Epidemia Zumbi

Bruno Sant'Anna
Jacineide Aquino

20 de fevereiro de 2024

Universidade Federal de Sergipe

Introdução

Por meio de equações diferenciais, é possível montar um modelo matématico para entender como uma população varia em um apocalipse zumbi, para isso iremos considerar três grupos

- Humanos (H)
- Zumbis (Z)
- Removidos [mortos que podem retornar como zumbis] (R)

as funções, $H(t)$, $Z(t)$ e $R(t)$ representam a população de cada grupo em dado instante de tempo.

Nesse modelo também estamos considerando três parametros positivos

- α relacionado às interações humano-zumbi que removem zumbis
- β relacionado às interações humano-zumbi que transformam humanos em zumbis
- ζ relacinado aos removidos que voltam como zumbis

O modelo funciona da seguinte forma, Uma interação entre um humano e um zumbi pode resultar em

- O humano sendo transformado em zumbi
- O zumbi sendo removido

Além disso, apenas o grupo de humanos pode ser infectado por zumbis. Também é importante notar que nesse modelo não estamos considerando outras possíveis causas de morte em humanos e também estamos desconsiderando o nascimento de novos humanos, pois isso faria com que os zumbis tivessem uma fonte ilimitada de humanos para serem transformados em zumbis

Assim, temos que o modelo é dado por

$$
\begin{aligned}
H'(t) &= -\beta H(t)Z(t) \\
Z'(t) &= \beta H(t)Z(t) + \zeta R(t) - \alpha H(t)Z(t) \\
R'(t) &= \alpha H(t)Z(t) - \zeta R(t)
\end{aligned}
$$

Solução numérica

Dado um PVI da forma

$$y' = f(t, y) \; t \in [t_0, t_N]$$
$$y(t_0) = \alpha$$

Podemos utilizar o método de Runge-Kutta para encontrar uma solução numérica aproximada da seguinte forma

$$w_0 = \alpha$$
$$w_{i+1} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

para todo $i = 0, 1, \dots, N - 1$, onde

Podemos utilizar o método de Runge-Kutta para encontrar uma solução numérica aproximada da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
w_{i+1} &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

para todo $i = 0, 1, \dots, N-1$, onde

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_i, w_i) \\
k_2 &= hf(t_i + 0.5h, w_i + 0.5k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + 0.5h, w_i + 0.5k_2) \\
k_4 &= hf(t_{i+1} + 0.5h, w_i + k_3)
\end{aligned}
$$

Podemos então adaptar para um sistema de EDOs da forma

$$
\begin{aligned}
Y' &= F(t, Y) \; t \in [t_0, t_N] \\
Y(t_0) &= A
\end{aligned}
$$

Onde $Y, F, A \in \mathbb{R}^n$ Daí, o método de Runge-Kutta para sistemas é dado por

$$
\begin{aligned}
W_0 &= A \\
W_{i+1} &= \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
\end{aligned}
$$

para todo $i = 0, 1, \dots, N - 1$, onde

Daí, o método de Runge-Kutta para sistemas é dado por

$$W_0 = A$$
$$W_{i+1} = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

para todo $i = 0, 1, \dots, N - 1$, onde

$$K_1 = hF(t_i, W_i)$$
$$K_2 = hF(t_i + 0.5h, W_i + 0.5K_1)$$
$$K_3 = hF(t_i + 0.5h, W_i + 0.5K_2)$$
$$K_4 = hF(t_{i+1} + 0.5h, W_i + K_3)$$

Com $K_i \in \mathbb{R}^n$

Consistência

Definição

Um método de equação de diferença de passo único com erro de truncamento local $\tau_i(h)$ no i-ésimo passo, é dito **consistente** com a equação diferencial que aproxima se

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \leq i \leq N} |\tau_i(h)| = 0$$

É equivalente dizer que um método de passo único é consistente quando a equação de diferença se aproxima da equação diferencial quando o tamanho do passo tende a zero.

