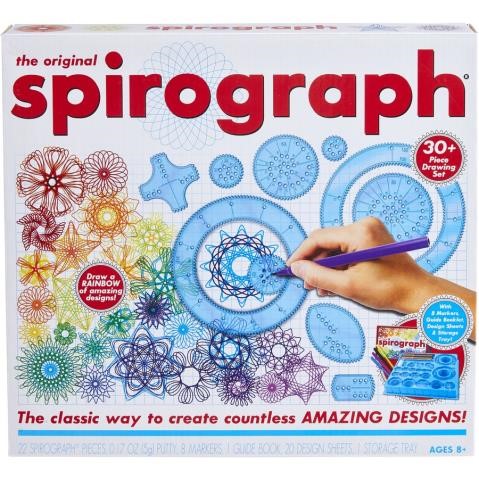
PROJETO – CURVAS PARAMETRIZADAS

**1 INTRODUÇÃO**

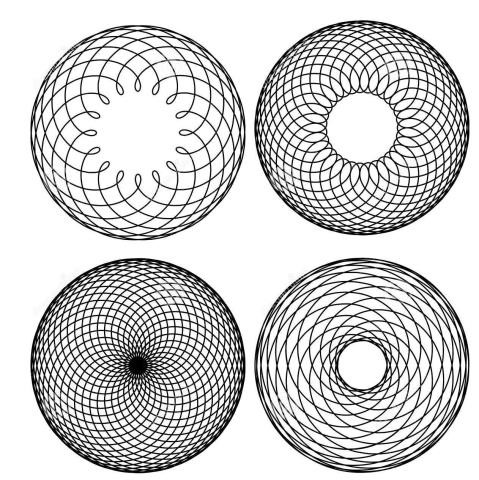
Antigamente, era muito comum um brinquedo chamado *Spirograph*, com o qual era possível desenhar diversas figuras.

Fonte: Multicherry, CC BY-SA 3.0, Fonte: https://www.bigw.com.au/product/spirograph-design-kit-

https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=34924091 with-markers/p/682495/

Veja algumas das figuras que podem ser desenhadas com ele:



Fonte: https://www.dreamstime.com/stock-images-spirograph-patterns-image25047404

O foco do projeto será o estudo da parametrização de uma figura que poderia ser construída com o *Spirograph*, a ser sorteada dentre 16 opções disponíveis. Deverá ser apresentado um estudo, na forma de **documento escrito**, cujo detalhamento é feito na seção **Entregas e avaliação**.

Como exemplo, veja a seguir o estudo que seus professores fizeram sobre uma curva que poderia ser feita com o *Spirograph*.

**Observação 1:** **este estudo inclui toda a discussão teórica, mas não mostra como fazer os cálculos numéricos**.

**Observação 2:** **não basta manter o texto deste documento e substituir os números pelos referentes à curva do seu grupo. Mais do que isso: o uso de qualquer trecho deste documento será considerado como plágio! Esperamos um trabalho original e que aborde todos os aspectos aqui descritos, não uma cópia com valores trocados.**

## 2 EXEMPLO

##### 2.1PARAMETRIZAÇÃO DA CURVA

Considere a curva 𝛾 dada por

𝑥(𝑡) = 4 cos 𝑡 − 5 cos 2𝑡 𝑦(𝑡) = 4 sen𝑡 − 5 sen 2𝑡

O parâmetro 𝑡 pode assumir valores no intervalo [0,2𝜋[.

##### 2.2PONTOS NOTÁVEIS

De posse dessa parametrização 𝛾(𝑡) = (𝑥(𝑡), 𝑦(𝑡)), podemos determinar os pontos de autointerseções. Além disso, determinando o vetor tangente, podemos encontrar os pontos em que a reta tangente à curva é horizontal ou vertical.

As coordenadas do vetor tangente são:

𝛾′(𝑡) = (−4 sen𝑡 + 10sen 2𝑡 , 4 cos𝑡 − 10 cos2𝑡 )

Nos itens a seguir, esses cálculos serão detalhados.

###### 2.2.1Pontos de autointerseção

Uma autointerseção ocorre quando, para valores 𝑢 e 𝑣 distintos, tivermos 𝛾(𝑢) = 𝛾(𝑣), com 𝑢 e 𝑣 no intervalo [0,2𝜋[.

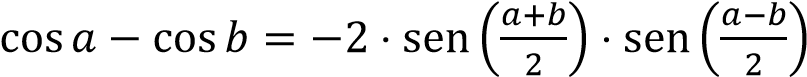
Vamos considerar que 𝑣 > 𝑢 no desenvolvimento algébrico a seguir.

