

---

## CONTEÚDO

---

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução à Teoria da Medida</b>	<b>5</b>
1.1 Espaços e funções mensuráveis . . . . .	5
1.2 Medida . . . . .	11
1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.3 Integral de Lebesgue . . . . .	13
1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$ . . . . .	29
<b>2 Espaços de Sobolev</b>	<b>43</b>
2.1 Preliminares . . . . .	43
2.2 Motivação . . . . .	44
2.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ . . . . .	44
2.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	45



---

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$\mathfrak{B}$	Álgebra de Borel
$\widehat{\mathfrak{B}}$	Álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$
$\chi_E$	Função característica do conjunto $E$
$\mathfrak{D}$	$\sigma$ -álgebra
$f^+$	Parte positiva da função $f$
$f^-$	Parte negativa da função $f$
$f \sim_{\mu} g$	$f$ e $g$ são $\mu$ -equivalentes i.e., $f = g$ em quase toda parte em $X$ .
$\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço das funções integráveis em relação a medida $\mu$ .
$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$ .
$\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis
$\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas
$\mu(E)$	Medida do conjunto $E$
$N_{\mu}(\cdot)$	Semi-norma em relação a medida $\mu$ .
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto $X$
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta estendida i.e., $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$



# CAPÍTULO UM

## INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

### 1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de  $\sigma$ -álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

**Definição 1.1.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma família  $\mathfrak{D}$  de subconjuntos de  $X$  é uma  $\sigma$ -álgebra se satisfaz as seguintes condições

1.  $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$
2. Se  $S \in \mathfrak{D}$  então  $S^c = X \setminus S \in \mathfrak{D}$
3. Se  $(S_n)$  é uma sequência de elementos de  $\mathfrak{D}$  então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

O par  $(X, \mathfrak{D})$  é dito espaço mensurável e os subconjuntos de  $\mathfrak{D}$  são chamados de conjuntos mensuráveis (ou  $\mathfrak{D}$ -mensuráveis)

**Exemplo 1.2.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e considere  $\mathfrak{D} = \{\emptyset, X\}$ . Afirmamos que  $\mathfrak{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Com efeito,

1.  $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$  pela definição.
2.  $\emptyset^c = X \in \mathfrak{D}$  e  $X^c = \emptyset \in \mathfrak{D}$
3.  $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \mathfrak{D}$  ou  $\bigcup X = X \in \mathfrak{D}$

**Exemplo 1.3.** Seja  $X = \{a, b, c, d\}$ .  $\mathfrak{D} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$  não é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  pois  $\{a, b\}^c = \{c, d\} \notin \mathfrak{D}$

**Observação:** Seja  $(S_\alpha)$  uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha} S_{\alpha}^c \text{ e } \left(\bigcap_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^c$$

Dessa forma, se  $(S_n)$  é uma sequência de elementos de uma  $\sigma$ -álgebra, então  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

**Observação:**

**Observação:**

**Exemplo 1.4.** Seja  $X$  um conjunto não enumerável e considere

$$\mathfrak{D} = \{S \subseteq X; S \text{ é enumerável ou } S^c \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que  $\mathfrak{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. De fato

1.  $\emptyset \in \mathfrak{D}$  pois é enumerável e  $X \in \mathfrak{D}$  pois  $X^c = \emptyset$  que é enumerável
2. se  $S \in \mathfrak{D}$  temos as seguintes possibilidades  
 $S$  é enumerável, então  $S^c \in \mathfrak{D}$  pois  $(S^c)^c = S$  é enumerável  
 $S^c$  é enumerável, então pela definição da  $\sigma$ -álgebra,  $S^c \in \mathfrak{D}$
3. Seja  $(S_n)$  uma sequência de subconjuntos em  $\mathfrak{D}$ , isto é,  $S_n \in \mathfrak{D}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , aqui temos três possibilidades a serem consideradas  
 $S_n$  é enumerável para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  é enumerável, portanto está em  $\mathfrak{D}$   
 $S_n^c$  é enumerável para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_{n_0}^c$$

