

GUIÕES DE CÁLCULO I - AGRUPAMENTO 2

GUIÃO 2

PRIMITIVAS / INTEGRAL INDEFINIDO

PAULA OLIVEIRA

2021/22

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Conteúdo

5 Primitivas	1
5.1 Definição de primitiva	1
5.2 Primitivas Imediatas	4
5.3 Propriedades das Primitivas	5
5.4 Primitivas quase imediatas	6
5.5 Primitivação por Partes	7
5.6 Primitivação por Substituição: mudança de variável	9
5.6.1 Substituição por Funções Trigonométricas	10
5.7 Primitivas de Funções Racionais	12

Capítulo 5

Primitivas

A derivação é um processo conhecido do Ensino Secundário: “Dada uma função f , determinar a sua derivada f' .”

Neste capítulo iremos resolver o problema recíproco: “Dada uma função f , determinar uma função F tal que $F' = f$.”

Por exemplo, se $f(x) = F'(x) = \cos x$ então qual será a função $F(x)$? Será única?

5.1 Definição de primitiva

No que se segue I designa um intervalo de números reais não degenerado (isto é, com mais do que um ponto).

Definição 5.1. Seja f uma função real de variável real definida num intervalo I de números reais, $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Uma função $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em I diz-se uma **primitiva** de f em I se

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Resulta imediatamente da definição que toda a primitiva F de uma função f é contínua em I , já que F é derivável em I .

Consideremos alguns exemplos imediatos:

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$F(x) = -\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sec^2 x$	$F(x) = \operatorname{tg} x$	$x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Exercício 5.1 Preencha a seguinte tabela

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}x$	$x \in \mathbb{R}$

Uma primitiva da função $f(x) = 2e^{2x}$ é $F(x) = e^{2x}$; contudo, se $G(x) = e^{2x} + 5$, $G'(x) = 2e^{2x}$ e G é uma outra primitiva da função f . Pode encontrar outras primitivas?

A primitiva quando existe não é *única*!

Se $F' = f$ então $(F + C)' = f$, qualquer que seja a constante $C \in \mathbb{R}$.

Conhecida uma primitiva F de uma função f pode determinar-se uma infinidade de primitivas de f ; basta para isso adicionar a F uma constante.

$$f(x) = x^2$$

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{2}, \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2, \quad F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \sqrt[5]{23}$$

são primitivas de f porque

$$F'_1(x) = F'_2(x) = F'_3(x) = f(x).$$

Qualquer função $G(x) = \frac{x^3}{3} + C$, em que C é uma constante real, é uma primitiva de f .

Teorema 5.1. Seja I um intervalo não degenerado de \mathbb{R} . Se $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ são duas primitivas quaisquer de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, então elas diferem de uma constante, i.e., existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que,

$$G(x) - H(x) = K, \forall x \in I.$$

Basta recordar que se a derivada de uma função for nula num intervalo I , a função será constante nesse intervalo. Assim, como $(G - H)'(x) = G'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in I$, a função $G - H$ é constante.

Rpare-se que, sendo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ com } x \in]-1, 1[$$

$G(x) = \arcsen x$ e $H(x) = -\arccos x$ são primitivas de f . Então existe $K \in \mathbb{R}$, tal que

$$\arcsen x - (-\arccos x) = K. \quad K = ?$$

Pelo teorema anterior podemos concluir que se F é uma primitiva de f , num intervalo I , então toda a primitiva de f se pode escrever na forma

$$F + C, C \in \mathbb{R}.$$

A família de todas as primitivas de f , num dado intervalo I , denota-se pelo símbolo

$$\int f(x)dx.$$

Assim, sendo F uma primitiva de f num intervalo I , tem-se

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}.$$

No entanto escreveremos mais simplesmente

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R},$$

continuando a encarar a expressão que figura no segundo membro, como uma designação do conjunto de todas as primitivas de f no intervalo considerado.

Atendendo a que

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0 \text{ (porquê?)}$$

podemos dizer que

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

representa a família de todas as primitivas da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $I \subseteq \mathbb{R}^+$ ou em $I \subseteq \mathbb{R}^-$ e **não** em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De facto, repare que dada a função h tal que

$$h(x) = \begin{cases} \ln x + \sqrt{5} & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) - \pi & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

se tem $h'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Note-se que a primitiva de uma função f foi definida apenas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e não num subconjunto qualquer de \mathbb{R} , como por exemplo a reunião de intervalos.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Será que esta função é primitivável no seu domínio, i.e., admite primitiva em \mathbb{R} ?

