## Estatítica para Ciência de Dados

# Aula 5: Teste de hipóteses

Francisco A. Rodrigues
ICMC/USP
francisco@icmc.usp.br

# Aula 5: Teste de hipóteses

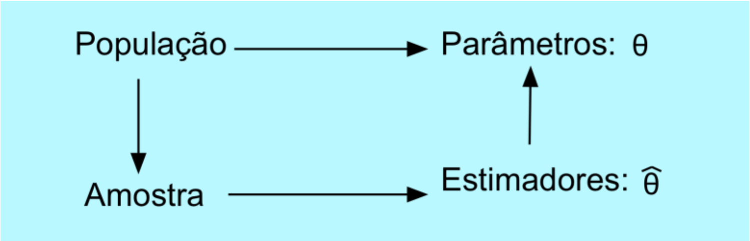
- Teste de hipóteses
  Valor p

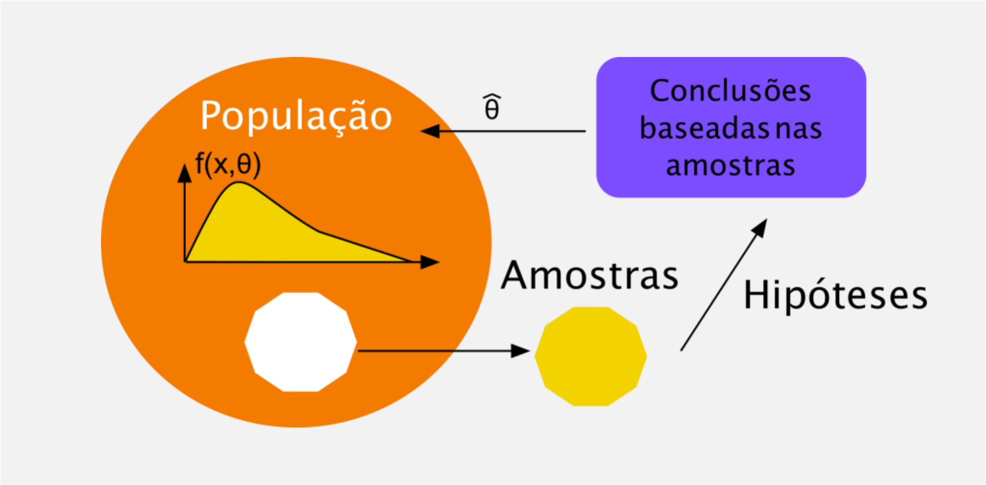
# Teste de hipóteses

- Imaginem que um acusado foi levado a um tribunal para ser julgado.
- Inicialmente, o acusado é considerado inocente. Essa é a hipótese nula.
- As evidências serão analisadas para decidir se aceitamos ou rejeitamos a hipóteses nula.

# Teste de hipóteses

- **Inferência estatística**
- **Teste de hipóteses:** uma hipótese é uma declaração sobre um parâmetro da população.



# Teste de hipóteses

- **Principais estimadores**

| Parâmetro | Estimador |
|---|---|
| Média: $\mu$ | $$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$ |
| Variância: $\sigma^2$ | $$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$ |
| Proporção: $p$ | $$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_i$$ Onde $I_i$ é igual a 1 se a observação tem a característica de interesse. |

