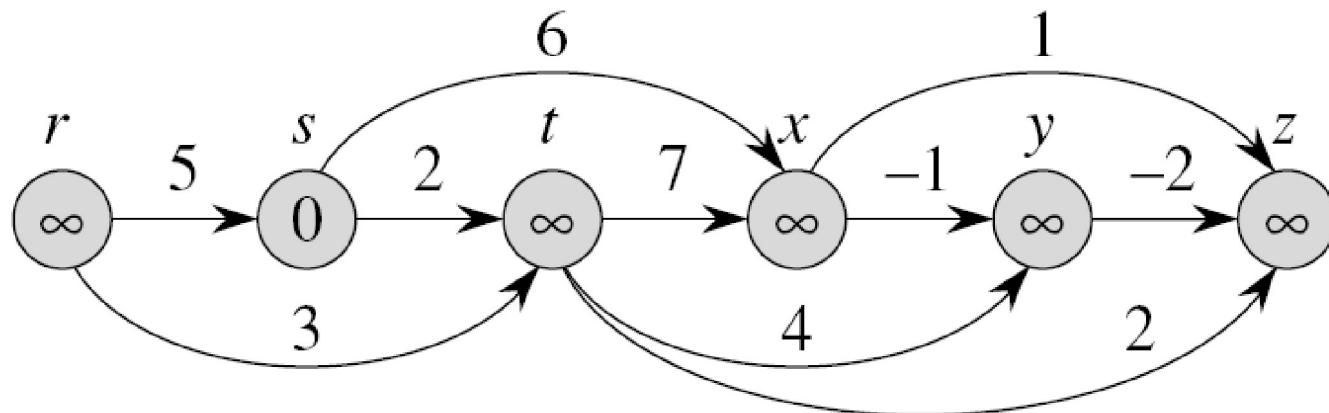


Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Quando os grafos não possuem ciclos, podemos otimizar o algoritmo que calcula o caminho mínimo de um vértice para todos os outros vértices...
- Detalhe... O Algoritmo de *Bellman-Ford* continua resolvendo o problema... mas...
 - Lembrando que ele resolve para o caso mais geral;
 - Ele possui complexidade algorítmica elevada, apesar de ter comportamento polinomial no pior caso.

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

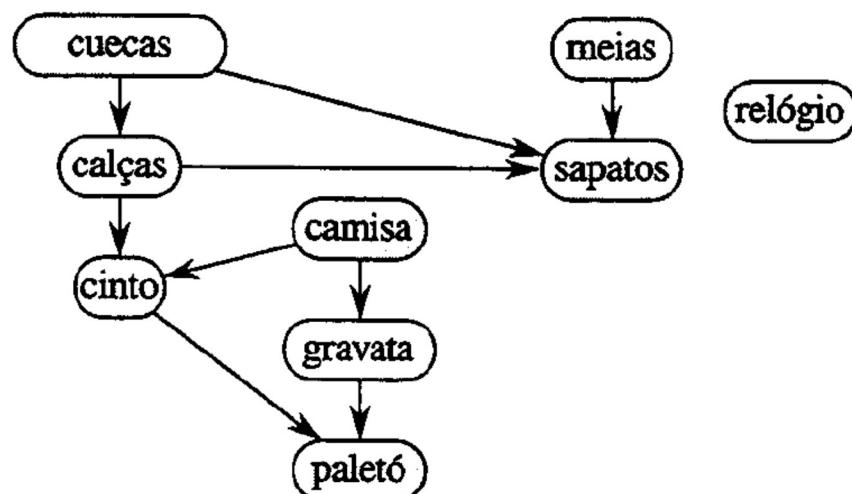
- Antes do aprendizado do algoritmo desta aula, precisamos entender o algoritmo de ordenação topológica...



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- **GAO: Grafos Acíclicos Orientados:**

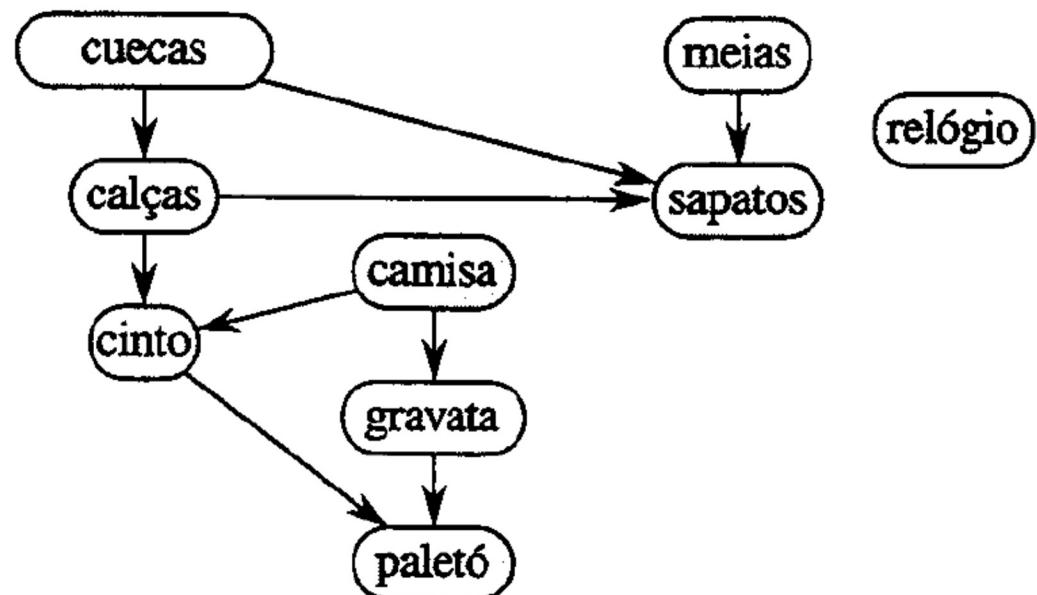
- Estes, são utilizados para indicar precedência de eventos;
- Geralmente utilizados para **descrever processos**;
- Uma aresta orientada (u, v) no GAO indica que a peça de roupa u deve ser vestida antes da peça v .



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- **Ordenação Topológica:**

- Exemplo simplificado: o processo de se vestir de um homem...
- Colocar meia antes do sapato:
 - aresta (meia,sapato)
- Colocar camisa antes da gravata
 - Aresta (camisa, gravata)

