Epidemia Zumbi

1 Explicação do problema

Por meio de equações diferenciais, é possível montar um modelo matemático para entender como uma população varia em um apocalipse zumbi, para isso iremos considerar três grupos

- Humanos (H)
- Zumbis (Z)
- Removidos [mortos que podem retornar como zumbis] (R)

as funções, $H(t)$, $Z(t)$ e $R(t)$ representam a população de cada grupo em dado instante de tempo.

Nesse modelo também estamos considerando três parametros positivos

- α relacionado às interações humano-zumbi que removem zumbis
- β relacionado às interações humano-zumbi que transformam humanos em zumbis
- ζ relacinado aos removidos que voltam como zumbis

O modelo funciona da seguinte forma, Uma interação entre um humano e um zumbi pode resultar em

- O humano sendo transformado em zumbi
- O zumbi sendo removido

Além disso, apenas o grupo de humanos pode ser infectado por zumbis. Também é importante notar que nesse modelo não estamos considerando outras possíveis causas de morte em humanos e também estamos desconsiderando o nascimento de novos humanos, pois isso faria com que os zumbis tivessem uma fonte ilimitada de humanos para serem transformados em zumbis

Assim, temos que o modelo é dado por

$$\begin{aligned}
H'(t) &= -\beta H(t)Z(t) \\
Z'(t) &= \beta H(t)Z(t) + \zeta R(t) - \alpha H(t)Z(t) \\
R'(t) &= \alpha H(t)Z(t) - \zeta R(t)
\end{aligned}$$

2 Consistencia

[explicar definição de consistencia olhar aula 9]

Vamos analisar a consistencia utilizando o método de Euler, primeiramente vamos discretizar o sistema

$$\begin{aligned}
\frac{H(t_{n+1}) - H(t_n)}{h} &= -\beta H(t_n)Z(t_n) \\
\frac{Z(t_{n+1}) - Z(t_n)}{h} &= \beta H(t_n)Z(t_n) + \zeta R(t_n) - \alpha H(t_n)Z(t_n) \\
\frac{R(t_{n+1}) - R(t_n)}{h} &= \alpha H(t_n)Z(t_n) - \zeta R(t_n)
\end{aligned}$$

e isolando os termos no instante de tempo t_{n+1}

$$
\begin{aligned}
H(t_{n+1}) &= H(t_n) + h[-\beta H(t_n) Z(t_n)] \\
Z(t_{n+1}) &= Z(t_n) + h[\beta H(t_n) Z(t_n) + \zeta R(t_n) - \alpha H(t_n) Z(t_n)] \\
R(t_{n+1}) &= R(t_n) + h[\alpha H(t_n) Z(t_n) - \zeta R(t_n)]
\end{aligned}
$$

Note que $t_{n+1} = t_n + h$, então podemos fazer uma expansão em Taylor para as equações no tempo t_{n+1}

$$
\begin{aligned}
H(t_n + h) &= H(t_n) + H'(t_n)h + H''(t_n)\tfrac{h^2}{6} + O(h^3) \\
Z(t_n + h) &= Z(t_n) + Z'(t_n)h + Z''(t_n)\tfrac{h^2}{6} + O(h^3) \\
R(t_n + h) &= R(t_n) + R'(t_n)h + R''(t_n)\tfrac{h^2}{6} + O(h^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(t_n + h) - H(t_n) - H'(t_n)h &= H''(t_n)\tfrac{h^2}{6} + O(h^3) \\
Z(t_n + h) - Z(t_n) + Z'(t_n)h &= Z''(t_n)\tfrac{h^2}{6} + O(h^3) \\
R(t_n + h) - R(t_n) + R'(t_n)h &= R''(t_n)\tfrac{h^2}{6} + O(h^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{H(t_n + h) - H(t_n)}{h} - H'(t_n) &= O(h) \\
\frac{Z(t_n + h) - Z(t_n)}{h} - Z'(t_n) &= O(h) \\
\frac{R(t_n + h) - R(t_n)}{h} - R'(t_n) &= O(h)
\end{aligned}
$$

Assim, temos que a forma explicita desse problema, com o método de Euler é consistente com ordem de consitencia linear $O(h)$.

Note que quando o passo h tende a 0, a forma discretizada se aproxima da derivada