Vamos fazer a analise de consistência utilizando o método de Euler

Primeiramente vamos discretizar o sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{H(t_{n+1}) - H(t_n)}{h} &= -\beta H(t_n) Z(t_n) \\
\frac{Z(t_{n+1}) - Z(t_n)}{h} &= \beta H(t_n) Z(t_n) + \zeta R(t_n) - \alpha H(t_n) Z(t_n) \\
\frac{R(t_{n+1}) - R(t_n)}{h} &= \alpha H(t_n) Z(t_n) - \zeta R(t_n)
\end{aligned}
$$

Isolando os termos no instante de tempo t_{n+1}

$$
\begin{aligned}
H(t_{n+1}) &= H(t_n) + h[-\beta H(t_n)Z(t_n)] \\
Z(t_{n+1}) &= Z(t_n) + h[\beta H(t_n)Z(t_n) + \zeta R(t_n) - \alpha H(t_n)Z(t_n)] \\
R(t_{n+1}) &= R(t_n) + h[\alpha H(t_n)Z(t_n) - \zeta R(t_n)]
\end{aligned}
$$

Note que $t_{n+1} = t_n + h$, então podemos fazer uma expansão em Taylor para as equações no tempo t_{n+1}

$$H(t_n + h) = H(t_n) + H'(t_n)h + H''(t_n)\frac{h^2}{6} + \mathcal{O}(h^3)$$
$$Z(t_n + h) = Z(t_n) + Z'(t_n)h + Z''(t_n)\frac{h^2}{6} + \mathcal{O}(h^3)$$
$$R(t_n + h) = R(t_n) + R'(t_n)h + R''(t_n)\frac{h^2}{6} + \mathcal{O}(h^3)$$

Note que $t_{n+1} = t_n + h$, então podemos fazer uma expansão em Taylor para as equações no tempo t_{n+1}

$$
\begin{aligned}
H(t_n + h) - H(t_n) - H'(t_n)h &= H''(t_n)\frac{h^2}{6} + \mathcal{O}(h^3) \\
Z(t_n + h) - Z(t_n) - Z'(t_n)h &= Z''(t_n)\frac{h^2}{6} + \mathcal{O}(h^3) \\
R(t_n + h) - R(t_n) - R'(t_n)h &= R''(t_n)\frac{h^2}{6} + \mathcal{O}(h^3)
\end{aligned}
$$

$$\frac{H(t_n + h) - H(t_n)}{h} - H'(t_n) = \mathcal{O}(h)$$
$$\frac{Z(t_n + h) - Z(t_n)}{h} - Z'(t_n) = \mathcal{O}(h)$$
$$\frac{R(t_n + h) - R(t_n)}{h} - R'(t_n) = \mathcal{O}(h)$$

Assim, temos que a forma explicita desse problema, com o método de Euler é consistente com ordem de consitencia linear $\mathcal{O}(h)$.

Note que quando o passo h tende a 0, a forma discretizada se aproxima da derivada

Estabilidade

Pontos de equilíbrio

Para analisar a estabilidade, primeiramente precisamos encontrar os pontos de equilibrio do sistema

$$
\begin{aligned}
0 &= -\beta H(t)Z(t) \\
0 &= \beta H(t)Z(t) + \zeta R(t) - \alpha H(t)Z(t) \\
0 &= \alpha H(t)Z(t) - \zeta R(t)
\end{aligned}
$$

De $-\beta H(t)Z(t) = 0$ temos que $H(t) = 0$ ou $Z(t) = 0$.

Se $Z(t) = 0$ temos que $(\bar{H}, 0, 0)$, é um ponto de equilíbrio (sem zumbis).