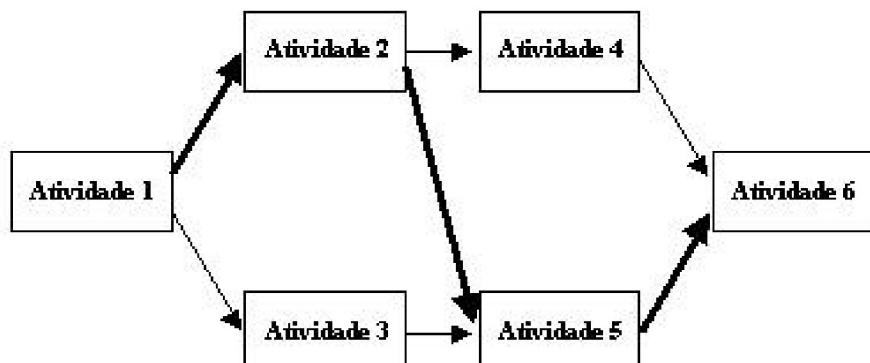
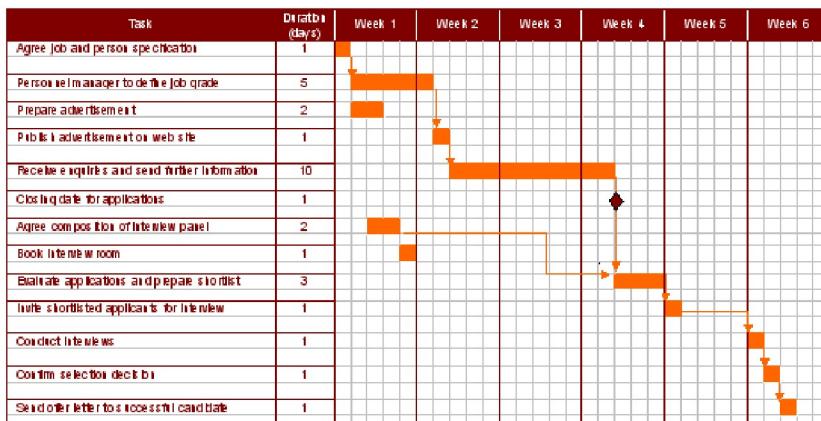


Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Ordenação Topológica:

- Grafos acíclicos orientados são utilizados em muitas aplicações para indicar precedência entre eventos;
- Exemplo:
 - Caminho crítico em Gerência de Projetos.

Example Gantt Chart showing key dependencies in a recruitment process



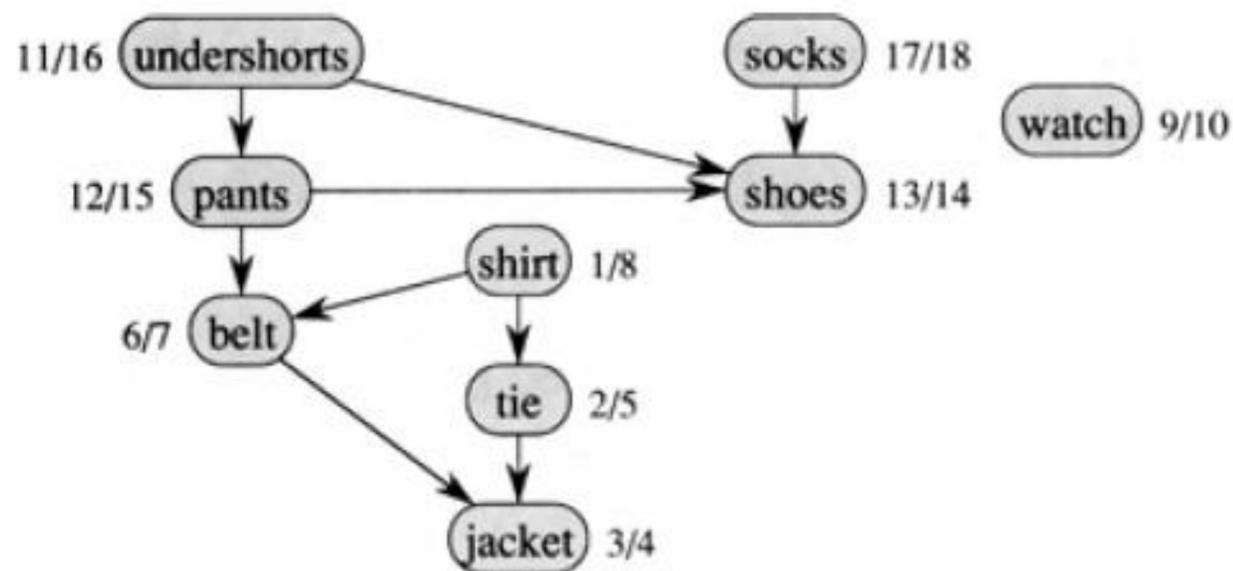
Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- **Ordenação Topológica:**

- Algoritmo:
- Entrada: $G=(V,A)$:
 - Chamar DFS (busca em profundidade);
 - Em função do vetor f (tempo de finalização), retorne uma lista ordenada inversa de todos os vértices do grafo G .

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

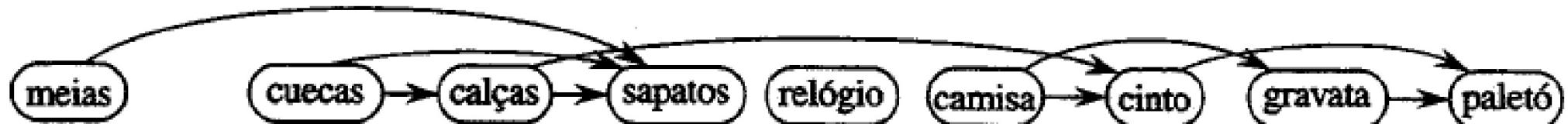
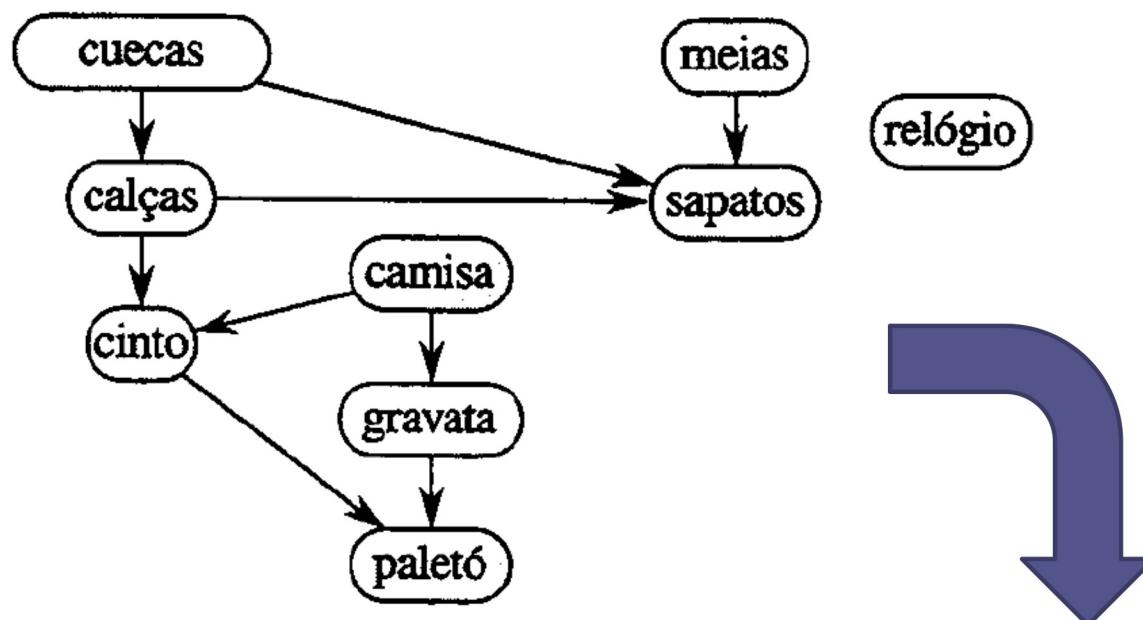
- De outra forma...
- Ordenação Topológica:
 - Algoritmo:
 - Chamar DFS (busca em profundidade);
 - A medida que os vértices forem marcados como pretos, adicionar o vértice no início de uma pilha...
 - Retornar pilha...



