ANÁLISIS MATEMÁTICO
TP2

EJERCICIO 5

Parte a)

Dada la definición de Fibonacci: $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$; definimos una secuencia de vectores de dos dimensiones $\{X_1, \dots, X_n\} : X_k \in \mathbb{R}^2$ que contienen la secuencia de Fibonacci. Del modo que:

$$X_k = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix}, \text{ ej } \boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

donde se aplican las siguientes reglas:

① Para el elemento X_k, la primer componente es la suma de los elementos de X_{k-1}

② Para el elemento X_k, la segunda componente es la primer componente del elemento X_{k-1}.

Dado un elemento X_k $\exists$ una matriz de transformación lineal A donde $X_{k+1} = AX_k$

Ejemplo: $\underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}}_{X_{k+1}} = A \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}}_{X_k}$ $\Big\{$ Siguiendo las reglas antes definidas, podemos aplicarlas a la matriz identidad para obtener la matriz de transformación.

Sea $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

A

$$\therefore X_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_k$$

Aplicando la regla de Fibonacci para obtener el elemento X_k (hay que obtener los anteriores) tenemos que:

$X_{k+1} = AX_k$, pero $X_k = AX_{k-1}$ y así sucesivamente hasta X_0. Sustituyendo

$X_{k+1} = AX_k = A(AX_{k-1}) = AAX_{k-1} = A^2 X_{k-1} = \dots = A^{k+1} X_0$

Como $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parte b) Autovalores | Autovectores

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Como A tiene n (dos en este caso) autovalores distintos $\Rightarrow$ A es diagonalizable.

$\Rightarrow A = SDS^{-1}$

$E_1: (A - \lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \left(A - \frac{1+\sqrt{5}}{2} I\right)X = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow V_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right), \therefore E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$E_2: (A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \left(A - \frac{1-\sqrt{5}}{2} I\right)X = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow V_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right), \therefore E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\therefore S = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$

La diagonalización de la matriz A está dada por las matrices S y D definidas anteriormente

Parte c)

La forma genérica está dada por:

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El problema está en hacer la potencia de la matriz A. Pero como sabemos que A es diagonalizable y aplicando los dos teoremas vistos en clase

① $A^n = S D \underbrace{S^{-1} S}_{I} D S^{-1} \ldots = S D^n S^{-1}$

② D^n es elevar los elementos de la diagonal a la potencia n

$\therefore X_n = (S D^n S^{-1}) X_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_n = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n & 0 \\ 0 & \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n \end{pmatrix}}_{D^n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

, como $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X_n = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ -1/\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + 1/\sqrt{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \end{pmatrix}$$

, como me interesa f_k únicamente, igualando término a término, tenemos que la fórmula explícita para el k-ésimo elemento de la secuencia de Fibonacci es

$$\boxed{X_k = 1/\sqrt{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]}$$

Ej: Si $k = 5 \Longrightarrow X_5 \; 1/\sqrt{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{5}\right] = 5$