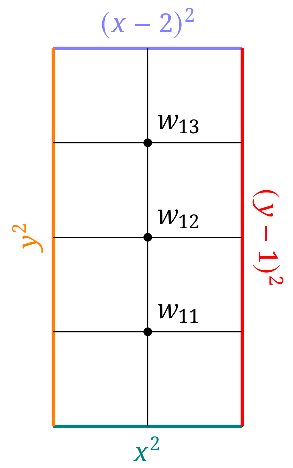
Bruno Sant'Anna
4 de abril de 2024

12.1 Equações elípticas

1. Utilize o algoritmo 12.1 para determinar uma solução aproximada da equação diferencial parcial elíptica
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$$
com as condições
$$\begin{cases} u(x, 0) = x^2 & x \in [0, 1] \\ u(x, 2) = (x - 2)^2 & x \in [0, 1] \\ u(0, y) = y^2 & y \in [0, 2] \\ u(1, y) = (y - 1)^2 & y \in [0, 2] \end{cases}$$
Use $h = k = \frac{1}{2}$ e compare os resultados com a solução real $u(x, y) = (x - y)^2$



$$2(\lambda + 1) w_{ij} - w_{i-1\,j} - w_{i+1\,j} - \lambda \left(w_{i\,j-1} + w_{i\,j+1}\right) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

onde $\lambda = (k/h)^2$, nesse caso $h = k$, então $\lambda = 1$
$i = 1$ e $j = 1$:
$$4w_{11} - w_{01} - w_{21} - w_{10} - w_{12} = -h^2 f(x_1, y_1)$$
$i = 1$ e $j = 2$:
$$4w_{12} - w_{02} - w_{22} - w_{11} - w_{13} = -h^2 f(x_1, y_2)$$
$i = 1$ e $j = 3$:
$$4w_{13} - w_{03} - w_{23} - w_{12} - w_{14} = -h^2 f(x_1, y_3)$$

substituindo os valores ja conhecidos pelas condições de fronteira, temos o sistema
$$\begin{cases} 4w_{11} - w_{12} = -0.25 \\ -w_{11} + 4w_{12} - w_{13} = 0 \\ - w_{12} + 4w_{13} = 3.75 \end{cases}$$

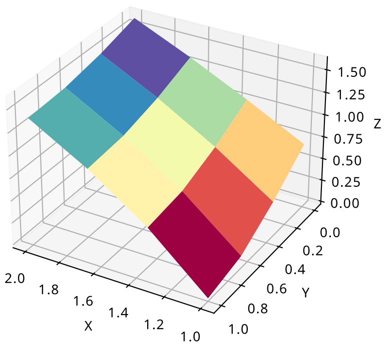
com solução
$$(w_{11}, w_{12}, w_{13}) = (0, 0.25, 1)$$
e nesses pontos a solução real é
$$(u(x_1, y_1), u(x_1, y_2), u(x_1, y_3)) = (0, 0.25, 1)$$

2. Utilize o algoritmo 12.1 para determinar uma solução aproximada da equação diferencial parcial elíptica
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in [1, 2] \times [0, 1]$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = 2\ln x & x \in [1,2] \\ u(x,1) = \ln(x^2+1) & x \in [1,2] \\ u(1,y) = \ln(y^2+1) & y \in [0,1] \\ u(2,y) = \ln(y^2+4) & y \in [0,1] \end{cases}$$

Use $h = k = \frac{1}{3}$ e compare os resultados com a solução real $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.693147 & 1.021651 & 1.329135 & 1.609437 \\ 0.367724 & 0.798500 & 1.169820 & 1.491654 \\ 0.105360 & 0.634804 & 1.059992 & 1.413693 \\ 0.000000 & 0.575364 & 1.021651 & 1.386294 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.693147 & 1.021651 & 1.329135 & 1.609437 \\ 0.367724 & 0.798507 & 1.170071 & 1.491654 \\ 0.105360 & 0.635988 & 1.060871 & 1.413693 \\ 0.000000 & 0.575364 & 1.021651 & 1.386294 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000007 & 0.000250 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.001184 & 0.000879 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{bmatrix}$$