4 cos𝑢 − 5 cos2𝑢 = 4 cos 𝑣 − 5 cos 2𝑣 (𝐼) {

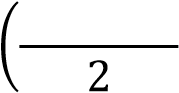
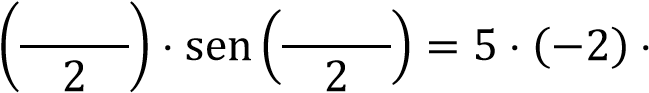
4 sen𝑢 − 5 sen2𝑢 = 4 sen 𝑣 − 5 sen2𝑣 (𝐼𝐼)

Da equação (𝐼), temos:

4(cos𝑢 − cos𝑣) = 5(cos 2𝑢 − cos 2𝑣)

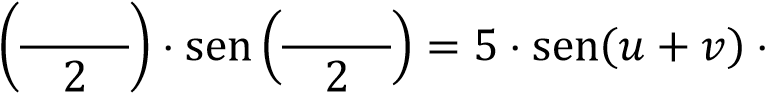
Para fatorar uma subtração de cossenos, é possível utilizar a relação . Dessa forma, podemos reescrever a última igualdade:

𝑢 + 𝑣 𝑢 − 𝑣 2𝑢 + 2𝑣 2𝑢 − 2𝑣

 4 ⋅ (−2) ⋅ sen sen ) ⋅ sen () ∴

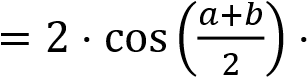
# 2

𝑢 + 𝑣 𝑢 − 𝑣

4 ⋅ sen sen(𝑢 − 𝑣) (𝐼𝐼𝐼)

Da equação (𝐼𝐼), temos:

4(sen 𝑢 − sen𝑣) = 5(sen 2𝑢 − sen2𝑣)

𝑎−𝑏

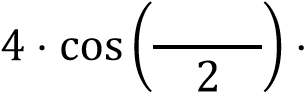
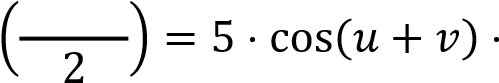
Para fatorar uma subtração de senos, é possível utilizar a relação sen𝑎 − sen𝑏 sen (). Dessa

2 forma, podemos reescrever a última igualdade:

𝑢 + 𝑣 𝑢 − 𝑣 2𝑢 + 2𝑣 2𝑢 − 2𝑣

4 ⋅ 2 ⋅ cos ( ) ⋅ sen( ) = 5 ⋅ 2 ⋅ cos ( ) ⋅ sen ( ) ∴

𝑢 + 𝑣 𝑢 − 𝑣

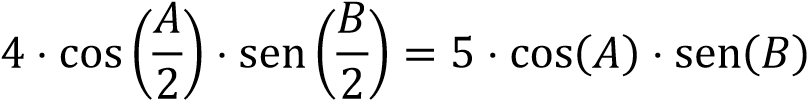
 sen  sen(𝑢 − 𝑣) (𝐼𝑉)

Observando as equações (𝐼𝐼𝐼) e (𝐼𝑉), podemos identificar termos em comum. Para facilitar os próximos passos, vamos denotar 𝑢 + 𝑣 por 𝐴 e, 𝑢 − 𝑣, por 𝐵:

### 𝐴 𝐵

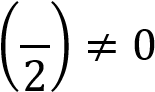
4 ⋅ sen( ) ⋅ sen ( ) = 5 ⋅ sen(𝐴) ⋅ sen(𝐵)

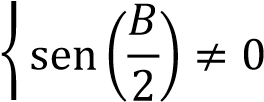
{ 2 2

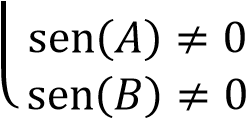


Fazendo a divisão da segunda igualdade pela primeira, membro a membro, é possível eliminar alguns termos. Porém, para que isso possa ser feito, os fatores da primeira igualdade não podem ser nulos:

𝐴

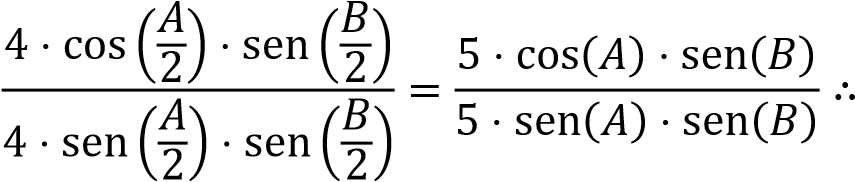
 sen

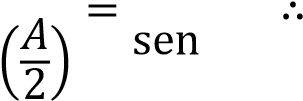
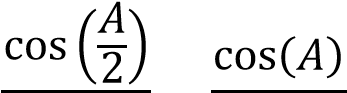
 (𝑉)



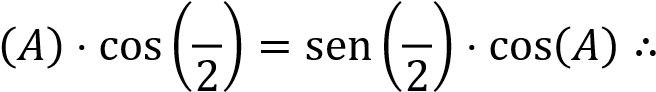
Inicialmente, vamos admitir que as condições do sistema (𝑉) estejam satisfeitas**[[1]](#footnote-1)**. Posteriormente, voltaremos a analisá-las.