é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável  $S_{n_0}^c$ , portanto está em  $\mathfrak{D}$

Se existem  $i, j \in \mathbb{N}$  tais que

$$S_i \subseteq X \text{ e } S_j^c \subseteq X \text{ são enumeráveis}$$

podemos afirmar que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  não é enumerável, pois  $S_j^c$  é enumerável, e como  $X$  não é enumerável, segue que  $S_j$  também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que  $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c$  é enumerável. Com efeito, observe que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_j^c$$

ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$ .

Dessa forma,  $\mathfrak{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra

**Exemplo 1.5.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Se  $\mathfrak{D}_1$  e  $\mathfrak{D}_2$  são  $\sigma$ -álgebras de  $X$  então  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$  também é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de  $X$ , o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor  $\sigma$ -álgebra contendo este.

**Proposição 1.6.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $A \subseteq \mathcal{P}(X)$  uma coleção não vazia de subconjuntos de  $X$ . Então a interseção de todas as  $\sigma$ -álgebras de subconjuntos de  $X$  que contem  $A$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $A$ .

*Demonstração.*

□

Agora definimos uma  $\sigma$ -álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

**Definição 1.7.** Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  gerada por todos os intervalos abertos  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}$ , ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha); x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathfrak{B} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{D}_{\alpha},$$

onde cada  $\mathfrak{D}_{\alpha}$  é uma  $\sigma$ -álgebra que contém  $A$ .

Equivalentemente, podemos dizer que  $\mathfrak{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por todos conjuntos abertos de  $\mathbb{R}$ . É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de  $\mathbb{R}$  pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo  $\mathfrak{B}$  dessa forma é possível ver que não precisamos que  $\mathfrak{B}$  seja uma  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}$  mas sim de qualquer espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$ , nesse caso dizemos que  $\mathfrak{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela topologia  $\mathcal{T}$ . Nesse trabalho a notação  $\mathfrak{B}$  será utilizada apenas para a álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$ .

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

**Proposição 1.8.**  $\mathfrak{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por todos intervalos fechados

*Demonstração.* Sejam  $\mathfrak{B}$  a álgebra de Borel e  $A = \{(x_\alpha, y_\alpha); x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  o conjunto que gera  $\mathfrak{B}$ . Considere o conjunto  $E = \{[x_\alpha, y_\alpha]; x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  e  $\mathfrak{D}_E$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $E$ . Mostremos que  $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{B} = \mathfrak{D}_E$ , para isso, primeiramente vamos verificar que  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}_E$ . Com efeito seja  $(x_\alpha, y_\alpha) \in A$ . Afiramos que

$$(x_\alpha, y_\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ x_\alpha + \frac{1}{n}, y_\alpha - \frac{1}{n} \right].$$

De fato, se  $c = (x_\alpha, y_\alpha)$  temos que

$$x_\alpha < c < y_\alpha \iff c - x_\alpha > 0 \text{ e } y_\alpha - c > 0.$$

Pela propriedade Arquimediana, existem  $\bar{n}, \tilde{n} \in \mathbb{N}$  tais que

$$\frac{1}{c - x_\alpha} < \bar{n} \text{ e } \frac{1}{y_\alpha - c} < \tilde{n},$$

considerando  $n_0 = \max\{\bar{n}, \tilde{n}\}$ , temos

$$\frac{1}{c - x_\alpha} < n_0 \text{ e } \frac{1}{y_\alpha - c} < n_0 \implies c \in \left( x_\alpha + \frac{1}{n_0}, y_\alpha - \frac{1}{n_0} \right).$$

