Difusão com barreira

Bruno Sant'Anna
Jacineide Aquino

4 de abril de 2024

Universidade Federal de Sergipe

Introdução

Equações elípticas e o problema de difusão

Uma equação diferencial parcial EDP é uma equação que relaciona funções e suas derivadas parciais, envolvendo duas ou mais variáveis independentes.

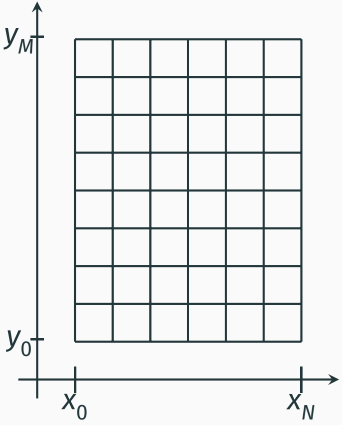
Um tipo de EDP são as equações elípticas que se caracterizam pela propagação de suas propiedades físicas em todas as direções. Essas, pode ser usadas em problemas de equilibrio, difusão, pressão, entre outros.

Mais especificamente a equação estudada nesse trabalho foi a **equação de Poisson** dada por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Para encontrar a solução aproximada da equação diferencial, utilizamos o metodo das diferenças finitas.

Considere a equação $\Delta u = f(x, y)$ em um domínio $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, podemos discretizar esse domínio, escolhendo passos h e k para o eixo x e y respectivamente, de forma que os intervalos possam ser divididos em N e M partes iguais, essa discretização será representada por uma malha de pontos no plano xy. Os pontos na borda são dados pela condição de fronteira, enquanto os pontos interiores serão aproximados pelo método numérico.



Por meio da expansão em série de Taylor, podemos encontrar as formulas de diferenças centradas para as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2}$$

Por simplicidade, escrevemos $u(x_i, y_j) = u_{ij}$

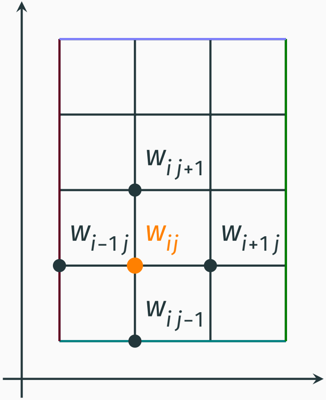
$$\frac{u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1\,j}}{h^2} + \frac{u_{i\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i\,j-1}}{k^2} = f(x_i, y_j)$$

Organizando os termos ficamos com a equação

$$2\,(\lambda + 1)\,u_{ij} - u_{i-1\,j} - u_{i+1\,j} - \lambda\left(u_{i\,j-1} + u_{i\,j+1}\right) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

onde $\lambda = \left(\frac{k}{h}\right)^2$, para cada $i = 1, 2, \dots, N-1$ e $j = 1, 2, \dots, M-1$.

Utilizamos pontos ao redor de w_{ij} para encontrar uma solução aproximada. Nesse caso será necessário resolver um sistema de equações lineares para calcular todos w_{ij} no interior da malha.



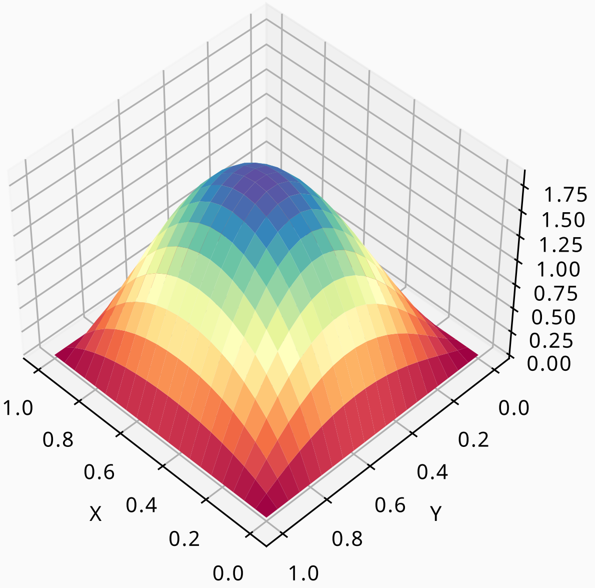
Resultados

No primeiro caso utilizamos o metodo numérico de diferenças finitas para resolver a EDP de difusão

$$\begin{cases} -\alpha\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

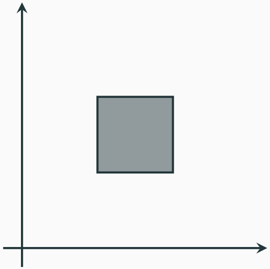
onde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

Discretizando o dominio com $h = k = \frac{1}{20}$ e utilizando o algoritmo obtemos o seguinte resultado

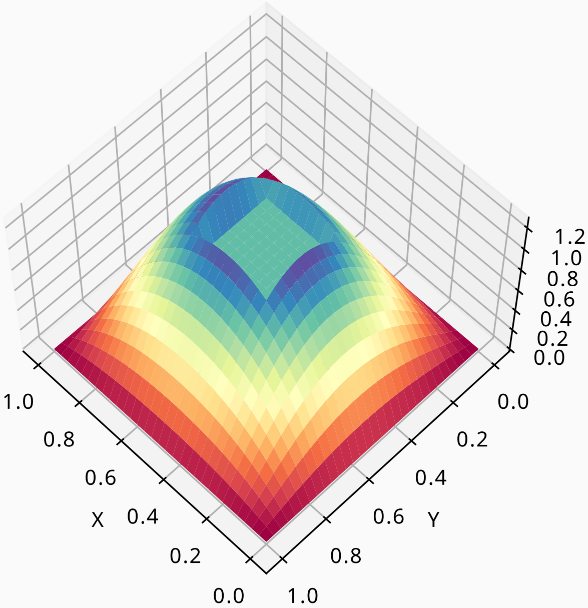


Agora, introduzimos uma barreira dada pela função $g : \Omega \to \mathbf{R}$, onde $g(x, y) = 1$ quando $(x, y) \in \mathcal{R} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Nesse caso se $(x, y) \in \mathcal{R}$, temos que a solução será limitada por $g(x, y)$



Nesse caso, para melhor vizualização discretizamos o domínio com uma malha mais fina, dessa vez, $h = k = \frac{1}{30}$



Algoritmo

Referências

[1] A.M. Burden, R.L. Burden e D.J. Faires. ***Análise Numérica.*** CENGAGE DO BRASIL, 2016. ISBN: 9788522123407. URL: `https://books.google.com.br/books?id=mEo1tAEACAAJ`.