3. Obtenha aproximações para as soluções das operações diferenciais parciais elípticas seguintes

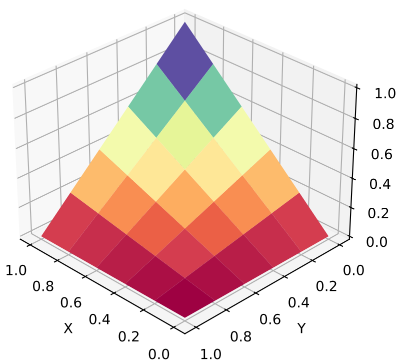
   a.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 & x \in [0,1] \\ u(x,2) = x & x \in [0,1] \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,1] \\ u(1,y) = y & y \in [0,1] \end{cases}$$

Use $h = k = 0.2$ e compare os resultados com a solução real $u(x,y) = xy$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.20 & 0.40 & 0.60 & 0.80 & 1.00 \\ 0.00 & 0.16 & 0.32 & 0.48 & 0.64 & 0.80 \\ 0.00 & 0.12 & 0.24 & 0.36 & 0.48 & 0.60 \\ 0.00 & 0.08 & 0.16 & 0.24 & 0.32 & 0.40 \\ 0.00 & 0.04 & 0.08 & 0.12 & 0.16 & 0.20 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.20 & 0.40 & 0.60 & 0.80 & 1.00 \\ 0.00 & 0.16 & 0.32 & 0.48 & 0.64 & 0.80 \\ 0.00 & 0.12 & 0.24 & 0.36 & 0.48 & 0.60 \\ 0.00 & 0.08 & 0.16 & 0.24 & 0.32 & 0.40 \\ 0.00 & 0.04 & 0.08 & 0.12 & 0.16 & 0.20 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

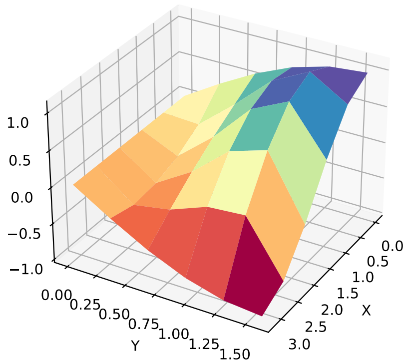
b.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\cos(x+y) - \cos(x-y) \quad (x,y) \in [0,\pi] \times [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = \cos x & x \in [0,\pi] \\ u(x,\frac{\pi}{2}) = 0 & x \in [0,\pi] \\ u(0,y) = \cos y & y \in [0,\frac{\pi}{2}] \\ u(\pi,y) = -\cos y & y \in [0,\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Use $h = \frac{\pi}{5}$, $k = \frac{\pi}{10}$ e compare os resultados com a solução real $u(x,y) = xy$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.309 & -0.026 & -0.229 & -0.349 & -0.391 & -0.309 \\ 0.587 & 0.393 & 0.189 & -0.040 & -0.301 & -0.587 \\ 0.809 & 0.855 & 0.709 & 0.389 & -0.107 & -0.809 \\ 0.951 & 1.113 & 0.951 & 0.547 & -0.067 & -0.951 \\ 1.000 & 0.809 & 0.309 & -0.309 & -0.809 & -1.000 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.309 & 0.250 & 0.095 & -0.095 & -0.250 & -0.309 \\ 0.587 & 0.475 & 0.181 & -0.181 & -0.475 & -0.587 \\ 0.809 & 0.654 & 0.250 & -0.250 & -0.654 & -0.809 \\ 0.951 & 0.769 & 0.293 & -0.293 & -0.769 & -0.951 \\ 1.000 & 0.809 & 0.309 & -0.309 & -0.809 & -1.000 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.276 & 0.324 & 0.254 & 0.141 & 0.000 \\ 0.000 & 0.081 & 0.007 & 0.140 & 0.174 & 0.000 \\ 0.000 & 0.201 & 0.459 & 0.639 & 0.547 & 0.000 \\ 0.000 & 0.343 & 0.657 & 0.841 & 0.701 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

