Tópicos de Geometria e Topologia

LISTA 4

Bruno Sant'Anna

19 de fevereiro de 2024

Sejam X, Y, Z espaços topológicos conexos e localmente conexos por caminhos. Considere mapas contínuos $p : X \to Y$, $q : Y \to Z$ e $X \to Z$ tais que $r = q \circ p$ e assuma que p e r são mapas de recobrimento. Mostre que q é um mapa de recobrimento.

De fato, $q : Y \to Z$ é um mapa de recobrimento. Como $r : X \to Z$ é um mapa de recobrimento, então, dado $z \in Z$ existe uma vizinhança Γ de z tal que $r^{-1}(\Gamma) = \sqcup \Omega_\alpha$. Da definição de r segue que

$$(q \circ p)^{-1}(\Gamma) = p^{-1} \circ q^{-1}(\Gamma) = \bigsqcup \Omega_\alpha$$

como p é mapa de recobrimento, em particular p é sobrejetívo, consequentemente tem inversa à esquerda, daí

$$\begin{aligned} p \circ p^{-1} \circ q^{-1}(\Gamma) &= p\left(\bigsqcup \Omega_\alpha\right) \\ q^{-1}(\Gamma) &= \bigsqcup p(\Omega_\alpha) \end{aligned}$$

onde $p(\Omega_\alpha)$ é sempre aberto pois mapas de recobrimentos levam conjuntos abertos em abertos. Ou seja, dado um $z \in Z$ existe uma vizinhança de z tal que a imagem inversa por q é a união disjunta de abertos em Y

Além disso precisamos mostrar que $q|_{p(\Omega_\alpha)} : p(\Omega_\alpha) \to \Gamma$ é um homeomorfismo. Com efeito, como r é mapa de recobrimento, sabemos que $r|_{\Omega_\alpha} : \Omega_\alpha \to \Gamma$ é um homeomorfismo, e $r = q \circ p$, então

$$\begin{aligned} r|_{\Omega_\alpha} &= (q \circ p)|_{\Omega_\alpha} \\ &= q|_{p(\Omega_\alpha)} \circ p|_{\Omega_\alpha} \end{aligned}$$

onde $p|_{\Omega_\alpha}$ é um homeomorfismo pois p é mapa de recobrimento, então tem inversa $p|_{\Omega_\alpha}^{-1}$, daí

$$q|_{p(\Omega_\alpha)} = r|_{\Omega_\alpha} \circ p|_{\Omega_\alpha}^{-1}$$

Logo, $q|_{p(\Omega_\alpha)}$ é uma composição de homeomorfismos, que é um homeomorfismo.

Portanto, $q : Y \to Z$ é um mapa de recobrimento.