

# Exercício 8.19 (Tardos)

Alice Duarte Scarpa, Bruno Lucian Costa

2015-06-23

## 1 Enunciado

Um comboio de navios chega ao porto com um total de  $n$  vasilhames contendo tipos diferentes de materiais perigosos. Na doca, estão  $m$  caminhões, cada um com capacidade para até  $k$  vasilhames. Para cada um dos dois problemas, dê um algoritmo polinomial ou prove NP-completude:

- Cada vasilhame só pode ser carregado com segurança em alguns dos caminhões. Existe como estocar os  $n$  vasilhames nos  $m$  caminhões de modo que nenhum caminhão esteja sobrecarregado, e todo vasilhame esteja num caminhão que o comporta com segurança?
- Qualquer vasilhame pode ser colocado em qualquer caminhão, mas alguns pares de vasilhames não podem ficar juntos num mesmo caminhão. Existe como estocar os  $n$  vasilhames nos  $m$  caminhões de modo que nenhum caminhão esteja sobrecarregado e que nenhum dos pares proibidos de vasilhames esteja no mesmo caminhão?

## 2 Item A

Uma solução força-bruta para esse problema seria:

- Estenda a lista de vasilhames com vasilhames vazios, até que ela tenha tamanho  $mk$  (a capacidade total de todos os caminhões). Vasilhames vazios podem ser transportados em qualquer caminhão (e correspondem a um lugar sobrando no mesmo).
- Para cada uma das  $(mk)!$  ordenações da lista acima, considere que os  $k$  primeiros vasilhames vão para o primeiro caminhão, os  $k$  próximos para o segundo e assim até o final da lista. Se cada vasilhame estiver

em um caminhão que o comporta com segurança, retorne essa solução, se não, tente com uma nova ordem.

Esse algoritmo faz  $(mk)!$  iterações do loop principal no pior caso, cada iteração tem custo  $mk$  para conferir se é uma solução válida. Isso dá uma complexidade total de  $O(mk(mk)!)$

Esse é um algoritmo super-exponencial para o problema, mas isso não significa que o problema é NP-completo. Na verdade, como veremos a seguir, esse problema não é NP-completo pois aceita uma solução polinomial usando fluxos.

## 2.1 Solução com fluxos

Podemos transformar esse problemas em um problema de encontrar o fluxo máximo de um grafo usando a seguinte construção:

- Criamos um vértice  $s$  representando a fonte e um vértice  $t$  representando o dreno
- Para cada vasilhame  $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  criamos um vértice  $v_i$  e uma aresta  $(s, v_i)$  capacidade 1
- Para cada caminhão  $C_i \in \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  criamos um vértice  $C_i$ . Se o vasilhame  $v_j$  puder ser transportado com segurança no caminhão  $C_i$  criamos uma aresta  $(v_j, C_i)$  de capacidade 1. Para cada caminhão criamos também uma aresta  $(C_i, t)$  de capacidade  $k$ .

Dessa forma, existe uma configuração possível de caminhões se e somente se o fluxo máximo tem valor  $m$ .

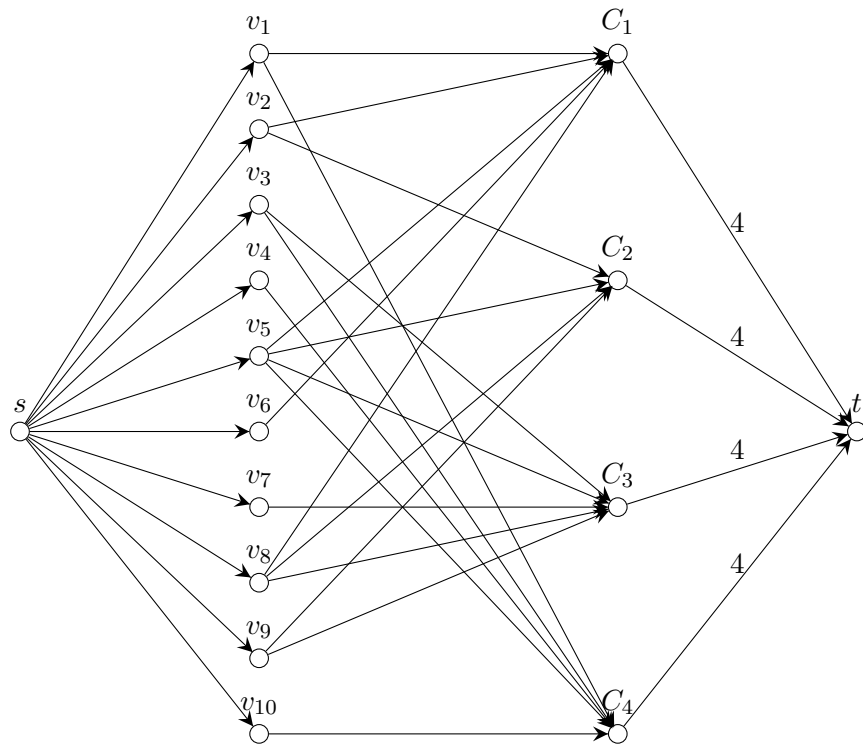
De fato, se encontramos um fluxo máximo de valor  $m$  então exatamente uma aresta com origem em cada vasilhame terá fluxo 1. Se colocarmos cada vasilhame no caminhão de destino da aresta de fluxo 1 obtemos um posicionamento válido. Por outro lado, se existe um arranjo válido, colocando 1 de fluxo nas arestas entre os vasilhames e os caminhões que os contém nesse arranjo obtemos um fluxo de valor  $m$ .

