Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

MAT267

Series de Tiempo
Proyecto 2

Nombres	Bruno Martinez Barrera	Correos	bruno.martinez@sansano.usm.cl
	Cristóbal Cancino Adriasola		cristobal.cancino@sansano.usm.cl
Profesor	Ronny Vallejos	Fecha	29 de abril de 2022
Ayudante	Daniela Diaz		

Problema 1

Considere un modelo de la forma

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{6} \beta_i \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) + \epsilon_t, \tag{1.1}$$

donde el proceso ε_t es un ruido blanco con varianza σ^2 y T_i son los periodos de la serie.

1. Escriba este modelo en la forma $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$.

Solución. Defina las siguientes matrices

- $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_{t_1} & \cdots & y_{t_n} \end{pmatrix}^t$
- $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T_1}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T_2}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T_3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T_4}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T_5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T_6}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi t_n}{T_1}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_n}{T_2}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_n}{T_3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_n}{T_4}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_n}{T_5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi t_n}{T_6}\right) \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{pmatrix}^t$
- $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_{t_1} & \cdots & e_{t_n} \end{pmatrix}^t$

Luego, (1.1) puede ser escrito como $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$.

2. Explique cómo obtener estimaciones de $\beta_0, ..., \beta_6$ y σ^2.

Solución.

3. ¿Qué consideraciones hay que establecer para que el modelo (1.1) incluya una tendencia cuadrática?

Solución.

Problema 2

Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estacional normal con función con media μ_X y función de autocovarianzas $C_X(\cdot)$. Definamos la serie no lineal

$$Y_t = \exp(X_t), \quad t \in T. \tag{2.1}$$

1. Exprese la media del proceso Y_t en términos de μ_X y $C_X(0)$.

Solución. Utilizando la función generadora de momentos dada por

$$M_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{tX}\right], \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Luego, la función generadora de momentos para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ estará dada por

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

Entonces, como $X_t \sim N(\mu_X, C_X(0))$

$$\mu_Y(t) = \mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\exp(X_t)] = M_X(1) = \exp\left(\mu_X + \frac{1}{2}C_X(0)\right).$$

2. Determine la función de autocovarianza de Y_t.

Solución. Observe que

$$\begin{aligned}
C_Y(h) &= \mathbb{E}[Y_{t+h} \cdot Y_t] - \mathbb{E}[Y_{t+h}]\,\mathbb{E}[Y_t] \\
&= \mathbb{E}[\exp(X_{t+h})\exp(X_t)] - \exp\left(\mu_X + \frac{1}{2}C_X(0)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}[\exp(X_{t+h} + X_t)] - \exp(2\mu_X + C_X(0)).
\end{aligned}$$

Se tiene que la suma de distribuciones normales es una distribución normal. Por tanto,

$$X_t + X_s \sim N(2\mu_X, 2C_X(0) + 2C_X(h)).$$

De esta forma, su primer momento estará dado por

$$\begin{aligned}
M_{X_{t+h}+X_t}(1) = \mathbb{E}[\exp(X_{t+h} + X_t)] &= \exp\left(2\mu_X + \frac{1}{2}(2C_X(0) + 2C_X(h))\right) \\
&= \exp(2\mu_X + C_X(0) + C_X(h)).
\end{aligned}$$

Por lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
C_Y(h) &= \exp(2\mu_X + C_X(0) + C_X(h)) - \exp(2\mu_X + C_X(0)) \\
&= \exp(2\mu_X + C_X(0))(\exp(C_X(h)) - 1). \quad \square
\end{aligned}$$

Problema 3

Si $C_j\left(h\right)$ son funciones de covarianza de un proceso estacionario débil para todo $j = 1, ..., n$. Demuestre que $\sum_{j=1}^{n} b_j C_j\left(h\right)$ también es un función de covarianza si $b_j \geq 0$, $\forall\ j$.

SOLUCIÓN. Se utilizará el **Teorema 1.5.1** de *Brockwell and Davis*.

