

CICLOS HAMILTONIANOS E CICLOS EULARIANOS

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 22 de maio de 2023

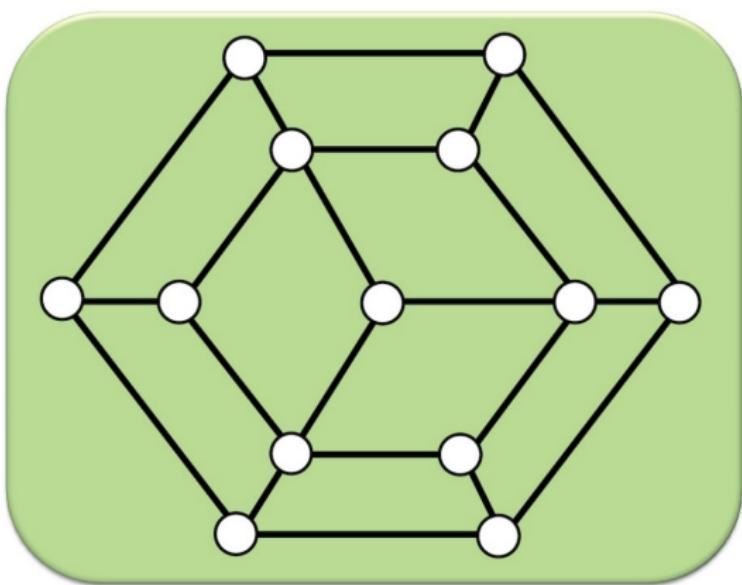
Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



CAMINHO E CICLO HAMILTONIANO

Em 1856, Thomas Penyngton Kirkman, escreveu um trabalho que examinava as condições de existência de ciclos que não repetissem vértices ou arestas, desenvolvidos sobre certos tipos de sólidos.



CICLO HAMILTONIANO

O problema tratado por Kirkman é um dos principais problemas tratando ciclos em grafos

- Um ciclo que passa por todos os vértices do grafo sem repetir nenhum
- Início e fim no mesmo vértice

Diversas aplicações

- Tanto teóricas quanto reais

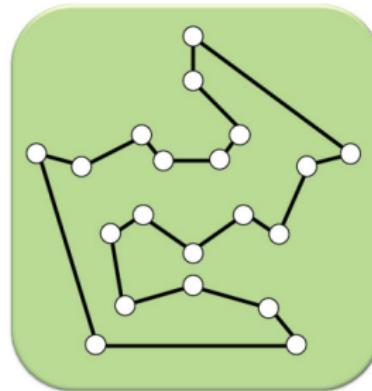
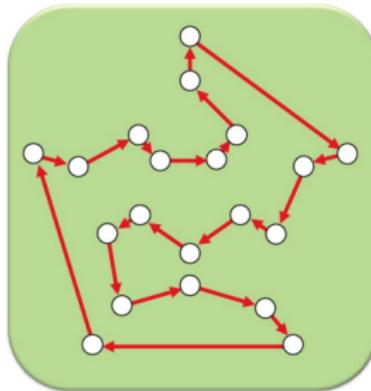
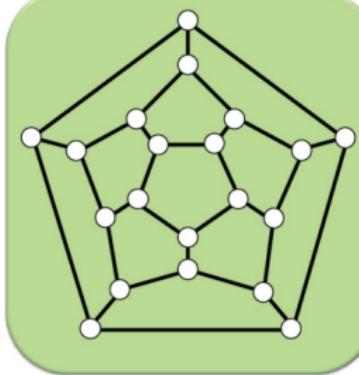
Historicamente, estes ciclos são denominados **Hamiltonianos**, devido a William Rowan Hamilton (matemático, físico e astrônomo irlandês), que, em 1857 propôs um jogo que denominou *Around the World*

AROUND THE WORLD



THE PUZZLE MUSEUM Hordern-Dalgety Collection
© 2002 JAMES DALGETY <http://puzzlemuseum.com>