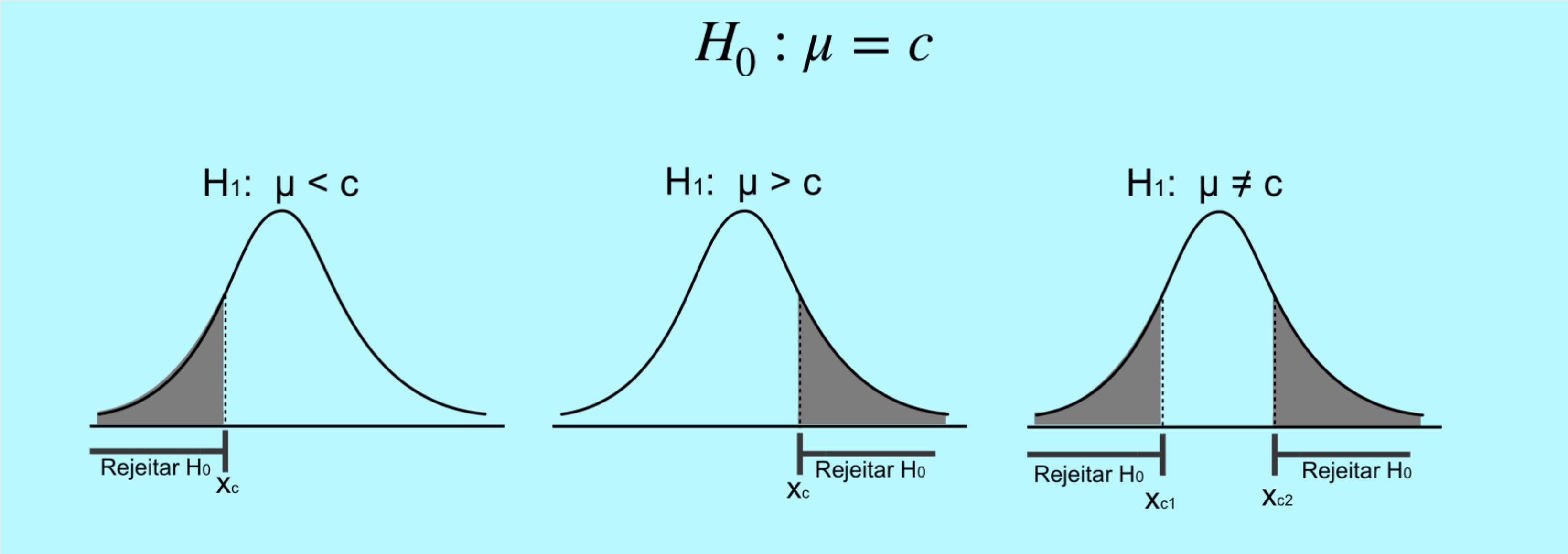
# Teste de hipóteses

- No teste de hipóteses, testamos uma informação sobre um atributo da população.
- A hipótese nula é chamada $H_0$ e a alternativa, $H_a$.
- Quando testemos a hipótese podemos cometer dois tipos de erros:

| | $H_0$ é verdadeira | $H_0$ é falsa |
|---|---|---|
| Rejeitar $H_0$ | Erro do tipo I ($\alpha$) | Sem erro |
| Aceitar $H_0$ | Sem erro | Erro do tipo II ($\beta$) |

# Teste de hipóteses

- **Teste para a média**



# Teste de hipóteses

- **Exemplo**: Uma fábrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros de uma dada marca é igual a 20 mg por cigarro. Um laboratório realiza 20 análises do índice obtendo: 22, 19, 21, 22, 20, 18, 27, 20, 21, 19, 20, 22, 17, 20, 21,18, 25, 16, 20, 21. Sabe-se que o índice de nicotina dos cigarros dessa marca se distribui normalmente com variância 4 . Pode-se aceitar a afirmação do fabricante, ao nível de 5%?

$$H_0: \mu = 20\ mg$$
$$H_a: \mu > 20\ mg$$

Aceitar $H_0$ | Rejeitar $H_0$

$\bar{x}_c$

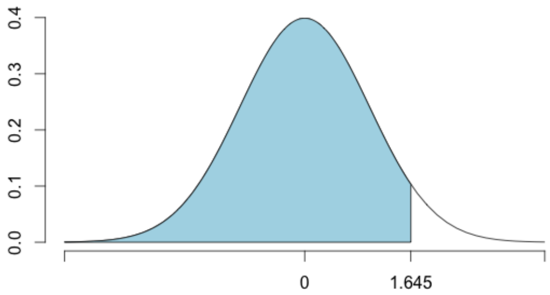
$$\alpha = P(rejeitar\ H_0 | H_0\ \text{é}\ verdadeira) = 0{,}05$$

$$P(\bar{X} > \bar{x}_c | \mu = 20) = 0{,}05$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\bar{x}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = 20\right) = 0{,}05$$

$$P\left(Z > \frac{\bar{x}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = 20\right) = 0{,}05$$

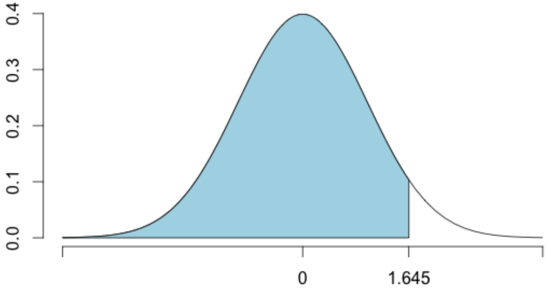
$$P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = 20\right) = 0{,}95$$



