Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional de Estudios Superiores

Unidad Juriquilla

Computación II

Practica 6

Método de Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

Bruno Arturo López Pacheco

Dr. Ulises Olivares Pinto

No. De Cuenta 317347140

Licenciatura en Tecnología

Objetivo

Utilizar el método de Newton para resolver un sistema de ecuaciones no lineales.

Marco teórico

Método de Newton para solución de sistemas de ecuaciones no lineales

Para explicar este método se usará un sistema de dos ecuaciones, y se escriben de una forma más general:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Supongamos que en la etapa k de proceso de cálculo partimos de un punto (x_1, x_2) cualesquiera y nos movemos a otro muy próximo $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$. Los valores de las funciones son f_1 y f_2 en dicho punto son aproximadamente

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_2$$

$$f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \approx f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Delta x_2$$

Si el punto $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ es una solución del sistema de ecuaciones, entonces

$$f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{x_2}\Delta x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{x_2}\Delta x_2 = 0$$

Escribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial para despejar Δx_1 y Δx_2

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Denominamos vector **x** al vector (x_1, x_2), el vector función **F** está formado por dos elementos que son las funciones (f_1, f_2) y la matriz cuadrada de dimensión dos es el Jacobiano **J**. Despejamos Δx_1 y Δx_2 del sistema de ecuaciones o el vector $\boldsymbol{\Delta x}$.

$$F(x) + J\Delta x = 0$$

$$\Delta x = -J^{-1}F$$

$\boldsymbol{J^{-1}}$ es la matriz inversa de **J** y $\boldsymbol{\Delta x}$ es el vector diferencia entre el vector que nos da las coordenadas del nuevo punto $\boldsymbol{x_{k+1}}$, conocidas las del punto previo $\boldsymbol{x_k}$

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}F$$

Se ha obtenido una expresión similar al procedimiento de Newton que se utiliza para calcular una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Para un sistema de n ecuaciones

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$\dots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

El procedimiento se escribe

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2 \dots x_n) \end{pmatrix}$$

Metodología

Se implementaron diferentes funciones y clases para el método de Newton. Se usaron dos clases, una que realiza el cálculo de la matriz inversa, y otro que es el de la implementación de Newton.

En la clase del método de Newton se usaron 4 funciones, la primera función se llama "jacobian", que es la encargada de crear la matriz Jacobiana junto con su evaluación en los puntos de aproximación. Se tiene una segunda función llamada "eqnewton", la cual evalúa en las funciones f(x) los valores de los puntos de aproximación; también realiza el cálculo del procedimiento del método de Newton. Como tercera ecuación se tiene una función llamada "norma", la cual realiza el cálculo del error de la aproximación actual y la anterior haciendo uso de la definición de la norma de un vector. Por último se tiene la función "newton", que realiza la iteración de estos pasos y funciones descritas, también evaluando el error para así saber si seguir iterando.

Pruebas

Se realizaron pruebas con dos sistemas de ecuaciones no lineales solo cambiando el arreglo de funciones del sistema. El primer sistema es de dos ecuaciones y tiene la forma

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$
$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$$

Con punto inicial de (1,1).

El segundo sistema de ecuaciones no lineales está dado por tres ecuaciones, el cual tiene la forma

$$f_1(x, y, z) = 3x - cos(yz) - \frac{1}{2} = 0$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 - 81(y - 0.1)^2 + sen(z) + 1.06 = 0$$

$$f_3(x, y, z) = e^{-xy} + 20z + frac10\pi - 33 = 0$$

Con el punto inicial de (0.1, 0.1, -0.1).

Resultados

Para el caso del primer sistema de ecuaciones no lineales, se tuvo una aproximación de (1.36563479281575, 0.930031390518023).

Para el segundo sistema de ecuaciones no lineales, se tuvo una aproximación de (0.500000000007076, 7.75785726225503e-10, -0.523598775578007)

Conclusión

El método de Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es muy efectivo ya que da una aproximación muy certera, y converge de manera muy rápida, ya que para estas pruebas no se necesitaron más de 5 iteraciones para poder dar una aproximación muy precisa. Pero se puede aumentar la aproximación disminuyendo la tolerancia.

De igual forma, este método es fácil de programar, incluso teniendo el cálculo de una matriz inversa, que es de los pasos que necesitan más recursos computacionales de todo el método.

Referencias

Chapra, S., & Canale, R. (2011). METODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS (Spanish Edition) (6th ed.). McGraw-Hill Interamericana de España S.L.