

# PSI3431 - Processamento Estatístico de Sinais

## Relatório Experiencia 4

Lucas Giannella de Oliveira - NUSP: 10336021

### Introdução

Nesta experiencia serão abordados os conceitos de processamento de sinais utilizando números de precisão finita e suas consequências, com ênfase nos efeitos de ruído gerados pela quantização dos sinais e da precisão finita nas operações. Para projetar o filtro elíptico especificado utilizou-se os seguintes parâmetros nas funções apropriadas em Julia

- Faixa de Passagem :  $0 \leq \omega \leq \omega_p = 0.07\pi$  rad (obtido observando a máxima frequência do sinal de entrada)
- Faixa de Rejeição :  $\omega_r = 0.2\pi \leq \omega \leq \pi$  rad
- Atenuação na Faixa de Passagem :  $\delta_p = 0.05 \Rightarrow A_p = 0.44$
- Atenuação na Faixa de Rejeição :  $A_r = 41\text{dB}$

obtendo-se a seguinte resposta em frequência:

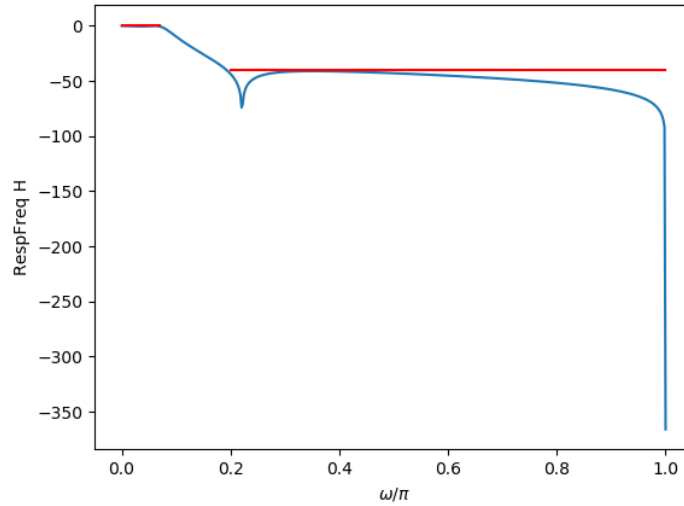


Figure 1: Resposta em frequência do filtro com alta precisão

### 1

Como mostrado em aula o ruído de quantização do sinal de entrada pode ser tratado como um ruído aditivo sobre esta, sendo modelado da seguinte forma:

$$E_{in} \sim U(-2^{-B_0}; 2^{-B_0}) \quad (1)$$

onde  $B_0$  é o número de bits utilizado na quantização da entrada. Desta forma podemos utilizar o princípio da superposição (dado que um filtro FIR é linear) e obter que:

$$y_Q[n] = y[n] + E_Q[n] = x[n] * H(e^{j\omega}) + E_{in}[n] * H(e^{j\omega}) \quad (2)$$

como  $E_Q$  é iid, e portanto, estático e ergódico. E  $y[n]$  é determinístico, assim obtemos o seguinte resultando ao calcular a esperança  $E\{y_Q[n]\}$ :

$$E\{y_Q[n]\} = E\{y[n]\} + E\{E_Q[n]\} = y[n] + E\{E_{in}[n]\} * H(e^{j0}) \quad (3)$$

como  $E\{E_Q[n]\} = 0$  obtemos que:

$$m_{y_Q} = E\{y_Q[n]\} = y[n] \quad (4)$$

## 2

Como mostrado no item anterior:

$$E_Q[n] = E_{in}[n] * H(e^{j\omega}) \quad (5)$$

e como  $E_{in}$  é estacionário e ergódico  $E_Q[n]$  também o será dado que o sistema é linear.

