Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional de Estudios Superiores

Unidad Juriquilla

Computación II

Practica 7

Método de Broyden para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

Bruno Arturo López Pacheco

Dr. Ulises Olivares Pinto

No. De Cuenta 317347140

Licenciatura en Tecnología

Objetivo

Implementar el método de Broyden para resolver un sistema de ecuaciones no lineales. Esto es, encontrar el valor de cada variable tal que satisfaga el sistema.

Marco teórico

Método de Broyden para solución de sistemas de ecuaciones no lineales

Para hallar la solución de un sistema de ecuaciones $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, con $i = 1,2, \dots, n$, el método de Newton emplea el Jacobiano J en cada iteración, además de calcular su inversa. Sin embargo, calcular el Jacobiano es una operación difícil y costosa. La idea del método de Broyden consiste en calcular el jacobiano entero solamente en la primera iteración, y hacer una actualización de rango 1 en las demás iteraciones.

El método de Broyden considera el método de la secante y da una generalización de él para el espacio multidimensional.

El método de la secante sustituye la primera derivada $f'(x_n)$ por la aproximación de diferencia finita

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Y procede según el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n)$$

Broyden establece una generalización de esta fórmula para un sistema de ecuaciones mediante una sustitución de $\frac{1}{f'(x_n)}$ por la inversa del Jacobiano J. Este se determina por medio de la ecuación de la secante (la aproximación de diferencia finita):

$$J_n \cdot (x_n - x_{n-1}) \approx F(x_n) - F(x_{n-1})$$

Broyden da un procedimiento en 3 pasos:

1.- Emplear la aproximación del jacobiano J_{n-1}

2.- Tomar la solución de la ecuación de la secante que suponga la modificación mínima de J_{n-1} (entediendo por mínima que se dé una minimización de la norma de Frobenius $\left|\left|J_n - J_{n-1}\right|\right|_F$)

$$J_n = J_{n-1} + \frac{\Delta F_n - J_{n-1}\Delta x_n}{\left|\left|\Delta x_n\right|\right|^2} \Delta x_n^T$$

3.- Continuar según el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - J_n^{-1} F(x_n)$$

Broyden sugiere la fórmula de Sherman-Morrison para actualizar directamente el inverso de la aproximación del jacobiano por la aproximación de diferencia finita:

$$J_n^{-1} = J_{n-1}^{-1} + \frac{\Delta x_n - J_{n-1}^{-1}\Delta F_n}{\Delta x_n^T J_{n-1}^{-1}}(\Delta x_n^T J_{n-1}^{-1})$$

Metodología

Se reutilizó la clase que emplea el método de Gauss Jordan para hacer la inversa de una matriz.

Se implementó la clase “BroydenMethod”, en donde se encuentran los métodos para hacer el método de Broyden. El primer método de llama “norma”, el cual realiza el cálculo del error para por definición de la norma de un vector. El segundo método de esta clase se llama “evaluateF”, el cual realiza la evaluación de las variables del sistema dados ciertas aproximaciones dadas por el método de Broyden. Se tiene también el método llamado “jacobian”, el cual se encarga de crear y evaluar la matriz jacobiana dadas las aproximaciones hechas en el método de Broyden.

Por último, se tiene el método “broyden”, en donde se realizan las iteraciones del método de Broyden, se calcula primero una aproximación haciendo uso de método de Newton para así obtener la inversa de la matriz jacobiana. Después se tiene el ciclo que realiza el método de Broyden. Esta función regresa la aproximación de los valores que satisfacen el sistema de ecuaciones no lineales.

Pruebas

Se realizaron pruebas con dos sistemas de ecuaciones no lineales solo cambiando el arreglo de funciones del sistema. El primer sistema es de dos ecuaciones y tiene la forma

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$$

Con punto inicial de (1,1).

El segundo sistema de ecuaciones no lineales está dado por tres ecuaciones, el cual tiene la forma

$$f_1(x, y, z) = 3x - cos(yz) - \frac{1}{2} = 0$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 - 81(y - 0.1)^2 + sen(z) + 1.06 = 0$$

$$f_3(x, y, z) = e^{-xy} + 20z + frac10\pi - 33 = 0$$

Con el punto inicial de (0.1, 0.1, -0.1).

Resultados

Para el caso del primer sistema de ecuaciones no lineales, se tuvo una aproximación de (1.36563478876156, 0.930031390743810). Es importante resaltar que al método le tomó calcular 5 iteraciones para tener esta aproximación.

Para el caso del segundo sistema de ecuaciones no lineales, se tuvo una aproximación de (0.500000000000334, 5.34641261305872e-13, -0.523598775599102). Es importante resaltar que al método le tomó calcular 6 iteraciones para tener esta aproximación.

Conclusión

Este método de Broyden para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es poco costoso al momento de realizar cálculos, ya que solo emplea cálculos simples de vectores, realizando una sola vez el cálculo de la inversa de la matriz Jacobiana. Ciertamente converge lentamente y no da una aproximación muy certera, esto con respecto al método de Newton.

Este método es menos fácil de programar con respecto al método de Newton, ya que implica más cálculos relacionados con matrices, pero es muy efectivo para realizar la aproximación de la inversa de la matriz Jacobiana.

Referencias

Chapra, S., & Canale, R. (2011). METODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS (Spanish Edition) (6th ed.). McGraw-Hill Interamericana de España S.L.