



Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Cálculo II-Agrupamento 3 — 1º Teste (VERSÃO 1)

14 de abril de 2023

Duração: 2h00

N.º Mec.: _____ Nome: _____

(Declaro que desisto: _____) N. folhas suplementares: _____

Questão	1	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7	Classificação
[Cotação]	[60pts]	[23pts]	[13pts]	[10pts]	[10pts]	[13pts]	[23pts]	[12pts]	[12pts]	[8pts]	[16pts]	(valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:

(i) resposta correta: 10 pontos;

(ii) resposta errada: -3 pontos;

(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Qual é o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} x^n$?

☐ 5 ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $+\infty$ ☐ 0

(b) Sabendo que uma dada série de potências da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ tem domínio de convergência $] -8, 4]$, podemos afirmar que:

☐ a série é absolutamente convergente em $x = 4$

☐ a série é simplesmente convergente em $x = -8$

☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 6$

☐ $c = 2$

(c) Recordando o desenvolvimento em série de MacLaurin da função cosseno hiperbólico,

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

qual das seguintes representações é válida?

☐ $x^2 \cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{2n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$ ☐ $x^2 \cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$

☐ $x^2 \cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$ ☐ $x^2 \cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

(d) O polinómio de Taylor de ordem 3 de uma função f no ponto $c = \frac{\pi}{4}$ é dado por:

$$T_{\frac{\pi}{4}}^3(f(x)) = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

O valor de $f'''(\frac{\pi}{4})$ é igual a:

☐ 4

☐ 8

☐ 0

☐ -2

(e) Seja f uma função que satisfaz as condições: $f(2) = 0$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -6$ e $f^{(n)}(2) = 0$ para todo o $n \geq 4$. Sabendo que a série de Taylor de f converge para f , podemos concluir que $f(4)$ é igual a:

☐ -4

☐ 4

☐ 0

☐ 20

(f) Sabendo que a série de Fourier da extensão 2π -periódica da função $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x < \pi$, é

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), \quad x \in \mathbb{R},$$

podemos concluir que a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ é

☐ $-\frac{4}{\pi}$
☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ $\frac{\pi}{4}$
☐ $\frac{\pi^2}{8}$

[23pts] 2. Determine o domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x-4)^n}{(n+1)^2}$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

Continua na folha suplementar N^o ☐

3. Considere a função f dada por $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

[13pts]

(a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem 1 da função f .

Continua na folha suplementar Nº ☐

[10pts]

(b) Usando a fórmula obtida na alínea anterior, calcule um valor aproximado de $\sqrt[3]{1,3}$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a 10^{-2} .

Continua na folha suplementar Nº ☐

4. Considere a série de funções definida por $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^4}$.

[10pts]

(a) Prove que esta série converge uniformemente em \mathbb{R} .

Continua na folha suplementar N°

[13pts]

(b) Justifique que a função soma é integrável em $[-\pi, \pi]$ e calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^4} dx$.

Continua na folha suplementar N°

5. Considere a função 2π -periódica f definida em $] -\pi, \pi]$ por $f(x) = -x$.

[23pts]

(a) Determine a série de Fourier de f .

Continua na folha suplementar N^o ☐

[12pts]

(b) Seja S a função soma da série de Fourier obtida na alínea anterior.
Indique o valor de $S(3\pi)$ e de $S(-2\pi)$.

Continua na folha suplementar N^o ☐

6. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{5}{\ln(x^2 + y^2)}$.

[12pts]

(a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.

Continua na folha suplementar N° ☐

[8pts]

(b) Determine a curva de nível 5, \mathcal{C}_5 .

Continua na folha suplementar N° ☐

[16pts] 7. A função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^3 - xy^3}{2x^4 + 3y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua na origem? Justifique convenientemente.

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ ($r \neq -1$)	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\frac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\sin u$	$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\cotg u$	$u' \sec u$	$\ln \sec u + \operatorname{tg} u $
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln \operatorname{cosec} u + \cotg u $	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsen u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cotg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
--	--	--	--