O valor DC de  $E_Q[n]$  é igual a  $E\{E_Q[n]\}$  e portanto igual a 0 como já mostrado. Já a potencia media do ruído na entrada pode ser calculada por  $E\{E_{in}^2[n]\}$  resultando em:

$$E\{E_{in}^2[n]\} = \frac{2^{-2*B_0}}{3} = \sigma_0^2 \quad (6)$$

dessa forma, podemos utilizar a densidade espectral de potencia do ruído na entrada,  $S_{E_{in}}(\omega) = \sigma_0^2$  dado que o sinal é iid e portanto um ruído branco, e a resposta em frequência do filtro e calcular a potencia media na saída por meio da integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 * \sigma_0^2 d\omega \quad (7)$$

utilizando a igualdade de Parseval obtemos:

$$P_{Ruido} = \sigma_0^2 * \sum_{n=0}^{\infty} h[n]^2 = 2.6365 * 10^{-5} \quad (8)$$

A potencia do sinal de entrada  $s(t) = 0,5\cos(2\pi * f_0 * t) + 0,3\cos(4\pi * 300 * t) + 0,15\cos(6\pi * f_0 * t)$  é dada por:

$$Pot_{In} = \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.3^2}{2} + \frac{0.15^2}{2} = 0.1812 \quad (9)$$

dessa forma podemos a  $SNR$ , em dB, na saída como:

$$SNR = 10 * \log_{10} \left( \frac{Pot_{In}}{P_{Ruido}} \right) = 38.37dB \quad (10)$$

## 3

Para todos os cálculos serão necessários o sinal de entrada de "precisão infinita" e sua versão quantizada, mostrados abaixo.

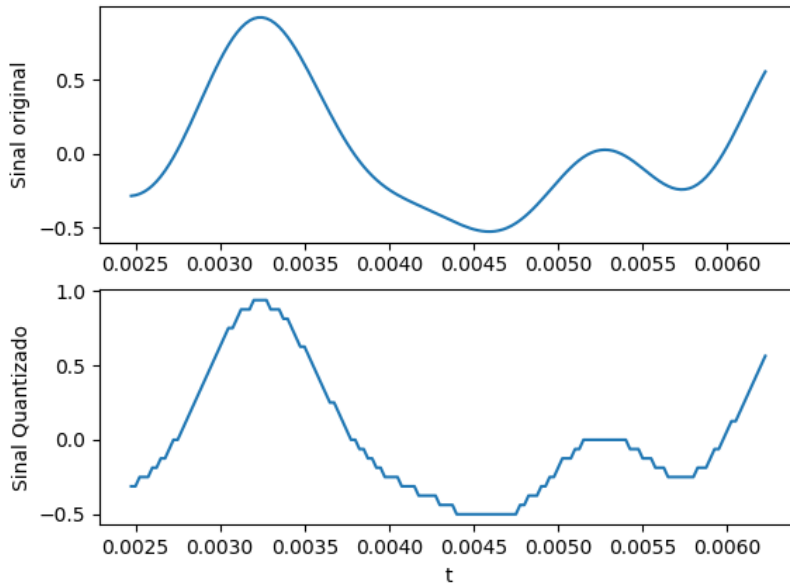


Figure 2: Comparação entre sinal entrada e sinal quantizado

é possível ver claramente os efeitos da quantização sobre o sinal de entrada, como o numero de bits utilizado para a quantizar o sinal foi pequeno,  $B_0 = 5$ , é possível observar claramente os níveis de quantização.

Utilizando o filtro projetado e as funções especificadas filtrou-se ambos sinais obtendo seguinte:

