

**Exemplo 5.6.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = ?$$

$$2x^2 + 8x - 24 = 2(x^2 + 4x - 12) = 2((x+2)^2 - 16)$$

Fazendo a mudança de variável

$$x+2 = 4 \sec t \Leftrightarrow x = 4 \sec t - 2 = h(t), t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

podemos resolver o problema. Como  $h'(t) = 4 \sec t \tg t$ , determinamos a família de primitivas

$$\int \frac{1}{4\sqrt{2} \tg t} 4 \sec t \tg t dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \sec t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sec t + \tg t| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial, temos  $h^{-1}(x) = \arccos \frac{4}{x+2}$  e recorrendo às fórmulas trigonométricas  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  e  $1 + \tg^2 x = \sec^2 x$  obtemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{4} \left( x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 12} \right) \right| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

**Exercício 5.8** Calcule:

$$1. \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx; \quad 2. \int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx; \quad 3. \int \frac{1}{x(3 + \ln x)^3} dx;$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} dx; \quad 5. \int \frac{\sen^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx; \quad 6. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{5 - x^2}} dx;$$

$$7. \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 + 2}} dx; \quad 8. \int \sqrt{4 + 5x^2} dx; \quad 9. \int x^2 \sqrt{1 - x} dx.$$

## 5.7 Primitivas de Funções Racionais

Uma função racional é o quociente de dois polinómios,  $p$  e  $q$ , sendo  $q(x)$  não nulo,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Se  $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$  então devemos fazer a divisão dos polinómios e obtemos  $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ , em que  $\text{grau}(r) < \text{grau}(q)$ . Portanto, nesse caso,

$$\int f(x)dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

**Exemplo 5.7.** Sejam  $p$  e  $q$  os polinómios definidos por  $p(x) = x^4 + 2x + 1$  e  $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$ . Para determinar  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$  efetuamos a divisão dos polinómios já que  $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$ . Como  $p(x) = (x+1)q(x) + 3x^2 + 4x + 1$  vem,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (x+1) + \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Ex 5.7

$$3u^2 + 4u + 1 = \underline{A}u^2 - \underline{A}u - 2A + \underline{B}u^2 + \underline{B}u + \underline{C}u^2 - \underline{2Cu}$$
$$3u^2 + 4u + 1 = (A+B+C)u^2 + (-A+B-2C)u + (-2A)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} A+B+C = 3 \\ -A+B-2C = 4 \\ -2A = 1 \end{array} \right.$$

Então,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left( (x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} \right) dx$$

Para integrar a segunda parcela decomponemos o denominador em elementos simples, de 1º e/ou 2º grau:

$$q(x) = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

e podemos reescrever a fração como segue:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)}.$$

Esta fração pode ser decomposta numa soma de “frações simples”:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes a determinar. Se reduzirmos as frações simples ao mesmo denominador obtemos a igualdade seguinte:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}.$$

Como os denominadores são iguais, para que as frações sejam iguais devemos igualar os numeradores:

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1).$$

Pela igualdade de polinómios deduz-se que:

$$(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A = 3x^2 + 4x + 1, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ -A-2B+C=4 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Um outro processo para determinar  $A$ ,  $B$  e  $C$  consiste em utilizar o seguinte resultado:

$$\text{Dois polinómios são iguais se } \forall x_0 \in \mathbb{R}, p(x_0) = q(x_0).$$

Então, em particular,

$$A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1) = 3x^2 + 4x + 1, \text{ para } x = 0, x = 2 \text{ e } x = -1.$$

$$\text{Se } x = 0, \text{ resulta } -2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x = -1, \text{ resulta } 3B = 0 \Leftrightarrow B = 0 \quad \text{Parece mais simples !!!}$$

$$\text{Se } x = 2, \text{ resulta } 6C = 21 \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$$

Determinados os coeficientes (por um processo ou por outro):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x} dx &= \int \left[ x+1 - \frac{1}{2x} + \frac{21}{6(x-2)} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{21}{6} \ln|x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este processo pode ser utilizado em qualquer fração de polinómios, tendo em conta os resultados seguintes.



**Teorema 5.5.** Todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto num produto de fatores do primeiro e/ou segundo grau (em que cada um dos fatores terá uma multiplicidade maior ou igual a 1).