Suponhamos que sim. Seja H uma primitiva de f , isto é, $H'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Então

$$H(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ C_2 & \text{se } x = 0 \\ C_3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se H é derivável, H é contínua, em particular em $x = 0$ e portanto $C_1 = C_2 = C_3$. Calculando a derivada em $x = 0$ temos

$$H'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{C_3 - C_2}{x} = 0 \text{ e } H'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + C_1 - C_2}{x} = 1$$

e podemos concluir que não existe $H'(0)$. Esta função não é primitivável em qualquer intervalo que contenha o zero no seu interior, contudo é primitivável em qualquer intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^-$ e em qualquer intervalo $J \subseteq \mathbb{R}^+$.

Teorema 5.2. *Toda a função contínua num intervalo de números reais I é primitivável em I .*

(Este resultado será provado no capítulo de Cálculo Integral.)

Há no entanto determinadas funções, por exemplo, $f(x) = e^{x^2}$ e $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, que são primitiváveis em \mathbb{R} mas não é possível determinar uma expressão analítica da sua primitiva.

Exercício resolvido 5.1. Se a taxa de crescimento da população de uma cidade é dada como função do tempo x (em anos) por

$$f(x) = 117 + 200x$$

e actualmente existem 10000 pessoas na cidade, qual será o número total de habitantes da cidade daqui a 5 anos?

Resolução do exercício 5.1. A taxa de crescimento é a derivada, $P'(x) = f(x)$. Podemos obter a função P , primitivando f :

$$P(x) = \int f(x) dx = 117x + 100x^2 + C \quad \text{em que } C \text{ é uma constante real.}$$

Sabendo que $P(0) = 10000$, podemos concluir que $C = 10000$. Então, a função P que procuramos é

$$P(x) = 117x + 100x^2 + 10000$$

e portanto, daqui a 5 anos, a população da cidade será:

$$P(5) = 13085 \text{ habitantes.}$$

5.2 Primitivas Imediatas

Da definição de primitiva de uma função resulta que toda a fórmula de derivação conduz à seguinte fórmula de primitivação, válida num intervalo de números reais adequado,

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

- $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, C \in \mathbb{R}$ porque $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$;
- $\int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C, C \in \mathbb{R}$ porque $\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right)' = t^{-3}$
- $\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \dots$ porque ...

Mais geralmente é válida a fórmula seguinte em $]0, +\infty[$,

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, C \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \neq -1$$

Facilmente se deduzem as seguintes fórmulas em intervalos de números reais adequados a cada uma das funções:

Exercício resolvido 5.1. Se a taxa de crescimento da população de uma cidade é dada como função do tempo x (em anos) por

$$f(x) = 117 + 200x$$

e actualmente existem 10000 pessoas na cidade, qual será o número total de habitantes da cidade daqui a 5 anos?

$$\begin{cases} F'(x) = \underline{117 + 200x} \\ F(0) = 10000 \end{cases}$$

$$\underline{F(x) = 117x + 100x^2 + C, C \in \mathbb{R}}$$

$$F(0) = 10000 \Leftrightarrow 0 + 0 + C = 10000$$

$$F(x) = 100x^2 + 117x + 10000$$

$$\begin{aligned} F(5) &= 2500 + 585 + 10000 \\ &= 13085 \end{aligned}$$

- $\int dx = x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \csc^2 x dx = -\cotg x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \csc x \cotg x dx = -\csc x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int e^x dx = e^x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, C \in \mathbb{R}, a > 0$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec x dx = \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \csc x dx = -\ln |\cotg x + \csc x| + C, C \in \mathbb{R}$

Indique para cada caso um intervalo onde sejam válidas as fórmulas anteriores.

Nota: O Geogebra pode ajudar a consolidar as primitivas. O comando `integral(f(x),x)` devolve a família de primitivas da função f . Pode-se variar a constante para visualizar alguns elementos dessa família de funções.