Como

$$\left( x_\alpha + \frac{1}{n_0}, y_\alpha - \frac{1}{n_0} \right) \subseteq \left[ x_\alpha + \frac{1}{n_0}, y_\alpha - \frac{1}{n_0} \right] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ x_\alpha + \frac{1}{n}, y_\alpha - \frac{1}{n} \right]$$

segue que  $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ x_\alpha + \frac{1}{n}, y_\alpha - \frac{1}{n} \right] \in \mathfrak{D}_E$ . Logo

$$(x_\alpha, y_\alpha) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ x_\alpha + \frac{1}{n}, y_\alpha - \frac{1}{n} \right].$$

Por outro lado, considere

$$U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ x_\alpha + \frac{1}{n}, y_\alpha - \frac{1}{n} \right].$$

Seja  $\alpha$  um elemento arbitrário e  $c \in U_\alpha$  fixo. Então, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in \left[x_\alpha + \frac{1}{n_0}, y_\alpha - \frac{1}{n_0}\right]$ . Assim

$$x_\alpha < x_\alpha + \frac{1}{n_0} < c < y_\alpha - \frac{1}{n_0} < y_\alpha \implies x \in (x_\alpha, y_\alpha).$$

Portanto

$$(x_\alpha, y_\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[x_\alpha + \frac{1}{n_0}, y_\alpha - \frac{1}{n_0}\right].$$

Assim, para cada  $\alpha$  temos que  $(x_\alpha, y_\alpha)$  é uma união enumerável de elementos de  $\mathfrak{D}_E$ . Consequentemente  $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathfrak{D}_E$  para todo  $\alpha$ , implicando em  $A \subseteq \mathfrak{D}_E$ . Como  $\mathfrak{B}$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $A$ , temos que  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}_E$ .

Agora precisamos verificar que  $\mathfrak{D}_E \subseteq \mathfrak{B}$ . Com efeito. Afirmamos que

$$[x_\alpha, y_\alpha] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x_\alpha - \frac{1}{n}, y_\alpha + \frac{1}{n}\right).$$

De fato, considere

$$V_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x_\alpha - \frac{1}{n}, y_\alpha + \frac{1}{n}\right).$$

Seja  $c \in [x_\alpha, y_\alpha]$ , então

$$x_\alpha - \frac{1}{n} < x_\alpha \leq c \leq y_\alpha < y_\alpha + \frac{1}{n} \implies c \in \left(x_\alpha - \frac{1}{n}, y_\alpha + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies c \in V_\alpha$$

Por outro lado, se  $x \in V_\alpha$  tem-se que

$$x_\alpha - \frac{1}{n} < c < y_\alpha + \frac{1}{n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que  $x_\alpha < c < y_\alpha$ . Com efeito, suponha por contradição que  $x_\alpha > c$ , então  $x_\alpha - c > 0$ . Pela propriedade Arquimediana, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{x_\alpha - c} < n_0 \implies c < x_\alpha - \frac{1}{n_0}$$

que é uma contradição, então  $x_\alpha < c$ . De forma análoga, mostramos que  $c < y_\alpha$ . Assim, temos que  $c \in (x_\alpha, y_\alpha)$ . Portanto

$$[x_\alpha, y_\alpha] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x_\alpha - \frac{1}{n}, y_\alpha + \frac{1}{n}\right).$$

Assim, cada  $[x_\alpha, y_\alpha]$  pode ser escrito como interseção enumerável de elementos de  $\mathfrak{B}$ . Consequentemente  $[x_\alpha, y_\alpha] \in \mathfrak{B}$  para todo  $\alpha$ . Desse modo,  $E \subseteq \mathfrak{B}$ . Como  $\mathfrak{D}_E$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $E$  segue que  $\mathfrak{D}_E \subseteq \mathfrak{B}$ .

Portanto  $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}_E$ . □

**Exemplo 1.9.** Alguns exemplos de conjuntos que estão em  $\mathfrak{B}$  são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em  $\mathfrak{B}$  pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em  $\mathfrak{B}$  pois se  $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ , então  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$  que é um conjunto em  $\mathfrak{B}$  pois cada  $\{x_n\}$  é um conjunto fechado.



