Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y solo si, los conjuntos

$$A := \{x \in X : f(x) = +\infty\} \ \ y \ B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

pertenecen a $\mathcal{A}$ y la función con valores reales dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \ x \notin A \cup B, \\ 0 & si \ x \in A \cup B, \end{cases}$$

es medible.

Solución. ($\Rightarrow$)

Sea $f \in M(X, \mathcal{A})$. Observe que

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\},$$

$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\}\right]^c$$

de esta forma, $A, B \in \mathcal{A}$. Ahora, se probará que $\tilde{f}$ es medible. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\left\{x \in X : \tilde{f}(x) > \alpha\right\} = \begin{cases} \{x : f(x) > \alpha\} \setminus A & \text{si } \alpha \geq 0, \\ \{x : f(x) > \alpha\} \cup B & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Así, concluimos que $\tilde{f}$ es medible.

($\Leftarrow$)