Satisfeitas as condições do sistema (𝑉), podemos efetuar a divisão membro a membro:

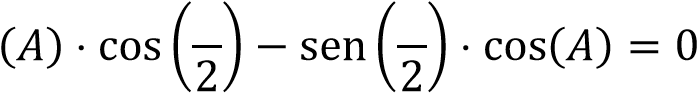


 sen 

𝐴 𝐴

sen

𝐴 𝐴

sen

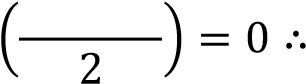
O lado esquerdo da última igualdade pode ser reescrito:

𝐴

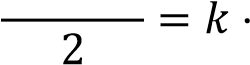
sen ( − 𝐴) = 0 2

Lembrando que 𝐴 = 𝑢 + 𝑣, temos:

−𝑢 − 𝑣

sen

−𝑢 − 𝑣

 𝜋, 𝑘 ∈ ℤ ∴

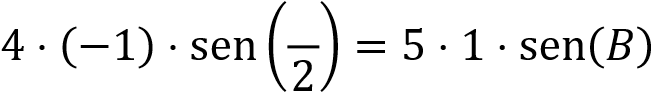
𝑢 + 𝑣 = −𝑘 ⋅ 2𝜋, 𝑘 ∈ ℤ

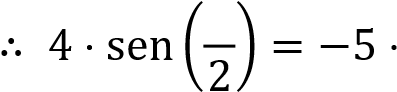
Como 𝑢 e 𝑣 pertencem ao intervalo [0,2𝜋[, o único**[[2]](#footnote-2)** caso possível é 𝑘 = −1, de modo que:

𝑢 + 𝑣 = 2𝜋

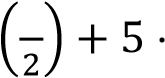
Com 𝑢 + 𝑣 = 2𝜋, a equação (𝐼𝑉) pode ser reescrita:

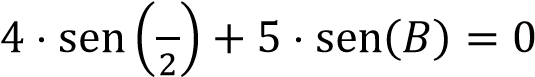
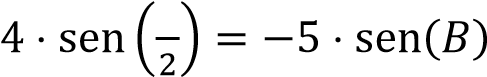
𝐵



𝐵  sen(𝐵) (𝑉𝐼)

Apesar de ser possível resolver a equação (𝑉𝐼) analiticamente, para outras figuras**[[3]](#footnote-3)** isso pode não ser viável. Dessa forma, vamos mostrar uma estratégia para obter a solução numérica.

Seja a função 𝑓(𝐵) = 4 ⋅ sen 𝐵 sen(𝐵). Note que as raízes de 𝑓 resolvem a equação (𝑉𝐼), já que, se

𝑓(𝐵) = 0, então  𝐵  e, portanto,  𝐵 .

Como 𝐵 = 𝑢 − 𝑣 e 𝑢 < 𝑣, devemos ter 𝐵 < 0. Além disso, como 𝑢 e 𝑣 pertencem ao intervalo [0,2𝜋[, devemos ter 𝑢 − 𝑣 > −2𝜋, de modo que as raízes 𝐵 devem ser tais que:

−2𝜋 < 𝐵 < 0 **[[4]](#footnote-4)**

Determinando as raízes de 𝑓 com precisão de 3 casas decimais, temos apenas uma possibilidade:

𝐵 ≈ −3,965

**Observação:** como dito anteriormente, neste exemplo não serão apresentados os cálculos numéricos, como a determinação das raízes de 𝑓. No seu projeto, o método numérico deve ser claramente **implementado[[5]](#footnote-5)** pelo trio e **explicado no texto, com auxílio de capturas de tela[[6]](#footnote-6) do aplicativo em que foi desenvolvido o método**. No caso deste exemplo, os cálculos numéricos foram feitos no Excel, mas você pode utilizar Python, caso prefira.

Como 𝐵 = 𝑢 − 𝑣:

𝑢 − 𝑣 ≈ −3,965 ∴

𝑢 ≈ −3,965 + 𝑣

Porém, como 𝑢 + 𝑣 = 2𝜋, temos:

−3,965 + 𝑣 + 𝑣 ≈ 2𝜋 ∴

𝑣 ≈ 5,124 ∴

𝑢 ≈ 1,159

Dessa forma, um ponto de autointerseção é:

𝛾(1,159) ≈ 𝛾(5,124) ≈ (5,0)

Ainda resta analisar o caso em que as condições do sistema (𝑉) não são satisfeitas. Note que, se **pelo menos uma** das quatro desigualdades não for satisfeita, a divisão membro a membro das igualdades (𝐼𝐼𝐼) e (𝐼𝑉) não pode ser feita.