# Teste de hipóteses

- **Exemplo**: Uma fábrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros de uma dada marca é igual a 20 mg por cigarro. Um laboratório realiza 20 análises do índice obtendo: 22, 19, 21, 22, 20, 18, 27, 20, 21, 19, 20, 22, 17, 20, 21,18, 25, 16, 20, 21. Sabe-se que o índice de nicotina dos cigarros dessa marca se distribui normalmente com variância 4 . Pode-se aceitar a afirmação do fabricante, ao nível de 5%?

$$P\left(Z < \frac{\bar{x}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = 20\right) = 0{,}95$$




$$\frac{\bar{x}_c - 20}{\sqrt{4}/\sqrt{50}} = 1{,}645$$

$$\bar{x}_c = 1{,}645 \times \frac{2}{\sqrt{50}} + 20 = 20{,}73\ mg$$

$$\bar{x}_{obs} = \frac{22 + 19 + 21 + \cdots + 21}{20}$$

$$\bar{x}_{obs} = 20{,}45mg$$

Aceitar $H_0$ | Rejeitar $H_0$

$\bar{x}_{obs} = 20{,}45mg$ $\quad$ $\bar{x}_c = 20{,}73$

Assim, aceitamos $H_0$ ao nível 5%.

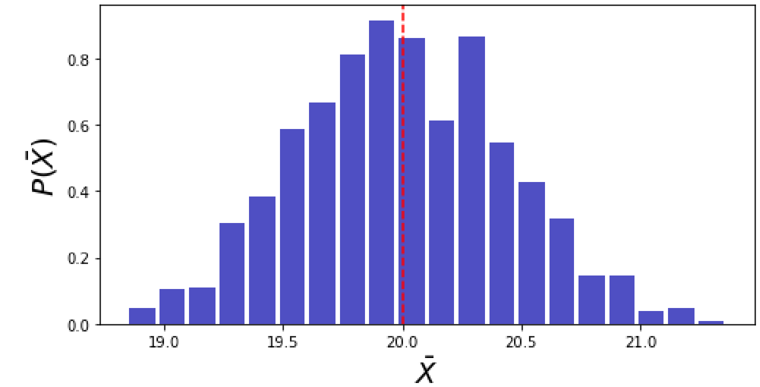
# Teste de hipóteses

**Exemplo**: Uma fábrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros de uma dada marca é igual a 20 mg por cigarro. Um laboratório realiza 20 análises do índice obtendo: 22, 19, 21, 22, 20, 18, 27, 20, 21, 19, 20, 22, 17, 20, 21,18, 25, 16, 20, 21. Sabe-se que o índice de nicotina dos cigarros dessa marca se distribui normalmente com variância 4 mg$^2$. Pode-se aceitar a afirmação do fabricante, ao nível de 5%?

$$H_0 : \mu = 20$$
$$H_1 : \mu > 20$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu = 20 # hipotese a ser testada
sigma = 2 # desvio padrao populacional
n = 20 #tamanho da amostra
Ns = 1000 # numero de simulacoes
Xm=[] #distribuicao da media amostral
for s in range(1,Ns):
    x = np.random.normal(mu, sigma, n) # sorteia uma amostra de tamanho n
    Xm.append(np.mean(x))
plt.figure(figsize=(8,4))
a = plt.hist(x=Xm, bins=20, color='#0504aa', alpha=0.7, rwidth=0.85, label = str(Ns), de
plt.axvline(x=mu, color='r', linestyle='--', label = 'Media')
plt.xlabel(r'$\bar{X}$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$P(\bar{X})$', fontsize=20)
plt.show(True)
```



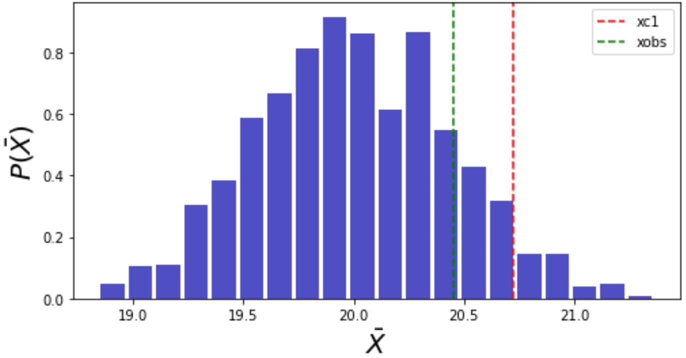
# Teste de hipóteses