AROUND THE WORLD



GRAFOS HAMILTONIANOS E SEMI-HAMILTONIANOS

Caminho hamiltoniano: caminho que passa por cada vértice do grafo uma única vez

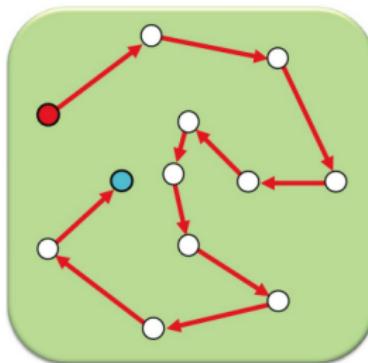
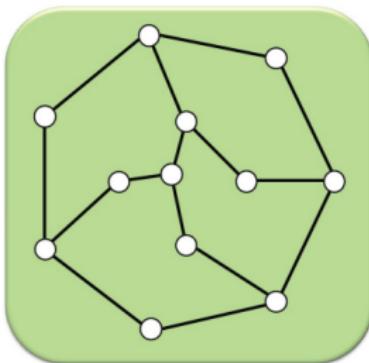
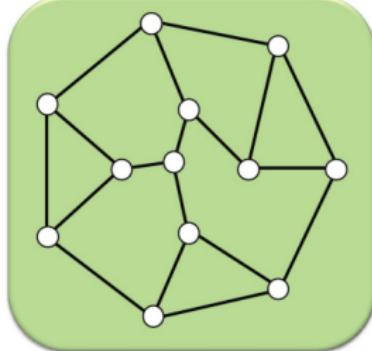
Ciclo hamiltoniano: caminho hamiltoniano que retorna ao vértice inicial

Grafo hamiltoniano: um grafo que possui um ciclo hamiltoniano

Grafo semi-hamiltoniano: grafo que possui um caminho hamiltoniano

- Todo grafo hamiltoniano também é semi-hamiltoniano

GRAFOS HAMILTONIANOS



COMO DESCOBRIR SE GRAFO É HAMILTONIANO

Teorema de Dirac, 1952

Um grafo G é hamiltoniano se $|V| > 3$ e $d(v) > \frac{|V|}{2} \forall v \in V$

Teorema de Ore, 1961

Se a soma dos graus de cada par de vértice não adjacente é maior que $|V|$, então o grafo é hamiltoniano

Teorema de Bondy e Chvátal, 1976

Se o fecho hamiltoniano de G for um grafo completo, então ele é hamiltoniano

FECHO HAMILTONIANO

O fecho hamiltoniano $\phi(G)$ de um grafo pode ser obtido seguindo o procedimento abaixo

1. Para cada par de vértices $u, v \in V$ não adjacente
2. Se a soma dos graus de u e v é maior ou igual a $|V|$
3. Adicione uma aresta entre u e v

O procedimento acima é repetido até que não exista nenhum par de vértice u e v que satisfaça a esta condição

Decidir se o grafo possui um ciclo hamiltoniano é um problema NP-Completo

A proposição acima é verdade mesmo se

- Se o grafo é planar
- Se o grafo possui um caminho hamiltoniano ▶ Link

CICLO EULERIANO

CICLO EULERIANO

Teoricamente, diz-se que o problema do ciclo euleriano deu início a área de teoria de grafos

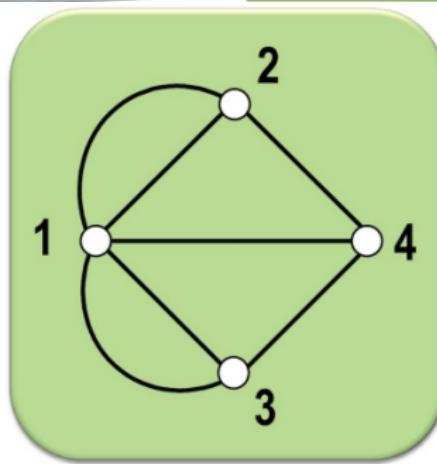
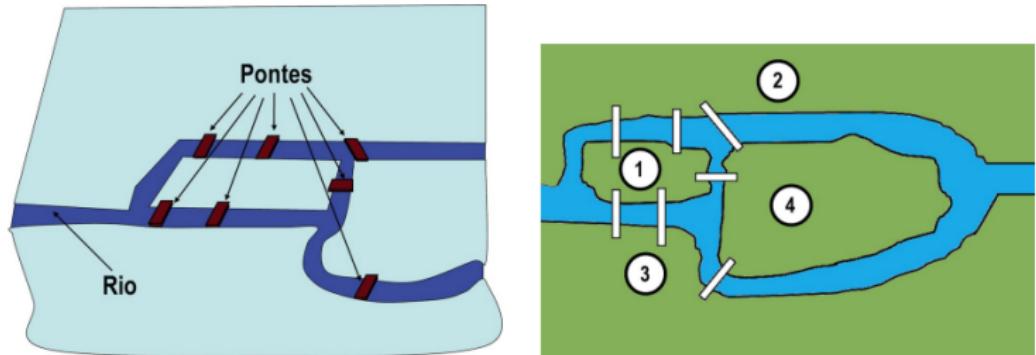
Euler estava visitando a cidade de Königsberg (Kalinigrado, Rússia) no Século XVIII