12.2 Equações parabólicas

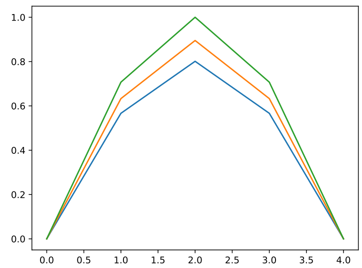
1. Determine uma aproximação para a solução da equação diferencial seguinte utilizando o método das diferenças regressivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 2,\ 0 < t$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin \frac{\pi}{2} x & x \in [0,2] \\ u(0,t) = 0 & 0 < t \\ u(2,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$$

Use $m = 4, T = 0.1$ e $N = 2$ e compare seus resultados com a solução real $u(x,t) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right) \sin \frac{\pi}{2} x$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.56657 & 0.80126 & 0.56657 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.63295 & 0.89513 & 0.63295 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.70711 & 1.00000 & 0.70711 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.55249 & 0.78134 & 0.55249 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.62504 & 0.88394 & 0.62504 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.70711 & 1.00000 & 0.70711 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.01408 & 0.01991 & 0.01408 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00791 & 0.01119 & 0.00791 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

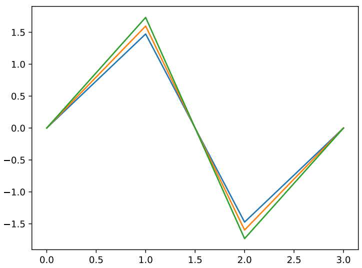
2. Determine uma aproximação para a solução da equação diferencial seguinte utilizando o método das diferenças regressivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1,\ 0 < t$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = 2\sin 2\pi x & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0 & 0 < t \\ u(1,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$$

Use $m = 3, T = 0.1$ e $N = 2$ e compare seus resultados com a solução real $u(x,t) = 2e^{-\frac{\pi^2 t}{4}}\sin 2\pi x$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 1.47300 & -1.47300 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.59728 & -1.59728 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.73205 & -1.73205 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 1.35333 & -1.35333 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.53102 & -1.53102 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.73205 & -1.73205 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.11967 & 0.11967 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.06626 & 0.06626 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

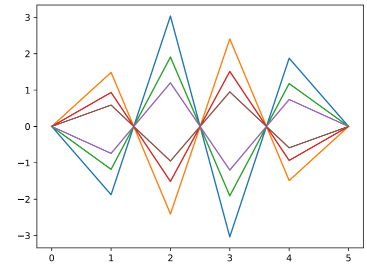
5. Utilize o método das diferenças progressívas para obter uma aproximação para a solução das equação diferencial parcial seguinte

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 2,\ 0 < t$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin 2\pi x & x \in [0,2] \\ u(0,t) = 0 & 0 < t \\ u(2,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$$

Use $h = 0.4$, $k = 0.1$ e compare seus resultados em $t = 0.5$ com a solução real $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$. A seguir, use $k = 0.05$ e compare suas respostas com $k = 0.1$

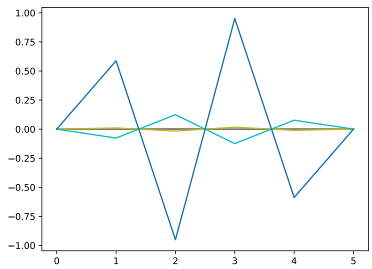


$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & -1.87612 & 3.03563 & -3.03563 & 1.87612 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.48749 & -2.40680 & 2.40680 & -1.48749 & 0.00000 \\ 0.00000 & -1.17935 & 1.90823 & -1.90823 & 1.17935 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.93505 & -1.51295 & 1.51295 & -0.93505 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.74136 & 1.19954 & -1.19954 & 0.74136 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.58779 & -0.95106 & 0.95106 & -0.58779 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00001 & 0.00001 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00022 & -0.00035 & 0.00035 & -0.00022 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.01134 & -0.01835 & 0.01835 & -0.01134 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.58779 & -0.95106 & 0.95106 & -0.58779 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 1.87612 & 3.03563 & 3.03563 & 1.87612 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.48749 & 2.40680 & 2.40680 & 1.48749 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.17936 & 1.90824 & 1.90824 & 1.17936 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.93483 & 1.51259 & 1.51259 & 0.93483 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.75270 & 1.21789 & 1.21789 & 0.75270 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