```
X = [22, 19, 21, 22, 20, 18, 27, 20, 21, 19, 20, 22, 17, 20, 21,18, 25, 16, 20, 21]
xobs = np.mean(X)

alpha = 95
xc = np.percentile(Xm, alpha)
print('Xc=',xc,'  Xobs = ', xobs)
if(xobs < xc):
    print("Aceitamos H0")
else:
    print("Rejeitamos H0")
```

```
Xc= 20.721325413755377   Xobs =  20.45
Aceitamos H0
```

```
plt.figure(figsize=(8,4))
a = plt.hist(x=Xm, bins=20, color='#0504aa', alpha=0.7, rwidth=0.85, density=True)
plt.axvline(x=xc, color='red', linestyle='--', label = 'xc1')
plt.axvline(x=xobs, color='green', linestyle='--', label = 'xobs')
plt.xlabel(r'$\bar{X}$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$P(\bar{X})$', fontsize=20)
plt.legend()
plt.show(True)
```



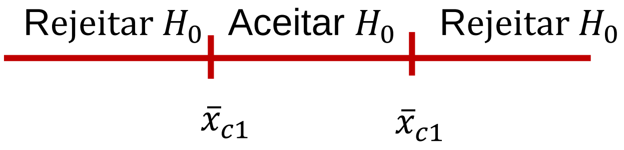
# Teste de hipóteses

- **Exemplo:** Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias, que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos: T = [9,1; 9,3; 7,2; 13.3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6; 7,5].
  Admite-se que, em geral,  o tempo de reação tem distribuição Normal com média 8 segundos e desvio padrão 2 segundos. Entretanto, o pesquisador desconfia que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Verifique a nível 6% se o tempo de reação das cobaias submetidas à substância foi alterado.

$$H_0: \mu = 8s$$
$$H_a: \mu \neq 8s$$

$$\alpha = P(rejeitar\ H_0 | H_0\ é\ verdadeira) = 0{,}06$$

$$P(\bar{X} < \bar{x}_{c1}\ ou\ \bar{X} > \bar{x}_{c2} | \mu = 8) = 0{,}06$$



# Teste de hipóteses

$H_0: \mu = 8s$
$H_a: \mu \neq 8s$

$\alpha = P(rejeitar\ H_0 | H_0\ \acute{e}\ verdadeira) = 0{,}06$

T = [9,1; 9,3; 7,2; 13,3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6; 7,5].

$\bar{x}_{obs} = 9{,}1s$

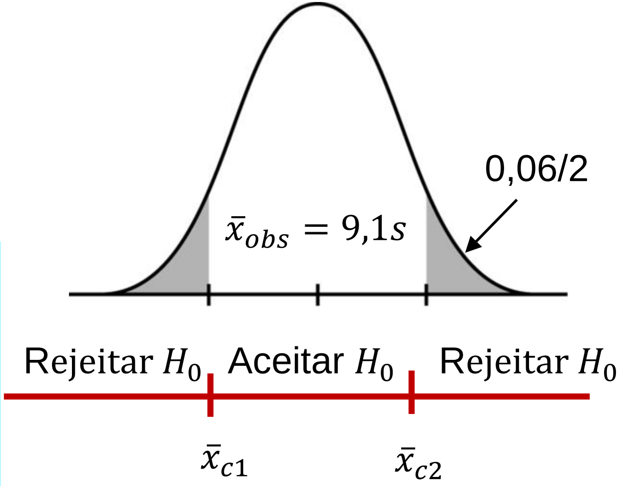
$$P(\bar{X} < \bar{x}_{c1}\ ou\ \bar{X} > \bar{x}_{c2} | \mu = 8) = 0{,}06$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{x}_{c1} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cup \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{\bar{x}_{c2} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \middle| \mu = 8\right) = 0{,}06$$

$$P\left(Z < \frac{\bar{x}_{c1} - 8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + P\left(Z > \frac{\bar{x}_{c2} - 8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0{,}06$$

$$\frac{\bar{x}_{c1} - 8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -1{,}88 \qquad \frac{\bar{x}_{c2} - 8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1{,}88$$

Aceitamos $H_0$ao nível 6%.
Temos 94% de confiança que a substância não alterou o tempo de reação das cobaias.




$\bar{x}_{c1} = 6{,}8s$ $\bar{x}_{c2} = 9{,}2s$

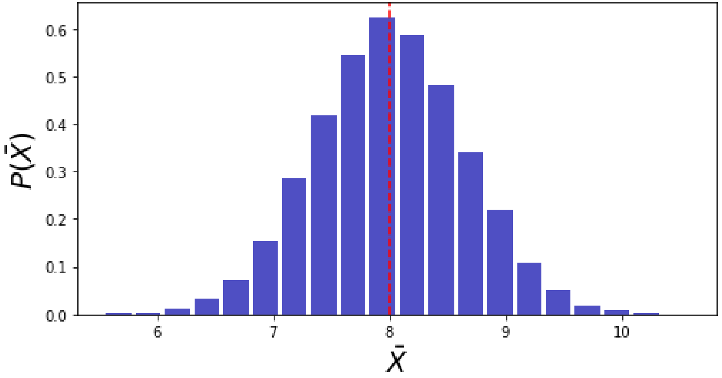
# Teste de hipóteses

**Exemplo**: Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias, que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos: T = [9,1;9,3;7,2;13,3;10,9;7,2;9,9;8,0;8,6;7,5]
Admite-se que, em geral, o tempo de reação tem distribuição Normal com média 8 segundos e desvio padrão 2 segundos. Entretanto, o pesquisador desconfia que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Verifique a nível 6% se o tempo de reação das cobaias submetidas à substância foi alterado.

$$H_0 : \mu = 8$$
$$H_1 : \mu \neq 8$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu = 8
sigma = 2
n = 10
Ns = 10000
Xm=[] #distribuicao da media amostral
for s in range(1,Ns):
    x = np.random.normal(mu, sigma, n) # sorteia uma amostra de tamanho n
    Xm.append(np.mean(x))
plt.figure(figsize=(8,4))
a = plt.hist(x=Xm, bins=20, color='#0504aa', alpha=0.7, rwidth=0.85, label = str(Ns), density=True)
plt.axvline(x=mu, color='r', linestyle='--', label = 'Media')
plt.xlabel(r'$\bar{X}$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$P(\bar{X})$', fontsize=20)
plt.show(True)
```