- O rio Pregolya cortava a cidade de ponta a ponta, dividindo-a em duas ilhas
- Existem sete pontes sob o rio Pregolya

Alguns amigos de Euler disseram a ele que estavam tentando criar um caminho que atravesasse todas as pontes da cidade e retornasse ao ponto inicial

- Não era permitido repetir nenhuma ponte

KÖNIGSBERG



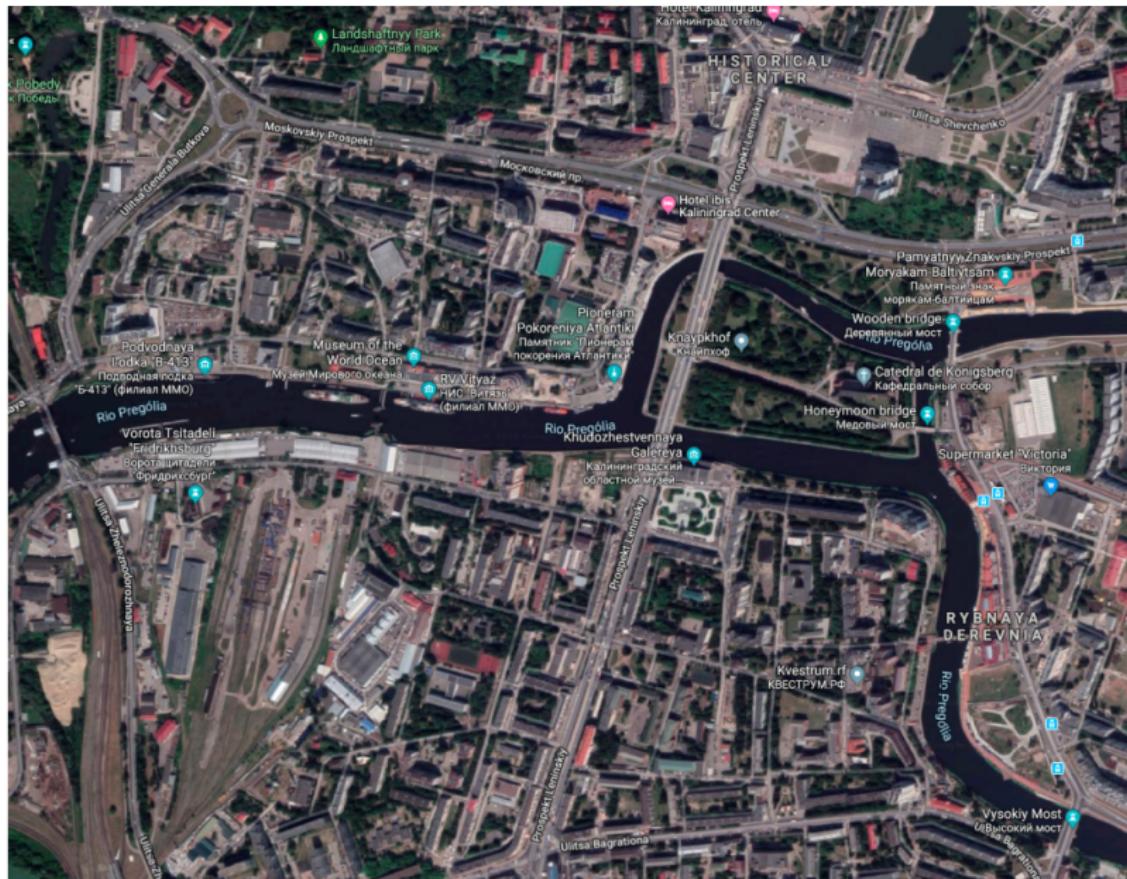
CAMINHO EULERIANO

Estudando o problema, Euler "inventou" a teoria de grafos

Ele demonstrou que o percurso pretendido era impossível

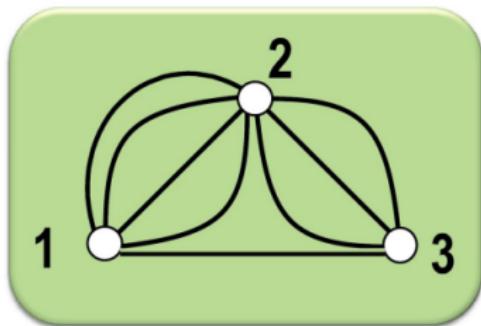
A partir daí, o problema de determinar se um grafo possui um ciclo fechado, passando por todas suas arestas sem repetição, passou a ser conhecido como Ciclo Euleriano

ATUAL CIDADE DE KALININGRADO



RECIFE

A cidade de Recife, em Pernambuco, possui um desenho semelhante a Königsberg



Ela possui um ciclo euleriano?

GRAFOS EULERIANOS E SEMI-EULERIANOS

Caminho euleriano: caminho que passa por cada aresta do grafo uma única vez

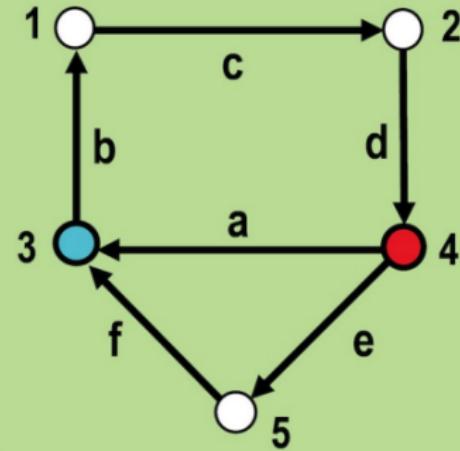