- Todo intervalo do tipo  $[a, b]$  ou  $(a, b]$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  é um conjunto em  $\mathfrak{B}$  pois  $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$  e  $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$ .

A sensação é de que a álgebra de Borel contém todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , isto é  $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Porém este não é o caso, pois existem subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que são bastante difíceis de definir (vide [??]) que não estão em  $\mathfrak{B}$ . Mas se esses conjuntos são tão difíceis de definir por que precisamos de uma  $\sigma$ -álgebra que exclui eles.

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propriedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$  uma propriedade importante não é satisfeita, mas restringindo para o espaço  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  conseguimos definir a mesma medida de forma que todas as propriedades são satisfeitas.

**Definição 1.10.** O conjunto  $\overline{\mathbb{R}}$  é dita reta estendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

**Observação:** Operações com  $\infty$  em  $\overline{\mathbb{R}}$

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\infty + \infty = \infty$                | 6. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ se $x > 0$        |
| 2. $-\infty - \infty = -\infty$              | 7. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$ se $x < 0$  |
| 3. $x + \infty = \infty + x = \infty$        | 8. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$ se $x < 0$       |
| 4. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$ | 9. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ se $x > 0$ |
| 5. $\infty \cdot \infty = \infty$            | 10. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .                     |

**Proposição 1.11.** Seja  $\overline{\mathbb{R}}$  a reta estendida. Considere  $E_1 = E \cup \{-\infty\}$ ,  $E_2 = E \cup \{+\infty\}$ ,  $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$  e  $\widehat{\mathfrak{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$  com  $E$  variando na álgebra de Borel  $\mathfrak{B}$ . Então  $\widehat{\mathfrak{B}}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\overline{\mathbb{R}}$  denominada álgebra estendida de Borel.

*Demonstração.*

1.  $\emptyset, \overline{\mathbb{R}} \in \widehat{\mathfrak{B}}$  pois  $\emptyset \in \mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{B}$  é uma  $\sigma$ -álgebra e em algum momento  $E = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$ , logo  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \in \widehat{\mathfrak{B}}$

2. Seja  $X \in \widehat{\mathfrak{B}}$  para mostrar que  $X^c \in \widehat{\mathfrak{B}}$  iremos considerar os seguintes casos se  $X$  é do tipo  $E \cup \{+\infty\}$ , com  $E \in \mathfrak{B}$

$$X^c = \overline{\mathbb{R}} \setminus X = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \setminus (E \cup \{+\infty\}) = (\mathbb{R} \setminus E) \cup \{-\infty\} \in \widehat{\mathfrak{B}}$$

pois  $\mathbb{R} \setminus E \in \mathfrak{B}$ .

se  $X$  é do tipo  $E \cup \{-\infty\}$ , com  $E \in \mathfrak{B}$

$$X^c = \overline{\mathbb{R}} \setminus X = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \setminus (E \cup \{-\infty\}) = (\mathbb{R} \setminus E) \cup \{+\infty\} \in \widehat{\mathfrak{B}}$$

se  $X$  é do tipo  $E \cup \{-\infty, +\infty\}$ , com  $E \in \mathfrak{B}$

$$X^c = \overline{\mathbb{R}} \setminus X = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \setminus (E \cup \{-\infty, +\infty\}) = (\mathbb{R} \setminus E) \in \widehat{\mathfrak{B}}$$

se  $X$  é do tipo  $E$ , com  $E \in \mathfrak{B}$

$$X^c = \overline{\mathbb{R}} \setminus X = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \setminus E = (\mathbb{R} \setminus E) \cup \{-\infty, +\infty\} \in \widehat{\mathfrak{B}}$$

3. Seja  $(A_n)$  uma sequência de elementos de  $\widehat{\mathfrak{B}}$ . Mostremos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \widehat{\mathfrak{B}}.$$

Para isso, precisamos considerar alguns casos

se existem  $A_k = E_k \cup \{-\infty, +\infty\}$  com  $k = 1, \dots, j$  e  $A_k = E_k$  com  $k = j+1, j+2, \dots$ , então