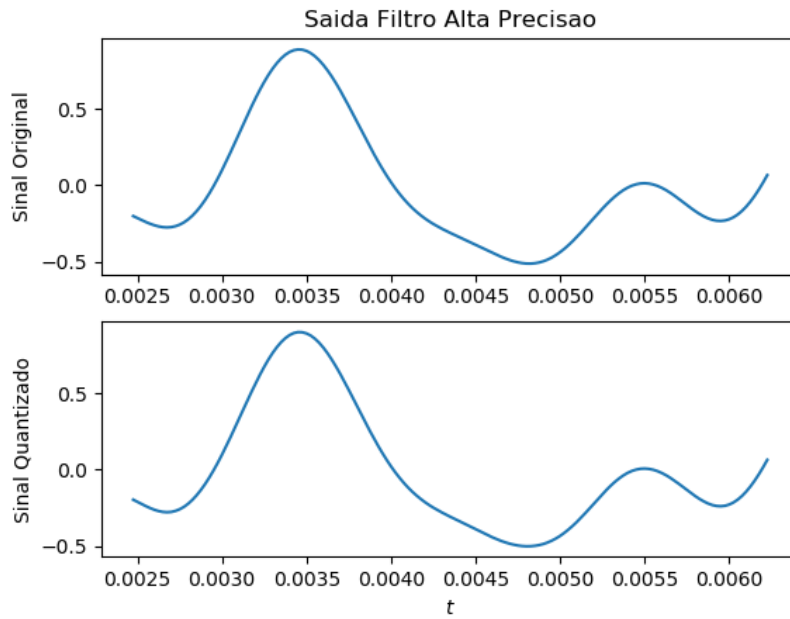


Figure 3: Comparação entre os sinais filtrados

pode-se ver que o filtro não causou deformações no sinal de entrada de alta precisão mostrando que este foi projetado corretamente. Também é possível observar uma melhora no sinal quantizado onde boa parte considerável de seu ruído de quantização foi removida, tornando quase imperceptível a existência do mesmo. Fazendo uma comparação entre o ruído a entrada e saída obtém-se:

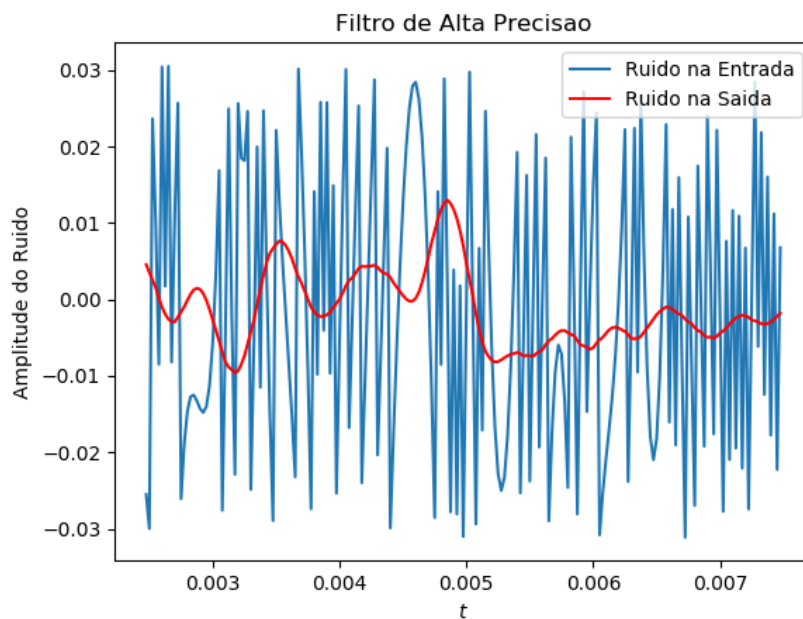


Figure 4: Comparação entre os ruídos na entrada e saída

o efeito de passa-baixas do filtro pode ser observado no ruído de saída onde ha uma diminuição significativa das componentes de alta frequência em relação a entrada.

A potencia experimental do ruido na saída foi calculada como visto em aula utilizando o fato do ruido ser ergódico, sendo o calculo feito como:

$$P_{RSaida} = Var\{E_Q\} = 2.733 * 10^{-5} \quad (11)$$

com isto podemos calcular a  $SNR$  da saída como:

$$SNR_{saida} = 10 * \log_{10} \left( \frac{Pot_{In}}{P_{RSaida}} \right) = 38.21dB \quad (12)$$

Comparando as potencias teórica e experimental vemos que a experimental é levemente maior do que a teórica, também percebe-se que a  $SNR$  também apresenta uma pequena diferença. isto se deve ao fato dos cálculos teóricos serem aproximações do caso real, e tais aproximações são melhores quanto maior o numero de bits utilizado na quantização, como o numero de bits utilizado foi pequeno a diferença já era esperada.

