

Sea X_t un proceso intrínsecamente estacionario. El semivariograma de X_t se define como

$$\gamma_X(h) = \frac{1}{2} \mathbb{E} [(X_{t+h} - X_t)^2].$$

1. Si X_t es un ruido blanco con varianza σ^2 , calcule $\gamma_X(h)$.

SOLUCIÓN. Como X_t es un ruido blanco, entonces $\mathbb{E}[X_t] = 0$ y, por tanto,

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2 = \mathbb{E}[X_t^2], \quad \forall t.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \frac{1}{2} \mathbb{E} [(X_{t+h} - X_t)^2] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} [X_{t+h}^2 - 2X_{t+h}X_t - X_t^2] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_{t+h}^2] - 2\mathbb{E}[X_{t+h}X_t] + \mathbb{E}[X_t^2]) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^2 - 2\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) + \sigma^2) \\ &= \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h \neq 0, \\ 0, & \text{si } h = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Si $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t$, donde ϵ_t es un ruido blanco con varianza σ^2 , calcule $\gamma_X(h)$.

SOLUCIÓN. Se tendrá que

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E} [(X_{t+h} - X_t)^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E} [((\beta_0 + \beta_1(t+h) + \epsilon_{t+h}) - (\beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t))^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E} [(\beta_1 h + \epsilon_{t+h} - \epsilon_t)^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E} [\beta_1^2 h^2 + \epsilon_{t+h}^2 + \epsilon_t^2 + 2\beta_1 h \cdot \epsilon_{t+h} - 2\beta_1 h \cdot \epsilon_t - 2\epsilon_{t+h} \cdot \epsilon_t] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\beta_1^2 h^2 + 2\sigma^2 - 2\text{Cov}(\epsilon_{t+h}, \epsilon_t)) \end{aligned}$$