Dessa forma, precisamos analisar os casos em que:

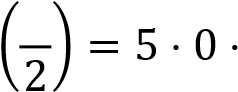
𝐴 𝐴

⦁ sen( ) = 0 ⇒ = 𝑘 ⋅ 𝜋, 𝑘 ∈ ℤ (𝑉𝐼𝐼)

2 2

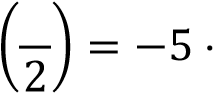
Neste caso, temos 𝐴 = 𝑘 ⋅ 2𝜋 e sen(𝐴) = 0, de modo que a equação (𝐼𝐼𝐼) é imediatamente satisfeita:

𝐵

4 ⋅ 0 ⋅ sen  sen(𝐵)

Além disso, como 𝐴 = 𝑢 + 𝑣 e 𝑢, 𝑣 ∈ [0,2𝜋[, a única possibilidade é 𝑢 + 𝑣 = 2𝜋. Reescrevendo a equação (𝐼𝑉), notamos que se trata da equação (𝑉𝐼), a qual já havíamos resolvido:

𝐵

4 ⋅ sen  sen(𝐵) (𝑉𝐼)

Como visto, sua resolução conduz ao ponto de autointerseção 𝛾(1,159) ≈ 𝛾(5,124) ≈ (5,0).

𝐵 𝐵

⦁ sen( ) = 0 ⇒ = 𝑘 ⋅ 𝜋, 𝑘 ∈ ℤ (𝑉𝐼𝐼𝐼)

2 2

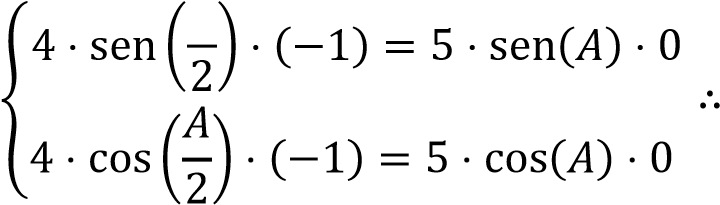
Neste caso, temos 𝐵 = 𝑘 ⋅ 2𝜋; porém, como visto anteriormente, −2𝜋 < 𝐵 < 0, de modo que não existe um valor inteiro de 𝑘 que satisfaça a igualdade.

⦁ sen(𝐵) = 0 ⇒ 𝐵 = 𝑘 ⋅ 𝜋, 𝑘 ∈ ℤ (𝐼𝑋)

Neste caso, temos 𝐵 = 𝑘 ⋅ 2𝜋; porém, como visto anteriormente, −2𝜋 < 𝐵 < 0, de modo que o único valor possível para 𝑘 é −1, ou seja, 𝐵 = −𝜋.

Se 𝐵 = −𝜋, as equações (𝐼𝐼𝐼) e (𝐼𝑉) podem ser escritas como:

𝐴



𝐴

#### sen ( ) = 0

{ 𝐴2 cos( ) = 0 2

Como não existe um mesmo arco trigonométrico cujo seno e o cosseno sejam, simultaneamente, nulos, esse sistema não admite soluções.

⦁ sen(𝐴) = 0 ⇒ 𝐴 = 𝑘 ⋅ 𝜋, 𝑘 ∈ ℤ (𝑋)

𝐴 𝐴

Neste caso, sen ( ) pode assumir os valores 0, −1 ou 1. Se sen ( ) = 0, temos um dos casos analisados

2 2

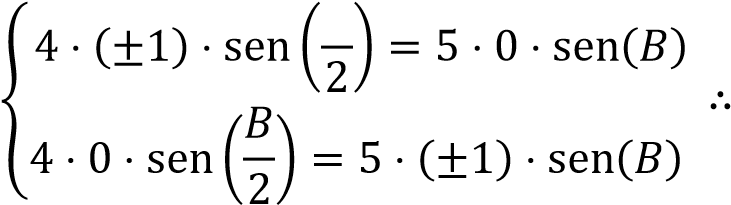
anteriormente, ou seja, podemos considerar apenas os outros dois.

𝐴 𝐴

Se sen ( ) = ±1, temos cos ( ) = 0, de modo que as equações (𝐼𝐼𝐼) e (𝐼𝑉) podem ser reescritas como:

2 2

𝐵



𝐵

sen ( ) = 0

{ 2

sen(𝐵) = 0

Ambas essas equações foram consideradas nos casos anteriores e nenhuma delas conduziu a novos pontos de autointerseção.

Segue, portanto, que o **único[[7]](#footnote-7)** ponto de autointerseção é 𝐴𝐼 = (5,0).

###### 2.2.2Pontos em que a reta tangente é vertical

Para que a reta tangente seja vertical, a componente horizontal do vetor tangente deve ser nula, com a condição de que a componente vertical não seja. Assim:

−4 sen𝑡 + 10 sen2𝑡 = 0 (𝑋𝐼)

e

4 cos 𝑡 − 10 cos 2𝑡 ≠ 0 (𝑋𝐼𝐼)

Apesar de, neste caso específico, ser possível resolver a equação (𝑋𝐼) analiticamente, para outras figuras isso pode não ser viável. Dessa forma, as soluções devem ser obtidas numericamente**[[8]](#footnote-8)**.