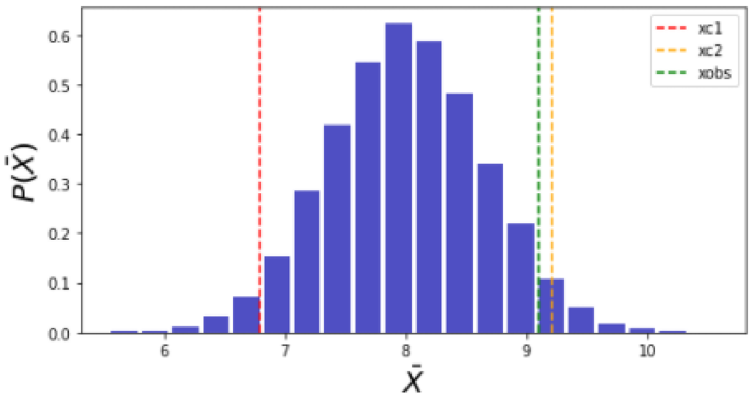


# Teste de hipóteses

```
X = [9.1,9.3,7.2,13.3,10.9,7.2,9.9,8.0,8.6,7.5]
xobs = np.mean(X)

alpha = 3
xc1 = np.percentile(Xm, alpha)
xc2 = np.percentile(Xm, 100-alpha)
print('Xc1=',xc1, '  Xc2=', xc2, '  Xobs = ', xobs)
if(xobs < xc1 or xobs > xc2):
    print("Rejeitamos H0")
else:
    print("Aceitamos H0")
```

```
Xc1= 6.7966147136751305   Xc2= 9.204806312268603   Xobs =  9.1
Aceitamos H0
```




```
plt.figure(figsize=(8,4))
a = plt.hist(x=Xm, bins=20, color='#0504aa', alpha=0.7, rwidth=0.85, density=True)
plt.axvline(x=xc1, color='red', linestyle='--', label = 'xc1')
plt.axvline(x=xc2, color='orange', linestyle='--', label = 'xc2')
plt.axvline(x=xobs, color='green', linestyle='--', label = 'xobs')
plt.xlabel(r'$\bar{X}$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$P(\bar{X})$', fontsize=20)
plt.legend()
plt.show(True)
```