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Ordenação Topológica:

- Exemplo de execução da ordenação topológica....



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- **Ordenação Topológica:**

- Comentário:

- Podemos encontrar algumas implementações da ordenação topológica, que não altera o método original da DFS, e utiliza apenas o vetor f ao final de sua execução.
 - Este método precisa utilizar um algoritmo de ordenação, o que deixa o procedimento “mais caro” computacionalmente.
 - Operação $n \log(n)$ no último passo.

Algoritmo dos Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Relaxando as arestas de um GAO (grafo acíclico orientado) ponderado de acordo com uma ordenação topológica de seus vértices, podemos calcular caminhos mais curtos a partir de uma única origem com complexidade $O(|V| + |A|)$;
- Relembrando:
 - Bellman-Ford: $O(|V| \cdot |A|)$

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Relembrando dois métodos básicos:

INICIALIZA($G = (V, A), s$)

para cada $v \in V$

$d[v] = \infty$

$\pi[v] = \text{NULL}$

fim para

$d[s] = 0$

fim

RELAXA(u, v, w)

se $d[v] > (d[u] + w(u, v))$ então

$d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\pi[v] = u$

fim se

fim

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

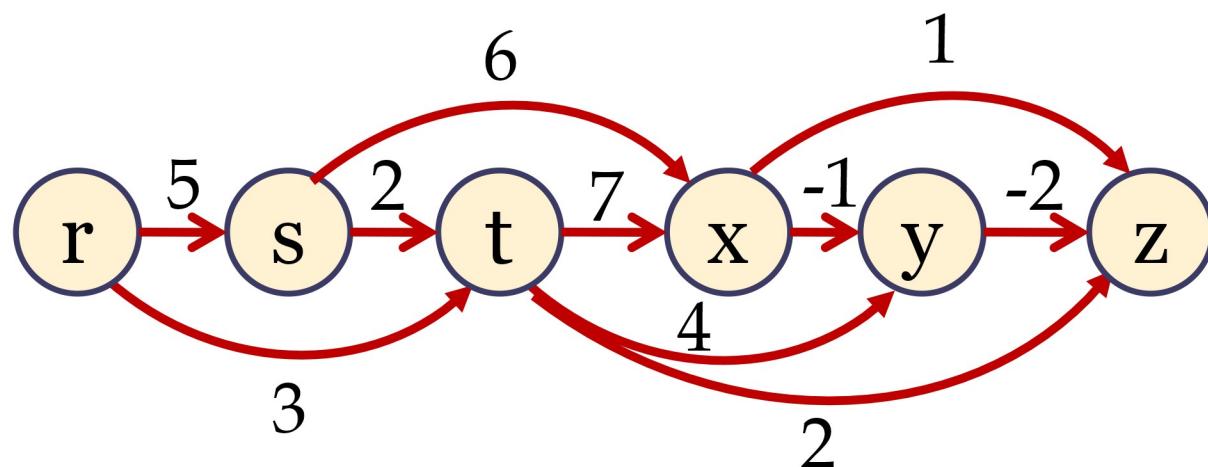
fim para

fim para

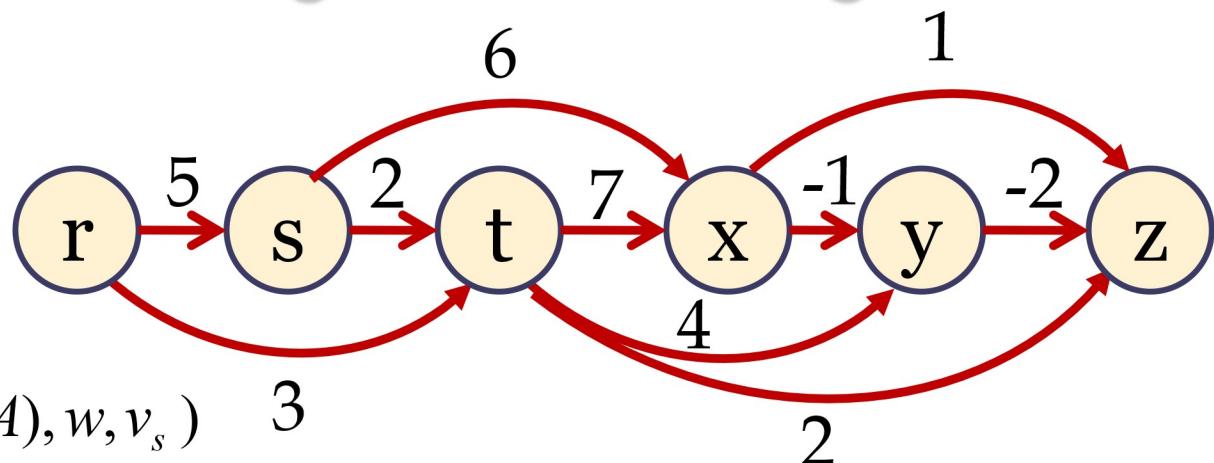
fim.

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Vamos acompanhar para o grafo:



Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA((V, A), v_s)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) *faça*

para cada vértice $v \in Adj[u]$ *faça*

relaxa(u, v, w)

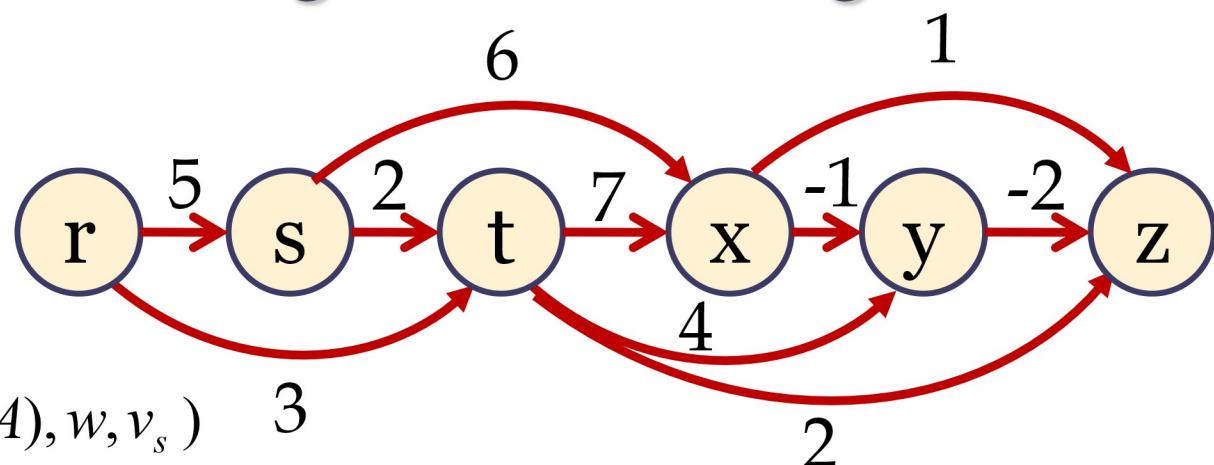
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| d | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| π | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| K | --- | --- | --- | --- | --- | --- |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A)$, w, v_s)