Considere a função 𝑔, de lei 𝑔(𝑡) = −4sen 𝑡 + 10 sen 2𝑡. Suas únicas raízes no intervalo [0,2𝜋[ são:

𝑡1 = 0

𝑡2 ≈ 1,370

𝑡3 = 𝜋

𝑡4 ≈ 4,914

Note que os quatro valores obtidos satisfazem a desigualdade (𝑋𝐼𝐼). Assim, os pontos em que a reta tangente é vertical são:

𝑉1 = 𝛾(𝑡1) = (−1,0)

𝑉2 = 𝛾(𝑡2) ≈ (5,4 ; 1,965)

𝑉3 = 𝛾(𝑡3) = (−9,0)

𝑉4 = 𝛾(𝑡4) ≈ (5,4 ; −1,957)

###### 2.2.3Pontos em que a reta tangente é horizontal

Da mesma forma, podemos determinar os pontos em que a reta tangente é horizontal, considerando que a componente vertical do vetor tangente deve ser nula e, a horizontal, não. Assim:

−4 sen𝑡 + 10 sen2𝑡 ≠ 0 (𝑋𝐼𝐼𝐼)

e

4 cos𝑡 − 10 cos2𝑡 = 0 (𝑋𝐼𝑉)

Assim como no caso da reta tangente vertical, as soluções da equação (𝑋𝐼𝑉) serão obtidas numericamente.

Considere a função ℎ, de lei ℎ(𝑡) = 4 cos 𝑡 − 10cos 2𝑡. Suas únicas raízes no intervalo [0,2𝜋[ são:

𝑡1 ≈ 0,619

𝑡2 ≈ 2,233

𝑡3 ≈ 4,051

𝑡4 ≈ 5,664

Note que os quatro valores obtidos satisfazem a desigualdade (𝑋𝐼𝐼𝐼). Assim, os pontos em que a reta tangente é horizontal são:

𝐻1 = 𝛾(𝑡1) ≈ (1,624 ; −2,405)

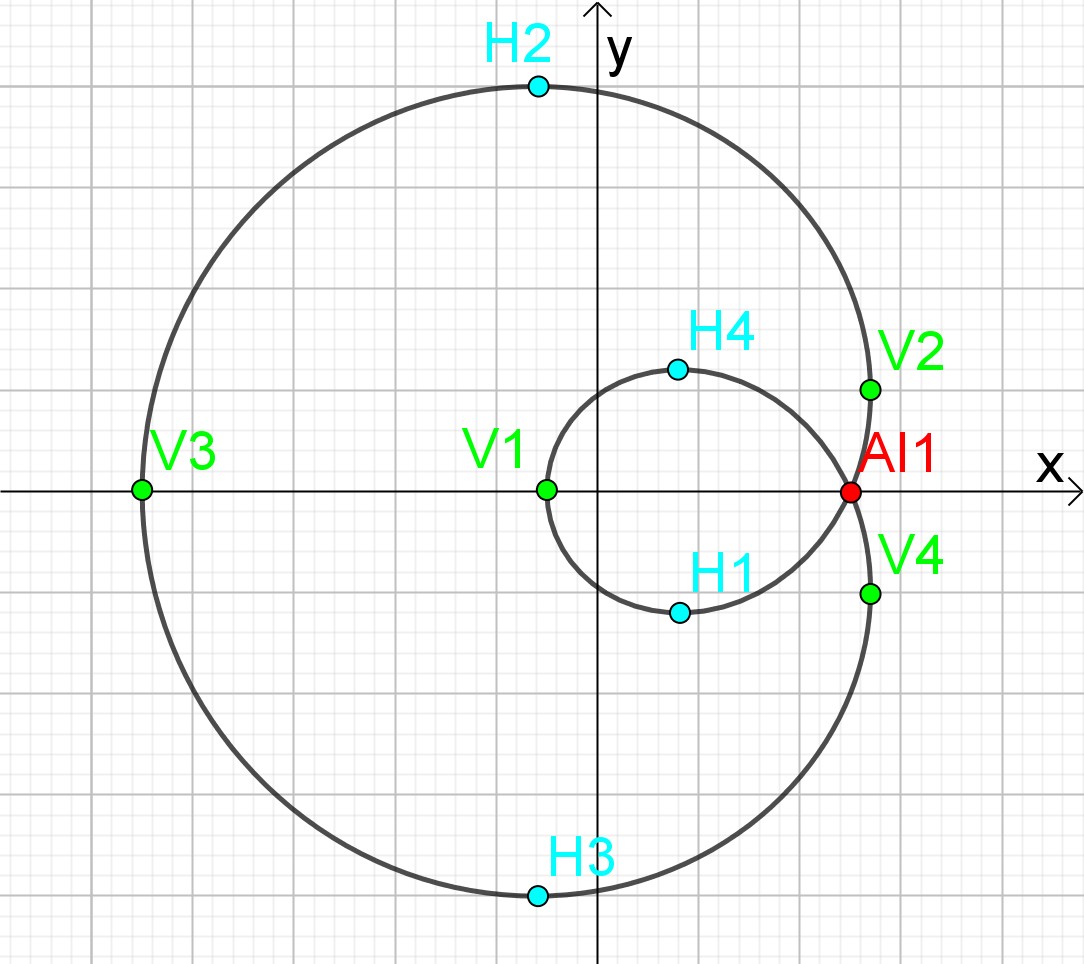
𝐻2 = 𝛾(𝑡2) ≈ (−1,240 ; 8,004)