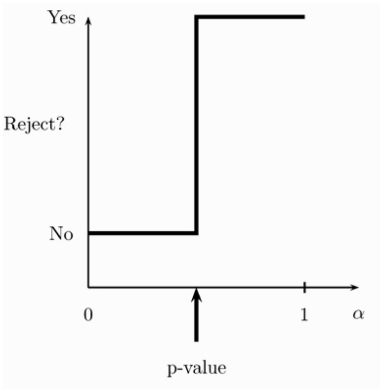
# Valor p

- Nos casos anteriores, fixamos a probabilidade de erro do tipo I para realizar o teste de hipóteses.
- Logo, a aceitação de  depende do valor de $\alpha$.
- Um outro procedimento, consiste em encontrar a probabilidade de significância, ou nível descritivo ou, simplesmente, valor p.
- A diferença em relação aos testes anteriores consiste em não construir a região crítica.
- O que se faz é indicar a probabilidade de ocorrer valores da estatística mais extremos do que o observado caso a hipótese  seja verdadeira.

# Valor p

- O valor p é o menor nível de significância $\alpha$ no qual é possível rejeitar a hipótese nula.
- É a probabilidade de observar os dados se a hipótese nula for verdadeira.
- Quanto menor o valor, maior é a evidência contra a aceitação da hipóteses nula.

  - p=0,01: Em 1 de 100 experimentos, a hipótese nula será aceita.
  - p=0,1: Em 10 de 100 experimentos, a hipótese nula será aceita.
  - p=0,3: Em 30 de 100 experimentos, a hipótese nula será aceita.
  - p=0,9: Em 90 de 100 experimentos, a hipótese nula será aceita.



# Valor p

- **Exemplo**: Uma companhia de ônibus planejou uma nova rota. Um estudo preliminar afirma que a duração da viagem pode ser considerada uma variável aleatória com distribuição normal com $\mu = 300$ minutos e $\sigma = 30$ minutos. As 10 primeiras viagens resultaram em uma média igual a 314 minutos. Esse resultado comprova, ou não, o estudo preliminar?

$H_0: \mu = 300 \, min$
$H_a: \mu > 300 \, min$

$$P(\bar{X} > 314|\mu = 300) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{314 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z > \frac{314 - 300}{\frac{30}{\sqrt{10}}}\right) = P(Z > 1{,}48)$$

$$P(Z > 1{,}48) = 1 - P(Z < 1{,}48) = 1 - 0{,}930 = 0{,}07$$

Como esse valor p não é tão pequeno, podemos dizer que há poucas evidências para aceitar $H_0$.

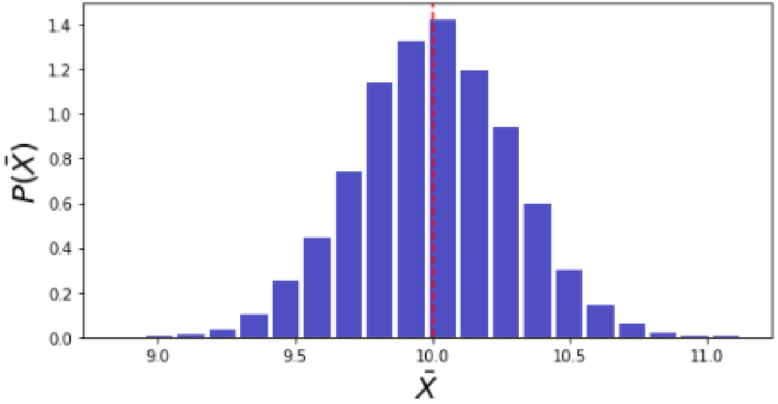
# Valor p

Vamos considerar um exemplo. Sejam as hipóteses:

$H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu < 10$

Assumimos que a população tem distribuição uniforme com desvio padrão $\sigma$, definido abaixo.