→ $K \leftarrow \text{ordenarTopologicamente}(V);$

INICIALIZA((V, A), v_s)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) *faça*

para cada vértice $v \in \text{Adj}[u]$ *faça*

relaxa(u, v, w)

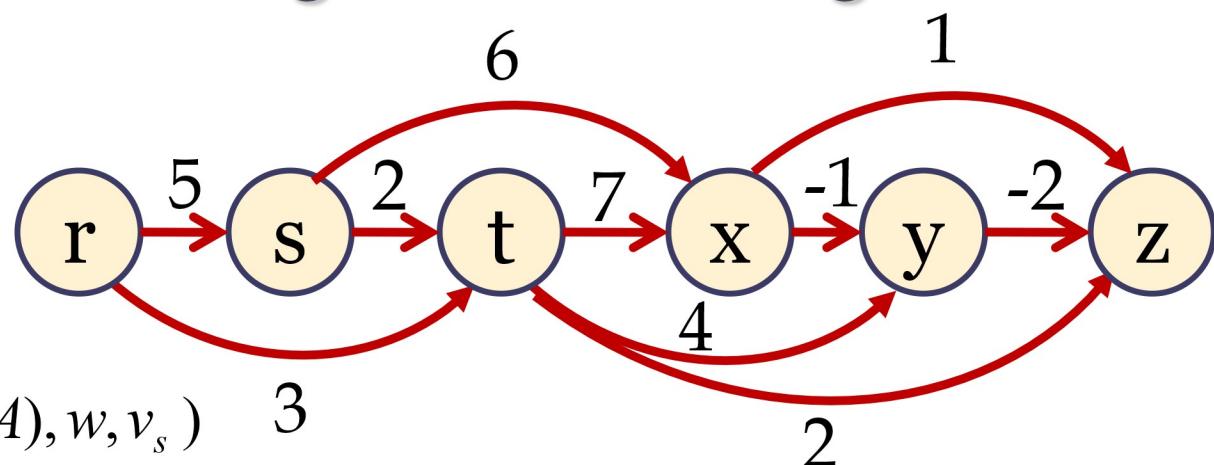
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| d | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| π | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

→ **INICIALIZA**((V, A), v_s)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

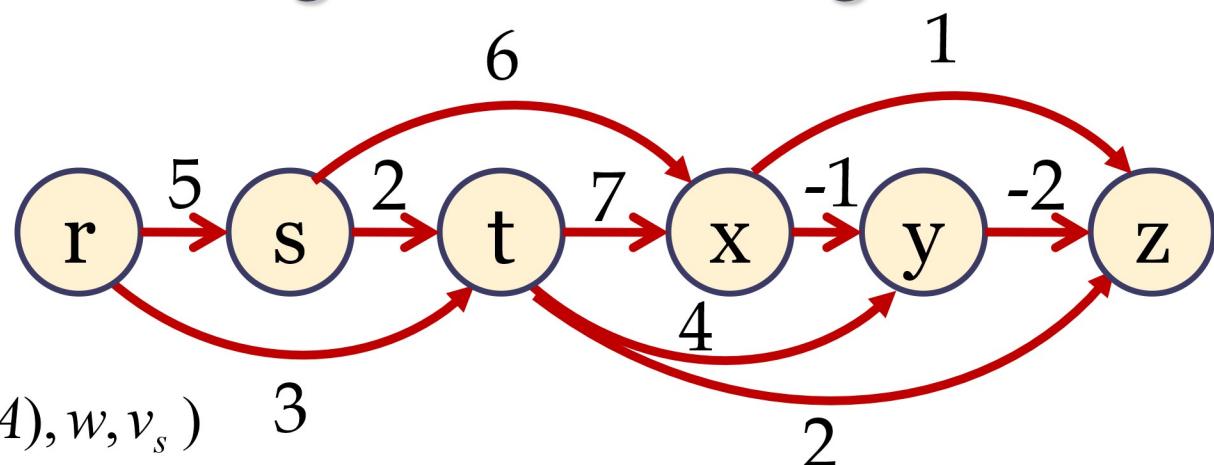
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| d | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| π | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



`CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A)$, w, v_s)`

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA((V, A) , v_s)

→ *para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça*
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

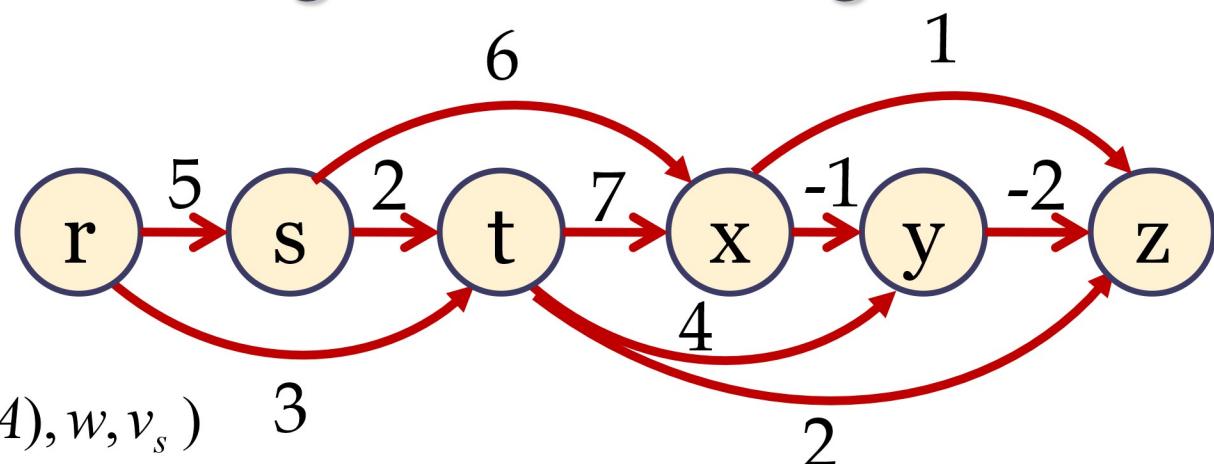
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|------|------|------|------|------|
| d | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| π | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

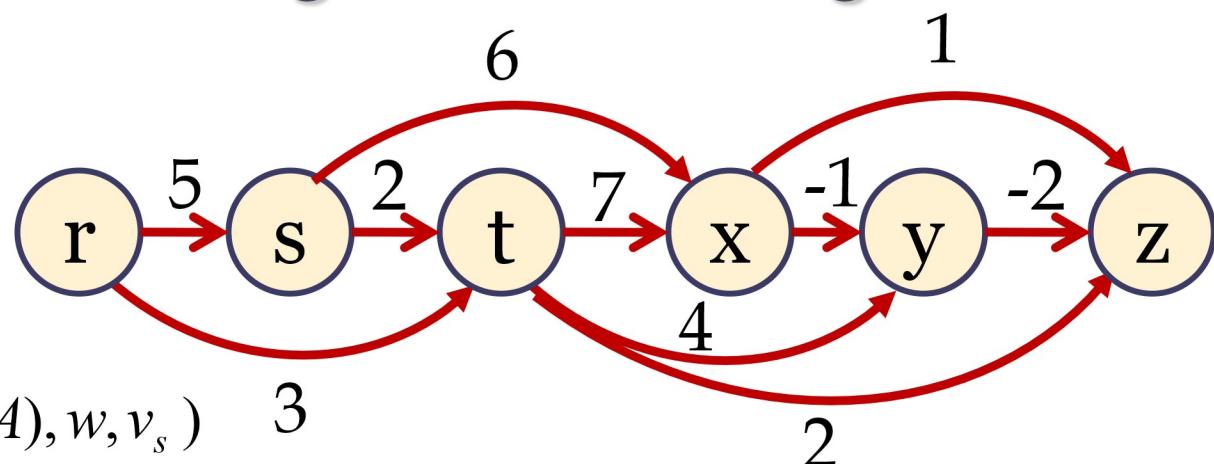
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|------|------|------|------|------|
| d | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| π | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

