

Una función  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es medible si y solo si, los conjuntos

$$A := \{x \in X : f(x) = +\infty\} \text{ y } B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

pertenecen a  $\mathcal{A}$  y la función con valores reales dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B, \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B, \end{cases}$$

es medible.

DEM. ( $\Rightarrow$ ) Sea  $f \in M(X, \mathcal{A})$ . Observe que

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\},$$

$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right]^c$$

de esta forma,  $A, B \in \mathcal{A}$ . Ahora, se probará que  $\tilde{f}$  es medible. Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se tendrá que

$$\{x \in X : \tilde{f}(x) > \alpha\} = \begin{cases} \{x : f(x) > \alpha\} \setminus A & \text{si } \alpha \geq 0, \\ \{x : f(x) > \alpha\} \cup B & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Así, concluimos que  $\tilde{f}$  es medible.