Prácticos - Repartido 1

miércoles, 14 de diciembre de 2016 18:28

EJERCICIO 1

Amplitud Frecuencia Fase inicial

Sea $S_t = R\cos(2\pi(ft + \phi))$ donde:

tiempo

- R y ϕ son independientes
- f es una frecuencia fija
- $\phi \sim U[0,1]$
- $R \sim$ Rayleigh con $f(r) = re^{-r^2/2}$, $\forall r > 0$

→ Mostrar que $\forall t$, $S_t \sim N$

Esto es convertir de polares a cartesianas

Nota: Definir $X = R\,\text{sen}(2\pi(ft+\phi))$, $Y = R\cdot\cos(2\pi(ft+\phi))$

Utilizar relación: $X^2 + Y^2 = R^2$ para calcular la densidad conjunta de (X,Y) a partir de la densidad conjunta de (R,ϕ)

1) Análisis:

El objetivo es mostrar que S_t se distribuye normal.

Tenemos el tip que tenemos que calcular la densidad conjunta de (X,Y) a partir de la densidad conjunta de (R,ϕ).

Pero como están en distintos sistemas hay que transformar uno en el otro. Esta transformación hay que ajustarla mediante el Jacobiano.

Se parte de la densidad en (R,ϕ) y queremos hallar la densidad en (x,y) mediante la transformación

$X = R\,\text{sen}(\theta)$, $Y = R\cos(\theta)$:

$\theta = 2\pi(ft + \phi)$

$\therefore f_{X,Y}(x,y) = f_{R,\theta}(r,\theta)\cdot\dfrac{1}{|J|}$

Nota: Recordar que:

$$dx\,dy = \left|\det\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\right|\cdot du\,dv$$

Jacobiano

2) Calculamos la densidad conjunta en (R,θ):

- $f_R(r) = re^{-r^2/2}$, $r > 0$
- $f_\theta(\theta)$: como ft es constante y $\phi \sim U[0,1]$ entonces $\phi \sim U[0,2\pi]$

Como ft es cte, entonces tengo: $2\pi U \sim U[0,2\pi]$

y como la densidad de una Uniforme es $\dfrac{1}{b-a}$, entonces

($b = 2\pi$, $a = 0$)

$f_\theta(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}$

- Como R y θ son independientes entonces:

$f_{R,\theta}(r,\theta) = f_R(r)\cdot f_\theta(\theta) = \dfrac{re^{-r^2/2}}{2\pi}$

3) Calculamos el Jacobiano para la transformación definida:

3) Calculamos el Jacobiano para la transformación definida:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

- Para $x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cdot \cos\theta$
- Para $y = r \cdot \cos\theta \rightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta$, $\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \cdot \operatorname{sen}\theta$

$$\therefore |J| = (\operatorname{sen}\theta)(-r \cdot \operatorname{sen}\theta) - (r \cdot \cos\theta)(\cos\theta) = -r\underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = |-r| \Rightarrow |J| = r$$

4) Aplicamos la transformación a las densidades conjuntas:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{r e^{-r^2/2}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-r^2/2}$$

Y como $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$

La función de densidad obtenida es la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(0,1)$ por lo que Y tiene densidad marginal:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{y^2}{2}\right)}$$

Nota: $f_{X,Y}(x,y) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{Normal de } X} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}}_{\text{Normal de } Y}$

$\boxed{\text{Con lo cual } Y_t \sim N(0,1)}$

EJERCICIO 2

Sea $Y_t = \mu + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$ donde:

- ε_t es un ruido blanco $\Rightarrow$ media $= 0$

Sea $\underbrace{\bar{Y}_t}_{\text{Promedio muestral}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i$

→ Encontrar $\operatorname{Var}(\bar{Y})$

$\sum k X_i = k \sum X_i$

1) Sustituimos Y_t en $\bar{Y}_t \rightarrow \bar{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu + \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1} \overset{\text{cte}}{=} \mu + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}$

2) Calculamos $\operatorname{Var}(\bar{Y}_t) = \operatorname{Var}\left(\mu + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}\right)$

$$\operatorname{Var}(\bar{Y}_t) = \underbrace{\operatorname{Var}(\mu)}_{0} + \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(\bar{Y}_t) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \operatorname{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(\bar{Y}_t) = \frac{1}{n^2} \cdot \operatorname{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{i-1}\right)$$

Nota: $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i = \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-1}$,

