computação **Prof.:** Sebastião Cicero P. Gomes





Nome: Bruno Machado Löbell **Matrícula:** 124846