Sea $C_X(\cdot)$ la función de covarianza asociada a un proceso de media nula. Si

$$C_X(T) = C_X(0), \tag{0.1}$$

para algún $T > 0$. Demuestre que $C_X(\cdot)$ es periódica.

Solución. Sea $h \in \mathbb{Z}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X_{t+h} - X_t)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_{t+h}^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X_{t+h}X_t\right] + \mathbb{E}\left[X_t^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(C_X(0) - 2C_X(h) + C_X(0)\right) \\
&= C_X(0) - C_X(h).
\end{aligned}$$

Por (0.1), se tendrá que $C_X(T) = C_X(0)$ y, por tanto, $\gamma_X(T) = C_X(0) - C_X(T) = 0$. Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned}
C_X(h+T) - C(h) &= \mathbb{E}\left[X_{t+h+T}X_t\right] - \underbrace{\mathbb{E}\left[X_{t+h+T}\right]\mathbb{E}\left[X_t\right]}_{=0 \text{ (por media nula)}} - \mathbb{E}\left[X_{t+h}X_t\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[X_{t+h}\right]\mathbb{E}\left[X_t\right]}_{=0 \text{ (por media nula)}} \\
&= \mathbb{E}\left[X_{t+h+T}X_t - X_{t+h}X_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_t\left(X_{t+h+T} - X_{t+h}\right)\right]
\end{aligned}$$

Luego, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene

$$\begin{aligned}
0 \leq \left(C_X(h+T) - C(h)\right)^2 = \left(\mathbb{E}\left[X_t\left(X_{t+h+T} - X_{t+h}\right)\right]\right)^2 &\leq \mathbb{E}\left[X_t^2\right]\mathbb{E}\left[\left(X_{t+h+T} - X_{t+h}\right)^2\right] \\
&= C_X(0) \cdot 2\gamma_X(T) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto indica que $C_X(h+T) - C(h) = 0$, y por tanto $C_X(h+T) - C(h) = 0$ para todo $h \in \mathbb{Z}$ es arbitrario, concluyendo así que $C_X(\cdot)$ es periódica. $\square$