AMIA
GUIA 1

EJERCICIO 4:

Mostrar qué

$$\langle A, B \rangle = Tr(AB^H)$$

define un producto interno en $C^{n \times m}$. A este PI se lo conoce como producto interno de Frobenius (La operación A^H representa A traspuesta y conjugada)

DEF (Producto interno):

Sea V-K un E.V, donde $K = \mathbb{R}$ o C, un producto interno sobre V es una función $\phi: V \times V \to \mathbb{R}$ que satisface:

① $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (o C), $v, u, w \in V$:
ⓐ $\phi(u+v, w) = \phi(u, w) + \phi(v, w)$
ⓑ $\phi(\alpha \cdot u, v) = \alpha \phi(u, v)$
② $\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)}$
③ $\phi(v, v) \geq 0$, y $\phi(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$

Para mostrar lo que se solicita se debe de probar que dicho producto interno cumple con todas las propiedades anteriores:

(1a) ¿$\langle A+B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$?

$$\langle A+B, C \rangle \overset{def}{=} Tr((A+B).C^H) \overset{\text{Si A,B,C compatibles}}{=} Tr(AC^H + BC^H) \overset{\text{Linealidad } Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)}{=}$$

$$= Tr(AC^H) + Tr(BC^H) \overset{def}{=} \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \; \checkmark$$

1b ¿ $\langle \alpha \cdot A, B \rangle = \alpha \langle A, B \rangle$?

$$\langle \alpha \cdot A, B \rangle \overset{\text{def}}{=} Tr\left((\alpha A) B^H\right) \overset{\text{si } A, B^H \text{ conformables}}{=} Tr\left(\alpha (A B^H)\right) \overset{\substack{\text{linealidad} \\ Tr(rA) = r\,Tr(A)}}{=} \alpha\, Tr\left(A B^H\right)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \alpha \langle A, B \rangle \quad \checkmark$$

2 ¿ $\langle A, B \rangle = \overline{\langle B, A \rangle}$?

$$\langle A, B \rangle \overset{\text{def}}{=} Tr\left(A B^H\right) \overset{\text{doble conj}}{=} \overline{\overline{Tr\left(A B^H\right)}} \overset{\substack{\text{linealidad} \\ \overline{Tr(A)} = Tr(\overline{A})}}{=} \overline{Tr\left(\overline{A B^H}\right)} \overset{\text{dist conj}}{=} \overline{Tr\left(\overline{A}\, \overline{B^H}\right)}$$

$$= \overline{Tr\left(B A^H\right)} \overset{\text{def}}{=} \overline{\langle B, A \rangle} \quad \checkmark$$

- $Tr(AB) = Tr(BA)$
- $Tr(A^T) = Tr(A)$

3 ¿ $\langle A, A \rangle \geq 0$?

$$\langle A, A \rangle \overset{\text{def}}{=} Tr\left(A \cdot A^H\right) \overset{z \cdot \bar{z} = \|z\|^2}{=} Tr\left(\|A\|^2\right) \geq 0 \quad \checkmark$$

- Por prop norma: $\|A\|^2 \geq 0$
- $Tr(\mathbb{R}^+) \geq 0$
- $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A \equiv 0$

∴ Como se cumplen todas las propiedades, se puede afirmar que

$$\langle A, B \rangle = Tr\left(A B^H\right)$$

es un PI en $\mathbb{C}^{n \times m}$.