

Considere el proceso $X_t = \delta + X_{t-1} + \epsilon_t$, donde $t = 1, 2, \dots$, ϵ_t es una secuencia de variables aleatorias iid con media cero y varianza σ^2 .

1. Escriba la ecuación del proceso X_t como sigue

$$X_t = \delta t + \sum_{j=1}^t \epsilon_j. \quad (0.1)$$

SOLUCIÓN. Observe que X_t puede escribirse como (0.1). En efecto,

- Para $t = 1$, se tendrá $X_t = \delta + \epsilon_1$.
- Suponga que la igualdad se tiene para $t - 1$. Luego para t se tendrá

$$X_t = \delta + X_{t-1} + \epsilon_t = \delta + \delta(t-1) + \sum_{j=1}^{t-1} \epsilon_j + \epsilon_t = \delta t + \sum_{j=1}^t \epsilon_j,$$

probando la equivalencia de las ecuaciones.

2. Calcule $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$ y $V(t) = \mathbb{V}[X_t]$.

SOLUCIÓN. Observe que

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\delta t] + \sum_{j=1}^t \mathbb{E}[\epsilon_j] = \delta t.$$

Además,

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathbb{V}[X_t] = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\delta^2 t - 2\delta t \sum_{j=1}^t \epsilon_j + \left(\sum_{j=1}^t \epsilon_j\right)^2\right] - (\delta t)^2 \\ &= \delta^2 t - 2\delta t \underbrace{\sum_{j=1}^t \mathbb{E}[\epsilon_j]}_{=0} + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t \mathbb{E}[\epsilon_i \cdot \epsilon_j] - \delta^2 t^2. \\ &= \delta^2 t - \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t \mathbb{E}[\epsilon_i] \mathbb{E}[\epsilon_j] - \delta^2 t^2. \\ &= \delta^2 t - t^2 \sigma^2 - \delta^2 t^2. \end{aligned}$$

3. ¿Es el proceso X_t débilmente estacionario?

SOLUCIÓN. test