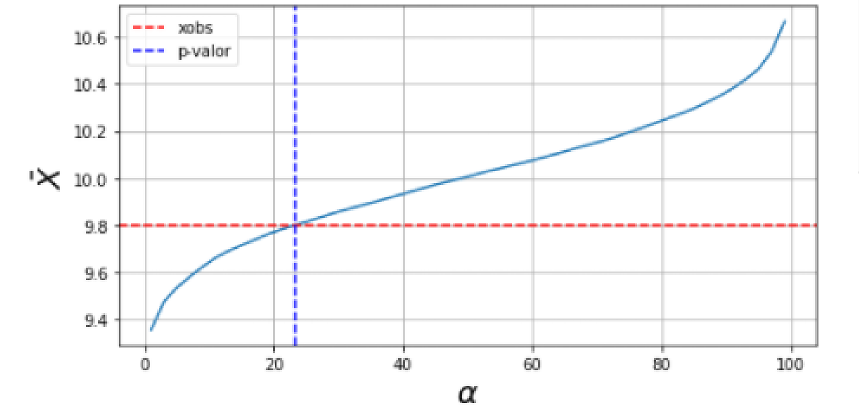


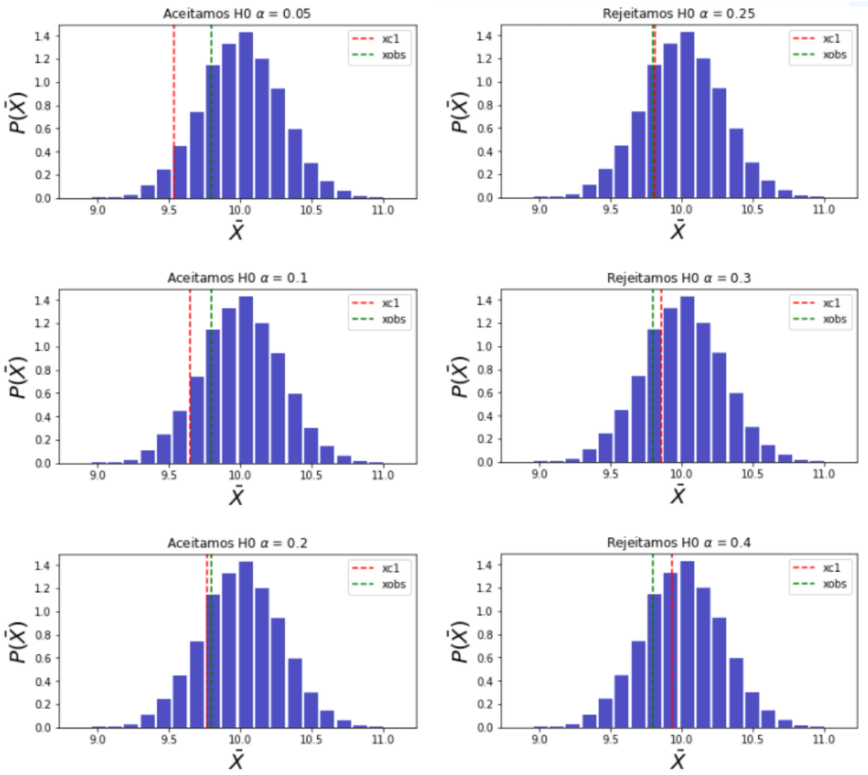

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu = 10
sigma = 2
n = 50
Ns = 10000
Xm=[] #distribuicao da media amostral
for s in range(1,Ns):
    x = np.random.normal(mu, sigma, n) # sorteia uma amostra de tamanho n
    Xm.append(np.mean(x))
plt.figure(figsize=(8,4))
a = plt.hist(x=Xm, bins=20, color='#0504aa', alpha=0.7, rwidth=0.85, label = str(Ns), density=True)
plt.axvline(x=mu, color='r', linestyle='--', label = 'Media')
plt.xlabel(r'$\bar{X}$', fontsize=20)
plt.ylabel(r'$P(\bar{X})$', fontsize=20)
plt.show(True)
```

# Valor p