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \left[ \bigcup_{n=1}^j A_n \right] \cup \left[ \bigcup_{n=j+1}^{\infty} A_n \right] \\ &= \left[ \bigcup_{n=1}^j E_n \cup \{-\infty, +\infty\} \right] \cup \left[ \bigcup_{n=j+1}^{\infty} E_n \right] \\ &= \left[ \bigcup_{n=1}^j E_n \right] \cup \left[ \bigcup_{n=j+1}^{\infty} E_n \right] \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right] \cup \{-\infty, +\infty\} \end{aligned}$$

que está em  $\widehat{\mathfrak{B}}$  pois  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$

Os outros casos de possíveis combinações são análogos

□

**Definição 1.12.** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser  $\mathfrak{B}$ -mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\}$$

pertence a  $\sigma$ -álgebra.

**Exemplo 1.13.** A função constante  $x \mapsto c$  é mensurável. Com efeito, se  $\alpha \geq c$ , então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{B}$$

pois o único valor que a função assume é  $c$ . Se  $\alpha < c$ , então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{B}$$

**Exemplo 1.14.** A função característica  $\chi_S$  de um subconjunto  $S \in \mathfrak{B}$  é mensurável

**Exemplo 1.15.** Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  com  $X \in \mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela continuidade de  $f$ , o conjunto  $f^{-1}((\alpha, \infty))$  é aberto para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dessa forma  $\{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{B}$ . Portanto  $f$  é mensurável.

**Exemplo 1.16.** Dada uma função  $f$  mensurável. A função *truncagem de  $f$*  (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo  $n \in \mathbb{N}$

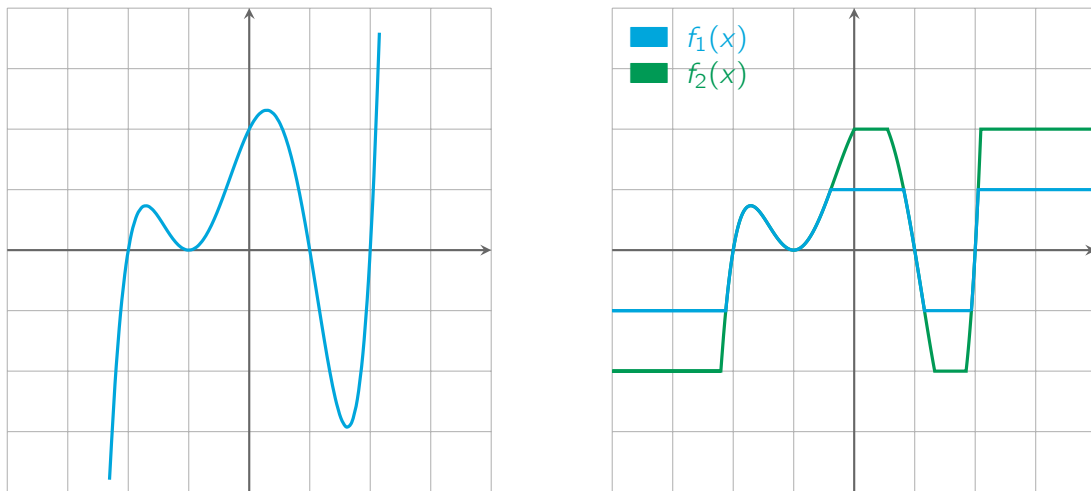


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de  $f$  e à direita o gráfico de  $f_1$  e  $f_2$

Fonte: Autoral

## 1.2 Medida

**Definição 1.17.** Uma medida é uma função  $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  que satisfaz

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu(S) \geq 0$  para todo  $S \in \mathfrak{D}$
3. se  $(S_n) \subseteq \mathfrak{D}$  é uma sequência de subconjuntos disjuntos em  $\mathfrak{D}$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

**Exemplo 1.18.** Seja  $(\mathbb{N}, \mathfrak{D})$  um espaço mensurável, onde  $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . A função  $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definida por  $\mu(E) = \#E$ , se  $E$  é finito, e  $\mu(E) = \infty$  se  $E$  é infinito, é uma medida em  $\mathfrak{D}$ . Com efeito,

1.  $\mu(\emptyset) = 0$  por vacuidade
2.  $\mu(E) \geq 0$  por definição
3. .