Se $H(t) = 0$ temos que $(0, \bar{Z}, 0)$, é um ponto de equilíbrio (apocalipse)

A matriz Jacobiana é dada por

$$J = \begin{bmatrix} \partial_H H' & \partial_Z H' & \partial_R H' \\ \partial_H Z' & \partial_Z Z' & \partial_R Z' \\ \partial_H R' & \partial_Z R' & \partial_R R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta Z & -\beta H & 0 \\ \beta Z - \alpha Z & \beta H - \alpha H & \zeta \\ \alpha Z & \alpha H & -\zeta \end{bmatrix}$$

Nos pontos de equilíbrio

$$J(\bar{H},0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta\bar{H} & 0 \\ 0 & \beta\bar{H} - \alpha\bar{H} & \zeta \\ 0 & \alpha\bar{H} & -\zeta \end{bmatrix}$$

$$J(0,\bar{Z},0) = \begin{bmatrix} -\beta\bar{Z} & 0 & 0 \\ \beta\bar{Z} - \alpha Z & 0 & \zeta \\ \alpha\bar{Z} & 0 & -\zeta \end{bmatrix}$$

Para analisar a estabilidade dos pontos de equilibrio precisamos analisar o sinal dos autovalores da matriz Jacobiana. De $J(\bar{H},0,0)$ temos

$$\begin{aligned}\det(J(\bar{H},0,0)-\lambda) &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & -\beta\bar{H} & 0 \\ 0 & \beta\bar{H}-\alpha\bar{H}-\lambda & \zeta \\ 0 & \alpha\bar{H} & -\zeta-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda\left[\lambda^2+[\zeta-(\beta-\alpha)\bar{H}]\lambda-\beta\zeta\bar{H}\right]\end{aligned}$$

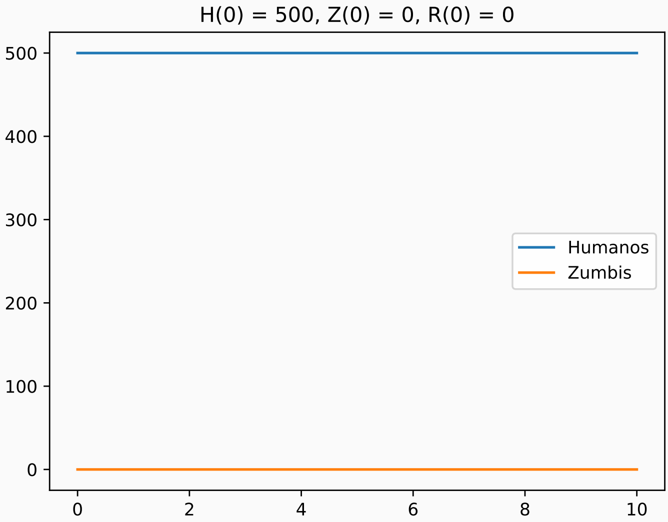
Nesse caso, os autovalores são positívos, então esse ponto de equilíbrio é **instável**

