Si $C_j(h)$ son funciones de covarianza de un proceso estacionario débil para todo $j = 1, ..., n$. Demuestre que $\sum_{j=1}^{n} b_j C_j(h)$ también es un función de covarianza si $b_j \geq 0$, $\forall\ j$.

Solución. Se utilizará el **Teorema 1.5.1** de *Brockwell and Davis*.

**Teorema 0.1** (Caracterización de Funciones de Autocovarianza)**.** *Una función $C : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es una función de autocovarianza de un proceso estacionario débil si y solo si es simétrica y semidefinida positiva.*

Defina

$$\overline{C}(h) = \sum_{k=1}^{n} b_k C_k(h).$$

Se probará que $\overline{C}$ es una función semidefinida positiva, es decir, para $m \in N$, $a_i \in \mathbb{R}$ y $t_i \in T$ con $i = \{1, ..., m\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_j a_j \left( \sum_{k=1}^{n} b_k C_k(t_i - t_j) \right) \geq 0.$$

Observe que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i a_j \left( \sum_{k=1}^{n} b_k C_k(t_i - t_j) \right) = \sum_{k=1}^{n} b_k \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i a_j C_k(t_i - t_j)}_{\geq 0 \text{ pues } C_k \text{ covarianzas}}$$

Como $b_k \geq 0$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$. Luego, se tendrá una combinación lineal con coeficientes positivos de elementos positivos. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i a_j \left( \sum_{k=1}^{n} b_k C_k(t_i - t_j) \right) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i a_j C_k(t_i - t_j) \geq 0$$

probando así que $\overline{C}$ es una función semidefinida positiva. Bastará ver que $\overline{C}$ es simétrica, es decir

$$\overline{C}(h) = \overline{C}(-h), \quad \forall\ h \in \mathbb{Z}.$$

Sea $h \in Z$, luego

$$\overline{C}(h) = \sum_{k=1}^{n} b_k C_k(h) = \sum_{k=1}^{n} b_k C_k(-h) = \overline{C}(-h).$$

pues $C_k$ son funciones de autocovarianza. Por tanto, $\overline{C}$. Finalmente, por el **Teorema 0.1** se tiene finalmente $\overline{C}$ es también una función de covarianza. $\square$.