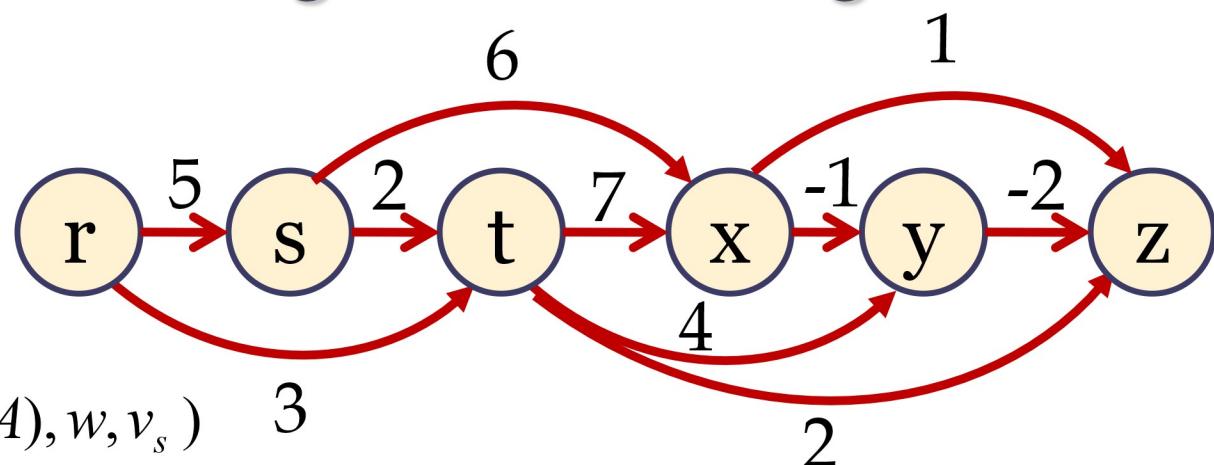
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|------|------|------|
| d | 0 | 5 | 3 | ∞ | ∞ | ∞ |
| π | NULL | r | r | NULL | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

→ *para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça*
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

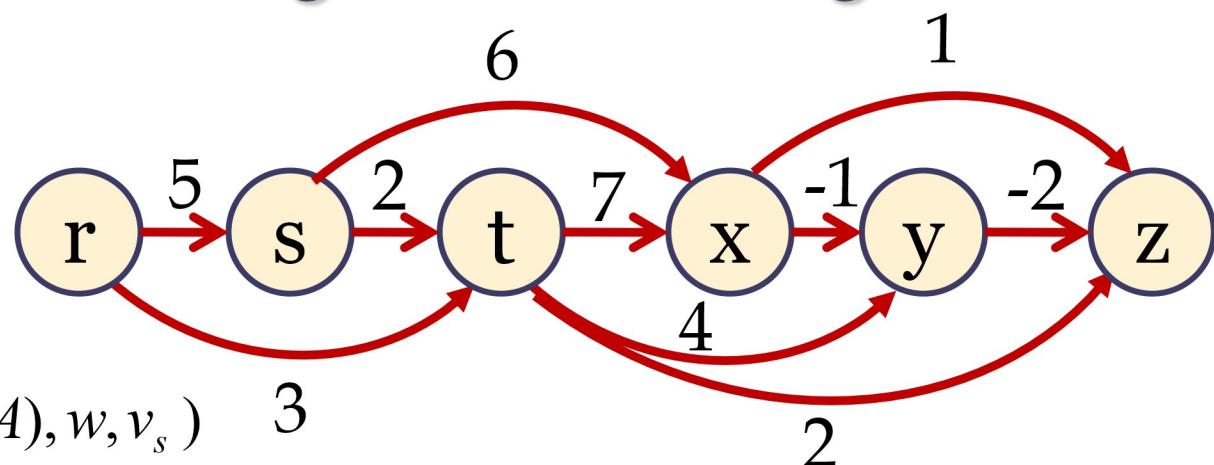
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----------|----------|----------|
| d | 0 | 5 | 3 | ∞ | ∞ | ∞ |
| π | NULL | r | r | NULL | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

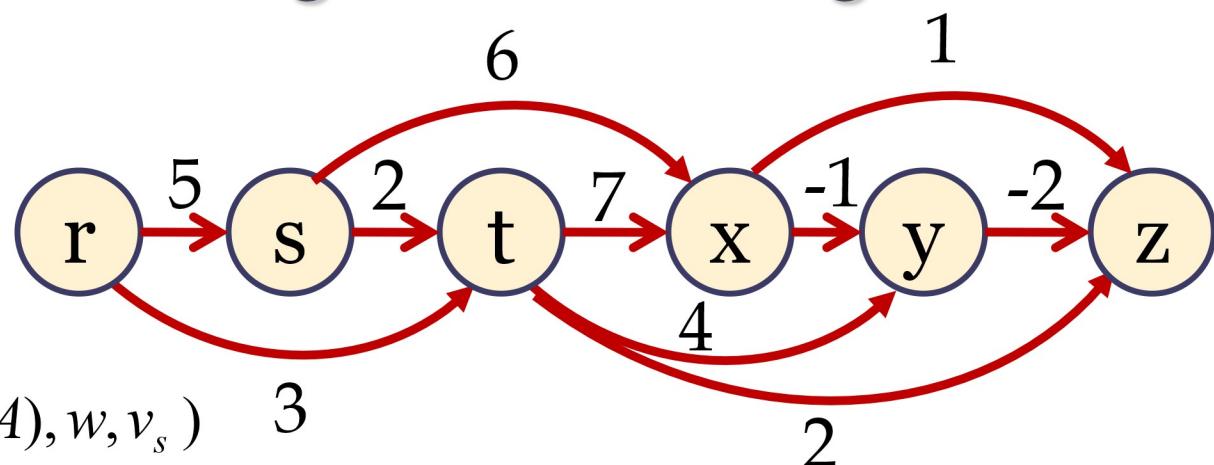
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|------|------|------|
| d | 0 | 5 | 3 | ∞ | ∞ | ∞ |
| π | NULL | r | r | NULL | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

