MBA em Ciência de Dados
ICMC-USP

Aula 2 – Exemplos

Prof. Francisco Rodrigues

1 - Assinale a afirmação **incorreta**:
a) Eventos mutuamente exclusivos nunca ocorrem ao mesmo tempo.
b) A probabilidade da união de de dois eventos mutuamente exclusivos é igual à soma de suas probabilidades.
c) A medida de probabilidade de um evento ocorre no intervalo [0,1].
d) A probabilidade de ocorrência do espaço amostral E é P(E) = 1.
e) Eventos mutuamente exclusivos são sempre independentes.

RESOLUÇÃO
A resposta a ser assinalada é a alternativa (e)

Justificativa
Eventos mutuamente exclusivos não são independentes. Na verdade, eventos mutuamente exclusivos nunca ocorrem ao mesmo tempo. Ou seja, se A e B são eventos um mesmo espaço amostral e A e B são mutuamente exclusivos (também chamados de mutuamente excludentes), então $P(A \cap B) = 0$, pois nunca ocorrem ao mesmo tempo, isto é, $A \cap B = \emptyset$. Lembrem-se que o conjunto vazio $\emptyset$ representa o evento impossível. Para que dois eventos sejam independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Com relação às outras alternativas, temos que:
(a) eventos mutuamente exclusivos nunca ocorrem ao mesmo tempo.
(b) a probabilidade da união de dois eventos é $PA \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Logo, se A e B são mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
(c) Pelos axiomas da probabilidade, a medida de probabilidade de um evento A é definida por uma função que obedece: (i) $0 \leq P(A) \leq 1$ e (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = 1$, onde $B_i \in E$, sendo E o espaço amostral.
(d) Como o espaço amostral representa o conjunto de todas as saídas possíveis de um experimento aleatório, então E representa o evento certo, ou seja, $P(E) = 1$.

2 - Uma caixa usada em um sorteio contém 5 bolas pretas numeradas de 1 a 5, sete bolas brancas numeradas de 1 a 7 e oito bolas vermelhas numeradas de 1 a 8.
i) Sorteando-se uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de encontrarmos uma bola preta?
ii) Sorteando-se uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de encontrarmos uma bola par?
iii) Sorteando-se uma bola preta, qual é a probabilidade de tal bola ser par?

RESOLUÇÃO
A resposta a ser assinalada é
[enunciado]

Justificativa

i) Temos um total de 20 bolas na caixa, sendo 5 pretas. Logo, a chance de retirarmos uma bolsa preta é:

$$P(A) = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

ii) Seja o evento B: “sortear uma bola par”. Dentre as bolas pretas, temos 2 bolas pares, dentre as brancas, 3 bolas pares e, dentre as vermelhas, 4 bolas páreas. Logo,

$$P(B) = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

iii) Nesse caso, usamos a definição de probabilidade condicional, ou seja,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/20}{5/20} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

3 - Suponha que uma pessoa em uma loja compre uma televisão com probabilidade igual a 0,4. A chance dessa pessoa comprar a televisão ou um sofá (ou ambos) é 0.7.
Sejam os eventos:
A: o indivíduo compra a televisão
B: o indivíduo compra o sofá
Determine P(B) quando:

1. A e B são independentes.
2. A e B são mutuamente exclusivos.
3. P(A | B) = 0,3.

RESOLUÇÃO

a) Se A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Logo, usando o resultado para a probabilidade condicional:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

Assim, incluindo os valores $P(A) = 0{,}4$ e $P(A \cup B) = 0{,}7$, temos:

$$0{,}7 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}4P(B)$$

$$P(B) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Portanto, se A e B são independentes, $P(B) = \frac{1}{2}$.

b) Se A e B são mutuamente exclusivos, então $P(A \cap B) = 0$ e, portanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Inserindo os valores, obtemos:

$$0{,}7 = 0{,}4 + P(B)$$

Logo,

$$P(B) = 0{,}3$$

c) Usando probabilidade condicional, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ou seja, $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.
Inserindo na equação para a probabilidade da união, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A|B)P(B)$$

Inserindo os valores:

$$0{,}7 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}3P(B)$$

Ou seja,

$$P(B) = \frac{3}{7} = 0{,}42.$$

4 - Considere duas urnas. A primeira contém cinco bolas brancas e sete bolas pretas e a segunda contém quatro bolas brancas e cinco pretas. Nós lançamos uma moeda e retiramos uma bola da primeira ou da segunda urna, dependendo do resultado do lançamento, isto é, cara (urna 1) ou coroa (urna 2). Qual é a probabilidade condicional de que o resultado do lançamento da moeda foi cara, dado que uma bola branca foi retirada?