$n-1$

$$\Rightarrow Var(\bar{y}_t) = \frac{1}{n^2} \cdot Var\left(\sum_{i=0} \varepsilon_i + \sum_{i=0} \varepsilon_{i-1}\right)$$

$$\Rightarrow Var(\bar{y}_t) = \frac{1}{n^2} \cdot Var\left(\varepsilon_{-1} + 2\sum_{i=0}^{n-2} \varepsilon_i + \varepsilon_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow Var(\bar{y}_t) = \frac{1}{n^2} \cdot Var(\varepsilon_{-1}) + 4\, Var \sum_{i=0}^{n-2} \varepsilon_i + Var(\varepsilon_{n-1})$$

Nota: $\sum_{i=0} \varepsilon_i = \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-1}$,

$\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_{-1} + \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-2}$

$\therefore \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_{-1} + 2\varepsilon_0 + \dots + 2\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}$

$= \varepsilon_{-1} + 2(\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-2}) + \varepsilon_{n-1}$

Al ser un ruido blanco, entonces $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$

$$\therefore Var(\bar{y}) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sigma^2 + 4(n-1)\sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{1}{n^2}\left(2 + 4(n-1)\right)\sigma^2 = \frac{1}{n^2}(4n-2)\sigma^2$$

$$\boxed{\therefore Var(\bar{y}) = \frac{4n-2}{n^2}\sigma^2}$$

EJERCICIO 3

Sea $y_t = -3 + 4\varepsilon_t + 8\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}$

- Encontrar función de autocorrelación de y_t

1) Análisis:

Relación entre la variable retagada

- Función de autocorrelación: $\rho(\tau) = \dfrac{R(\tau)}{R(0)}$

$R(\tau) \rightarrow$ Función de autocovarianza $\Gamma_x(t, t-\tau)$

$R(0) \rightarrow \Gamma_x(t,t) = \sigma_x^2$

2) Calculamos $R(0) = \sigma_x^2 = Var(y_t)$

$$Var(y_t) = Var(-3 + 4\varepsilon_t + 8\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = \underbrace{Var(-3)}_{0} + 4^2\, Var(\varepsilon_t) + 8^2\, Var(\varepsilon_{t-1}) + Var(\varepsilon_{t-2})$$

Si ε_t es un ruido blanco, entonces $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $E(\varepsilon_t) = 0$, $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$

$\therefore R(0) = 16\sigma^2 + 64\sigma^2 + \sigma^2 = 81\sigma^2$ | $E(y_t) = E(-3 + 4\varepsilon_t + 8\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = E(-3) = -3$

3) Calculamos las autocovarianzas:

- $\tau = 1 \Rightarrow R(1) = \Gamma_x(y_t, y_{t-1}) = E[(y_t + 3)(y_{t-1} + 3)]$

Sustituyendo por y_t, $y_{t-1} \Rightarrow E[(-3 + 4\varepsilon_t + 8\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} + 3)(-3 + 4\varepsilon_{t-1} + 8\varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3} + 3)$

$\therefore E[(4\varepsilon_t + 8\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})(4\varepsilon_{t-1} + 8\varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3})$

Como estamos asumiendo que ε_t es un ruido blanco, entonces

- $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ (independencia)
- $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$

Solo términos al cuadrado por $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$

Entonces de la expresión anterior quedan solo los términos:

$$\Rightarrow R(1) = E(8\varepsilon_{t-1} \cdot 4\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} \cdot 8\varepsilon_{t-2}) = 32\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma^2} - 8\underbrace{E(\varepsilon_{t-2}^2)}_{\sigma^2} = 24\sigma^2$$

- $\tau = 2 \Rightarrow R(2) = E[(4\varepsilon_t + 8\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})(4\varepsilon_{t-2} + 8\varepsilon_{t-3} - \varepsilon_{t-4}) = -4\sigma^2$

• Para $\tau \geq 3$ quedan todos en 0.

$\therefore$ Función de autocovarianza: $R(\tau) \,/\, R(\tau) = \begin{cases} 81\sigma^2 & \text{si } \tau = 0 \\ 24\sigma^2 & \text{si } \tau = 1 \\ -4\sigma^2 & \text{si } \tau = 2 \\ 0 & \text{si } \tau \geq 3 \end{cases}$

4) Calculamos la función de autocorrelación:

$$r(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ \frac{24}{81} & \text{si } \tau = 1 \\ -\frac{4}{81} & \text{si } \tau = 2 \\ 0 & \text{si } \tau \geq 3 \end{cases}$$