Tópicos de Geometria e Topologia

Lista 1

Bruno Sant'Anna

14 de novembro de 2023

Seja X um conjunto infinito. Considere as seguintes coleções de subconjuntos de X.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \{U \subseteq X\,; X \setminus U \text{ é finito ou todo } X\}\\ \mathcal{T}_2 &= \{U \subseteq X\,; X \setminus U \text{ é infinito ou vazio}\}\\ \mathcal{T}_3 &= \{U \subseteq X\,; X \setminus U \text{ é enumerável ou todo } X\}\end{aligned}$$

Para cada uma das coleções determine se é uma topologia.

Para que uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de um conjunto X seja uma topologia, é necessário mostrar que

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. A interseção finita de elementos de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.
3. A união qualquer de elementos de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}_1$ é uma topologia em X

1. $\emptyset \in \mathcal{T}_1$, de fato, $X \setminus \emptyset = X$, que não é um conjunto finito, mas é todo X. Além disso, $X \in \mathcal{T}_1$, já que $X \setminus X = \emptyset$, que é um conjunto finito.
2. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1$, precisamos mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$, com efeito, pela definição da topologia $\mathcal{T}_1$, isso é equivalente a mostrar que $X \setminus (A_1 \cap A_2)$ é finito ou X. Usando as leis de De Morgan, temos que
$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$
como A_1 e A_2 estão em $\mathcal{T}_1$, segue que $(X \setminus A_1)$ e $(X \setminus A_2)$ são conjuntos finitos, e a união de conjuntos finitos é finita, logo, $X \setminus (A_1 \cap A_2)$ é finito e $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$.
3. Seja $\{A_\lambda\}$ uma coleção de abertos em X em relação a topologia $\mathcal{T}_1$. Precisamos mostrar que $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, onde Λ é um conjunto de indices, também é aberto em X. De fato, como no caso anterior, isso é o mesmo que mostrar que $X\setminus A$ é finito. Novamente usando as leis de De Morgan, temos
$$X \setminus \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$
Como todos $X \setminus A_\lambda$ são finitos, a interseção também será, então $X \setminus A$ é finito, e por isso, $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}_1$

Como as propiedades foram todas satisfeitas, podemos afirmar que $\mathcal{T}_1$ é uma topologia sobre X.

$\mathcal{T}_2$ não é uma topologia em X.

Note que a propiedade 3 não é válida na topologia $\mathcal{T}_2$. De fato, seja $\{A_\lambda\}$ uma coleção de elementos de $\mathcal{T}_2$, nesse caso para todo $\lambda \in \Lambda$ temos que $X \setminus A_\lambda$ é infinito, porem a interseção de conjuntos infinitos não é necessariamente infinita, então é possível que $X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ seja finito, ou seja, nessa situação $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \notin \mathcal{T}_2$.

$\mathcal{T}_3$ é uma topologia em X.

1. $\emptyset \in \mathcal{T}_3$, pois $X \setminus \emptyset = X$, e $X \in \mathcal{T}_3$, já que $X \setminus X = \emptyset$ que é um conjunto enumerável pois é finito.

2. Da mesma forma que mostramos que a interseção de elementos de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$ para a topologia $\mathcal{T}_1$, podemos mostrar que o mesmo vale para a topologia $\mathcal{T}_3$. Com efeito, dados $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_3$, daí, $X \setminus A_1$ e $X \setminus A_2$ são enumeráveis. Para que $A_1 \cap A_2$ esteja em $\mathcal{T}_3$ é necessário que $X \setminus (A_1 \cap A_2)$ seja enumerável, de fato, pela lei de De Morgan isso é equivalente a $(X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$, que é enumerável pois é uma união finita de conjuntos enumeráveis, então, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_3$.

3. Seja $\{A_\lambda\}$ uma coleção de abertos em X em relação a topologia $\mathcal{T}_3$. Usando os mesmos argumentos dos casos anteriores, se $A_\lambda \in \mathcal{T}_3$, então $X \setminus A_\lambda$ é enumerável, daí

$$X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$

   como a interseção de conjuntos enumeráveis é enumerável, temos que $X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é enumerável e $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}_3$

Assim, está demonstrado que $\mathcal{T}_3$ é uma topologia em X