### 1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$

Nosso objetivo agora é construir uma medida para  $\mathbb{R}$  e mostrar o motivo de utilizar a algebra de Borel ao invés de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

**Definição 1.19.** O comprimento de um intervalo aberto  $I$  é uma função  $\ell$  dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . O tamanho de  $A$  deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . A definição abaixo formaliza essa ideia

**Definição 1.20.** A medida exterior  $m(\cdot)$  de um conjunto  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  é definida por

$$m(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) ; I_1, I_2, \dots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Essa definição envolve uma soma infinita de uma sequência  $t_1, t_2, \dots$ , de elementos de  $[0, \infty]$ , que é  $\infty$  se pelo menos algum  $t_k = \infty$ , ou se a série definida pelas somas parciais de  $t_k$  é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_k.$$

**Exemplo 1.21.** Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  um conjunto finito. Dado  $\varepsilon > 0$  defina a sequência  $I_k$  de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leq n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então  $I_1, I_2, \dots$ , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo,  $m(A) \leq 2\varepsilon n$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, temos que  $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

**Proposição 1.22.** Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

*Demonstração.* Seja  $A = \{a_1, a_2, \dots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  um conjunto enumerável. Dado  $\varepsilon > 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  defina a sequência

$$I_k = \left( a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right).$$

Dessa forma,  $I_1, I_2, \dots$ , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que  $m(A) < 2\varepsilon$ . Pelo fato de  $\varepsilon$  ser arbitrário, temos que  $m(A) = 0$ . □

Uma outra propriedade da medida exterior é sua invariância a translação

**Proposição 1.23.** Seja  $t \in \mathbb{R}$  e  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a ; a \in A\}$$

*Demonstração.* Seja  $I_1, I_2, \dots$ , uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . Dito isso  $t + I_1, t + I_2, \dots$ , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $t + A$ .



Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Logo

$$m(t + A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que  $m(t + A) \leq m(A)$ .

Para verificar a desigualdade na outra direção note que  $A = -t + (t + A)$ , então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t + A)) \leq (t + A).$$

Portanto  $m(A) = m(t + A)$

□

### 1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point" of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  fixo.

**Definição 1.24.** Uma função  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem ( $\#\varphi(X) < \infty$ )

Uma função  $\varphi$  simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \tag{1.1}$$

onde  $a_j \in \mathbb{R}$  e  $\chi_{E_j}$  é a função característica do conjunto  $E_j \in \mathfrak{D}$ . Essa representação é única pelo fato de todos  $a_j$  serem distintos, os conjuntos  $E_j$  serem disjuntos para todo  $j = 1, \dots, n$ , além disso,  $X = \bigcup_{j=1}^n E_j$ .

**Definição 1.25.** Seja  $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de  $\varphi$  em relação a  $\mu$  por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

**Observação:** Adotamos a convenção  $0 \cdot \infty = 0$ . Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 independente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

**Lema 1.26.** Dadas funções simples  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  e  $c \geq 0$  tem-se

(a)  $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$

(b)  $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$

(c) A aplicação  $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$  para todo  $E \in \mathfrak{D}$  é uma medida em  $\mathfrak{D}$ .

*Demonstração.*

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu.$$

Com efeito, para  $c = 0$ ,

$$\int c\varphi d\mu = 0 = c \int \varphi d\mu.$$

por outro lado, para  $c > 0$ , podemos escrever  $c\varphi$  da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n c a_j \chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = c \int \varphi d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representação para  $\varphi + \psi$  dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessariamente é a representação padrão, pois é possível que existam  $j_0, j_1 \in \{1, \dots, n\}$  e  $k_0, k_1 \in \{1, \dots, m\}$ , tais que  $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$ .