𝐻3 = 𝛾(𝑡3) ≈ (−1,229 ; −8,004)

𝐻4 = 𝛾(𝑡4) ≈ (1,626 ; 2,405)

##### 2.3ILUSTRAÇÃO DA CURVA UTILIZANDO O GEOGEBRA

A Figura 1 mostra o traço da curva 𝛾, destacando todos os pontos notáveis calculados anteriormente.



**Figura 1 – Representação da curva no GeoGebra destacando os pontos notáveis**

Note que a figura acima está em alta resolução e exibe todos os pontos notáveis, **com a mesma nomenclatura que foi apresentada nos cálculos**. No seu projeto, siga esse exemplo.

**3 ENTREGAS E AVALIAÇÃO**

O projeto será realizado em **trios**. Para cada trio será sorteada uma única curva, dentre as descritas a seguir:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Curva 1** | 5𝑡 5𝑡  𝛾(𝑡) = (5 cos𝑡 − 4 cos ( ) , 5 sen𝑡 − 4 sen ( )) ,  2 2 | 𝑡 ∈ [0,4𝜋[ |
| **Curva 2** | 𝛾(𝑡) = (6 cos 𝑡 − 3 cos(6𝑡) , 6 sen 𝑡 − 3 sen(6𝑡)), | 𝑡 ∈ [0,2𝜋[ |
| **Curva 3** | 𝛾(𝑡) = (8 cos 𝑡 − 5 cos(4𝑡) , 8 sen 𝑡 − 5 sen(4𝑡)), | 𝑡 ∈ [0,2𝜋[ |
| **Curva 4** | 𝛾(𝑡) = (6 cos 𝑡 − 3 cos(6𝑡) , 6 sen 𝑡 − 3 sen(6𝑡)), | 𝑡 ∈ [0,2𝜋[ |
| **Curva 5** | 5𝑡 5𝑡  𝛾(𝑡) = (5 cos𝑡 − 3 cos ( ) , 5 sen𝑡 − 3 sen ( )) ,  2 2 | 𝑡 ∈ [0,4𝜋[ |
| **Curva 6** | 5𝑡 5𝑡  𝛾(𝑡) = (5 cos𝑡 − 4 cos ( ) , 5 sen𝑡 − 4 sen ( )) ,  2 2 | 𝑡 ∈ [0,4𝜋[ |
| **Curva 7** | 7𝑡 7𝑡  𝛾(𝑡) = (7 cos𝑡 − 3 cos ( ) , 7 sen𝑡 − 3 sen ( )) ,  2 2 | 𝑡 ∈ [0,4𝜋[ |
| **Curva 8** | 𝛾(𝑡) = (6 cos 𝑡 − 7 cos(3𝑡) , 6 sen 𝑡 − 7 sen(3𝑡)), | 𝑡 ∈ [0,2𝜋[ |
| **Curva 9** | 𝛾(𝑡) = (7 cos 𝑡 − 2 cos(7𝑡) , 7 sen 𝑡 − 2 sen(7𝑡)), | 𝑡 ∈ [0,2𝜋[ |
| **Curva 10** | 7𝑡 7𝑡  𝛾(𝑡) = (7 cos𝑡 − 4 cos ( ) , 7 sen𝑡 − 4 sen ( )) ,  3 3 | 𝑡 ∈ [0,6𝜋[ |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Curva 11** | 𝛾(𝑡) = (5 cos 𝑡 − 2 cos(5𝑡) , 5 sen 𝑡 − 2 sen(5𝑡)), | 𝑡 ∈ [0,2𝜋[ |
| **Curva 12** | 8𝑡 8𝑡  𝛾(𝑡) = (8 cos𝑡 − 5 cos ( ) , 8 sen𝑡 − 5 sen ( )) ,  3 3 | 𝑡 ∈ [0,6𝜋[ |
| **Curva 13** | 5𝑡 5𝑡  𝛾(𝑡) = (5 cos𝑡 − 6 cos ( ) , 5 sen𝑡 − 6 sen ( )) ,  3 3 | 𝑡 ∈ [0,6𝜋[ |
| **Curva 14** | 4𝑡 4𝑡  𝛾(𝑡) = (4 cos𝑡 − 6 cos ( ) , 4 sen𝑡 − 6 sen ( )) ,  3 3 | 𝑡 ∈ [0,6𝜋[ |
| **Curva 15** | 3𝑡 3𝑡  𝛾(𝑡) = (6 cos𝑡 − 8 cos ( ) , 6 sen𝑡 − 8 sen ( )) ,  2 2 | 𝑡 ∈ [0,4𝜋[ |
| **Curva 16** | 7𝑡 7𝑡  𝛾(𝑡) = (7 cos𝑡 − 5 cos ( ) , 7 sen𝑡 − 5 sen ( )) ,  4 4 | 𝑡 ∈ [0,8𝜋[ |