Um polinómio de grau  $n$  admite sempre  $n$  raízes complexas<sup>2</sup>, não necessariamente distintas, ou seja, podem ser simples ou múltiplas. Para além disso, se admitir a raiz  $a + bi$  (com  $b \neq 0$ ) também admite a raiz  $a - bi$ .

O problema reduz-se assim a primitivar fatores do tipo:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^r} e \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^s}$$

Observe-se que se  $r \neq 1$  (Caso em que o polinómio do denominador tem raízes reais múltiplas),

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \frac{A}{(1 - r)(x - \alpha)^{r-1}} + C, C \in \mathbb{R}$$

e se  $r = 1$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + C, C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.8.** Como calcular  $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx$ ?

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 + 1 = Ax^2 + (-2A + B)x + A - B + C.$$

Donde:  $A = 1$ ,  $B = 2$  e  $C = 2$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^3} dx \\ &= \ln |x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se os fatores são de 2º grau, as coisas complicam-se... Caso em que o polinómio do denominador tem raízes complexas.

**Exemplo 5.9.** Como calcular  $\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx$ ?

$$\frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Donde:  $A = \frac{3}{5}$ ,  $B = \frac{1}{5}$  e  $C = \frac{2}{5}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx &= \frac{3}{5} \int \frac{1}{2x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln |2x + 1| + \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{2}{5} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln |2x + 1| + \frac{1}{10} \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{5} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Observemos que uma raiz real é complexa com parte imaginária nula.

**Exemplo 5.8.** Como calcular  $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx$ ?

$q(u) = (u-1)^3$  tem vez maior real  $u=1$  com mult. 3

$$\frac{u^2+1}{(u-1)^3} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{(u-1)^3}$$

$$u^2+1 = A(u-1)^2 + B(u-1) + C \Rightarrow$$

$$(u=1 \Rightarrow 1+1 = C \Rightarrow C=2)$$

$$\frac{u^2+1}{(u-1)^3} = \frac{A u^2 - 2A u + A + B u - B + 2}{(u-1)^3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ -2A+B=0 \\ A-B+2=1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ B=2 \\ 1=1 \end{array} \right. \quad \checkmark$$

$$\int \frac{u^2+1}{(u-1)^3} du = \int \left( \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{(u-1)^3} \right) du$$

$$= \int \frac{1}{u-1} + \frac{2}{(u-1)^2} + \frac{2}{(u-1)^3} du =$$

$$= \ln|u-1| + 2 \frac{(u-1)^{-1}}{-1} + 2 \frac{(u-1)^{-2}}{-2} + C, C \in \mathbb{R}.$$



Atendendo ao Teorema 5.5, podemos afirmar que qualquer polinómio  $q(x)$ , admite a seguinte fatorização em polinómios irredutíveis:

$$q(x) = \alpha(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_n)^{r_n} (x^2 + b_1x + c_1)^{s_1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{s_m},$$

com  $b_j^2 - 4c_j < 0, j = 1 \dots, m$  e

$$(r_1 + \dots + r_n) + 2(s_1 + \dots + s_m) = \text{grau}(q).$$

Então,

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left( \underbrace{\frac{A_{i1}}{(x - a_i)} + \dots + \frac{A_{ir_i}}{(x - a_i)^{r_i}}}_{\text{raiz } a_i \text{ com mult. } r_i} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^m \left( \underbrace{\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + \dots + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{s_j}}}_{\text{raizes } \beta_j \text{ de } B_j^2 - 4C_j \text{ com mult. } s_j} \right),$$

onde  $A_{i1}, \dots, A_{ir_i} (i = 1 \dots, n)$  e  $B_{j1}, C_{j1}, \dots, B_{js_j}, C_{js_j} (j = 1 \dots, m) \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.10.** Para determinar o integral  $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx$  podemos escrever

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 15} = \frac{x + 1 - 1}{x^2 + 2x + 15}$$

atendendo a que  $(x^2 + 2x + 15)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$ . Assim,

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 15} dx$$

O primeiro integral é agora imediato; para calcular o segundo, observemos que

$$x^2 + 2x + 15 = (x + 1)^2 + 14 = 14 \left( \left( \frac{x + 1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1 \right)$$

e portanto

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \frac{1}{14} \int \frac{1}{\left( \frac{x+1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1} dx.$$

Integrando vem:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 15) - \frac{\sqrt{14}}{14} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{14}} + C, C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.11.** A primitiva da função  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ , ou das suas variantes  $\frac{1}{(a^2+x^2)^2}$ , aparece frequentemente na decomposição em elementos simples, por isso é importante que se perceba a sua determinação.

