Tópicos de Geometria e Topologia

LISTA 3

Bruno Sant'Anna

2 de fevereiro de 2024

Seja S o seguinte conjunto de $\mathbf{C}^2$

$$S = \left\{ (z, w) \in \mathbf{C}^2 \,; w^2 = z, w \neq 0 \right\}.$$

Mostre que o mapa $\xi : S \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ dado pela projeção em relação a primeira coordenada é um mapa de recobrimento de duas folhas.

Seja ξ a projeção para a primeira coordenada, isto é

$$\begin{aligned} \xi : S \subseteq \mathbf{C}^2 &\to \mathbf{C} \setminus \{0\} \\ (z, w) &\mapsto z \end{aligned}$$

onde $S = \left\{ (z, w) \in \mathbf{C}^2 \,; w^2 = z, w \neq 0 \right\}$.

Queremos mostrar que ξ é um mapa de recobrimento de duas folhas. Com efeito, primeiramente mostraremos que ξ é um mapa de recobrimento, ou seja, ξ é coninuo e sobrejetivo, e além disso, S é conexo por caminhos. De fato, a continuídade é trivial pois ξ é uma projeção, a sobrejetividade vem do fato de que qualquer número complexo é quadrado de algum outro número complexo, ainda mais, S é conexo por caminhos pois $z = w^2$ é uma função contínua, logo dado dois pontos em S, existe um caminho que é subconjunto do gráfico de $z = w^2$ que liga os dois pontos. Então ξ é um mapa de recobrimento.

Além disso, note também que para todo $w \in \mathbf{C}$, temos que $w^2 = (-w)^2$, então (z, w) e $(z, -w)$ são projetados no mesmo ponto por ξ, ou seja $\xi^{-1}(z) = \{(z, w), (z, -w)\}$, para algum $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, já que os pares (z, w) e $(z, -w)$ estão em S. Como para qualquer mapa de recobrimento, a cardinalidade das fibras é a mesma independente do elemento, segue que ξ é um mapa de recobrimento de duas folhas, pois toda fibra tem cardinalidade 2.