Tópicos de Geometria e Topologia

Lista 7

Bruno Sant'Anna

7 de abril de 2024

Um *complexo de cadeias* é uma sequência $\mathcal{E} = \{(V_p, \partial_p)\,;\, \partial_p : V_p \to V_{p-1}\}$ onde cada V_j é um espaço vetorial e ∂_j é um mapa linear de modo que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ para todo p. Definimos os subespaços

$$\begin{aligned} Z_p(\mathcal{E}) &:= \ker(\partial_p), \text{ o espaço dos ciclos de dimensão } p \\ B_p(\mathcal{E}) &:= \operatorname{im}(\partial_{p+1}), \text{ o espaço das fronteiras de dimensão } p \end{aligned}$$

O p-ésimo *grupo de homologia* do complexo $\mathcal{E}$ é o espaço quociente

$$H_p(\mathcal{E}) = \frac{Z_p(\mathcal{E})}{B_p(\mathcal{E})}$$

a. Mostre que a sequencia $\mathcal{E}^* = \{(V_p^*, \mathrm{d}^p)\}$ é um *complexo de cocadeias*, onde V_p^* denota o espaço dual de V_p e d^p denota o operador transposto de ∂_{p+1}, ou seja, para cada $\phi \in V_p^*$, $\mathrm{d}^p(\phi) \in V_{p+1}^*$ é o funcional que associa o vetor v ao número $\phi(\partial_{p+1} v)$

b. Considere o mapa bilinear

$$\begin{aligned} b : V_p^* \times V_p &\to \mathbf{R} \\ (\phi, v) &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

mostre que b induz o homomorfismo

$$\begin{aligned} B : H^p(\mathcal{E}^*) \times H_p(\mathcal{E}) &\to \mathbf{R} \\ ([\phi], [v]) &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

e que a fórmula acima define isomorfismo $K : H^p(\mathcal{E}^*) \to H_p(\mathcal{E})^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &: \cdots \longleftarrow V_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} V_p \xleftarrow{\partial_{p+1}} V_{p+1} \longleftarrow \cdots \\ \mathcal{E}^* &: \cdots \longrightarrow V_{p-1}^* \xrightarrow{\mathrm{d}^{p-1}} V_p^* \xrightarrow{\mathrm{d}^p} V_{p+1}^* \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

a. Queremos mostrar que $\mathrm{d}^p \circ \mathrm{d}^{p-1} = 0$. Com efeito, seja $\phi \in V_{p-1}^*$ e $v \in V_{p-1}$. Utilizado a definição de d^p temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^p \circ \mathrm{d}^{p-1}(\phi)(v) &= \mathrm{d}^p(\mathrm{d}^{p-1}(\phi))(v) \\ &= \mathrm{d}^{p-1}(\phi)(\partial_{p+1} v) \\ &= \phi(\partial_p \circ \partial_{p+1} v) \end{aligned}$$

Porem, $\mathcal{E}$ é um complexo de cadeias, então $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, logo

$$\mathrm{d}^p \circ \mathrm{d}^{p-1}(\phi)(v) = \phi(0)$$

e ϕ é um funcional linear, portanto

$$\mathrm{d}^p \circ \mathrm{d}^{p-1} = 0$$

b. De fato, restrigindo b a $Z_p(\mathcal{E}^*) \times Z^p(\mathcal{E})$, queremos mostrar que $b(\phi, v) = 0$ quando $\phi \in B_p(\mathcal{E}^*)$ e $v \in B^p(\mathcal{E})$. Com efeito, seja $\psi \in V_p^*$ e $w \in V_p$ tal que $\phi = \mathrm{d}^{p-1}\psi$ e $v = \partial_{p+1}w$.

$$\begin{aligned} b(\phi, v) &= \phi(\mathrm{d}^{p-1}\psi, \partial_{p+1}w) \\ &= \mathrm{d}^{p-1}\psi(\partial_{p+1}w) \\ &= \psi(\partial_p \circ \partial_{p+1}w) \\ &= \psi(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por fim precisamos verificar que existe um isomorfismo (de espaços vetoriais) entre $H^p(\mathcal{E}^*)$ e $H_p(\mathcal{E})^*$. De fato, defina $K : H^p(\mathcal{E}^*) \to H_p(\mathcal{E})^*$ de forma que $K([\phi])([v]) = B([\phi], [v])$, com $v \in V_p$. Dessa forma, K é um isomorfismo. Primeiramente, pela definição de B é direto que K é linear.

Para verificar a injetividade seja $[\phi] \in \ker K$, queremos mostrar que $[\phi] = 0$. De fato,

$$0 = K([\phi])(v) = B([\phi], [v]) = \phi(v)$$

como isso é válido para todo $v \in V_p$, ϕ deve ser a transformação nula. Então $[\phi] = 0$.

Para verificar a sobrejetividade, precisamos mostrar que dado $\phi \in H_p(\mathcal{E})^*$ existe um $[\psi] \in H^p(\mathcal{E})^*$ tal que $K([\psi]) = \phi$. Com efeito,

$$\phi(v) = K([\psi])(v) = \psi(v)$$

para todo $v \in V_p$, ou seja, $[\psi] = [\phi]$.

Portanto, K é um isomorfismo.