Considere el proceso $X_t = \delta + X_{t-1} + \epsilon_t$, donde $t = 1, 2, ..., \epsilon_t$ es una secuencia de variables aleatorias iid con media cero y varianza σ^2.

1. Escriba la ecuación del proceso X_t como sigue

$$X_t = \delta t + \sum_{j=1}^{t} \epsilon_j. \tag{0.1}$$

Solución. Observe que X_t puede escribirse como (0.1). En efecto,

- Para $t = 1$, se tendrá $X_t = \delta + \epsilon_1$.
- Suponga que la igualdad se tiene para $t - 1$. Luego para t se tendrá

$$X_t = \delta + X_{t-1} + \epsilon_t = \delta + \delta(t-1) + \sum_{j=1}^{t-1} \epsilon_j + \epsilon_t = \delta t + \sum_{j=1}^{t} \epsilon_j,$$

probando la equivalencia de las ecuaciones.

2. Calcule $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$ y $V(t) = \mathbb{V}[X_t]$.

Solución. Observe que

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\delta t] + \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_j] = \delta t.$$

Además,

$$\begin{aligned}
V(t) = \mathbb{V}[X_t] &= \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - \mathbb{E}[X_t]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\delta^2 t - 2\delta t \sum_{j=1}^{t} \epsilon_j + \left(\sum_{j=1}^{t} \epsilon_j\right)^2\right] - (\delta t)^2 \\
&= \delta^2 t - 2\delta t \underbrace{\sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_j]}_{=0} + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_i \cdot \epsilon_j] - \delta^2 t^2. \\
&= \delta^2 t + \sum_{j=1}^{t} \mathbb{E}\left[\epsilon_j^2\right] + \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{t} \mathbb{E}[\epsilon_i]\, \mathbb{E}[\epsilon_j]}_{\text{independencia}} - \delta^2 t^2. \\
&= \delta^2 t + \sigma^2 t - \delta^2 t^2.
\end{aligned}$$

3. ¿Es el proceso X_t débilmente estacionario?

Solución. Se define un proceso débilmente estacionario como

Definición 0.1. *Sea $\{Z_t : t \in T\}$ un proceso de segundo orden. Se dice que el proceso es **débilmente estacionario** si su función de media es constante y la función de covarianza entre Z_t y Z_s depende solo de la diferencia $t - s$. Es decir,*

- $\mathbb{E}\left[Z_t\right] = \mu, \ \forall\ t \in T.$
- $C\left(t, s\right) = Cov(Z_t, Z_s) = C(t - s), \ \forall\ t, s \in T.$

Observe que la función de medias no es constante, por tanto no es débilmente estacionario. $\square$