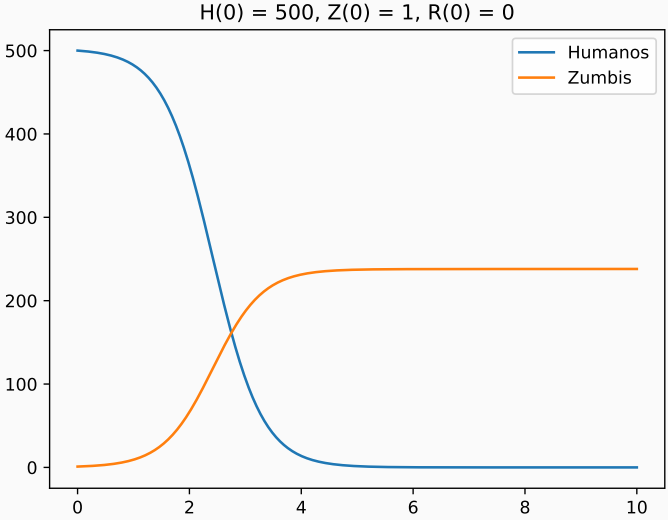
Agora com $J(0, \bar{Z}, 0)$,

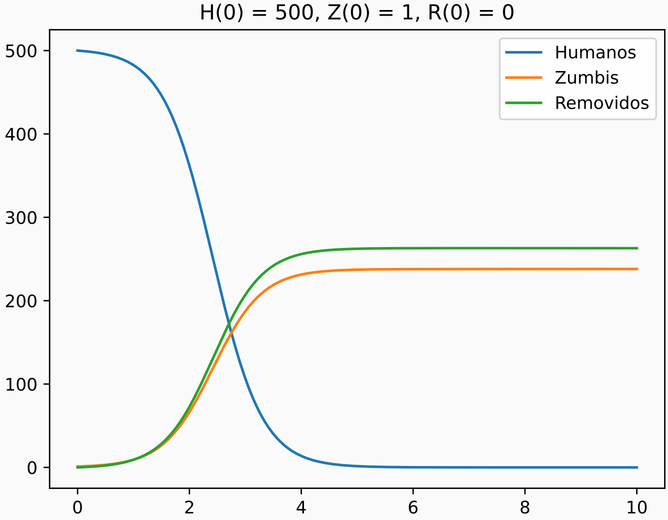
$$\det(J(0,\bar{Z},0) - \lambda) = \det \begin{bmatrix} -\beta\bar{Z} - \lambda & 0 & 0 \\ \beta\bar{Z} - \alpha Z & -\lambda & \zeta \\ \alpha\bar{Z} & 0 & -\zeta - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= -\lambda(-\zeta - \lambda)(-\beta\bar{Z} - \lambda)$$

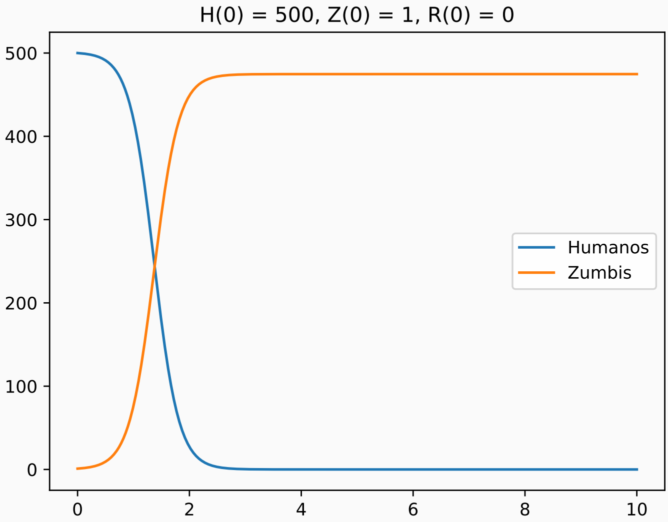
Já neste caso, os autovalores são não positivos, então esse ponto de equilíbrio é **estável**

Resultados


H(0) = 500, Z(0) = 0, R(0) = 0
500
400
300
200
100
0
0
2
4
6
8
10
Humanos
Zumbis


H(0) = 500, Z(0) = 1, R(0) = 0
Humanos
Zumbis
500
400
300
200
100
0
0
2
4
6
8
10


H(0) = 500, Z(0) = 1, R(0) = 0
Humanos
Zumbis
Removidos
500
400
300
200
100
0
0
2
4
6
8
10


H(0) = 500, Z(0) = 1, R(0) = 0
500
400
300
200
100
0
0
2
4
6
8
10
Humanos
Zumbis

Referências

[1] A.M. Burden, R.L. Burden e D.J. Faires. ***Análise Numérica.*** CENGAGE DO BRASIL, 2016. ISBN: 9788522123407. URL: https://books.google.com.br/books?id=mEo1tAEACAAJ.

[2] Philip Alexander Munz et al. **«WHEN ZOMBIES ATTACK!: MATHEMATICAL MODELLING OF AN OUTBREAK OF ZOMBIE INFECTION».** Em: 2009. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15574354.