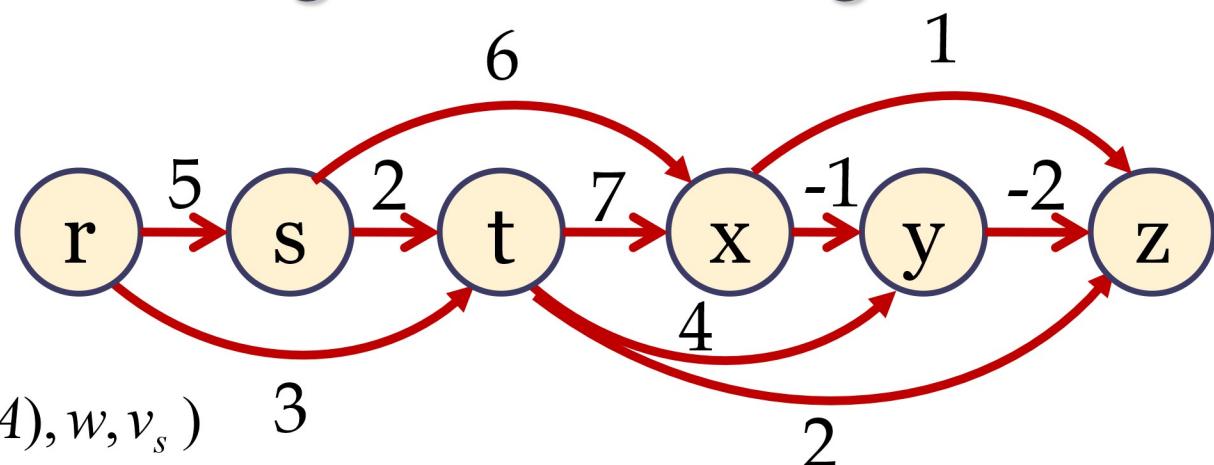
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|----------|----------|
| d | 0 | 5 | 3 | 11 | ∞ | ∞ |
| π | NULL | r | r | s | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

→ *para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça*
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

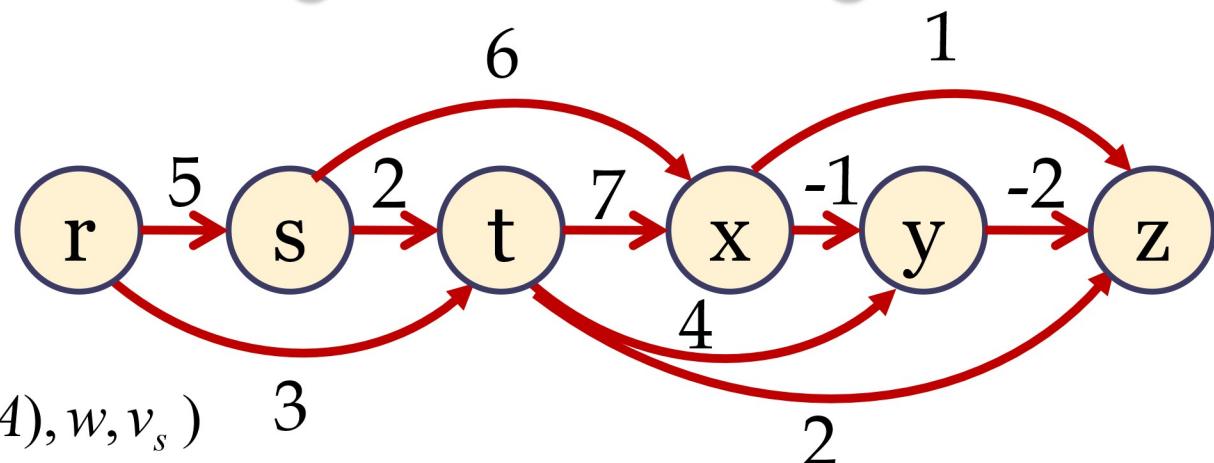
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|----------|----------|
| d | 0 | 5 | 3 | 11 | ∞ | ∞ |
| π | NULL | r | r | s | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

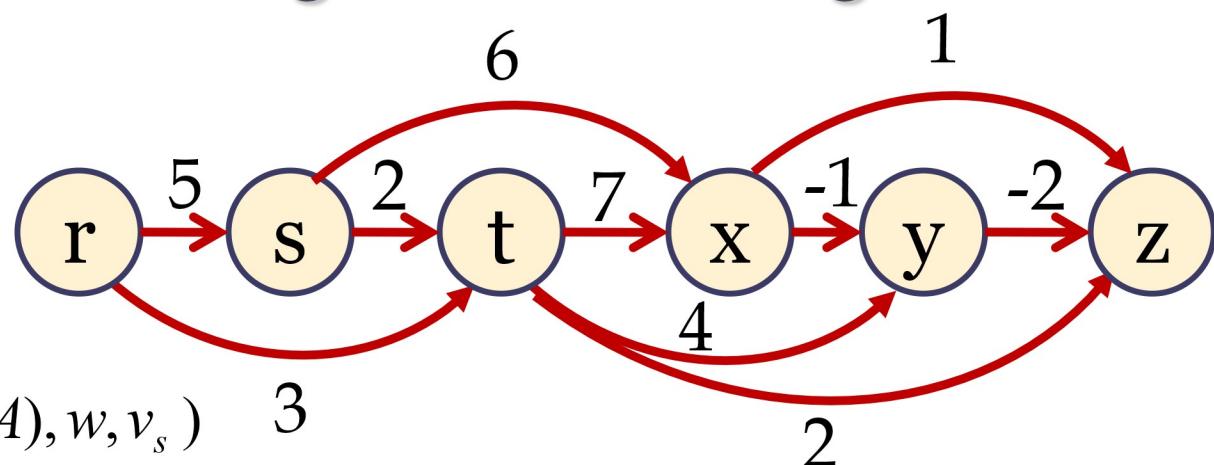
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|------|------|
| d | 0 | 5 | 3 | 11 | ∞ | ∞ |
| π | NULL | r | r | s | NULL | NULL |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

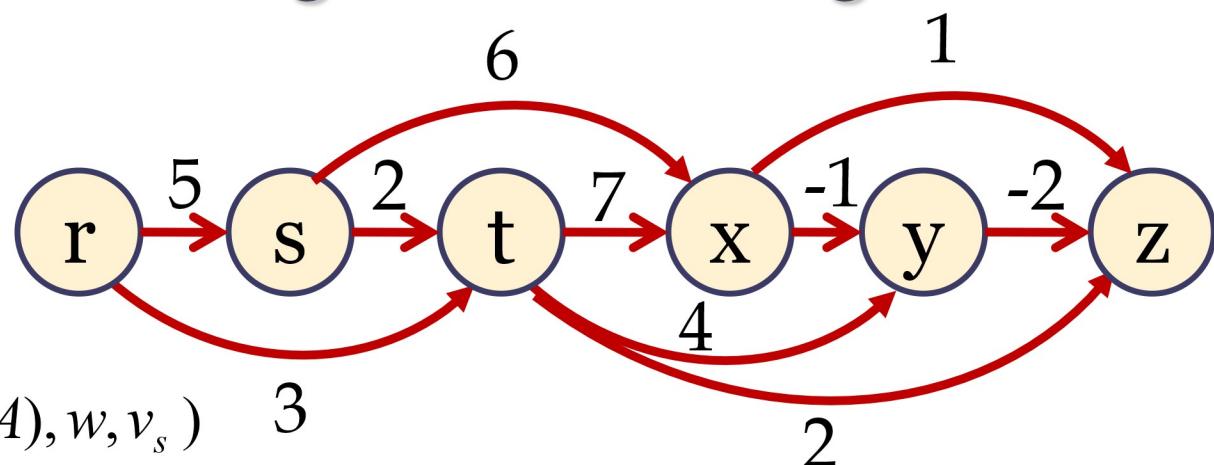
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

