PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PARA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

EXAMEN

EJERCICIO 1:

$$X = \text{Perro} \mid \text{Gato} : \begin{cases} X \mid L = \text{Perro} \sim N(\mu = 500, \sigma^2 = 50) \\ X \mid L = \text{Gato} \sim N(\mu = 450, \sigma^2 = 40) \end{cases}$$

$$P(\text{Perro} \mid X = 490) = \frac{P(X=490 \mid \text{Perro}) \cdot P(\text{Perro})}{P(X=490)},$$

como $P(X=490) = P(X=490 \mid \text{Perro}) \cdot P(\text{Perro}) + P(X=490 \mid \text{Gato}) \cdot P(\text{Gato})$

$$\Rightarrow P(\text{Perro} \mid X = 490) = \frac{\overbrace{P(X=490 \mid \text{Perro})}^{\text{Verosimilitud}} \cdot P(\text{Perro})}{P(X=490 \mid \text{Perro}) \cdot P(\text{Perro}) + P(X=490 \mid \text{Gato}) \cdot P(\text{Gato})}$$

Dado:

- $P(X=490 \mid \text{Perro}) = 0{,}007$
- $P(X=490 \mid \text{Gato}) = 0{,}006$
- $P(\text{Perro}) = P(\text{Gato}) = 0{,}5$

$$\therefore P(\text{Perro} \mid X=490) = \frac{0{,}007 \cdot 0{,}5}{0{,}007 \cdot 0{,}5 + 0{,}006 \cdot 0{,}5}$$

$$\boxed{P(\text{Perro} \mid X=490) = 0.53}$$

EJERCICIO 2:

Parte a)

- Hipótesis nula: El tiempo promedio de usuarios en el sitio web sigue igual (6 minutos)

- Hipótesis alternativa: El tiempo promedio de usuarios en el sitio web ha aumentado.

Parte b)

- $H_0: \mu = 6$
- $H_1: \mu > 6$

Estadístico: Como σ^2 desconocido entonces

$$d = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}, \text{ donde}$$

$d \sim$ t-student con n-1 grado de libertad.

Datos:

- $n = 50$
- $\bar{X} = 6{,}5$
- $\mu_0 = 6$
- $S = 1{,}5$
- $\alpha = 0{,}05$
- Región crítica: $C = \{ d \geq t_{n-1, 1-\alpha} \}$, como $n = 50$ y $\alpha = 0{,}05$

$$d = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n}$$

$$\Rightarrow C = \{ d \geq t_{50-1, 1-0{,}05} \} = \{ d \geq \underbrace{t_{49, 0{,}95}}_{1{,}64} \}$$

(stats.t.ppf(0,95, 49))

$\therefore C = \{ d \geq 1{,}64 \}$

Test: $d = \frac{\sqrt{50}(6{,}5-6)}{1{,}5} = 2{,}35$

$\Rightarrow C = \{ 2{,}35 \geq 1{,}64 \}$

$\downarrow$

Está dentro de C $\Rightarrow$ Rechazo Ho

Parte c)

Hay un 95% de certeza que el tiempo de permanencia ha aumentado. Como p-value = 0,01 $\leq \alpha$ + grados de libertad rechazo Ho. Prefiero H_1.

EJERCICIO 3:

Parte a)

X: "Stock diario de un determinado producto"

Verosimilitud: $X_i \mid \Lambda=\lambda \underset{iid}{\sim} Poisson(\lambda)$, $i=\overline{1,6}$

A priori: $\Lambda \sim Gama(10,1) \Rightarrow$ A posteriori: Gama

Distribuciones: $\cdot\ Poi(\lambda) = \dfrac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$$\cdot\ Gama(\nu,\lambda) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} \cdot x^{\nu-1} \cdot e^{-\lambda x}$$

$$\therefore f_{\Lambda|\underline{X}=\underline{x}}(\lambda) \propto P_{\underline{X}|\Lambda=\lambda}(\underline{x}) \cdot \pi(\lambda)$$

$$f_{\Lambda|\underline{X}=\underline{x}}(\lambda) \propto \prod_{i=1}^{6} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!} \cdot \frac{1^{10}}{\Gamma(10)} \cdot \lambda^{9} \cdot e^{-\lambda} \cdot \mathbb{I}\{\lambda>0\}$$

$$f_{\Lambda|\underline{X}=\underline{x}}(\lambda) \propto \lambda^{\sum_{i=1}^{6} x_i} \cdot e^{-6\lambda} \cdot \lambda^{9} \cdot e^{-\lambda} \cdot \mathbb{I}\{\lambda>0\}$$

$$f_{\Lambda|\underline{X}=\underline{x}}(\lambda) \propto \lambda^{\sum_{i=1}^{6} x_i + 9} \cdot e^{-7\lambda} \cdot \mathbb{I}\{\lambda>0\}$$

$$f_{\Lambda|\underline{X}=\underline{x}}(\lambda) \propto Gama\left(\sum_{i=1}^{6} x_i + 9 + 1,\ 7\right)$$

$$\boxed{f_{\Lambda|\underline{X}=\underline{x}}(\lambda) \propto Gama(78, 7)}$$

Parte b)

$P(X>30) = 1 - P(X \leq 30)$, como $P(X \in A) = \int_{\Lambda}\int_{\theta}$ Verosimilitud. A posteriori:

$$\Rightarrow P(X>30) = 1 - \sum_{i=\overline{1,6}} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!} \cdot \frac{7^{78}}{\Gamma(78)} \cdot \lambda^{77} \cdot e^{-7\lambda}\, d\lambda$$

$P(X>30) = 1 - \underbrace{\sim 1}_{\text{WolframAlpha}} \Rightarrow P(X>30) \sim 0$