```
xobs = 9.8
alphas = [5,10,20,25, 30,40]
for alpha in alphas:
    xc = np.percentile(Xm, alpha)
    plt.figure(figsize=(6,3))
    a = plt.hist(x=Xm, bins=20, color='#0504aa', alpha=0.7, rwidth=0.85, d
    plt.axvline(x=xc, color='red', linestyle='--', label = 'xc1')
    plt.axvline(x=xobs, color='green', linestyle='--', label = 'xobs')
    plt.xlabel(r'$\bar{X}$', fontsize=20)
    plt.ylabel(r'$P(\bar{X})$', fontsize=20)
    plt.legend()
    if(xobs
        plt
    else:
        plt
    plt.sho
```



# Valor p

| Nível de significância | Decisão |
|---|---|
| $p<0,01$ | Evidência muito forte contra $H_0$. |
| $0,01 < p < 0,05$ | Forte evidência contra $H_0$. |
| $0,05 < p < 0,1$ | Fraca evidência contra $H_0$. |
| $p>0,1$ | Pouquíssima ou nenhuma evidência contra $H_0$ |

# Valor p

nature International weekly journal of science

Home | News & Comment | Research | Careers & Jobs | Current Issue | Archive | Audio & Video | For A

News & Comment > News > 2019 > May > Article

NATURE | NEWS

## Online daters do better in the marriage stakes

**Those who first find each other through the Internet are more likely to stay hitched.**

Regina Nuzzo

03 June 2013

Rights & Permissions

Couples in the United States who meet online seem to enjoy at least as much marital bliss as those who meet in more traditional venues, according to the results of an online survey of more than 19,000 people funded by online dating service eHarmony.

The survey's participants married between 2005 an

Journal of Labor Economics

Volume 33, Number 4 | October 2015

SUBSCRIBER/MEMBER | BROWSE ISSUES | FORTHCOMING | CONTRIBUTORS

Previous Article | Next Article

## Happiness and Productivity

**Andrew J. Oswald,**
University of Warwick and IZA
**Eugenio Proto,**
University of Warwick and IZA
**Daniel Sgroi,**
University of Warwick

Nutrition & Diabetes

Article | Open Access | Published: 04 June 2019

## Assessment of vitamin D status and parathyroid hormone during a combined intervention for the treatment of childhood obesity

Teodoro Durá-Travé, Fidel Gallinas-Victoriano, María Jesús Chueca-Guindulain, Sara Berrade-Zubiri, María Urretavizcaya-Martinez & Lotfi Ahmed-Mohamed

ELSEVIER

International Review of Economics Education
Volume 4, Issue 1, 2005, Pages 20-45

## Happiness In University Education *

Grace Chan, Paul W. Miller, MoonJoong Tcha

Show more

https://doi.org/10.1016/S1477-3880(15)30139-0 | Get rights and content

Journal of Clinical Oncology®
An American Society of Clinical Oncology Journal

Enter words / phrases / DOI / ISBN / authors / keywords / etc.

Newest Articles | Issues | Special Content | Authors | Subscribers | About | ASCO Publications | Career C

Journal of Clinical Oncology > List of Issues > Volume 24, Issue 9 >

AIDS-RELATED CANCER

## Elevated Incidence of Lung Cancer Among HIV-Infected Individuals

Eric A. Engels, Malcolm V. Brock, Jinbo Chen, Craig M. Hooker, Maura Gillison, Richard D. Moore

OPTIONS & TOOLS
Export Citation
Track Citation
Add To Favorites
Purchase
Rights & Permissions

# Valor p

**nature** International weekly journal of science

Home | News & Comment | Research | Careers & Jobs | Current Issue | Archive | Audio & Video | For

Archive > Volume 519 > Issue 7541 > Research Highlights: Social Selection > Article

*NATURE* | RESEARCH HIGHLIGHTS: SOCIAL SELECTION

## Psychology journal bans *P* values

**Test for reliability of results 'too easy to pass', say editors.**

Chris Woolston

26 February 2015 | Clarified: 09 March 2015

PDF | Rights & Permissions

A controversial statistical test has finally met its end, at least in one journal. Earlier this month, the editors of *Basic and Applied Social Psychology* (*BASP*) announced that the journal would no longer publish papers containing *P* values because the statistics were too often used to support lower-quality research [1].

# Teste de hipóteses

- Parâmetros:
    - Média, Variância, Mediana, proporções.
- Anova
- Comparação de médias de duas populações
- Seleção de atributos em aprendizado de máquina
- Teste não paramétricos
- ...

# Sumário

- Teste de hipóteses
  Valor p

# Leitura Complementar

- Morettin e Bussab, **Estatística Básica**, Saraiva, 2017.