#### 4

Quantizando os coeficientes do filtro com  $B = 12$  bits e fazendo as contas com os mesmos  $B = 12$  bits utilizando precisão dupla, ou seja utilizando 24 bits para as contas na pratica, obteve-se a seguinte resposta em frequência:

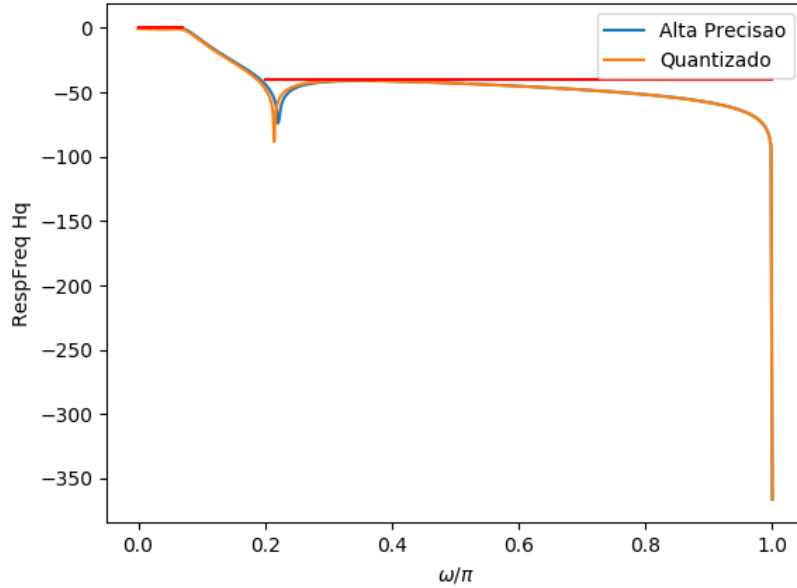
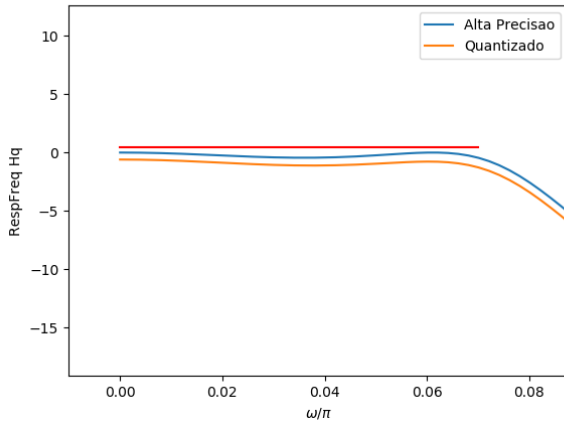
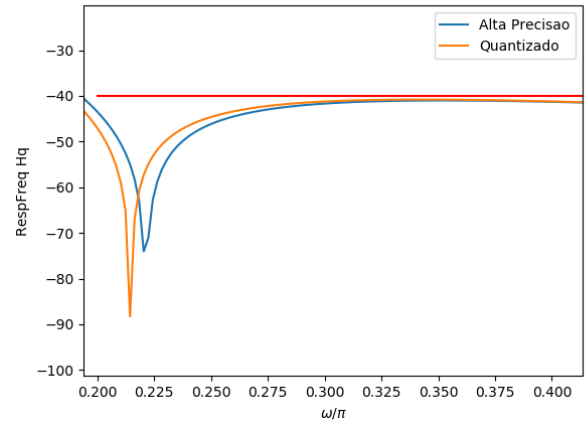


Figure 5: Resposta em frequência do filtro vs. filtro quantizado



(a) Zoom da banda passante



(b) Zoom da banda de rejeição

Figure 6

As respostas em frequência são bem similares e o filtro com os coeficientes quantizados continua atendendo as especificações exigidas. Os resultados obtidos filtrando novamente os mesmos sinais de entrada (quantizado e não quantizado) foram:

