PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
TP 2

Parte a)

Como no se especifica información previa sobre la distribución a priori y tampoco tengo creencias sobre dicho escenario, parto de una distribución inicial no-informada (uniforme).

$$\Theta \sim Beta(a=1, b=1) = U(0,1)$$

Caso particular uniforme

Nota: Con el mismo soporte que Θ. 0 ser 0 y 1.

Parte b)

Sea X = "probabilidad de que un usuario mire una serie recomendada"

Dado los siguientes datos:

- $X \sim Binomial(n=1, p=0{,}4) = Ber(p=0{,}4)$
- X es una variable aleatoria discreta.
- Distribución a priori: $\Theta \sim Beta(a=1, b=1)$
- Verosimilitud: $\underline{X} | _{\Theta=\theta} (\underline{x}) \sim Binomial(n_r = 4, p_r = 5/4)$
- Segun la tabla de familias conjugadas, mi distribución a posteriori podria ser Beta

$\cdot\ \text{Beta}(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1} \propto x^{a-1}(1-x)^{b-1} \cdot \mathbb{I}\{0<x<1\}$

$\hookrightarrow$ Funcion beta de parametros a y b
$B(a,b)$

$\cdot\ \text{Binomial}(n,p) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x} \propto p^{x}(1-p)^{n-x}$

$\therefore\ f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\sigma) = P_{\underline{X}|\Theta=\sigma}(\underline{x}) \cdot \Pi(\sigma)$

$\Rightarrow f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\sigma) = (5/4)^{x}(1-5/4)^{4-x} \cdot x^{0}(1-x)^{0} \cdot \mathbb{I}\{0<x<1\}$

$f_{\Theta|\underline{X}=x}(\sigma) = (5/4)^{\overset{\nearrow a-1}{x}}(1-5/4)^{\overset{\nearrow b-1}{4-x}} \sim$ Beta con $a = x+1$ y
$b = \underset{\downarrow n}{4} - x + 1$

$\Rightarrow f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\sigma) \sim \text{Beta}(x+1,\ n-x+1)$

Parte c)

Dado que $P(X \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{X|\Theta=\sigma}(x)}_{\text{Binomial}(n=4,\ p=5/4)} \cdot \underbrace{f_{\Theta|\underline{X}=x}(\sigma)}_{\text{Beta}(x+1,\ n-x+1)}\, d\sigma\, dx$

$\Rightarrow P(x=5) = \sum_{x=5}^{5} \int_0^1 \text{Binomial}(n=4, p=5/4) \cdot \text{Beta}(\underset{a=5+1}{6}, \underset{b=10-5+1}{6})\, d\sigma$

$P(x=5) = \int_0^1 \binom{4}{5}(5/4)^{5}(1-9/4)^{4-5} \cdot \frac{\sigma^{5}(1-\sigma)^{5}}{B(6,6)} \cdot \mathbb{I}\{0<\sigma<1\}\, d\sigma$

$P(x=5) = \frac{0,35}{B(6,6)} \cdot 0,0004 = \boxed{0,31}$