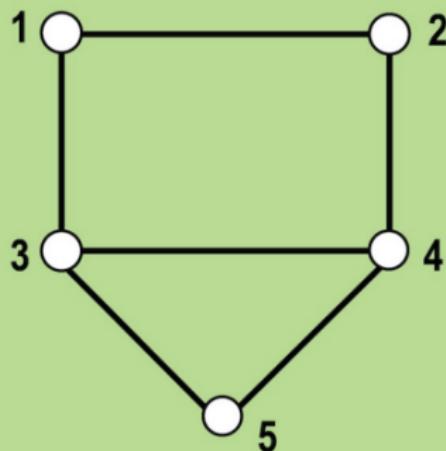
Ciclo euleriano: caminho euleriano que retorna ao vértice inicial

Grafo euleriano: um grafo que possui um ciclo euleriano

Grafo semi-euleriano: grafo que possui um caminho euleriano

- Todo grafo euleriano também é semi-euleriano

GRAFO SEMI-EULERIANO E SEU CAMINHO



COMO DESCOBRIR SE GRAFO É EULERIANO

Grafo euleriano (Teorema de Euler, 1952)

Um grafo G é euleriano se e somente se todos seus vértices possuem grau par

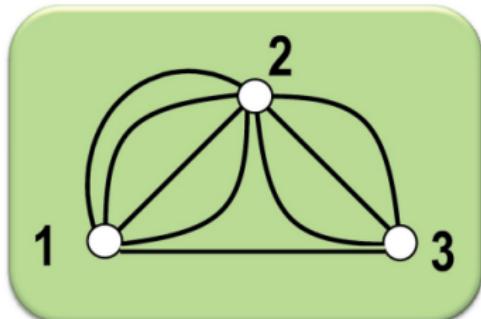
Grafo não euleriano

Um grafo G não é euleriano se e somente se existem dois ou mais vértices de grau ímpar

Grafo semi-euleriano

Um grafo G é semi-euleriano se e somente se existem exatamente dois vértices de grau ímpar

As pontes de Recife admitem um ciclo euleriano? E um caminho?



COMPLEXIDADE

Decidir se um grafo possui ou não caminho euleriano pode ser resolvido em tempo quadrático no número de vértices do grafo

- Basta verificar o grau de cada vértice

Encontrar este caminho ainda é um problema polinomial

- Algoritmo de Fleury ▶ Link