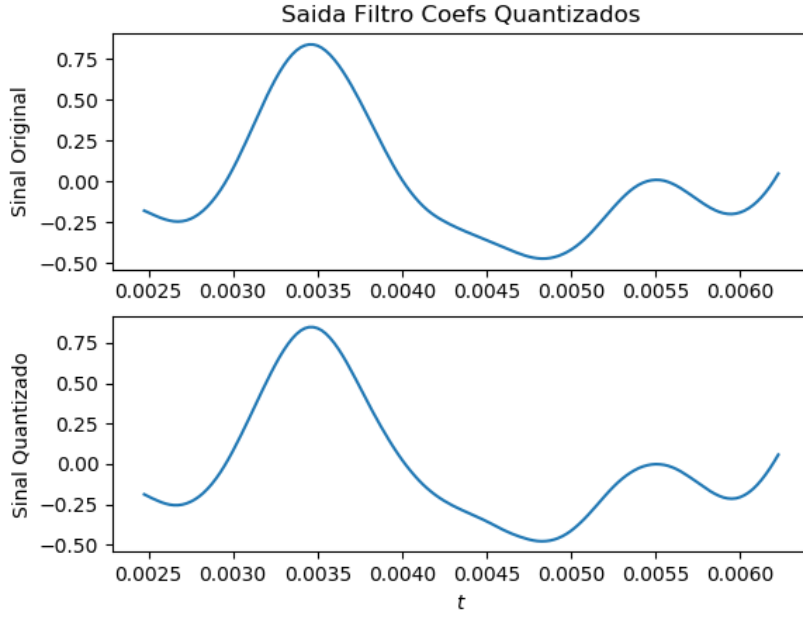


Figure 7: Sinais filtrados com coeficientes quantizados

nos sinais de saída do filtro é possível ver claramente o ruído introduzido pela quantização dos coeficientes se comparado aos sinais de saída sem quantizar os coeficientes, este ruído é proveniente do arredondamento feito no final das somas na forma canônica direta I utilizando precisão dupla, caso a precisão dupla não fosse utilizada a potência deste ruído seria muito maior (com potência  $2M + 1$  vezes maior do que o exibido) pois seria introduzido ruído após cada uma das multiplicações no filtro

## 5 6

Para calcular a potência média do Ruído total na saída do filtro com coeficientes quantizados  $E_T[n]$  iremos utilizar o fato visto em aula de que este ruído é composto de duas parcelas, uma vinda da entrada  $E_{in}[n]$  que já foi calculada no item 2 e a nova parcela  $E_{eq}[n]$  advinda da quantização dos coeficientes e operações com número limitado de bits. Sabemos que  $E_{eq}[n]$  se comporta do mesmo modo que os ruídos calculados anteriormente, porém desta vez com um número de bits  $B_c = 12$ , desta forma a potência do ruído segue a expressão:

$$E\{E_{eq}^2[n]\} = \frac{2^{-2*B_c}}{3} = \sigma^2 \quad (13)$$

como estamos utilizando a forma canônica direta I sabemos que  $E_{in}[n]$  passa pelo filtro todo  $\frac{B(Z)}{A(Z)}$  e  $E_{eq}[n]$  apenas pelos coeficientes que formam o denominador do filtro  $\frac{1}{A(Z)}$ , desta forma sabemos que a parcela devido a  $E_{in}[n]$  pode ser calculada como antes porém utilizando os valores dos coeficientes quantizados, e aplicando o mesmo processo utilizado no item 2 obtemos que a potência do ruído na saída devido a  $E_{eq}[n]$  pode ser calculada como:

$$P_{RuidoQ} = \sigma_0^2 * \sum_{n=0}^{\infty} h_q[n]^2 = 2.24 * 10^{-5} \quad (14)$$

$$P_{EqR} = \sigma^2 * \sum_{n=0}^{\infty} h_{qdenominador}[n]^2 = 3.37 * 10^{-5} \quad (15)$$

Desta forma temos que a potência total do ruído na saída  $E_T[n]$  será igual a:

$$P_{RT} = P_{RuidoQ} + P_{EqR} = 5.61 * 10^{-5} \quad (16)$$

Caso a precisão dupla não fosse utilizada o fator proveniente de  $E_{eq}[n]$  estaria sendo multiplicado pelo fator  $2M + 1$  já mencionado. Os cálculos feitos acima só são possíveis pois consideramos que todos os ruídos são iid. Agora de posse da potência total do ruído na saída podemos calcular a  $SNR$  teórica para este caso sendo esta:

$$SNR_{teorica} = 10 * \log_{10} \left( \frac{Pot_{In}}{P_{RT}} \right) = 35.092dB \quad (17)$$