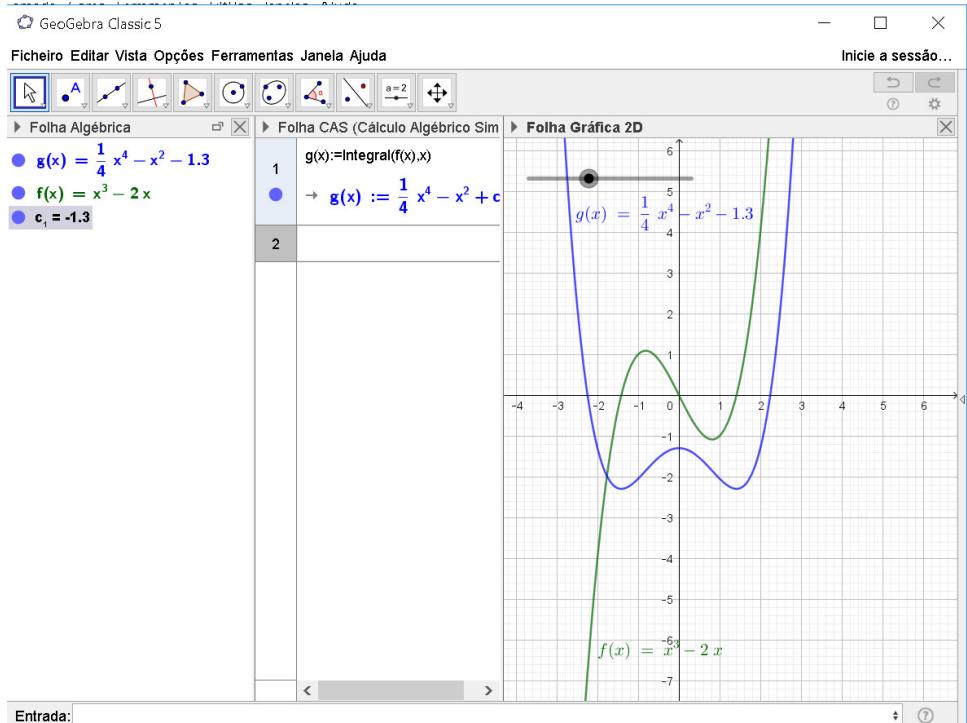


Figura 5.1: Primitivas da função $f(x) = x^3 - 2x$ no Geogebra.

5.3 Propriedades das Primitivas

Teorema 5.3. Sejam F e G primitivas de f e g , respectivamente, i.e.,

$$F' = f \text{ e } G' = g,$$

$$\bullet \int \sec x \tan x dx = \sec x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\sec u + C)' &= \left(\frac{1}{\cos u}\right)' = \\ &= -\frac{1}{\cos^2 u} \times (-\sin u) = \\ &= \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{\sin u}{\cos u} = \sec u \cdot \tan u \end{aligned}$$

$$\bullet \int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\ln |\tan u + \sec u| + C)' &= \\ &= \frac{(\tan u)' + (\sec u)'}{\tan u + \sec u} = \\ &= \frac{\frac{1}{\cos^2 u} + \sec u \cdot \tan u}{\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{1}{\cos u}} = \\ &\approx \frac{\frac{1}{\cos^2 u} + \frac{\sin u}{\cos^2 u}}{\frac{\sin u + 1}{\cos u}} = \\ &= \frac{1}{\cos u} = \sec u \end{aligned}$$

então

$\alpha F + \beta G$ é uma primitiva de $\alpha f + \beta g$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Em particular, αF é uma primitiva de αf , qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $F + G$ é uma primitiva de $f + g$.

Na notação anteriormente introduzida, temos respetivamente:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Exercício 5.2 Calcule:

- | | | | |
|--------------------------------------|--|--|-----------------------------------|
| 1. $\int (4x^3 - 5x + 9) dx$ | 2. $\int (5x^3 + 2 \cos x) dx$ | 3. $\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$ | 4. $\int \sec^2 x dx$ |
| 5. $\int \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} dx$ | 6. $\int \left(\sqrt{3} \sen x + \frac{1}{2x}\right) dx$ | 7. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$ | 8. $\int \frac{\tg u}{\cos u} du$ |

5.4 Primitivas quase imediatas

Consideremos a função f dada por $f(x) = \arcsen(x^5)$. Pela regra de derivação da composta tem-se

$$f'(x) = \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}$$

Assim,

$$\int \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx = \arcsen(x^5) + C, C \in \mathbb{R}$$

Teorema 5.4. Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g(J) \subseteq I$. Se g é derivável em J então $(f \circ g) \cdot g'$ é primitivável e

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, C \in \mathbb{R},$$

em que F é uma primitiva de f .