##### 3.1CONTEÚDO DO ESTUDO

O texto a ser entregue deverá contemplar os seguintes aspectos:

* pontos notáveis:

o pontos de autointerseção; **(com explicação do método numérico[[9]](#footnote-9) empregado auxiliada por figuras)** o pontos em que a reta tangente é horizontal ou vertical; **(com explicação do método numérico empregado auxiliada por figuras)**

* ilustração da curva utilizando o GeoGebra, destacando todos os pontos notáveis.

**Observação:** nos seus cálculos numéricos, o resultado obtido deve ter, no mínimo, três casas decimais de precisão para o cálculo dos valores do parâmetro.

##### 3.2FORMATO DA ENTREGA

Os grupos deverão produzir um relatório em **PDF** (gerado com o Word – **o trabalho não pode ser manuscrito[[10]](#footnote-10)**, mesmo em parte), com os tópicos mencionados na seção 3.1. Além disso, deverão ser considerados os seguintes aspectos:

* A clareza e a concisão do texto.
* A utilização correta da linguagem matemática.
* A correção e o rigor das demonstrações matemáticas.
* A formatação adequada do documento, considerando a disposição das figuras em relação ao texto, a numeração das figuras e a numeração das equações. As figuras **não podem ser extraídas de outras fontes**, devendo ser geradas pelo próprio grupo em algum *software* (por exemplo, o GeoGebra).
* A utilização do editor de equações do Word (em **todas** as equações).
* A elaboração das referências bibliográficas conforme as normas técnicas (ver observação sobre referências bibliográficas).

**A entrega é composta pelo arquivo PDF e pelos arquivos utilizados para implementar as resoluções numéricas (Excel ou Python).**

**Observação**: cuidado com **plágio**. Qualquer elemento extraído de outras fontes deve ser indicado claramente na bibliografia ou por meio de notas de rodapé.

Na elaboração do texto, utilizar as seguintes especificações:

* Tamanho A4 e orientação retrato.
* Margens de 2 cm (superior, inferior, esquerda e direita).
* Fonte Calibri, tamanho 12.
* Espaçamento de linha de 1,5, sem espaçamento de parágrafo.
* Numeração de página no canto inferior direito.

Após a entrega da versão preliminar, será feita uma correção e os grupos terão a oportunidade de refazer o relatório a partir do *feedback* dos professores. A nota do projeto será composta por 25% da nota da primeira entrega e 75% da nota da entrega final.

Juntamente à entrega final, vocês deverão preencher uma avaliação dos membros do trio, incluindo a si próprios. Essa avaliação será sobre o engajamento de cada integrante do grupo, sendo determinante na nota individual do projeto, que pode ser menor ou igual à nota do trio. A nota individual do projeto manterá a proporção em relação à nota obtida pela avaliação dos membros.

##### 3.3CORREÇÃO

O feedback será dado considerando os seguintes quatro aspectos:

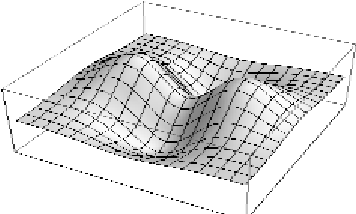
* Pontos notáveis: autointerseções
* Pontos notáveis: tangente horizontal / vertical
* Ilustração no GeoGebra
* Formatação