Como calcular

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx?$$

Fazendo a substituição  $x = g(t) = \operatorname{tg} t$ , porque  $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$  temos que

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{1}{\sec^4 t}$$

**Exemplo 5.10.** Para determinar o integral  $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx$  podemos escrever

$$\left( \frac{1}{2} \right) \int \frac{2u + 2 - 2}{u^2 + 2u + 15} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u + 2}{u^2 + 2u + 15} du$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{-2}{u^2 + 2u + 15} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 2u + 15)$$

$$- \int \frac{1}{(u+1)^2 + 14} du =$$

$$u^2 + 2u + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 60}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-56}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{14}i}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{14}i$$

$$\frac{1}{2}(2+K)=0 \\ K=-2$$

$$\left\{ \frac{1}{(u+1)^2 + 14} du = \frac{1}{14} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{14}}}{\left(\frac{u+1}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1} du$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{14} \arctan\left(\frac{u+1}{\sqrt{14}}\right) + C$$

Derivando  $\operatorname{tg} t$ , obtém-se  $\sec^2 t$ , assim, a função a primitivar é

$$\int \frac{1}{\sec^4 t} \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \int \cos^2 t dt$$

Como  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ , vem

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Como  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$$\int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Como  $\operatorname{tg} t = x$ , resulta que  $\sec^2 t = x^2 + 1$  e vem

$$\cos^2 t = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Regressando à variável inicial  $x$  temos:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.12.** Vamos determinar o integral indefinido  $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$ .

Atendendo a que  $(x^2+2x+3)' = 2x+2$  e que  $x-1 = x+1-2$ , podemos reescrever o integral da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{4}{(x^2+2x+3)^2} \right) dx$$

ou seja,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx.$$

O primeiro integral é imediato,

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Quanto ao segundo integral, vamos recorrer ao exemplo 5.11. Começamos por transformar a função integranda:

$$\frac{2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{2}{4 \left( \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left( \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2}.$$

Faz-se agora a substituição

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t - 1$$

no integral  $\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx$  e o integral a determinar será

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \sqrt{2} \sec^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + \sin(2t)) + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + 2 \sin(t) \cos(t)) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial,

$$\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(x+1)^2}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{2+(x+1)^2}} \right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

**Exemplo 5.12.** Vamos determinar o integral indefinido  $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$ .

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2u+2 + K}{(u^2+2u+3)^2} du = \right. \quad \begin{array}{l} q \text{ l} \text{e} \\ q \text{ tem } q \text{ raiz } 4 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}(2+K) = -1 \\ 2+K = -2 \\ K = -4 \end{array} \right\}$$

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}i$$

duas raízes complexas  
com multiplicidade 2  
cada uma.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2u+2-4}{(u^2+2u+3)^2} du$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2u+2}{(u^2+2u+3)^2} du - 2 \int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2} du \right.$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{(u^2+2u+3)^{-1}}{-1} \right)$$

$$\int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2} du$$

$$\int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2} du = \int \frac{1}{((u+1)^2+2)^2} du$$

$$u+1 = \sqrt{2} \operatorname{tg} t, \quad du = \sqrt{2} \sec^2 t$$

$$= \int \frac{1}{((\sqrt{2} \operatorname{tg} t)^2 + 2)^2} \cdot \sqrt{2} \sec^2 t \, dt$$

$$= \int \frac{1}{(2 \operatorname{tg}^2 t + 2)^2} \cdot \sqrt{2} \sec^2 t \, dt$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{(2(\operatorname{tg}^2 t + 1))^2} \cdot \sqrt{2} \sec^2 t \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{\sec^2 t} \cdot \cancel{\sec^2 t} \, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left( t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{8} \sin t \cos t + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} (t + \cos t \sin t) + C$$

$$u+1 = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \arctan\left(\frac{(e+1)}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{(e+1)}{\sqrt{2}}\right)^2}} \times \right.$$