Observe que, pela derivada da função composta, temos:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exercício 5.3 Admitindo que g é uma função derivável e que, em cada um dos seguintes casos, a composta de funções considerada está definida num intervalo adequado, determine as seguintes primitivas:

- | | | |
|--|--------------------------------------|--|
| 1. $\int (g(x))^n \cdot g'(x)dx$ ($n \neq -1$) | 2. $\int \cos(g(x)) \cdot g'(x)dx$ | 3. $\int \sen(g(x)) \cdot g'(x)dx$ |
| 4. $\int \sec^2(g(x)) \cdot g'(x)dx$ | 5. $\int \csc^2(g(x)) \cdot g'(x)dx$ | 6. $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} dx$ |
| 7. $\int e^{g(x)} \cdot g'(x)dx$ | 8. $\int a^{g(x)} \cdot g'(x)dx$ | 9. $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ |
| 10. $\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} dx$ | 11. $\int g'(x) \tg(g(x))dx$ | 12. $\int g'(x) \sqrt[n]{g(x)} dx$ |

Exercício 5.4 Mostre que, se $C \in \mathbb{R}$, então:

$$1. \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C$$

$$2. \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x dx = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x + C$$

$$3. \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

$$4. \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$$

$$5. \int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx = \arctan \sqrt{x} + C$$

$$6. \int \cos^3 x dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

Exercício 5.5 Determine as seguintes primitivas:

$$1. \int \frac{1}{x^2+7} dx;$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} dx;$$

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$4. \int e^{3 \cos^2 x} \operatorname{sen} x \cos x dx;$$

$$5. \int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx;$$

$$6. \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx;$$

$$7. \int \frac{\cos^{\frac{1}{2}} x}{x^2} dx;$$

$$8. \int e^{x^2+4x+3}(x+2) dx.$$

5.5 Primitivação por Partes

Recordemos que se $g, h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis a derivada do produto das duas funções é dada por:

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

O método de primitivação por partes baseia-se nesta regra de derivação, reescrevendo a igualdade acima na forma

$$g'(x)h(x) = (g(x)h(x))' - h'(x)g(x)$$

Então, sendo f uma função que se pode escrever como um produto $f(x) = g'(x)h(x)$, em que h é uma função derivável, temos

$$\boxed{\int g'(x)h(x) dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x) dx.}$$

Note-se que uma primitiva de $(g(x)h(x))'$ é $g(x)h(x)$ ¹.

Exemplo 5.1. Consideremos o problema de determinar a família de primitivas $\int x \sec^2 x dx$.

Sejam $g'(x) = \sec^2 x$ e $h(x) = x$. Uma primitiva de $\sec^2 x$ é $\operatorname{tg} x$ e a derivada da função x é 1. Então,

$$\int x \sec^2 x dx = \int x(\operatorname{tg} x)' dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.2. Consideremos agora a determinação da família de primitivas $\int e^x \operatorname{sen} x dx$.

Neste caso é indiferente a escolha de g' e de h . Seja, por exemplo,

$$g'(x) = e^x \quad \text{e} \quad h(x) = \operatorname{sen} x$$

$$g(x) = e^x \quad \text{e} \quad h'(x) = \cos x$$

¹ $\int (g(x)h(x))' dx = g(x)h(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Exercício 5.5 Determine as seguintes primitivas:

$$1. \int \frac{1}{x^2 + 7} dx; =$$

$$\frac{1}{7} \int \frac{1}{\frac{u^2}{7} + 1} du =$$

$$= \frac{1}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} du = \frac{1}{7} \times \sqrt{7} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{u}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} du$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{7}}\right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$5. \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx; = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2u}}{1 + (e^{2u})^2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(e^{2u}) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} dx;$$