Cada aspecto será avaliado de acordo com as rubricas das páginas seguintes.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Aspecto** | **Conceito I** | **Conceito D** | **Conceito C** | **Conceito B** | **Conceito A** |
| **Pontos notáveis: autointerseções** | Não foi possível verificar no trabalho. | Não atingiu o mínimo (por ex., as autointerseções  foram determinadas com o  GeoGebra  **OU**  o método utilizado não foi explicado de maneira adequada  **OU**  as autointerseções foram determinadas incorretamente). | Metade ou menos das autointerseções foi determinada, porém a explicação do método foi adequada  **OU**  as autointerseções foram obtidas analiticamente  **OU**  foram obtidos os pontos de  autointerseções referentes ao caso  do denominador não nulo, porém não foi analisado o caso do denominador nulo  **OU**  foram determinados apenas os  valores do parâmetro (considerando ambos os casos do denominador), mas não as coordenadas dos pontos. | Todas as autointerseções foram determinadas com explicação adequada,  com análise do caso do denominador nulo, porém sem a precisão exigida nas instruções  **OU**  mais da metade, porém não todas, das  autointerseções foi determinada com a precisão exigida nas instruções, com  explicação adequada e análise do caso do denominador nulo. | Todas as autointerseções foram determinadas com a precisão exigida nas instruções e com explicação adequada. |
| **Pontos notáveis: tangente**  **horizontal / vertical** | Não foi possível verificar no trabalho. | Não atingiu o mínimo (por ex., os pontos foram  determinados com o  GeoGebra  **OU**  o método utilizado não foi explicado de maneira adequada  **OU**  os pontos foram determinados incorretamente). | Metade ou menos dos pontos foi determinada, porém a explicação do método foi adequada  **OU**  os pontos foram obtidos analiticamente  **OU**  foram determinados apenas os  valores do parâmetro, mas não as coordenadas dos pontos. | Todos os pontos foram determinados com explicação adequada, porém sem a precisão exigida nas instruções  **OU**  mais da metade dos pontos, porém não todos, foi determinada com a precisão exigida nas instruções, com explicação adequada  **OU**  todos os pontos foram determinados corretamente, mas apenas sob o  argumento de zerar uma das derivadas, sem análise do não anulamento da outra. | Todos os pontos foram determinados com a precisão exigida nas instruções e com explicação adequada. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Aspecto** | **Conceito I** | **Conceito D** | **Conceito C** | **Conceito B** | **Conceito A** |
| **Ilustração no GeoGebra** | Não foi possível verificar no trabalho. | Não atingiu o mínimo. | A ilustração da curva aparece (mesmo que com resolução inadequada), mas os pontos notáveis não foram  devidamente identificados  **OU**  os pontos notáveis são exibidos em figuras separadas. | A figura está nítida e alguns pontos notáveis - mas não  todos - foram destacados  **OU**  há pontos representados incorretamente  **OU**  todos os pontos foram  devidamente identificados, porém a figura tem resolução baixa. | A figura está nítida, está em alta resolução e permite a visualização, com clareza, de todos os pontos notáveis. |
| **Formatação** | Não houve qualquer esforço de formatação. | O esforço de formatação foi mínimo (por ex., restringe-se  ao uso de uma única fonte ao longo do texto ou algo similar). | Houve alguma preocupação com formatação, mas há espaço  significativo para melhorar  **OU**  o trabalho não foi entregue em PDF,  independentemente da qualidade da formatação. | O esforço de formatação foi nítido, mas ainda há pontos a serem trabalhados. | Formatação impecável, ou seja, a diagramação está adequada, há padronização no uso das  fontes e na forma de exibir figuras e equações, as figuras estão em alta resolução, a redação é boa e não há erros ortográficos. |

Engenharia



Matemática Multivariada

**Datas importantes**

**13/08/2024**: entrega das orientações do projeto

**Até 15/08/2024**: definição dos nomes do trio e sorteio das curvas

**10/09/2024**: data limite para a entrega da versão preliminar do relatório **05/11/2024**: entrega da versão final do relatório

**Sobre as referências bibliográficas**

Seguir o formato APA. (Disponível em http://formatoapa.com/). Exemplos:

**Livro**

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectiva. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

**Capítulo de livro**

Balacheff, N. y Laborde, C. (1998). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. En G. Mugny y J. Pérez (Eds.), Psicología social del desarrollo cognitivo, Capítulo 2, pp. 265-288.

Barcelona: Anthropos.

**Artigo de revista**

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 25-53.

**Informação extraída de um *website***

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Standards and Principles for School Mathematics.

[http://www.nctm.org/standards/.](http://www.nctm.org/standards/) Acesso em 15/12/2011.

**4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

[1] James Stewart. *Cálculo – Volume 2*. Tradução da 7a edição. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

1. Pode não ser o caso da sua curva! [↑](#footnote-ref-1)
2. Não se esqueça de que este é apenas um exemplo, podendo não ser o caso da sua curva. [↑](#footnote-ref-2)
3. Por exemplo, as que serão sorteadas entre os trios. [↑](#footnote-ref-3)
4. Novamente: pode não ser o caso da sua curva. [↑](#footnote-ref-4)
5. Isso significa que as raízes não podem ser determinadas por meio de bibliotecas ou funções com esse fim específico. [↑](#footnote-ref-5)
6. As capturas de tela devem exibir tanto o código, quanto o resultado de sua execução. [↑](#footnote-ref-6)
7. Último lembrete: pode não ser o caso da sua curva. [↑](#footnote-ref-7)
8. Não se esqueça de detalhar como o cálculo foi feito no seu projeto. [↑](#footnote-ref-8)
9. A explicação deve ser tanto sobre as linhas de código (por meio de comentários no próprio código), quanto sobre a lógica do método. O desenvolvimento algébrico deve ser totalmente apresentado no documento escrito. [↑](#footnote-ref-9)
10. Se a entrega for feita em manuscrito (mesmo que parcialmente), a ela será atribuída a nota ZERO. [↑](#footnote-ref-10)