$t \in [0, \pi/2]$

$$\left. \left\{ 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{(e+1)}{\sqrt{2}}\right)^2} \right\} + C_1 \right)$$

$C \in \mathbb{R}$

ou escrito de forma simplificada,

$$\int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2} \right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exercício 5.9** Calcule:

1.  $\int \frac{1}{(x-2)^3} dx;$
2.  $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} dx;$
3.  $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
4.  $\int \frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
5.  $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx.$



## Soluções dos exercícios

### Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}x$	$x \in \mathbb{R}$

### Exercício 5.2

$$\begin{array}{ll} 1. x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + C & 2. \frac{5}{4}x^4 + 2 \operatorname{sen} x + C \\ 5. \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C & 6. -\sqrt{3} \operatorname{cos} x + \frac{1}{2} \ln|x| + C \\ 7. \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + x + C & 8. \frac{1}{\cos u} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}. \end{array}$$

### Exercício 5.3

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C & 2. \operatorname{sen}(g(x)) + C & 3. -\cos(g(x)) + C \\ 4. \operatorname{tg}(g(x)) + C & 5. -\operatorname{cotg}(g(x)) + C & 6. \operatorname{arcsen}(g(x)) + C \\ 7. e^{g(x)} + C & 8. \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C & 9. \ln|g(x)| + C \\ 10. \operatorname{arctan}((g(x))) + C & 11. -\ln|\cos(g(x))| + C & 12. \frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{g(x)^{n+1}} + C \end{array}, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

### Exercício 5.5

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C; & 5. \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(e^{2x}) + C; \\ 2. \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C; & 6. -\ln|\cos x| + C; \\ 3. -2\sqrt{1-x} + C; & 7. -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C; \\ 4. -\frac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C; & 8. \frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C. \end{array}$$

### Exercício 5.6

$$\begin{array}{ll} 1. x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; & 2. \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C; \\ 3. \frac{2}{45} \cos(2x) \operatorname{sen}(7x) - \frac{7}{45} \operatorname{sen}(2x) \cos(7x) + C; & 4. -\frac{3}{16} \operatorname{sen}(5x) \operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{16} \cos(5x) \cos(3x) + C; \\ 5. \frac{x^2}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x + C; & 6. \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C; \\ 7. \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C (\text{Sugestão: } \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2} x); & 8. \frac{1}{2}(x \operatorname{cos}(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)) + C; \\ 9. x \frac{(2x+5)^{11}}{22} - \frac{(2x+5)^{12}}{528} + C; & \text{com } C \in \mathbb{R} \end{array}$$

### Exercício 5.7

1.  $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctan\sqrt[6]{x} + C;$
2.  $e^x - \arctan(e^x) + C;$
3.  $\frac{\ln^3 x}{3} - \ln x + \arctan(\ln x) + C;$
4.  $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C;$
5.  $\frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{2} + C;$
6.  $\ln(4x) - \ln 2 \ln|\ln(4x)| + C;$
7.  $-\frac{4\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}}{3} + C,$   
com  $C \in \mathbb{R}.$

### Exercício 5.8

1.  $\arcsen\left(\frac{e^x}{2}\right) + C;$
2.  $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - \frac{13}{9}\ln(\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - 3x - 1) + C;$
3.  $-\frac{1}{2(3 + \ln x)^2} + C;$
4.  $\arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right) + C;$
5.  $-2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C;$
6.  $-\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C;$
7.  $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + C;$
8.  $\frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2} - 2\frac{\ln(-x\sqrt{5} + \sqrt{4+5x^2})}{\sqrt{5}} + C;$
9.  $\sqrt{1-x}\left(\frac{4(1-x)^2}{5} - \frac{2(1-x)^3}{7} - \frac{2(1-x)}{3}\right) + C,$   
com  $C \in \mathbb{R},$

### Exercício 5.9

1.  $-\frac{1}{2(x-2)^2} + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
2.  $\frac{1}{18}\left(\frac{3-6x}{(x+1)^2} + 4\ln(x-2) - 4\ln(x+1)\right) + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
3.  $-\frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
4.  $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C,$  com  $C \in \mathbb{R};$
5.  $-\frac{1}{x^2+1} + \frac{5}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + C,$  com  $C \in \mathbb{R}.$

