Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática
Cálculo I

**Ficha de Exercícios 5**
*Séries numéricas*

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais, $S_n$, e a soma $S$ (se possível) de cada uma das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)$;

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2. Calcule, se possível, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+b_n\right]$, sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dada por $S_n=\sqrt[n]{\dfrac{e}{n^n}}$, $n\in\mathbb{N}$.

3. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica, convergente e de soma igual a $S$. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[3a_n+\frac{2}{3^n}\right]$.

4. Determine, se existir, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde $u_n=\begin{cases} 1+2(n-1) & \text{se } n<4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n\geq 4 \end{cases}$.

5. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n}{(a+1)^n}$ (onde $a$ é um parâmetro real, com $a\neq -1$).

   (a) Determine os valores de $a$ para os quais a série dada é convergente.

   (b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais.

      i. Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$, então a série converge.

      ii. Se a série converge, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

      iii. Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$, então a série diverge.

   (b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se:

      i. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=0$;

      ii. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k<1$;

iii. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$.

7. Estude a natureza das séries seguintes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}}$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n+5]^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n^3}$

(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0<b<1)$

(m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d>0)$

(n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n}$

(o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

(p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(q) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

(r) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{50}\right)}{2^n}$

(s) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

(t) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!+n-1}$

(u) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n+1}{2^n-1}$

(v) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n\cos(n\alpha)}{n^{2n}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

(w) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\arctan n}{n^2+1}$

8. Estude a natureza das séries seguintes:

(a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4+1}+\frac{5}{9+1}+\frac{7}{16+1}+\cdots$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

9. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, tais que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$ e $a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n\in\mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$.

10. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$;

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n}\frac{1}{2^{n-1}}$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ ;

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+3n^2+4}$;

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{e^n+1}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

11. Sabendo que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são tais que

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = 15, \quad a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ para } n \geq 9 \quad \text{e} \quad b_n > a_n, \text{ para } n > 20,$$

estude a natureza das séries numéricas $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

12. Considere as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$.

(a) Estude a natureza de cada uma das séries.

(b) Indique o limite do termo geral das séries.

(c) Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{n!}{n^n}+b_n\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$, indique a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Justifique.

13. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe 2/3 da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

14. Seja $(a_n)$ uma sucessão de números reais tal que $a_1 \neq 0$ e $a_{n+1} = \dfrac{n}{2n+1}\,a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

15. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+n^2}{3^n\,n^2}$ sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

16. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n$ é convergente. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ é convergente.

17. Mostre que se $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ converge.

## Exercícios de testes/exames de anos anteriores

18. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{n!}\right)$ e, em caso de convergência, indique a sua soma.

    *(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)*

19. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+2)}$.

    *(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)*

20. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\operatorname{arctg}(n)+a_n)$.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a_n}{3+a_n^2}$.

    *(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)*