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k; j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por  $c_h$  com  $h = 1, \dots, \#H$ , e  $G_h$  a união de todos os conjuntos  $E_j \cap F_k$  tais que  $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos  $G_h$  são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório  $\widetilde{\sum}$  está relacionado aos índices  $1 \leq j \leq n$  e  $1 \leq k \leq m$  tais que  $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de  $\varphi + \psi$  por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h \chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\ &= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) \end{aligned}$$

como  $X$  é a união das famílias  $\{E_j\}$  e  $\{F_k\}$ , temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) \quad \text{e} \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

**(c)** Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida em  $\mathfrak{D}$ . Com efeito,

$$1. \lambda(\emptyset) = \int \varphi \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

2. Note que como  $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{E})$  os elementos  $a_j$  na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que  $0 \leq \varphi(x)$  para todo  $x \in X$ , daí

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x),$$

pois, como os conjuntos  $E_j$  são disjuntos, existe um único  $1 \leq j_0 \leq n$  tal que  $x \in E_{j_0}$ . Dessa forma, para todo  $j \neq j_0$ ,  $\chi_{E_j}(x) = 0$ , então

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E \cap E_j) \geq 0$$

pois mostramos que  $a_j > 0$  para todo  $1 \leq j \leq n$  e  $\mu$  é uma medida.

3. Considere  $(F_k) \subseteq \mathfrak{E}$  uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi \chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_j \mu(F_k \cap E_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi \chi_{F_k} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k) \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.27.** A função

$$\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porém essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utilizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido. De fato,



considere o espaço de medida  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$  onde  $\mathfrak{B}$  é a álgebra de Borel e  $\mu$  é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois  $\mathbb{Q}$  é enumerável.

Agora, podemos estender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negativa (não necessariamente simples)

**Definição 1.28.** A integral de uma função  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  em relação a  $\mu$  é definida por

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu$$

onde  $\varphi$  são funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  tais que  $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in X$ .

Além disso, definimos a integral da função  $f$  sobre um conjunto mensurável

**Definição 1.29.** A integral de  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  sobre um conjunto  $E \in \mathfrak{D}$  é dada por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

...

**Lema 1.30.** Sejam  $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  e  $E, F \in \mathfrak{D}$ . Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se  $f \leq g$  tem-se

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

(b) se  $E \subseteq F$  tem-se

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

*Demonstração.*

(a) Seja  $\varphi$  uma função simples em  $M^+$ , então

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu = \int g d\mu$$

(b) Como  $f \chi_E \leq f \chi_F$ , segue do item anterior que

$$\int f \chi_E d\mu \leq \int f \chi_F d\mu,$$

dito isso

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstrado a seguir.

**Teorema 1.31** (Teorema da Convergência Monótona). Seja  $(f_n)$  uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para  $f$ , então,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

*Demonstração.* Como  $f_n \rightarrow f$  onde  $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , pelo corolário ?? temos que  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . Pela monotonicidade da sequência  $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ , pelo item **(a)** do lema anterior

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dito isso

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, seja  $0 < \alpha < 1$  e  $\varphi$  uma função simples mensurável tal que  $0 \leq \varphi \leq f$  e considere

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\} = \{x \in X; [f_n - \alpha\varphi](x) \geq 0\}$$

como  $f_n$  e  $\varphi$  são funções mensuráveis, temos que  $A_n \in \mathfrak{D}$ . Além disso,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  já que  $f_n \leq f_{n+1}$  e  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  pois  $\sup\{f_n\} = f$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  e  $0 \leq \varphi \leq f$ . Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \quad (1.2)$$

Dessa forma, a sequência  $(A_n)$  é monótona crescente e tem união  $X$ , segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi \chi_{A_n} d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