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$4. \int e^{3\cos^2 x} \sin x \cos x dx;$$

$$6. \int \frac{\sin x}{\cos x} dx;$$

$$7. \int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx;$$

$$8. \int e^{x^2+4x+3}(x+2) dx.$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{8-u^2}} du = \left\{ \frac{1}{\sqrt{8(1-\frac{u^2}{8})}} du = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{\sqrt{8}})^2}} du \right.$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{\sqrt{8}})^2}} du = \arcsin \left(\frac{u}{\sqrt{8}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$3. \left\{ (1-u)^{-\frac{1}{2}} du = - \int (1-u)^{-\frac{1}{2}} \times (-t) du \right. \\ = - \frac{(1-u)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2(1-u)^{\frac{1}{2}} + C, \\ \quad C \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o método de primitivação por partes, vem:

$$\int e^x \sen x \, dx = e^x \sen x - \int e^x \cos x \, dx. \quad (5.1)$$

Vamos aplicar de novo o método de primitivação por partes ao integral $\int e^x \cos x \, dx$, mas mantendo a escolha de $g'(x) = e^x$:

$$g'(x) = e^x \quad \text{e} \quad h(x) = \cos x$$

$$g(x) = e^x \quad \text{e} \quad h'(x) = -\sen x$$

Neste caso,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sen x \, dx$$

Substituindo agora em 5.1 temos

$$\int e^x \sen x \, dx = e^x \sen x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sen x \, dx \right),$$

ou seja,

$$\int e^x \sen x \, dx = e^x \sen x - e^x \cos x - \int e^x \sen x \, dx \Leftrightarrow 2 \int e^x \sen x \, dx = e^x \sen x - e^x \cos x + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Concluímos assim que,

$$\int e^x \sen x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sen x - \cos x) + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.3. Há ainda outros exemplos que aparentemente não são primitivas de produto de funções mas que se podem transformar num produto de modo a aplicar o método de primitivação por partes, como é o caso de $\int \ln x \, dx$.

Neste exemplo basta observar que $\ln x = 1 \times \ln x$. A escolha de g' e de h será

$$g'(x) = 1 \quad \text{e} \quad h(x) = \ln x$$

$$g(x) = x \quad \text{e} \quad h'(x) = \frac{1}{x}$$

Aplicando o método de primitivação por partes vem:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

Obtemos assim a família de primitivas pretendida:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Exercício 5.6 Calcule as seguintes famílias de primitivas:

$$1. \int \arctan x \, dx; \quad 2. \int \sec^3 x \, dx; \quad 3. \int \sen(2x) \sen(7x) \, dx;$$

$$4. \int \sen(5x) \cos(3x) \, dx; \quad 5. \int x \arctan x \, dx; \quad 6. \int x 3^x \, dx;$$

$$7. \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx; \quad 8. \int \cos(\ln x) \, dx; \quad 9. \int x(2x+5)^{10} \, dx.$$

5, 3, 1

$$\begin{aligned}
 5. \int x \arctan x \, dx; &= \frac{u^2}{2} \arctan u - \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{1+u^2} \, du \\
 &= \frac{u^2}{2} \arctan u - \frac{1}{2} \int \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} \, du = \\
 &= \frac{u^2}{2} \arctan u - \frac{1}{2} \int \left(\frac{u^2 + 1}{u^2 + 1} - \frac{1}{u^2 + 1} \right) \, du = \\
 &= \frac{u^2}{2} \arctan u - \frac{1}{2} \left[u - \arctan u \right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int \underbrace{\sin(2x)}_{M'} \underbrace{\sin(7x)}_V \, dx; &= \\
 &= -\frac{\cos(2x)}{2} \cdot \sin(7x) - \int -\frac{\cos(2x)}{2} \cdot 7 \cos(7x) \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(2x) \sin(7x) + \frac{7}{2} \int \underbrace{\cos(2x)}_{M'} \underbrace{\cos(7x)}_V \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(2x) \sin(7x) + \frac{7}{2} \left[\frac{\sin(2x)}{2} \cos(7x) - \int \frac{\sin(2x)}{2} (-7 \sin(7x)) \, dx \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(2x) \sin(7x) + \frac{7}{4} \sin(2x) \cos(7x) + \frac{49}{4} \int \sin(2x) \sin(7x) \, dx
 \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{49}{45}\right) \int \sin(2u) \sin(7u) du =$$