Para a seguinte situação:

Capacidade	3
Total de cam.	4
Total de vas.	10

Vasilhame	Cam. seguros
1	1, 4
2	1, 2
3	3, 4
4	4
5	1, 2, 3, 4
6	1
7	3
8	1, 2, 3
9	2, 3
10	4

A construção seria como ilustrado na figura abaixo. Omitimos as capacidades iguais a 1 para não poluir demais a imagem.



### 2.1.1 Implementação

Primeiramente, precisamos ser capazes de ler a tabela acima para passar os valores para o nosso algoritmo.

```

capacidade_por_caminhao = regras[0][1]
total_de_vasilhames = regras[2][1]

vasilhames = collections.OrderedDict()
caminhoes = []
for line in seguros[1:]:
    # Nomeando os vasilhames
    vasilhame = 'v_%s' % line[0]
    vasilhames[vasilhame] = []
    for caminhoao in str(line[1]).split(','):
        nome = 'C_%s' % caminhoao.strip()
        vasilhames[vasilhame].append(nome)
        if nome not in caminhoes:
            caminhoes.append(nome)

```

Vamos usar a classe RedeDeFluxo, que definimos para a questão 7.28.

```

def cria_grafo(vasilhames, caminhoes, capacidade_por_caminhao):
    G = RedeDeFluxo()
    G.novo_vertice('Fonte')
    G.novo_vertice('Dreno')

    # Criando um vertice para cada caminhoao e ligando esse
    # vertice ao dreno
    for caminhoao in caminhoes:
        G.novo_vertice(caminhao)
        G.nova_aresta(caminhao, 'Dreno',
                      capacidade_por_caminhao, 0)

    for vasilhame, caminhoes in vasilhames.iteritems():
        # Criando um vertice para cada vasilhame e conectando
        # a fonte a cada um dos vasilhames
        G.novo_vertice(vasilhame)
        G.nova_aresta('Fonte', vasilhame, 1, 0)

        # Conectando o vasilhame a cada caminhoao que pode
        # transporta-lo
        for caminhoao in caminhoes:
            G.nova_aresta(vasilhame, caminhoao, 1, 0)

    return G

```

Como nesse problema as demandas já são 0, podemos aplicar Ford-Fulkerson diretamente, usando a mesma implementação que fizemos para o exercício 7.28.

Podemos então rodar Ford-Fulkerson e ver se o fluxo máximo encontrado é igual ao total de vasilhames. Se for, isso significa que o problema tem uma solução, que vamos retornar. Caso contrário não existe arranjo possível.

```
G = cria_grafo(vasilhames, caminhos, capacidade_por_caminhao)
fluxo = G.fluxo_maximo('Fonte', 'Dreno')
if fluxo == total_de_vasilhames:
    tabela_de_vasilhames = []
    for vasilhame in vasilhames:
        for w in G.adj[vasilhame]:
            if G.fluxo[w] == 1:
                tabela_de_vasilhames.append([w.origem, w.destino])
    return tabela_de_vasilhames
else:
    return 'Impossivel'
```

A solução para a nossa entrada:

v <sub>1</sub>	C <sub>4</sub>
v <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>
v <sub>3</sub>	C <sub>3</sub>
v <sub>4</sub>	C <sub>4</sub>
v <sub>5</sub>	C <sub>1</sub>
v <sub>6</sub>	C <sub>1</sub>
v <sub>7</sub>	C <sub>3</sub>
v <sub>8</sub>	C <sub>1</sub>
v <sub>9</sub>	C <sub>2</sub>
v <sub>10</sub>	C <sub>4</sub>

### 2.1.2 Complexidade

Como vimos no exercício 7.28, O algoritmo de Ford-Fulkerson tem complexidade  $O((V + E)F)$  em que  $V$  é a quantidade de vértices,  $E$  é a quantidade de arestas e  $F$  é o maior valor possível para o fluxo.

