Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II-Agrupamento 3 — Exame Final (Época de Recurso)(V1)

3 de julho de 2023

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [18pts]	3 [15pts]	4 [20pts]	5 [20pts]	6 [20pts]	7a [10pts]	7b [12pts]	7c [03pts]	8 [22pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 8 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Sabendo que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ -1 < x < 1$, qual das seguintes séries é a série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{2}{1+9x^2}$?

- ☐ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n 9^n x^{2n}, \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$
- ☐ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-9)^n x^{2n}, \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$
- ☐ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n 9^n x^{2n}, \quad -\frac{1}{9} < x < \frac{1}{9}$
- ☐ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-9)^n x^{2n}, \quad -\frac{1}{9} < x < \frac{1}{9}$

(b) Relativamente à função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^3+(y-x)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ -1 \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

podemos afirmar que:

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$
- ☐ g é contínua em $\mathbb{R}^2$
- ☐ não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

(c) Utilizando o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função $\ln(1+x)$, podemos afirmar que um valor aproximado de $\ln(\frac{5}{4})$ é:

- ☐ $-\frac{7}{32}$
- ☐ $\frac{7}{32}$
- ☐ $\frac{9}{32}$
- ☐ $-\frac{9}{32}$

(d) Seja $f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen}(yz) + 1$. A derivada direcional da função f no ponto $P = (0, \pi, -1)$ na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (-1, 1, 0)$ é:

☐ -1 ☐ 1

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2 y^3$. Podemos afirmar que:

☐ f não tem pontos críticos ☐ $(0, 0)$ é maximizante local de f

☐ $(0, 0)$ é minimizante local de f ☐ $(0, 0)$ é ponto de sela de f

(f) A solução geral da equação diferencial exata $(2x + y^2)dx + 2xydy = 0$ é dada implicitamente por:

☐ $\frac{x^2}{2} + xy^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$ ☐ $x + xy = C, \quad C \in \mathbb{R}$

☐ $x^2 + xy^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$ ☐ $x - xy = C, \quad C \in \mathbb{R}$

[18pts] 2. Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n}}(x+1)^n$. ξ

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________________ Nome: ____

[15pts] 3. Suponha que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, no intervalo de convergência $]-R, R[$, onde $a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Sabendo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$, mostre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x^{2k}} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Continua na folha suplementar N°

[20pts] 4. Seja f a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi[$ por $f(x) = \frac{x}{2}$. Justifique que a série de Fourier associada a f é uma série da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$, determine o valor de b_n, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e indique o valor da soma da série no ponto $x = \frac{\pi}{2}$.

Continua na folha suplementar N°

[20pts] 5. O quadrado da distância de um ponto de coordenadas (x, y) à origem é representado pela função

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, determine o(s) ponto(s) da curva $y = x^2 - 1$ mais próximo(s) da origem.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 6. Resolva a seguinte equação diferencial homogénea: $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 - \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right), \quad x, y \in \mathbb{R}^+$.

Continua na folha suplementar Nº

7. Considere a EDO $y'' + 5y' + 4y = e^{2x}$.

[10pts] (a) Resolva a EDO homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, determine uma solução particular da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

[03pts] (c) Indique a solução geral da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

[22pts] 8. Usando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' - y' = 2e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Continua na folha suplementar Nº

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\text{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\text{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \|a\|)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, com $s > s_g$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t)\cdot f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\,s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = F(s)\cdot G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau,\ t \geq 0$

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u'\cos u$	$\sin u$	$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\sec^2 u$	$\tan u$	$u'\csc^2 u$	$-\cot u$	$u'\sec u$	$\ln\|\sec u + \tan u\|$
$u'\csc u$	$-\ln\|\csc u + \cot u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsin u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\text{arctg}\, u$ ou $-\text{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}\, x \cos y \pm \cos x\ \text{sen}\, y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \text{sen}\, x\ \text{sen}\, y$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1+\tan^2 x = \sec^2 x$ $1+\cot^2 x = \csc^2 x$