Como sabemos que os ruídos são ergódicos podemos fazer os mesmos cálculos de antes para determinar a experimental do ruído na saída e também a  $SNR$  na mesma, seguindo o calculo:

$$P_{RTexp} = Var\{E_T\} = 1.2064 * 10^{-4} \quad (18)$$

$$SNR_{exp} = 10 * \log_{10} \left( \frac{Pot_{In}}{P_{RTexp}} \right) = 31.76dB \quad (19)$$

novamente podemos ver que os valores diferem do valores calculados teoricamente, isto se deve novamente aos fatos mencionados sobre as aproximações. Porem neste caso ha outro efeito que ocorre de forma concomitante, e que neste caso é responsável pela diferença maior observada entre os valores experimentais e teóricos, os polos do filtro são muito sensíveis as variações que ocorrem ao se quantizar os coeficientes, desta forma afetando a performance do filtro e em alguns casos ate instabilizando-o, para garantir resultados mais coerentes com a teoria seria necessário quantizar os coeficientes com um numero bem maior de bits de forma a não alterar os polos. Pode-se notar facilmente que o ruído introduzido aumenta (em relação ao visto no item 3) com esta quantização dos coeficientes observando novamente as amplitudes dos ruídos:

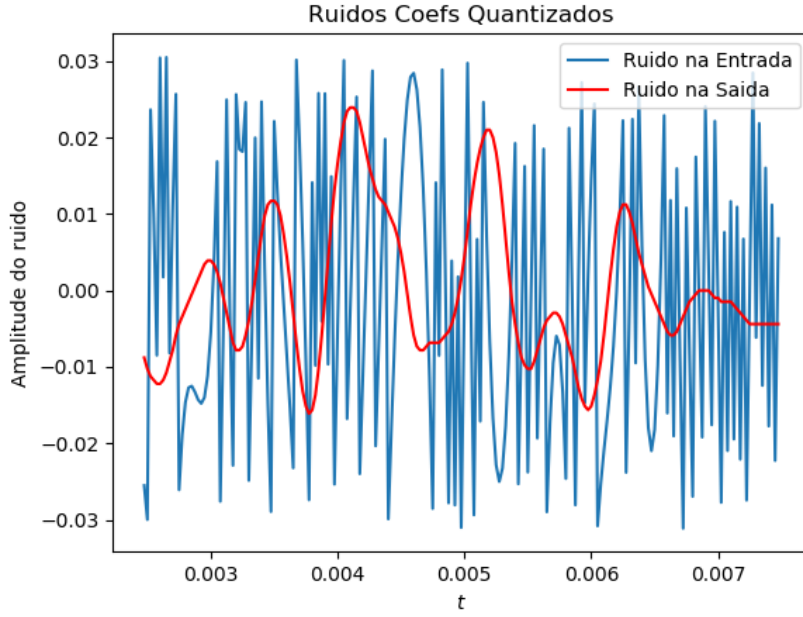


Figure 8: Comparação entre os ruídos na entrada e saída com coeficientes quantizados

## 7

Caso a forma canônica onde a realimentação é realizada antes da parte FIR fosse utilizada o ruído na saída poderia ser calculado como:

$$P_{Rcanon} = (\sigma_0^2 + \sigma^2) * \sum_{n=0}^{\infty} h[n]^2 + \sigma^2 = 2.2425 * 10^{-5} \quad (20)$$

E sua respectiva  $SNR$  seria

$$SNR_{canon} = 10 * \log_{10} \left( \frac{Pot_{In}}{P_{Rcanon}} \right) = 39.0753dB \quad (21)$$

Este resultado apesar de apenas teórico mostra como esta forma de implementar o filtro seria mais eficiente considerando os coeficientes quantizados dado que insere bem menos ruído do que a Direta canônica I

Convertendo o filtro para seções de segunda ordem utilizando as funções prontas em Julia obteve-se a seguinte resposta em frequência:

