Tópicos de Geometria e Topologia

LISTA 6

Bruno Sant'Anna

22 de março de 2024

Defina a 2-forma diferencial ω em $\mathbf{R}^3$ por

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Considere $\iota : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ o mapa inclusão onde $\mathbf{S}^2$ é a esfera unitária centrada na origem

a. Mostre que a forma $\iota^*\omega$ nunca se anula, ou seja $\iota^*\omega(x) \neq 0$ em $\Lambda^2(T_x\mathbf{S}^2)$ para todo x

b. Escreva $\psi^*\iota^*\omega = f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$, onde $\psi(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ é uma parametrização de um aberto em $\mathbf{S}^2$ e calcule a integral

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

---

a. Com efeito, o mapa inclusão é dado por

$$\begin{aligned}\iota : \mathbf{S}^2 &\to \mathbf{R}^3\\ x &\mapsto x\end{aligned}$$

consequentemente, seja $\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbf{R}^3)$, queremos calcular o *pullback* de ω por ι, isto é

$$\iota^*\omega(x,y,z) = \omega(\iota(x,y,z))$$

porém, se (x,y,z) está na esfera,

$$\iota^*\omega(x,y,z) = \omega(x,y,z).$$

Logo, $\iota^*\omega = \omega|_{\mathbf{S}^2}$.

Para mostrar que $\iota^*\omega$ nunca se anula, considere $x = (x_1,x_2,x_3)$ na esfera e $v = (-x_3, 0, x_1)$, $w = (x_2, -x_1, 0)$ não nulos e ortogonais a x. Aplicando o par de vetores em $\iota^*\omega(x) = \omega_x$ temos

$$\begin{aligned}\omega_x(v,w) &= x_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z(v,w) + x_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x(v,w) + x_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y(v,w)\\
&= x_1\begin{vmatrix}\mathrm{d}y(v) & \mathrm{d}z(v)\\ \mathrm{d}y(w) & \mathrm{d}z(w)\end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix}\mathrm{d}z(v) & \mathrm{d}x(v)\\ \mathrm{d}z(w) & \mathrm{d}x(w)\end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix}\mathrm{d}x(v) & \mathrm{d}y(v)\\ \mathrm{d}x(w) & \mathrm{d}y(w)\end{vmatrix}\\
&= x_1\begin{vmatrix}0 & x_1\\ -x_1 & 0\end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix}x_1 & -x_3\\ 0 & x_2\end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix}-x_3 & 0\\ x_2 & -x_1\end{vmatrix}\\
&= x_1x_1^2 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2\\
&= x_1\end{aligned}$$

logo, $\iota^*\omega(x) = 0$ quando $x_1 = 0$.

De forma análoga, agora com $v = (x_2, -x_1, 0)$ e $w = (0, x_3, -x_2)$ temos

$$\omega_x(v,w) = x_2$$

ou seja, $\iota^*\omega(x) = 0$ quando $x_2 = 0$, já com $v = (-x_3, 0, x_1)$ e $w = (0, -x_3, x_2)$, temos

$$\omega_x(v,w) = x_3$$

então, $\iota^*\omega(x) = 0$ quando $x_3 = 0$.

Portanto, $\iota^*\omega(x) = 0$, se, e somente se $x = 0$, que não é um ponto da esfera, então a forma $\iota^*\omega$ nunca se anula.

b. Agora calculando o pullback de ω por $\psi = \psi(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$. Usando o que foi provado no item (a), temos

$$\begin{aligned}\psi^*\iota^*\omega &= \psi^*\omega \\ &= \psi^*(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)\end{aligned}$$

pela linearidade do pullback

$$\psi^*\omega = \psi^*(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + \psi^*(y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) + \psi^*(z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$$

Calculando cada parte individualmente temos

$$\begin{aligned}\psi^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= \mathrm{d}(\sin\theta\sin\theta) \wedge \mathrm{d}(\cos\phi) \\ &= (\sin\phi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\phi\sin\theta\,\mathrm{d}\phi) \wedge (-\sin\phi\,\mathrm{d}\phi)\end{aligned}$$

pela distributividade do produto wedge, e do fato que $\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\phi = 0$

$$\psi^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = -\sin^2\phi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi.$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\psi^*(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) &= \mathrm{d}(\cos\theta) \wedge \mathrm{d}(\sin\phi\cos\theta) \\ &= (-\sin\theta\,\mathrm{d}\phi) \wedge (-\sin\phi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\phi) \\ &= \sin^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta \\ &= -\sin^2\phi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\psi^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= \mathrm{d}(\sin\phi\cos\theta) \wedge \mathrm{d}(\sin\phi\sin\theta) \\ &= (-\sin\phi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\phi\cos\theta\,\mathrm{d}\phi) \wedge (\sin\phi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\phi\sin\theta\,\mathrm{d}\phi) \\ &= \sin\phi\cos\phi\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta + \sin\phi\cos\phi\cos^2\theta\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta \\ &= -\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Por fim, juntando tudo

$$\begin{aligned}\psi^*\omega &= \psi^*(x)\,\psi^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + \psi^*(y)\,\psi^*(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) + \psi^*(z)\,\psi^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\ &= -\sin^3\phi\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi - \sin^3\phi\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi - \sin\phi\cos^2\phi\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= (-\sin^3\phi\cos^2\theta - \sin^3\phi\sin^2\theta - \sin\phi\cos^2\phi)\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= (-(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin^3\phi - \sin\phi\cos^2\phi)\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= (-\sin^2\phi\sin\phi - \sin\phi\cos^2\phi) \\ &= (-(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\sin\phi)\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= -\sin\phi\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Logo, $f(\theta,\phi) = -\sin\phi$. Portanto, podemos calcular a integral

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} -\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi &= -\int_0^\pi \sin\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= -2\pi \int_0^\pi \sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= 2\pi[\cos\pi - \cos 0] \\ &= -4\pi\end{aligned}$$