Tópicos de Geometria e Topologia

LISTA 2

Bruno Sant'Anna

14 de janeiro de 2024

Sejam X, Y, Z espaços topológicos, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funções contínuas e $p \in X$. Mostre que

a. O homomorfismo induzido $(g \circ f)_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Z, (g \circ f)(p))$ coincide com a composição dos respectivos homomorfismos induzidos $g_* \circ f_*$, onde $f_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, f(p))$ e $g_* : \pi_1(Y, f(p)) \to \pi_1(Z, (g \circ f)(p))$.

b. Se I_X denota a identidade de X, então o homomorfismo induzido $(I_X)_*$ coincide com o homomorfismo identidade do grupo fundamental $\pi_1(X, p)$.

---

a. Se $\psi : X \to Y$ é um mapa contínuo e $p \in X$, então o mapa

$$\begin{aligned} \psi_* : \pi_1(X, p) &\to \pi_1(X, \psi(p)) \\ [\gamma] &\mapsto [\psi \circ \gamma] \end{aligned}$$

é dito mapa induzido de ψ e está bem definido

Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ mapas contínuos entre espaços topologicos e $p \in X$. Pela definição de mapa induzido temos

$$(g \circ f)_*[\gamma] = [(g \circ f) \circ \gamma]$$

como a composição de mapas é associativa

$$[(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)]$$

e novamente utilizando a definiçao de mapa induzido

$$[g \circ (f \circ \gamma)] = g_*[f \circ \gamma] = (g_* \circ f_*)[\gamma].$$

Então de fato, o homomorfismo induzido $(g \circ f)_*$ coincide com a composição $g_* \circ f_*$

b. Se $I_X : X \to X$ é a identidade de X, então o mapa induzido $(I_X)_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, p)$ é a identidade de $\pi_1(X, p)$. Com efeito

$$(I_X)_*[\gamma] = [I_X \circ \gamma] = [\gamma]$$

ou seja, a classe de γ por meio de $(I_X)_*$ foi levada a ela mesma. Portanto $(I_X)_*$ é a identidade em $\pi_1(X, p)$