→ *para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça*
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

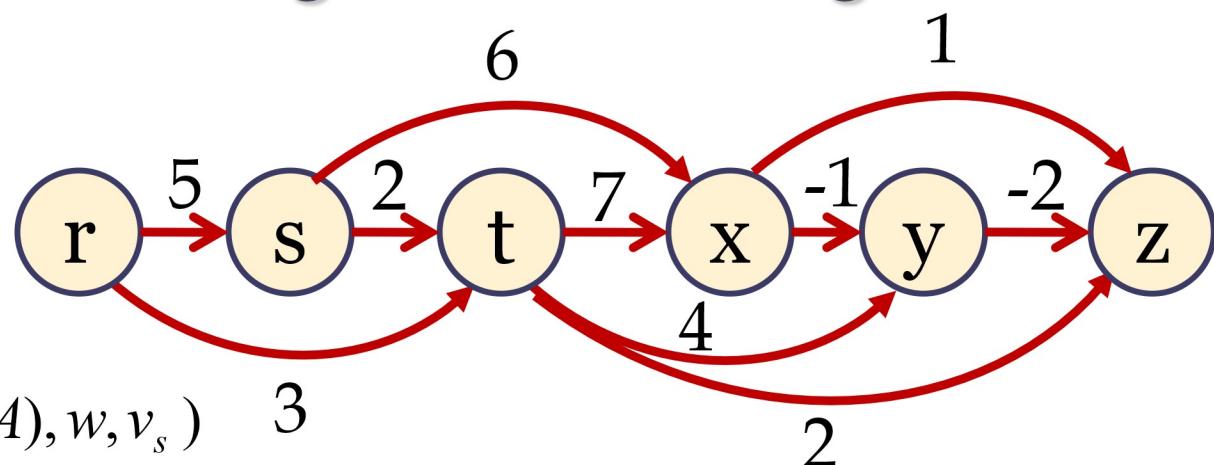
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

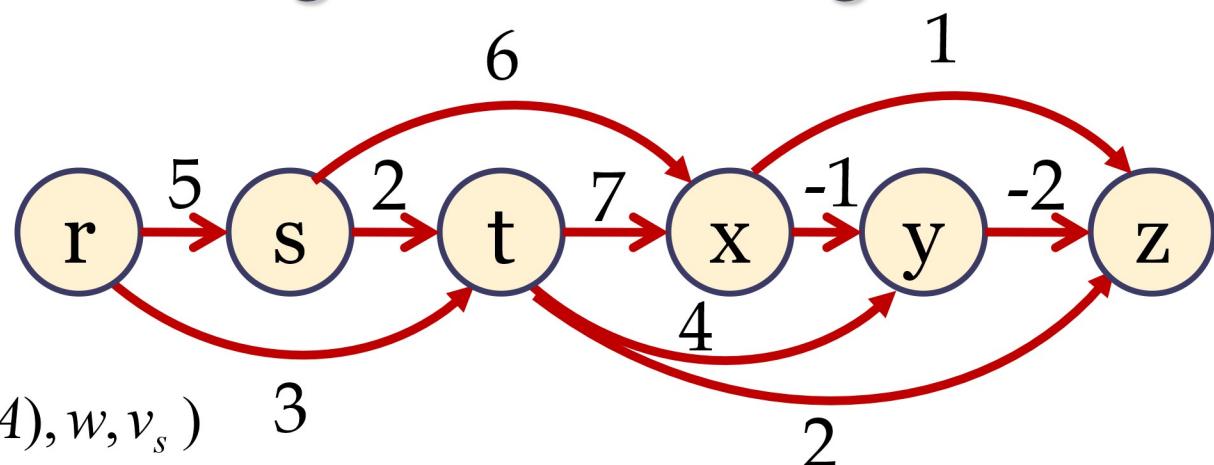
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

→ *para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça*

para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

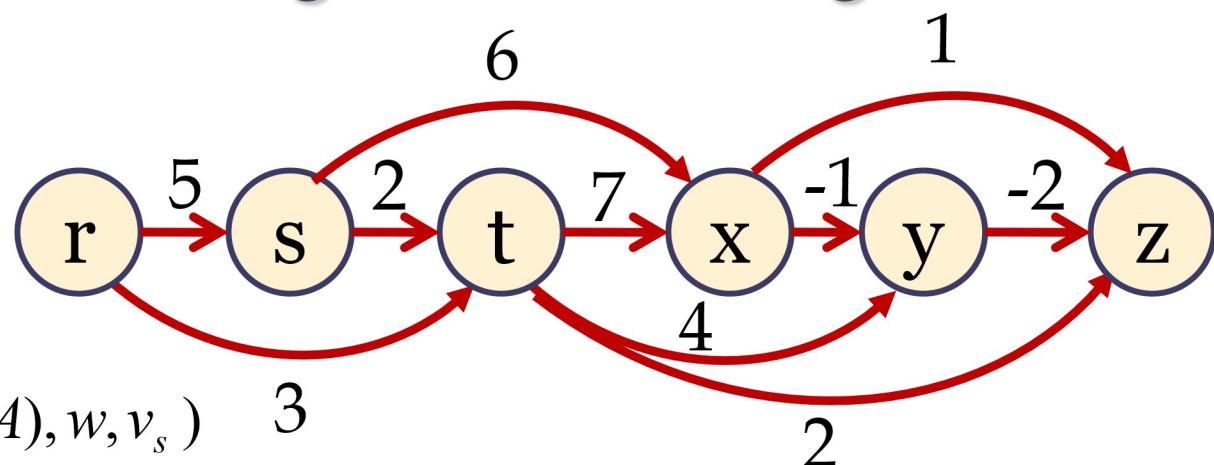
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

→ *relaxa(u, v, w)*

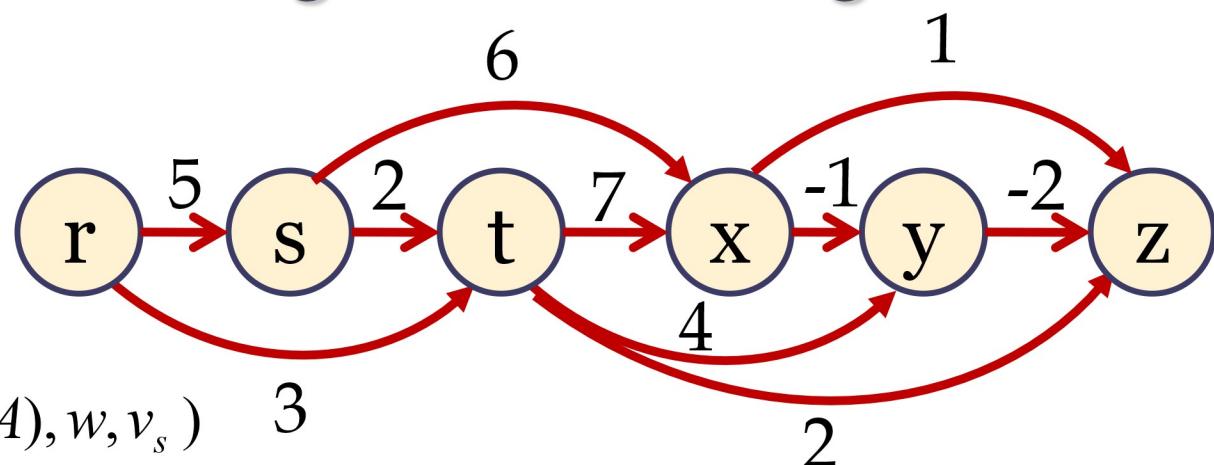
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