- $\frac{1}{2} \cos(2u) \sin(7u) + \frac{7}{4} \sin(2u) \cos(7u)$

$$\int \sin(2u) \cos(7u) du = -\frac{4}{45} \left(-\frac{1}{2} \cos(2u) \sin(7u) + \frac{7}{4} \sin(2u) \cos(7u) \right)$$

$$3 \left(\frac{2}{45} \cos(2x) \sin(7x) - \frac{7}{45} \sin(2x) \cos(7x) + C \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

$$(-\ln(\cos u))' = \frac{\sin u}{\cos u}$$

$$1. \int \arctan x dx; \quad = \int \underbrace{1}_{M'} \cdot \underbrace{\arctan x}_{V} du =$$

$$\arctan u - \int u \cdot \frac{1}{1+u^2} du =$$

$$u \arctan u - \frac{1}{2} \int \frac{2u}{1+u^2} du =$$

$$= \text{constant} - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$2. \int \sec^3 x \, dx; \quad = \int \underbrace{\sec^2 u \cdot \sec u}_{u'} \, du =$$

$$= \tan u \cdot \sec u - \int \tan u \times \frac{\sin u}{\cos^2 u} \, du =$$

$$= \tan u \cdot \sec u - \int \frac{\sin^2 u}{\cos^3 u} \, du =$$

$$= \tan u \cdot \sec u - \int \underbrace{\sin u}_{v} \cdot \underbrace{\frac{\sin u}{\cos^3 u}}_{u'} \, du =$$

$$= \tan u \cdot \sec u - \left[\frac{1}{2 \cos^2 u} \cdot \sin u - \int \frac{1}{2 \cos^2 u} \cdot \cos u \, du \right]$$

$$= \tan u \cdot \sec u - \frac{\sin u}{2 \cos^2 u} + \frac{1}{2} \int \sec u \, du$$

$$= \tan u \cdot \sec u - \frac{1}{2} \tan u \sec u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$2. \frac{1}{2} (\tan x \sec x + \ln |\sec x + \tan x|) + C;$$

Porque vale a pena aprender a primitivar por partes.... Se calcular esta primitiva com recurso a alguns CAS pode obter este resultado...

$$\int x(2x+5)^{10} dx = \frac{256}{3} x^{12} + \frac{25600}{11} x^{11} + 28800 x^{10} + \frac{640000}{3} x^9 + 1050000 x^8 + 3600000 x^7 + 8750000 x^6 + 15000000 x^5 + 17578125 x^4 + \frac{39062500}{3} x^3 + \frac{9765625}{2} x^2 + c.$$

5.6 Primitivação por Substituição: mudança de variável

O processo de mudança de variável é conhecido do Ensino Secundário. Por exemplo, para resolver a equação $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ podemos recorrer à mudança de variável $e^x = y$ e resolver a equação $y^2 - 2y + 1 = 0$. A solução desta equação é $y = 1$ e regressando à variável x , temos $e^x = 1$, ou seja, $x = 0$.

Este processo é também utilizado para calcular algumas primitivas que não são “tão” imediatas.

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável, onde I designa um intervalo de números reais. Dizer que f é primitivável significa que existe uma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F' = f$.

Seja agora $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável e invertível no intervalo não degenerado J tal que $h(J) = I$. Recorrendo à derivada da função composta, podemos dizer que

$$(F \circ h)'(t) = F'(h(t)) \cdot h'(t). \quad (5.2)$$

Como $F' = f$, podemos reescrever a igualdade (5.2) da seguinte forma

$$(F \circ h)'(t) = f(h(t)) \cdot h'(t),$$

o que traduz o facto de que $F \circ h$ é uma primitiva de $(f \circ h) \cdot h'$.

Para obter a expressão da função F , e sendo h invertível, basta fazer a composta $F \circ h \circ h^{-1}$.

Na prática procede-se da seguinte forma. Seja $\int f(x) dx$ a família de primitivas a determinar. Faz-se a substituição de x por uma função $h(t)$ onde f e h estão nas condições acima referidas. Determina-se de seguida a família de primitivas de

$$\int \underbrace{f(h(t))}_{x} \cdot \underbrace{h'(t)}_{dx} dt = \int g(t) dt = G(t) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

em que $G'(t) = g(t) = f(h(t)) \cdot h'(t)$. A função G é uma primitiva de $(f \circ h) \cdot h'$, ou seja, $G = F \circ h$. Para determinar a função F faz-se a composta de G com a função h^{-1} , $F = G \circ h^{-1}$:

$$\int f(x) dx = G\left(\underbrace{h^{-1}(x)}_t\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (\text{Regresso à variável inicial})$$

Exemplo 5.4. Como calcular $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$?