RESOLUÇÃO

Vamos definir os eventos:

A: “sai cara”

B: “bola branca retirada”

Assim, queremos calcular $P(A|B)$. Pelo Teorema de Bayes, podemos escrever:

$$P(A|B) = \frac{P(BA|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

Mas, pelo enunciado do exercício, temos que:

$P(B|A) = 5/12$, pois selecionamos a urna 1 (saiu cara).

$P(A) = 1/2$.

$P(B|A^c) = 4/9$, pois selecionamos a urna 2 (saiu coroa). Notem que A^c é o evento complementar de A.

$P(A^c) = 1/2$, chance de sair coroa.

Assim, substituindo os valores, temos:

$$P(A|B) = \frac{\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2}} = 0{,}48$$

Assim, a probabilidade condicional de que o resultado do lançamento da moeda foi cara, dado que uma bola branca foi retirada é igual a 0,48.

5 - Uma urna contém 4 bolas brancas e 5 bolas pretas. Retira-se sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Calcule a probabilidade de as bolas selecionadas terem cores diferentes?

RESOLUÇÃO

A resposta a ser assinalada é a alternativa (c)

Justificativa

Sejam os eventos

A: “as bolas possuem cores diferentes”.

B_i: “a bola i retirada é preta”

Assim, temos que

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2^c) + P(B_1^c \cap B_2)$$

Mas, pela definição de probabilidade condicional, temos $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Assim, podemos escrever:

$$P(A) = P(B_2^c|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^c)P(B_1^c)$$

Substituindo os valores:

$$P(A) = \frac{4}{8} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

6 - Um suspeito foi preso e o delegado está 60% convencido de que o suspeito é o assaltante procurado. Se 20% da população usa tatuagem e o suspeito é tatuado, quão certo ficará o delegado de que o suspeito é culpado?

RESOLUÇÃO
A resposta a ser assinalada é
[enunciado]

Justificativa

Sejam os eventos:
A: "o suspeito é culpado"
B: "o suspeito possui tatuagem"

Assim, considerando as informações do problema:

$$P(B|A) = 1; P(A) = 0{,}6, P(A^c) = 0{,}4; P(B|A^c) = 0{,}2$$

Pelo Teorema de Bayes, podemos resolver o problema:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{1 \times 0{,}6}{1 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}4} = 0{,}88.$$

Portanto, há 88% de chance do sujeito ser culpado, aumentando assim o convencimento do delegado. Notem que esse aumento é esperado, pois a nova informação sobre o suspeito, isto é, ter a tatuagem, deve aumentar a certeza do delegado.

7 - A probabilidade de chegada de um pacote TCP/IP em um servidor daqui a 1s é 2/5 e a probabilidade de chegar um pacote de email (SMTP) é igual a 2/3. Assumindo que os pacotes são independentes determinar a probabilidade de que daqui 1s:
a) chegue os dois pacotes.
b) chegue somente um pacote TCP/IP.
c) não chegue nenhum pacote.
d) chegue pelo menos um pacote.

RESOLUÇÃO

Vamos definir os eventos:
A: "chega um pacote TCP/IP em 1s"
B: "chega um pacote SMTP em 1s"

a) Queremos que cheguem dois pacotes ao mesmo tempo, ou seja, os dois eventos A e B ocorrem simultaneamente. Então:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

b) Nesse caso, o evento A ocorre, mas o evento B não ocorre. Então:

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

c) A probabilidade de não chegar nenhum pacote:

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

d) Se chega ao menos um pacote, pode chegar um ou dois pacotes, ou seja, é a união dos dois eventos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

8 - Um laboratório que faz testes sanguíneos apresenta eficácia de 95% na detecção de uma certa doença quando, de fato, a pessoa está doente (verdadeiro positivo). A taxa de falso positivos, ou seja, quando o teste afirma que o paciente tem a doença, embora seja saudável, é de 2%. Se 0,1% da população realmente tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que o teste foi positivo.

RESOLUÇÃO

Vamos definir os eventos:

A: "o paciente tem a doença"

B: "o teste foi positivo"

Usando as informações do problema, temos:

$$P(B|A) = 0{,}9; P(A) = 0{,}001; P(B|A^c) = 0{,}02.$$

Usando o teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}001}{0{,}95 \times 0{,}001 + 0{,}02 \times 0{,}999} = 0{,}045.$$

Portanto, a probabilidade de que o paciente realmente está doente dado que o teste foi positivo é igual a 4,5%.

9 - A variável aleatória X tem função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & se -1 < x < 2 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

Calcule $P(0 \leq X \leq 1)$.

RESOLUÇÃO

Para calcularmos a probabilidade em um intervalo [a,b], usamos:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Assim, temos:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} |_0^1 = \frac{1}{9}.$$