20/03/2024 PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

TP 1

EJERCICIO 1:

Parte a)

Según la definición de distribución NORMAL MULTIVARIADA, sea $X = (X_1, ..., X_n)^T$ un vector de V.A continuas, X tiene una distribución normal multivariada $\left(X \sim N_n(\mu, \Sigma) \right)$ si:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}$$

donde $X \in \mathbb{R}^n$, $\mu = \left(E(X_1), ..., E(X_n)\right)^T$ y Σ matriz de covarianza $\left(\Sigma_{ij} = cov(i,j) \right)$

$\therefore$ $f_{X,Y}$ sigue una distribución normal multivariada (bivariada en este caso) donde:

- $X = (x, y)^T$
- $\mu = \left(E(X) = 1, E(Y) = 0 \right)$
- $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1,2 \\ -1,2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \cdot V = \left(var(X) = 2, var(Y) = 3 \right)$

  $\cdot\ cov(X,Y) = -1,2$

Parte b:

Como $f_{X,Y}(x,y) \sim N(\mu, \Sigma)$ entonces

$$\cdot X \sim N(\mu_1, \sigma_x^2)$$

$$\cdot Y \sim N(\mu_2, \sigma_y^2)$$

$\therefore \quad X \sim N(1,2) \quad y \quad Y \sim N(0,3)$

Parte c:

De la parte A surge que:

- $E(X) = 1$, $V(X) = 2$
- $E(Y) = 0$, $V(Y) = 3$
- $\mathrm{cov}(X,Y) = -1,2$

Parte d)

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \text{, como } X = (\overset{X_1}{X}, \overset{X_2}{Y})^T \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$\Rightarrow Y|X = x_1 \sim N\left(\mu_2 + \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x^2}(x_1 - \mu_1),\ \left(1 - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}\right)\sigma_y^2\right)$$

Si $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_x^2 = 2$, $\sigma_y^2 = 3$, $\mathrm{cov}(X,Y) = -1,2$, $x_1 = a$

$$\Rightarrow f_{Y|X=a}(y) \sim N\left(0 + \frac{-1,2}{2}(a-1),\ \left(1 - \frac{(-1,2)^2}{(2)(3)}\right)3\right)$$

$$\therefore f_{Y|X=a}(y) \sim N\left(-\frac{3a+1}{5},\ \frac{57}{25}\right)$$