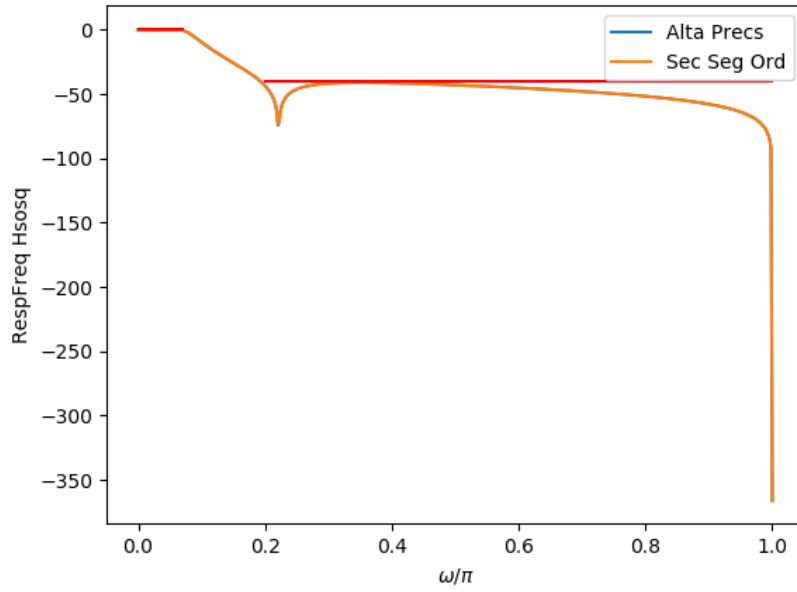
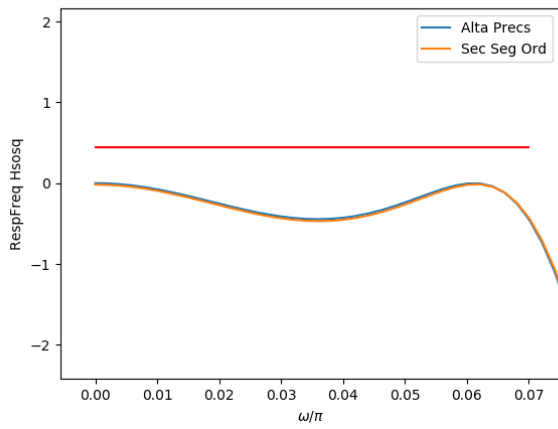
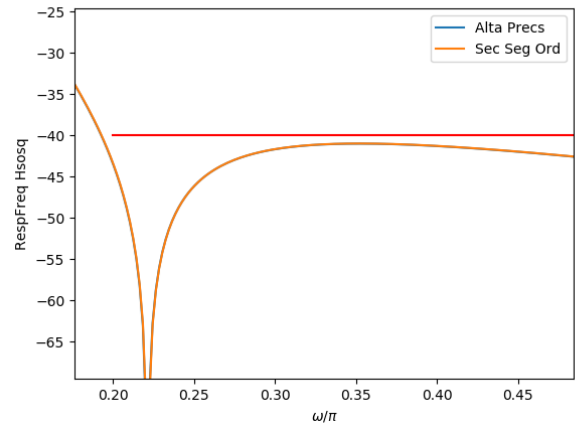


Figure 9: Resposta em frequência do filtro vs. filtro em seções de segunda ordem



(a) Zoom da banda passante



(b) Zoom da banda de rejeição

Figure 10

A resposta em frequência é praticamente idêntica a do filtro original e o novo filtro também continua cumprindo as exigências.

Passando os mesmo sinais pelo filtro dividido em secções de segunda ordem obtemos os seguintes sinais de saída e amplitudes de ruído:

