Ficha de Exercícios 4
Integrais impróprios

1. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

   Resolução: Uma vez que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_e^t \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[\ln|\ln x|\Big]_e^t = \lim_{t\to+\infty}\Big(\ln|\ln t| - \ln|\ln e|\Big) = +\infty$$

   podemos concluir que o integral dado é divergente.

2. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

   Resolução:
   Vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx.$$

   Usando o método de integração por partes podemos concluir que

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C, \qquad C\in\mathbb{R}$$

   logo

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

   pois

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right) = 0.$$

   Portanto, podemos concluir que o integral dado é convergente e

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{2}{e}.$$

3. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5}{4+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(3x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \ln x\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx$ (l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+(x+1)^2}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$ (n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx.$

4. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{cotg} x\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{9-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{|x|}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$ (j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$ (n) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$

5. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ é divergente.

6. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$

7. Calcule, caso exista, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ com

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

8. Estude a natureza dos integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-st}dt \quad (s>0)$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt \quad (s>\alpha)$

9. Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}^+$.

10. Estude, em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, a natureza dos integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx.$

11. Mostre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ é convergente.

12. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx.$

13. Estude, utilizando o critério de comparação ou critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{1-\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{-x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

14. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin\sqrt{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x^2+2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\,dx.$

15. Seja $f(x)=\begin{cases} m & \text{se } |x|\leq 2 \\ 0 & \text{se } |x|>2 \end{cases}$. Determine m de modo a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$

Exercícios de testes/exames de anos anteriores

16. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx$$

calculando o seu valor caso seja convergente.

(Exame de Recurso, Cálculo I, 2012/2013)

17. Mostre que o integral impróprio

$$\int_1^{e} \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$$

é divergente. *(2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I, 2013/2014)*

18. Usando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite, estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{6x^2-4}{x^7+2x+1}\,dx.$$

(Exame Final, Cálculo I, 2013/2014)

19. Usando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite, estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^6+\pi x+5}\,dx.$$

(Exame de Recurso, Cálculo I, 2013/2014)

20. Estude a natureza do seguinte integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

(2º Teste de Avaliação, Cálculo I - Semestre Especial, 2013/2014)

21. Determine a natureza e, em caso de convergência, calcule o valor:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x(4-x)\,dx.$$

(2º Teste de Avaliação, Cálculo I - Agrupamento II, 2016/2017)

22. (a) Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ é convergente e indique o seu valor.

    (b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\cos^2(x)\,dx$ sem recorrer à definição.

(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

23. Seja $f:]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

    (a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e$.

    (b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$.

(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)