No caso,  $V = m + n + 2$ ,  $E \leq n + nm + m$  e o maior fluxo possível é  $n$ , totalizando uma complexidade máxima  $O(n^2m)$ , o que é polinomial na entrada.

### 3 Item B

Vamos mostrar que é possível reduzir uma instância do 3-SAT a um problema de colocar vasilhames em caminhões seguindo as restrições do enunciado. De modo que, como 3-SAT é NP-completo, nosso problema também é.

Mas antes, temos que mostrar que nosso problema está em  $NP$ .

#### 3.1 Caminhões $\in NP$

Para mostrarmos que o nosso problema está em  $NP$ , temos que provar que é possível verificar em tempo polinomial se um arranjo de vasilhames em caminhões é válido.

Dada uma lista  $V = [i_1, i_2, \dots, i_n]$  tal que o  $j$ -ésimo vasilhame  $v_j$  está no caminhão  $C_{i_j}$ , o seguinte algoritmo verifica se o arranjo é válido em tempo  $O(m + |\text{incompatíveis}|) = O(m + n^2)$ :

```
def verifica_arranjo(V, incompatíveis, m, k):
    por_caminhao = [0] * m
    for caminhao in V:
        por_caminhao[caminhao] += 1

    # Verifica se cada caminhao tem no maximo k vasilhames
    for i in xrange(m):
        if por_caminhao[i] > k:
            return False

    # Verifica se um caminhao tem um par incompativel
    for (v1, v2) in incompatíveis:
        if V[v1] == V[v2]:
            return False

    return True
```

#### 3.2 Definindo 3-SAT

3-SAT é o problema de dado um conjunto de variáveis  $v_1, \dots, v_x$  e cláusulas  $K_1, \dots, K_y$ , onde cada cláusula é constituída de no máximo três elementos do universo de *literais*,  $\{v_1, \bar{v}_1, \dots, v_x, \bar{v}_x\}$ , encontrar uma atribuição de valores Verdadeiro/Falso para cada variável que faça com que todas as cláusulas sejam verdadeiras.

### 3.3 3-SAT $\rightarrow$ Caminhões

Dada uma instância do 3-SAT, vamos construir uma instância do problema enunciado que admite solução se e somente se tal instância do 3-SAT admite solução.

Primeiramente, note que podemos assumir que nosso problema de 3-SAT tem pelo menos quatro variáveis, adicionando variáveis que não aparecem em cláusula alguma se necessário.

#### 3.3.1 Construção

Vamos começar a construção sem as cláusulas:

- São  $x + 1$  caminhões, cada um de capacidade  $3x + y$
- Existe um vasilhame para cada um dos  $2x$  literais em  $\{v_1, \overline{v_1}, \dots, v_x, \overline{v_x}\}$ . Esses vasilhames têm o mesmo nome do literal a que correspondem.
- Existe um vasilhame adicional  $w_i$  para cada variável  $v_i$

Queremos criar restrições entre os vasilhames de modo que, em uma atribuição válida:

1.  $x$  dos caminhões contenham exatamente um literal verdadeiro cada.
2. O caminhão restante contenha todos os literais falsos;

Para garantir as condições acima, vamos criar os seguintes conflitos:

- $w_i$  conflita com  $w_j$  para todo  $i \neq j$ .
- $w_i$  conflita com  $v_j$  e com  $\overline{v_j}$ , se  $i \neq j$ .
- $v_i$  conflita com  $\overline{v_i}$ .

Com isso, garantimos as seguintes propriedades:

- ( $P_1$ ) Como todos os  $w_i$  conflitam entre si, é necessário um caminhão por  $w_i$ .
- ( $P_2$ ) Como  $w_i$  conflita com todos os literais tais que  $i \neq j$ , o caminhão que contém  $w_i$  só pode conter literais correspondentes a  $i$ -ésima variável.
- ( $P_3$ )  $v_i$  e  $\overline{v_i}$  não podem estar ambas no caminhão do  $w_i$ , pois elas conflitam entre si.

