Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática MATXXX

Nombre del Ramo
Tarea X

Nombre	Bruno Martinez Barrera	Rol	2016 10 007 - 5
Profesor	Profesor1	Fecha	10 de noviembre de 2020
Ayudante	Ayudante1	Correo	bruno.martinez@sansano.usm.cl

Problema 1

Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y solo si, los conjuntos

$$A := \{x \in X : f(x) = +\infty\} \text{ y } B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

pertenecen a $\mathcal{A}$ y la función con valores reales dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B, \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B, \end{cases}$$

es medible.

Solución. Sea $f \in M(X, A)$. Observe que

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\},$$

$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\}\right]^c$$

de esta forma, $A, B \in \mathcal{A}$. Ahora, se probará que $\tilde{f}$ es medible. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se tendrá que

$$\left\{x \in X : \tilde{f}(x) > \alpha\right\} = \begin{cases} \{x : f(x) > \alpha\} \setminus A & \text{si } \alpha \geq 0, \\ \{x : f(x) > \alpha\} \cup B & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Así, concluimos que $\tilde{f}$ es medible.

Problema 2

Considere la sucesión $p_0(t) = 1 + t,\ p_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t p_k(s)ds$.

1. Demuestre que $p_k(t)$ converge uniformemente en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$ cuando $k \to \infty$ y calcule $\varphi(t) = \lim\limits_{k\to\infty} p_k(t)$.
2. Determine el problema de Cauchy que satisface $\varphi(t)$.

Solución. En primer lugar, se probará que

$$p_k(t) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{t^i}{i!}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

Se procederá por inducción,

1. Para $k = 0$, se tiene
$$p_0(t) = 1 + t = \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} = \sum_{i=0}^{1} \frac{t^i}{i!}.$$

2. Suponga que (1) se tiene para $k \in \mathbb{N}$. Se probará que la igualdad también se tiene para $k+1$. Observe que
$$\begin{aligned} p_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t p_k(s)ds &= 1 + \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{s^i}{i!} \right) ds \quad \text{(por hipótesis de inducción)} \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{k+1} \int_0^t \left(\frac{s^i}{i!} \right) ds \quad \text{(por linealidad de la integral)} \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{k+1} \frac{t^{(i+1)}}{i!(i+1)} \\ &= \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{t^i}{i!}. \end{aligned}$$

De esta forma, $p_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{k+1} \frac{t^i}{i!}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}_0$. Se probará ahora que $p_k(t)$ converge uniformemente en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$ e I un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. En particular, I es acotado pues $\mathbb{R}$ es de dimensión finita, es decir, $|t| \leq M$ para todo $t \in I$. En primer lugar, observe que

$$\frac{M}{2M + k} < \frac{M}{2M} = \frac{1}{2}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Además,

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{3}$$

Luego, defina $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq \text{máx}\left\{2M, \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{(2M)^{2M}}{2M!}\right)\right\}$. De esta forma, para $k \geq k_0$, y $t \in I$.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - p_k(t)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!}\right| \\
&= \left|\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\right| \\
&\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} \quad \text{(por desigualdad triangular)} \\
&\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{M^i}{i!} \\
&\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{M^{2M}}{(2M)!}\left(\frac{M}{2M+1} \cdot \frac{M}{2M+1} \cdot \dots \cdot \frac{M}{i-1} \cdot \frac{M}{i}\right) \text{(pues } k > 2M\text{)} \\
&< \frac{M^{2M}}{(2M)!} \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2M} \quad \text{(por (2))} \\
&< \frac{(2M)^{2M}}{(2M)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{(por (3))} \\
&< \frac{(2M)^{2M}}{(2M)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} \\
&< \frac{(2M)^{2M}}{(2M)!} \frac{(2M)!}{(2M)^{2M}} \varepsilon \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Se ha probado que $p_k(t)$ converge uniformemente a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$. Podemos ver que esta serie converge, por definición, a la función exponencial e^t. Por tanto,

$$\varphi(t) = \lim_{k \to a\infty} p_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = e^t.$$

Observe que $\varphi'(t) = \varphi(t) = e^t$ y $\varphi(0) = e^0 = 1$, por tanto, el problema de Cauchy que satisface φ estará dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x(t) \\ x(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

Problema 3

Una funcion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y solo si, los conjuntos

$$A := \{x \in X : f(x) = +\infty\} \text{ y } B := \{x \in X : f(x) = -\infty\} \tag{4}$$

pertenecen a $\mathcal{A}$ y la función con valores reales dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases} \tag{5}$$

es medible.

Solución. Se tiene

$$a = 0 \tag{6}$$

de esta forma

$$b = 0 \tag{7}$$