Sea X_t un proceso intrínsecamente estacionario. El semivariograma de X_t se define como

$$\gamma_X(h) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right].$$

1. Si X_t es un ruido blanco con varianza σ^2, calcule $\gamma_X(h)$.

Solución. Como X_t es un ruido blanco, entonces $\mathbb{E}[X_t] = 0$ y, por tanto,

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - \mathbb{E}[X_t]^2 = \mathbb{E}\left[X_t^2\right], \quad \forall\ t.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X_{t+h}^2 - 2X_{t+h}X_t - X_t^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_{t+h}^2\right] - 2\mathbb{E}[X_{t+h}X_t] + \mathbb{E}\left[X_t^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - 2\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) + \sigma^2\right) \\
&= \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Si $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t$, donde ϵ_t es un ruido blanco con varianza σ^2, calcule $\gamma_X(h)$.

Solución. Se tendrá que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\left[((\beta_0 + \beta_1(t+h) + \epsilon_{t+h}) - (\beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t))^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\left[(\beta_1 h + \epsilon_{t+h} - \epsilon_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\mathbb{E}\left[\beta_1^2 h^2 + \epsilon_{t+h}^2 + \epsilon_t^2 + 2\beta_1 h\cdot\epsilon_{t+h} - 2\beta_1 h\cdot\epsilon_t - 2\epsilon_{t+h}\cdot\epsilon_t\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\beta_1^2 h^2 + 2\sigma^2 - 2\mathrm{Cov}(\epsilon_{t+h}, \epsilon_t)\right) \\
&= \begin{cases} \frac{\beta_1^2 h^2}{2} + \sigma^2, & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0. \quad \square \end{cases}
\end{aligned}$$