→ *para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça*
para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

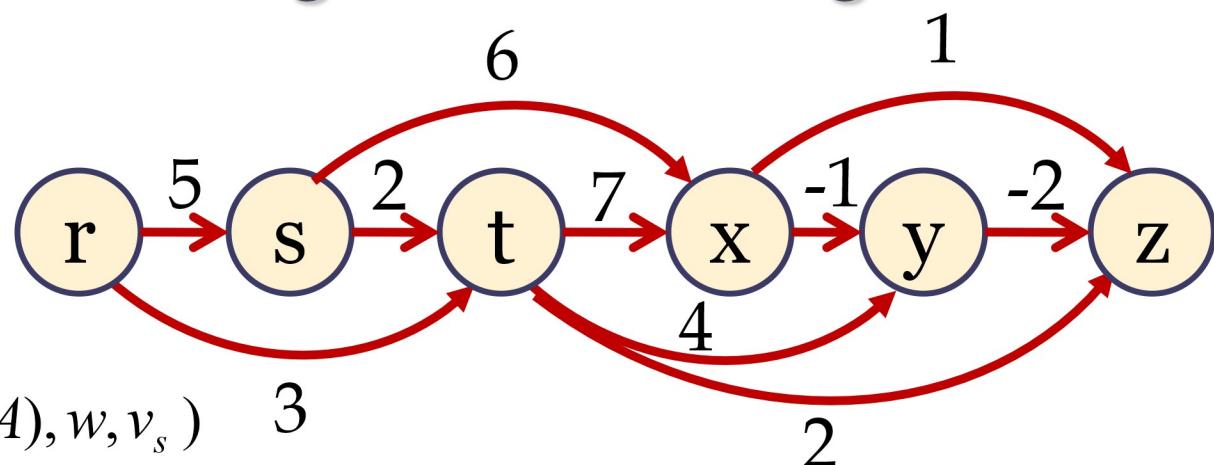
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

→ *para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça*

relaxa(u, v, w)

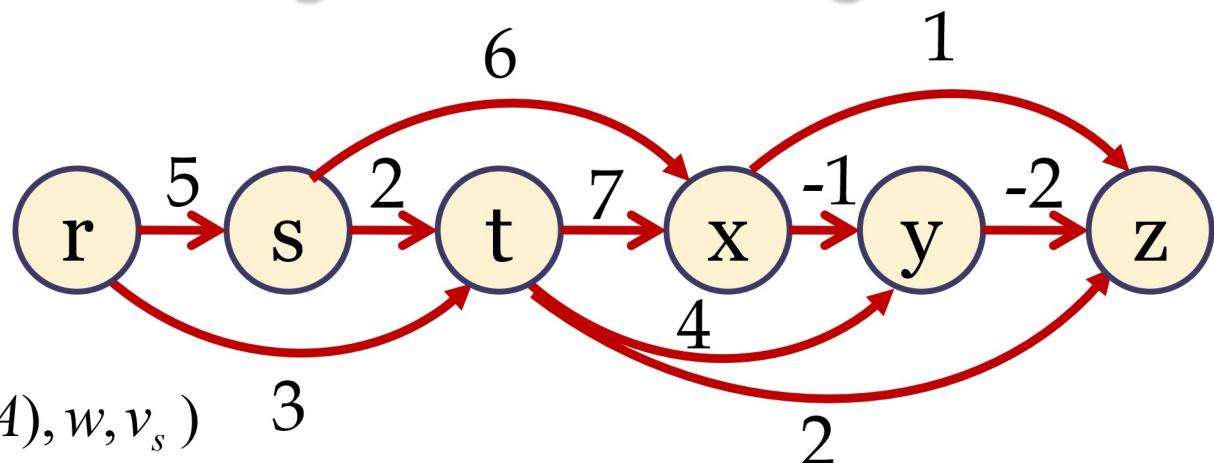
fim para

fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados



CaminhoMinimo_GAO($G = (V, A), w, v_s$)

$K \leftarrow$ ordenarTopologicamente(V);

INICIALIZA($(V, A), v_s$)

para cada vértice $u \in K$ (em ordem topológica) faça

para cada vértice $v \in Adj[u]$ faça

relaxa(u, v, w)

fim para

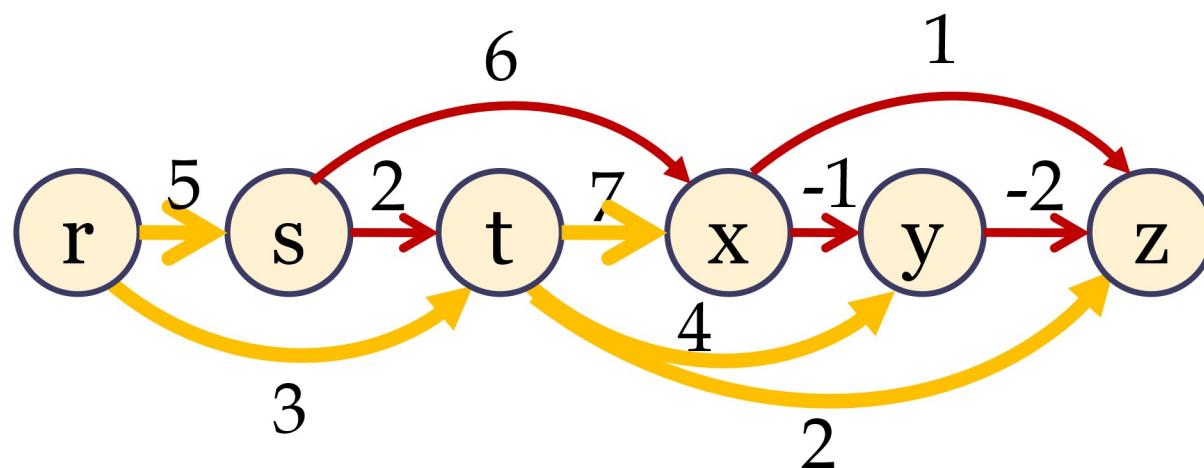
fim para

fim.

| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |
| K | r | s | t | x | y | z |

Caminhos mais curtos de origem única em grafos acíclicos orientados

- Solução:



| vértice | r | s | t | x | y | z |
|---------|------|---|---|----|---|---|
| d | 0 | 5 | 3 | 10 | 7 | 5 |
| π | NULL | r | r | t | t | t |