( $P_4$ ) Mais ainda, *exatamente* um elemento do par  $\{v_i, \bar{v}_i\}$  está no caminhão do  $w_i$  numa atribuição válida: Se nenhuma delas estivesse no caminhão do  $w_i$ , estariam ambas no único caminhão que não contém nenhum  $w$  (pois todos os outros caminhões contém um  $w_j$  com  $i \neq j$ , o que conflita com  $v_i$  e  $\bar{v}_i$  por  $P_2$ ), o que também não pode acontecer por  $P_3$ .

Agora, vamos adicionar as cláusulas à nossa construção:

- Existe um vasilhame para cada uma das  $y$  cláusulas  $K_1, \dots, K_y$

Com seguinte conflito:

- $K_i$  conflita com  $v_j$  se  $v_j \notin K_i$ . Similarmente,  $K_i$  conflita com  $\bar{v}_j$  se  $\bar{v}_j \notin K_i$ .

Ou seja, permitimos colocar o vasilhame da cláusula  $K_i$  num caminhão apenas se a cláusula contém todos os literais que vão viajar no caminhão.

Dessa forma, uma cláusula nunca pode viajar no caminhão dos literais falsos, pois cada a cláusula contém no máximo três literais e temos no mínimo quatro literais falsos, de modo que há garantidamente um literal que não aparece na cláusula e portanto conflita com ela.

### 3.3.2 Obtendo uma solução

Para completar a nossa redução, precisamos de duas coisas:

- A partir de uma solução do problema dos caminhões que construímos, encontrar em tempo polinomial uma solução do 3-SAT correspondente
- Provar que quando nenhuma solução do problema dos caminhões existe o 3-SAT também não tem solução

#### 1. Solução caminhões $\rightarrow$ Solução 3-SAT

Se existe uma solução para o problema, então todo caminhão que contém um vasilhame do tipo  $w_i$  também contém um vasilhame correspondente a um literal, pela propriedade  $P_4$ ; esse literal será marcado como verdadeiro. Todos os outros literais serão marcados como falsos. Essa marcação é consistente, pois para cada  $i \in \{1, 2, \dots, x\}$  exatamente um literal entre  $v_i, \bar{v}_i$  que está no mesmo caminhão que  $w_i$ . Como todas as cláusulas têm que estar em um caminhão que contém um vasilhame do tipo  $w_i$  e esse caminhão tem que conter um literal que está na cláusula, essa marcação faz com que todas as cláusulas sejam verdadeiras.



2.  $\nexists$  solução caminhões  $\Rightarrow \nexists$  solução 3-SAT

É mais fácil provar a contrapositiva, isso é,  $\exists$  solução 3-SAT  $\Rightarrow \exists$  solução caminhões.

Seja  $S$  os conjuntos dos literais verdadeiros na solução do 3-SAT. Então:

- $S \subset \{v_1, \overline{v_1}, \dots, v_x, \overline{v_x}\}$
- $\forall 1 \leq i \leq x, |S \cap \{v_i, \overline{v_i}\}| = 1$
- $\forall 1 \leq j \leq y, S \cap K_j \neq \emptyset$

Podemos construir uma solução válida para o problema dos caminhões da seguinte forma:

- $\forall 1 \leq i \leq x$ , coloque o vasilhame  $w_i$  no caminhão  $C_i$
- $\forall 1 \leq i \leq x$ , coloque o vasilhame  $S \cap \{v_i, \overline{v_i}\}$  em  $C_i$
- $\forall 1 \leq j \leq y$ , seja  $i$  o menor valor tal que  $v_i$  ou  $\overline{v_i}$  está em  $S \cap K_j$ . Coloque o vasilhame  $K_j$  em  $C_i$ .
- Coloque todos os literais em  $\{v_1, \overline{v_1}, \dots, v_x, \overline{v_x}\} - S$  no caminhão  $C_{x+1}$

Isso respeita todas as restrições. De fato, cada  $K_j$  está num caminhão que só contém um vasilhame correspondente a um literal e, pelo item 3, o vasilhame do literal não conflita com o vasilhame da cláusula. Além disso, cada  $w_i$  está em seu próprio caminhão, nenhum par  $\{v_i, \overline{v_i}\}$  aparece num mesmo caminhão e nenhum  $w_i$  aparece no mesmo caminhão de um literal  $v_j$  ou  $\overline{v_j}$  com  $i \neq j$ .