Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estacional normal con función con media μ_X y función de autocovarianzas $C_X(\cdot)$. Definamos la serie no lineal

$$Y_t = \exp(X_t), \quad t \in T. \tag{0.1}$$

1. Exprese la media del proceso Y_t en términos de μ_X y $C_X(0)$.

SOLUCIÓN. Utilizando la función generadora de momentos dada por

$$M_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{tX}\right], \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Luego, la función generadora de momentos para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ estará dada por

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

Entonces, como $X_t \sim N(\mu_X, C_X(0))$

$$\mu_Y(t) = \mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\exp(X_t)] = M_X(1) = \exp\left(\mu_X + \frac{1}{2}C_X(0)\right).$$

2. Determine la función de autocovarianza de Y_t.

SOLUCIÓN. Observe que

$$\begin{aligned} C_Y(h) &= \mathbb{E}[Y_{t+h} \cdot Y_t] - \mathbb{E}[Y_{t+h}]\,\mathbb{E}[Y_t] \\ &= \mathbb{E}[\exp(X_{t+h})\exp(X_t)] - \exp\left(\mu_X + \frac{1}{2}C_X(0)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}[\exp(X_{t+h} + X_t)] - \exp(2\mu_X + C_X(0)). \end{aligned}$$

Se tiene que la suma de distribuciones normales es una distribución normal. Por tanto,

$$X_t + X_s \sim N(2\mu_X, 2C_X(0) + 2C_X(h)).$$

De esta forma, su primer momento estará dado por

$$\begin{aligned} M_{X_{t+h}+X_t}(1) = \mathbb{E}[\exp(X_{t+h} + X_t)] &= \exp\left(2\mu_X + \frac{1}{2}(2C_X(0) + 2C_X(h))\right) \\ &= \exp(2\mu_X + C_X(0) + C_X(h)). \end{aligned}$$

Por lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} C_Y(h) &= \exp(2\mu_X + C_X(0) + C_X(h)) - \exp(2\mu_X + C_X(0)) \\ &= \exp(2\mu_X + C_X(0))(\exp(C_X(h)) - 1). \quad \square \end{aligned}$$