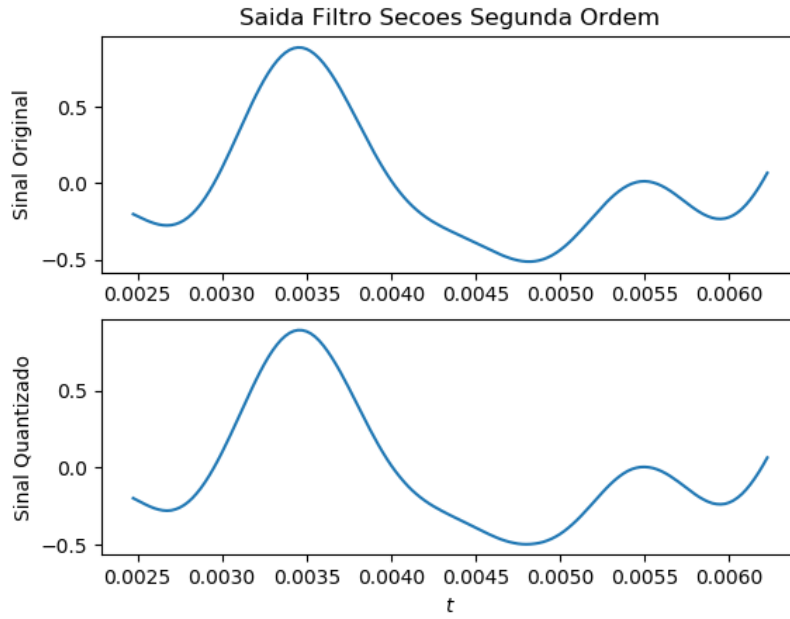


Figure 11: Sinais filtrados em secções de segunda ordem

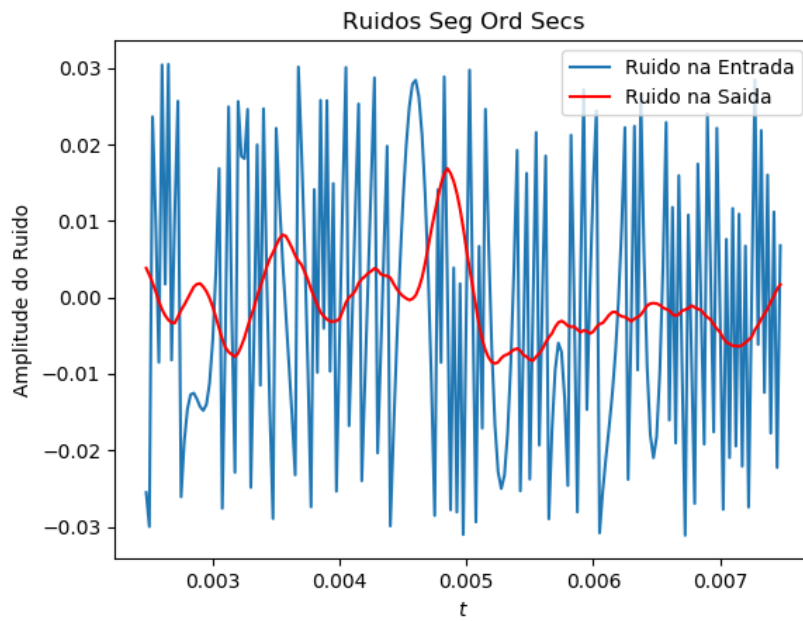


Figure 12: Comparação entre os ruídos na entrada e saída para as secções de segunda ordem

Pode-se observar uma clara melhora na amplitude do ruído na saída (em relação ao visto nos itens 5 e 6) voltando a ter uma amplitude muito próxima a obtida no item 1.



Como feito em todos os outro item a potencia experimental do filtro pode ser calculada como:

$$P_{R_{sos}} = Var\{E_{sos}\} = 2.9583 * 10^{-5} \quad (22)$$

onde  $E_{sos}$  e a subtração da saída do filtro para o sinal original da saída do sinal quantizado.

Já para calcular a potencia teoricamente vamos utilizar as mesmas expressões utilizadas no item 6 considerando que o ruído de saída do primeiro filtro é o ruído de entrada do segundo, desta forma faremos:

$$P_{RuidoIntermed} = \sigma_0^2 * \sum_{n=0}^{\infty} h_{1sos}[n]^2 + \sigma^2 * \sum_{n=0}^{\infty} h_{1sos\_denominador}[n]^2 \quad (23)$$

$$P_{RuidoSosT} = P_{RuidoIntermed} * \sum_{n=0}^{\infty} h_{2sos}[n]^2 + \sigma^2 * \sum_{n=0}^{\infty} h_{2sos\_denominador}[n]^2 = 5.6698 * 10^{-6} \quad (24)$$

pode-se ver que ha uma diferença de cerca de  $5x$  entre o valor medido e o calculado teoricamente

## Discussão

Ao longo da experiencia foi visto que a hipótese inicial sobre o ruído de quantização ser iid apesar inverossímil se provou uma aproximação valida,e razoavelmente precisa, para estimar os efeitos do mesmo.

Também foi possível observar os diversos efeitos da quantização dos coeficientes sob o comportamento destes ruídos, mostrando a importância de se projetar cuidadosamente os filtros quando trabalhando com um numero limitado de bits a fim de evitar resultados errôneos.