Teorema 3.1 (Caracterización de Funciones de Autocovarianza)**.** *Una función $C : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es una función de autocovarianza de un proceso estacionario débil si y solo si es simétrica y semidefinida positiva.*

Defina

$$\overline{C}\left(h\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k C_k\left(h\right).$$

Se probará que $\overline{C}$ es una función semidefinida positiva, es decir, para $m \in N$, $a_i \in \mathbb{R}$ y $t_i \in T$ con $i = \{1, ..., m\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_j a_j \left(\sum_{k=1}^{n} b_k C_k\left(t_i - t_j\right)\right) \geq 0.$$

Observe que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j \left(\sum_{k=1}^{n} b_k C_k\left(t_i - t_j\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j C_k\left(t_i - t_j\right)}_{\geq 0 \text{ pues } C_k \text{ covarianzas}}$$

Como $b_k \geq 0$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$. Luego, se tendrá una combinación lineal con coeficientes positivos de elementos positivos. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j \left(\sum_{k=1}^{n} b_k C_k\left(t_i - t_j\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j C_k\left(t_i - t_j\right) \geq 0$$

probando así que $\overline{C}$ es una función semidefinida positiva. Bastará ver que $\overline{C}$ es simétrica, es decir

$$\overline{C}\left(h\right) = \overline{C}\left(-h\right), \quad \forall\ h \in \mathbb{Z}.$$

Sea $h \in Z$, luego

$$\overline{C}\left(h\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k C_k\left(h\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k C_k\left(-h\right) = \overline{C}\left(-h\right).$$

pues C_k son funciones de autocovarianza. Por tanto, $\overline{C}$. Finalmente, por el **Teorema 3.1** se tiene finalmente $\overline{C}$ es también una función de covarianza. $\square$.

Problema 4

Describa que hace exactamente la siguiente rutina en R.

```
x=rnorm(200,0,1)
y=vector(mode="numeric", length=200)
for (i in 2:200){
y[i]=0.5*y[i-1]+x[i]
}
par(mfrow=c(1,2),pty = "s")
plot.ts(y)
acf(y)
```

SOLUCIÓN. test

Problema 5

Considere el proceso $X_t = \delta + X_{t-1} + \epsilon_t$, donde $t = 1, 2, ..., \epsilon_t$ es una secuencia de variables aleatorias iid con media cero y varianza σ^2.

1. Escriba la ecuación del proceso X_t como sigue

$$X_t = \delta t + \sum_{j=1}^{t} \epsilon_j. \tag{5.1}$$

Solución. Observe que X_t puede escribirse como (5.1). En efecto,

- Para $t = 1$, se tendrá $X_t = \delta + \epsilon_1$.
- Suponga que la igualdad se tiene para $t - 1$. Luego para t se tendrá

$$X_t = \delta + X_{t-1} + \epsilon_t = \delta + \delta(t-1) + \sum_{j=1}^{t-1} \epsilon_j + \epsilon_t = \delta t + \sum_{j=1}^{t} \epsilon_j,$$

probando la equivalencia de las ecuaciones.

2. Calcule $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$ y $V(t) = \mathbb{V}[X_t]$.

Solución. Observe que

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\delta t] + \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_j] = \delta t.$$

Además,

$$\begin{aligned}
V(t) = \mathbb{V}[X_t] &= \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - \mathbb{E}[X_t]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\delta^2 t - 2\delta t \sum_{j=1}^{t} \epsilon_j + \left(\sum_{j=1}^{t} \epsilon_j\right)^2\right] - (\delta t)^2 \\
&= \delta^2 t - 2\delta t \underbrace{\sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_j]}_{=0} + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_i \cdot \epsilon_j] - \delta^2 t^2. \\
&= \delta^2 t + \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}\left[\epsilon_j^2\right] + \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_i] \, \mathbb{E}[\epsilon_j]}_{\text{independencia}} - \delta^2 t^2. \\
&= \delta^2 t + \sigma^2 t - \delta^2 t^2.
\end{aligned}$$

3. ¿Es el proceso X_t débilmente estacionario?