A função f é definida por $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$ com $x \in I = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$.

Consideremos, a mudança de variável definida por

$$x = h(t) = t^2 \quad \text{com } t \in J = [0, +\infty[$$

e observemos que h é uma função derivável, invertível e que

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{com } x \in I = [0, +\infty[.$$

Como $h'(t) = 2t$ e $f(h(t)) = \frac{t^2}{1+t}$ vamos determinar a família de primitivas

$$\int \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t \, dt = 2 \int \frac{t^3}{t+1} \, dt.$$

Como $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$ (porquê?), a determinação das primitivas torna-se muito fácil:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^3}{t+1} \, dt &= 2 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) \, dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Voltando à variável inicial, como $t = \sqrt{x}$, temos:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5.7

Calcule, fazendo uma mudança de variável adequada, as seguintes famílias de primitivas:

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \, dx;$
2. $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} \, dx;$
3. $\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x + 1)} \, dx;$
4. $\int \sin \sqrt{x} \, dx;$

5. $\int x\sqrt{2x+3} \, dx;$
6. $\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)} \, dx;$
7. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} \, dx.$

Pode recorrer ao <http://m.wolframalpha.com/> ou ao Geogebra para calcular estes integrais e confirmar os seus resultados.

5.6.1 Substituição por Funções Trigonométricas

Duas relações trigonométricas,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{e} \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

são fundamentais para primitivar funções que envolvam os radicais

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{com } a > 0.$$

1. No caso do radical $\sqrt{a^2 + x^2}$, pode utilizar-se a mudança de variável $x = h(t) = a \tan t$ com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \tan^2 t} = a\sqrt{\sec^2 t} = a \sec t \quad (a > 0 \text{ e como } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \sec t > 0)$$

Neste caso, $h^{-1}(x) = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$, com $x \in \mathbb{R}$.

2. No caso do radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, pode utilizar-se a mudança de variável $x = h(t) = a \sin t$ com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (ou $x = a \cos t$ com $t \in [0, \pi]$).

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cos t \quad (a > 0 \text{ e como } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \cos t \geq 0)$$

Neste caso, $h^{-1}(x) = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$, com $x \in]-a, a[$.

Soluções dos exercícios

Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}x$	$x \in \mathbb{R}$

Exercício 5.2

$$\begin{array}{ll} 1. x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + C & 2. \frac{5}{4}x^4 + 2 \operatorname{sen} x + C \\ 5. \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C & 6. -\sqrt{3} \operatorname{cos} x + \frac{1}{2} \ln|x| + C \\ 7. \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + x + C & 8. \frac{1}{\cos u} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercício 5.3

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C & 2. \operatorname{sen}(g(x)) + C & 3. -\cos(g(x)) + C \\ 4. \operatorname{tg}(g(x)) + C & 5. -\operatorname{cotg}(g(x)) + C & 6. \operatorname{arcsen}(g(x)) + C \\ 7. e^{g(x)} + C & 8. \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C & 9. \ln|g(x)| + C \\ 10. \operatorname{arctan}((g(x))) + C & 11. -\ln|\cos(g(x))| + C & 12. \frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{g(x)^{n+1}} + C \end{array}, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

Exercício 5.5

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C; & 5. \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(e^{2x}) + C; \\ 2. \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C; & 6. -\ln|\cos x| + C; \\ 3. -2\sqrt{1-x} + C; & 7. -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C; \\ 4. -\frac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C; & 8. \frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C. \end{array}$$

Exercício 5.6

$$\begin{array}{ll} 1. x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; & 2. \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C; \\ 3. \frac{2}{45} \cos(2x) \operatorname{sen}(7x) - \frac{7}{45} \operatorname{sen}(2x) \cos(7x) + C; & 4. -\frac{3}{16} \operatorname{sen}(5x) \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{16} \cos(5x) \cos(3x) + C; \\ 5. \frac{x^2}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x + C; & 6. \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C; \\ 7. \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C (\text{Sugestão: } \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2} x); & 8. \frac{1}{2}(x \operatorname{cos}(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)) + C; \\ 9. x \frac{(2x+5)^{11}}{22} - \frac{(2x+5)^{12}}{528} + C; & \text{com } C \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exercício 5.7