Tópicos de Geometria e Topologia

LISTA 5

Bruno Sant'Anna

02 de março de 2024

Seja Q uma forma quadrática positiva definida em $\mathbf{R}^n$. Mostre que $Q^{-1}(y)$ é difeomorfo à esfera $\mathbf{S}^{n-1}$ para todo $y > 0$

Dado uma forma quadrática Q temos que

$$Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

onde A é uma matriz simétrica e positiva definida. Para definir o difeomorfismo, vale lembrar que qualquer matriz simétrica pode ser transformada em uma matriz diagonal, pela relação $\Lambda = P^T AP$, onde Λ é a matriz diagonal de autovalores de A, e P é uma matriz inversível.

Dado $\mathbf{x} \in Q^{-1}(y)$, isto é, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = y$, defina o mapa

$$\begin{aligned} \psi : Q^{-1}(y) &\to Q^{-1}(y) \\ \mathbf{x} &\mapsto P\mathbf{x} \end{aligned}$$

onde P é a matriz que diagonaliza A

Por outro lado, defina o mapa

$$\begin{aligned} \phi : Q^{-1}(y) &\to Q^{-1}(y) \\ \mathbf{x} &\mapsto S\mathbf{x} \end{aligned}$$

com S sendo

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\gamma_n} \end{pmatrix}$$

onde $\gamma_i = y\lambda_i^{-1}$ e $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ é o i-ésimo autovalor. Note que S está bem definida, já que A é uma matriz simétrica e positiva definida, então, todos seus autovalores são positivos, ou seja, possuem inverso multiplicativo e raiz quadrada.

Compondo os dois mapas, temos

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi : Q^{-1}(y) &\to Q^{-1}(y) \\ \mathbf{x} &\mapsto PS\mathbf{x} \end{aligned}$$

Perceba que $\phi \circ \psi \left(Q^{-1}(y)\right) = \mathbf{S}^{n-1}$. Com efeito, seja $\mathbf{x} \in Q^{-1}(y)$, fazendo $\phi \circ \psi(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} (PS\mathbf{x})^T A(PS\mathbf{x}) &= y \\ \mathbf{x}^T S^T (P^T AP)S\mathbf{x} &= y \\ \mathbf{x}^T (S^T \Lambda S)\mathbf{x} &= y \\ \mathbf{x}^T yI_n\mathbf{x} &= y \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} &= 1 \end{aligned}$$

Pela outra definição de forma quadrática, segue que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 = 1$, ou seja $\phi \circ \psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{S}^{n-1}$

Por fim, é fácil ver que $\widetilde{\phi \circ \psi} : Q^{-1}(y) \to \mathbf{S}^{n-1}$ é um difeomorfismo, pois $\widetilde{\phi \circ \psi}$ é uma transformação linear, que em particular é um difeomorfismo.