com $k = 0.05$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.00002 & 0.00004 & -0.00004 & 0.00002 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00017 & -0.00028 & 0.00028 & -0.00017 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.00131 & 0.00212 & -0.00212 & 0.00131 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.01003 & -0.01623 & 0.01623 & -0.01003 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.07679 & 0.12424 & -0.12424 & 0.07679 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.58779 & -0.95106 & 0.95106 & -0.58779 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00001 & 0.00001 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00003 & -0.00005 & 0.00005 & -0.00003 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00022 & -0.00035 & 0.00035 & -0.00022 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00158 & -0.00255 & 0.00255 & -0.00158 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.01134 & -0.01835 & 0.01835 & -0.01134 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.08165 & -0.13211 & 0.13211 & -0.08165 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.58779 & -0.95106 & 0.95106 & -0.58779 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00005 & 0.00009 & 0.00009 & 0.00005 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00005 & 0.00008 & 0.00008 & 0.00005 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00289 & 0.00467 & 0.00467 & 0.00289 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00131 & 0.00212 & 0.00212 & 0.00131 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.15844 & 0.25635 & 0.25635 & 0.15844 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

12.3 Equações hiperbólicas

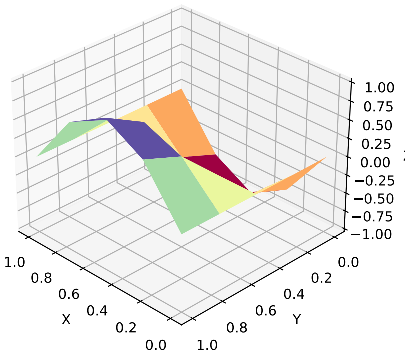
1. Determine uma aproximação para a solução da equação diferencial seguinte utilizando o método das diferenças regressivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 2,\ 0 < t$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin \pi x & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0 & 0 < t \\ u(1,t) = 0 & 0 < t \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,1] \end{cases}$$

Use $m = 4$, $T = 1$ e $N = 4$ e compare seus resultados com a solução real $u(x,t) = cos\pi t\ \sin \pi x$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & -0.70711 & -1.00000 & -0.70711 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.50000 & -0.70711 & -0.50000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.50000 & 0.70711 & 0.50000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.70711 & 1.00000 & 0.70711 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & -0.70711 & -1.00000 & -0.70711 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.50000 & -0.70711 & -0.50000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.50000 & 0.70711 & 0.50000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.70711 & 1.00000 & 0.70711 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

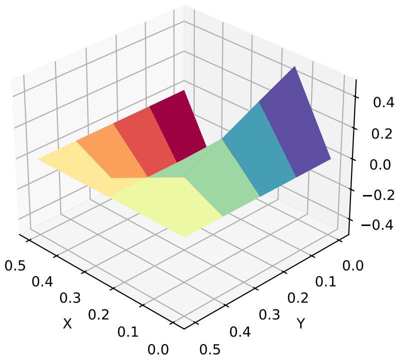
2. Determine uma aproximação para a solução da equação diferencial seguinte utilizando o método das diferenças regressivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{16\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 0.5,\ 0 < t$$

com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin \frac{\pi}{2} x & x \in [0,0.5] \\ u(0,t) = 0 & 0 < t \\ u(0.5,t) = 0 & 0 < t \\ u_t(x,0) = \sin 4\pi x & x \in [0,0.5] \end{cases}$$

Use $m = 4$, $T = 0.5$ e $N = 4$ e compare seus resultados com a solução real $u(x,t) = \sin t\ \sin 4\pi x$



$$U_{\text{apr}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.48429 & 0.00000 & -0.48429 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.36869 & 0.00000 & -0.36869 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.24842 & 0.00000 & -0.24842 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.12500 & 0.00000 & -0.12500 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.47943 & 0.00000 & -0.47943 & -0.00000 \\ 0.00000 & 0.36627 & 0.00000 & -0.36627 & -0.00000 \\ 0.00000 & 0.24740 & 0.00000 & -0.24740 & -0.00000 \\ 0.00000 & 0.12467 & 0.00000 & -0.12467 & -0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00486 & 0.00000 & 0.00486 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00241 & 0.00000 & 0.00241 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00101 & 0.00000 & 0.00101 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00033 & 0.00000 & 0.00033 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}$$