

Sea $C_X(\cdot)$ la función de covarianza asociada a un proceso de media nula. Si

$$C_X(t) = C_X(0), \quad (0.1)$$

para algún $t > 0$. Demuestre que $C_X(\cdot)$ es periódica.

SOLUCIÓN. Observe que

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t)^2] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_{t+h}^2] - 2\mathbb{E}[X_{t+h}X_t] + \mathbb{E}[X_t^2]) \\ &= \frac{1}{2} (C_X(0) - 2C_X(h) + C_X(0)) \\ &= C_X(0) - C_X(h). \end{aligned}$$

Por (0.1), se tendrá que $C_X(t) = C_X(0)$ y, por tanto, $\gamma_X(T) = C_X(0) - C_X(T) = 0$.