SOLUCIÓN. Se define un proceso débilmente estacionario como

Definición 5.1. *Sea $\{Z_t : t \in T\}$ un proceso de segundo orden. Se dice que el proceso es **débilmente estacionario** si su función de media es constante y la función de covarianza entre Z_t y Z_s depende solo de la diferencia $t - s$. Es decir,*

- $\mathbb{E}[Z_t] = \mu, \ \forall \ t \in T.$
- $C(t, s) = Cov(Z_t, Z_s) = C(t - s), \ \forall \ t, s \in T.$

Observe que la función de medias no es constante, por tanto no es débilmente estacionario. $\square$

Problema 6

Sea X_t un proceso intrínsecamente estacionario. El semivariograma de X_t se define como

$$\gamma_X(h) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right].$$

1. Si X_t es un ruido blanco con varianza σ^2, calcule $\gamma_X(h)$.

Solución. Como X_t es un ruido blanco, entonces $\mathbb{E}[X_t] = 0$ y, por tanto,

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - \mathbb{E}[X_t]^2 = \mathbb{E}\left[X_t^2\right], \quad \forall\, t.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X_{t+h}^2 - 2X_{t+h}X_t - X_t^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_{t+h}^2\right] - 2\mathbb{E}[X_{t+h}X_t] + \mathbb{E}\left[X_t^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - 2\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) + \sigma^2\right) \\
&= \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Si $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t$, donde ϵ_t es un ruido blanco con varianza σ^2, calcule $\gamma_X(h)$.

Solución. Se tendrá que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\left[((\beta_0 + \beta_1(t+h) + \epsilon_{t+h}) - (\beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t))^2\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\left[(\beta_1 h + \epsilon_{t+h} - \epsilon_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\left[\beta_1^2 h^2 + \epsilon_{t+h}^2 + \epsilon_t^2 + 2\beta_1 h \cdot \epsilon_{t+h} - 2\beta_1 h \cdot \epsilon_t - 2\epsilon_{t+h} \cdot \epsilon_t\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\beta_1^2 h^2 + 2\sigma^2 - 2\mathrm{Cov}(\epsilon_{t+h}, \epsilon_t)\right) \\
&= \begin{cases} \frac{\beta_1^2 h^2}{2} + \sigma^2, & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0. \quad \square \end{cases}
\end{aligned}$$

Problema 7

Sea $C_X(\cdot)$ la función de covarianza asociada a un proceso de media nula. Si

$$C_X(T) = C_X(0), \tag{7.1}$$

para algún $T > 0$. Demuestre que $C_X(\cdot)$ es periódica.

Solución. Sea $h \in \mathbb{Z}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_{t+h}^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X_{t+h}X_t\right] + \mathbb{E}\left[X_t^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(C_X(0) - 2C_X(h) + C_X(0)\right) \\
&= C_X(0) - C_X(h).
\end{aligned}$$

Por (7.1), se tendrá que $C_X(T) = C_X(0)$ y, por tanto, $\gamma_X(T) = C_X(0) - C_X(T) = 0$. Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned}
C_X(h+T) - C(h) &= \mathbb{E}\left[X_{t+h+T}X_t\right] - \underbrace{\mathbb{E}\left[X_{t+h+T}\right]\mathbb{E}\left[X_t\right]}_{=0 \text{ (por media nula)}} - \mathbb{E}\left[X_{t+h}X_t\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[X_{t+h}\right]\mathbb{E}\left[X_t\right]}_{=0 \text{ (por media nula)}} \\
&= \mathbb{E}\left[X_{t+h+T}X_t - X_{t+h}X_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_t\left(X_{t+h+T} - X_{t+h}\right)\right]
\end{aligned}$$

Luego, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene

$$\begin{aligned}
0 \leq \left(C_X(h+T) - C(h)\right)^2 = \left(\mathbb{E}\left[X_t\left(X_{t+h+T} - X_{t+h}\right)\right]\right)^2 &\leq \mathbb{E}\left[X_t^2\right]\mathbb{E}\left[\left(X_{t+h+T} - X_{t+h}\right)^2\right] \\
&= C_X(0) \cdot 2\gamma_X(T) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto indica que $C_X(h+T) - C(h) = 0$, y por tanto $C_X(h+T) = C(h)$ para todo $h \in \mathbb{Z}$ es arbitrario, concluyendo así que $C_X(\cdot)$ es periódica. $\square$