



NOMBRE DEL RAMO

TAREA X

NOMBRE	ROL
PROFESOR	FECHA
AYUDANTE	CORREO

Problema 1

Una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y solo si, los conjuntos

$$A := \{x \in X : f(x) = +\infty\} \text{ y } B := \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

pertenecen a \mathcal{A} y la función con valores reales dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B, \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B, \end{cases}$$

es medible.

SOLUCIÓN. Sea $f \in M(X, \mathcal{A})$. Observe que

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\},$$
$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right]^c$$

de esta forma, $A, B \in \mathcal{A}$. Ahora, se probará que \tilde{f} es medible. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se tendrá que

$$\{x \in X : \tilde{f}(x) > \alpha\} = \begin{cases} \{x : f(x) > \alpha\} \setminus A & \text{si } \alpha \geq 0, \\ \{x : f(x) > \alpha\} \cup B & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Así, concluimos que \tilde{f} es medible.

Problema 2

Considere la sucesión $p_0(t) = 1 + t$, $p_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t p_k(s)ds$.

1. Demuestre que $p_k(t)$ converge uniformemente en cada intervalo compacto de \mathbb{R} cuando $k \rightarrow \infty$ y calcule $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(t)$.
2. Determine el problema de Cauchy que satisface $\varphi(t)$.

SOLUCIÓN. En primer lugar, se probará que

$$p_k(t) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{t^i}{i!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (1)$$

Se procederá por inducción,

1. Para $k = 0$, se tiene

$$p_0(t) = 1 + t = \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} = \sum_{i=0}^1 \frac{t^i}{i!}.$$

2. Suponga que (1) se tiene para $k \in \mathbb{N}$. Se probará que la igualdad también se tiene para $k + 1$. Observe que

$$\begin{aligned} p_{k+1}(t) &= 1 + \int_0^t p_k(s)ds = 1 + \int_0^t \left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{s^i}{i!} \right) ds \quad (\text{por hipótesis de inducción}) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{k+1} \int_0^t \left(\frac{s^i}{i!} \right) ds \quad (\text{por linealidad de la integral}) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{k+1} \frac{t^{(i+1)}}{i!(i+1)} \\ &= \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{t^i}{i!}. \end{aligned}$$

De esta forma, $p_k(t) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{t^i}{i!}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Se probará ahora que $p_k(t)$ converge uniformemente en cada intervalo compacto de \mathbb{R} .

Sea $\varepsilon > 0$ e I un intervalo compacto de \mathbb{R} . En particular, I es acotado pues \mathbb{R} es de dimensión finita, es decir, $|t| \leq M$ para todo $t \in I$. En primer lugar, observe que

$$\frac{M}{2M+k} < \frac{M}{2M} = \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Además,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &\Rightarrow \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned} \quad (3)$$

Luego, defina $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq \max \left\{ 2M, \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{(2M)^{2M}}{2M!} \right) \right\}$. De esta forma, para $k \geq k_0$, y $t \in I$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - p_k(t) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} \right| \\ &= \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \right| \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} \quad (\text{por desigualdad triangular}) \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{M^i}{i!} \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{M^{2M}}{(2M)!} \left(\frac{M}{2M+1} \cdot \frac{M}{2M+1} \cdots \frac{M}{i-1} \cdot \frac{M}{i} \right) \quad (\text{pues } k > 2M) \\ &< \frac{M^{2M}}{(2M)!} \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2M} \quad (\text{por (2)}) \\ &< \frac{(2M)^{2M}}{(2M)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (\text{por (3)}) \\ &< \frac{(2M)^{2M}}{(2M)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} \\ &< \frac{(2M)^{2M}}{(2M)!} \frac{(2M)!}{(2M)^{2M}} \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Se ha probado que $p_k(t)$ converge uniformemente a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$. Podemos ver que esta serie

converge, por definición, a la función exponencial e^t . Por tanto,

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = e^t.$$

Observe que $\varphi'(t) = \varphi(t) = e^t$ y $\varphi(0) = e^0 = 1$, por tanto, el problema de Cauchy que satisface φ estará dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(t) \\ x(0) &= 1. \end{cases}$$

Problema 3

Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si y solo si, los conjuntos

$$A := \{x \in X : f(x) = +\infty\} \text{ y } B := \{x \in X : f(x) = -\infty\} \quad (4)$$

pertenecen a \mathcal{A} y la función con valores reales dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases} \quad (5)$$

es medible.

SOLUCIÓN. Se tiene

$$a = 0 \quad (6)$$

de esta forma

$$b = 0 \quad (7)$$