... fazendo  $n \rightarrow \infty$  em 1.2

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo  $0 < \alpha < 1$ , obtemos

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de  $\varphi$  ser uma função simples tal que  $0 \leq \varphi \leq f$  tem-se que

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in \mathcal{M}^+}} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

□

O Lema 1.26 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, também é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

**Corolário 1.32.** Sejam  $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  e  $c > 0$ , então são válidas as seguintes afirmações

$$(a) \int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$$

$$(b) \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

*Demonstração.*

(a) Se  $c = 0$

$$\int cf \, d\mu = 0 = c \int f \, d\mu.$$

Se  $c > 0$ , considere  $(\varphi_n)$  uma sequência monótona crescente de funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  convergindo para  $f$  (lema ??). Dito isso,  $(c\varphi_n)$  é uma sequência monótona crescente que converge para  $cf$ . Pelo Lema 1.26 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf \, d\mu = \lim \int c\varphi_n \, d\mu = c \lim \int \varphi_n \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere  $(\varphi_n)$  e  $(\psi_n)$  sequências monótonas crescentes de funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  que convergem para  $f$  e  $g$  respectivamente. Dessa forma  $(\varphi_n + \psi_n)$  é uma sequência monótona crescente que converge para  $f + g$ . Portanto

$$\int (f + g) \, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

**Lema 1.33** (Lema de Fatou). Se  $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , então

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

*Demonstração.* Seja  $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$ , dessa forma  $g_m \leq f_n$  para todo  $m \leq n$ . Sendo assim,

$$\int g_m \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$$

para todo  $m \leq n$ . Desse modo

$$\int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que  $(g_m)$  é crescente e converge para seu supremo, ou seja,  $\liminf f_n$ . Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessariamente simples

**Corolário 1.34.** Seja  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . A aplicação  $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu$$

é uma medida.

*Demonstração.*

1.  $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$ .
2. Como  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  temos que  $\lambda(E) = \int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$ .
3. Sejam  $E_n$  uma sequência de conjuntos disjuntos em  $\mathfrak{D}$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  e considere  $f_n$  definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k}$$

Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que

$$\int f_n d\mu = \int \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \int f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k).$$

Além disso, podemos escrever

$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f \chi_{E_k} = f \chi_E$$

desde que  $(E_n)$  é uma sequência de conjuntos disjuntos.

Por fim, como  $(f_n)$  é uma sequência crescente em  $M^+$  que converge para  $f \chi_E$ , pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$$

Portanto,  $\lambda$  é uma medida. □

**Corolário 1.35.** Seja  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . Então,  $f(x) = 0$  em quase toda parte de  $X$  se, e somente se,

$$\int f d\mu = 0$$

*Demonstração.* Suponha que  $\int f d\mu = 0$  e considere o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X ; f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que  $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$ . Note que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0.$$

Isto nos diz que  $\mu(E_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso

$$E = \{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pois se  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in E_{n_0}$ , logo

$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim,  $x \in E$ .

Por outro lado, se  $x \in E$ , temos que  $f(x) > 0$ . Utilizando a propriedade Arquimediana, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é,  $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Portanto  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  como queríamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que  $(E_n)$  é uma sequência crescente. Isto nos diz que  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in E^c$  com  $\mu(E) = 0$ , ou seja  $f(x) = 0$  em quase toda parte em  $X$ .

Reciprocamente, suponha que  $f(x) = 0$  em quase toda parte em  $X$ . Se  $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$ , então  $\mu(E) = 0$ . Sendo assim, considerando  $f_n = n\chi_E$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $f \leq \liminf f_n$  e pelo Lema de Fatou

$$0 \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f \, d\mu = 0.$$

□

**Corolário 1.36.** Seja  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , então a aplicação  $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Então, a medida  $\lambda$  é absolutamente contínua em relação a  $\mu$ , isto é, se  $\mu(E) = 0$ , então  $\lambda(E) = 0$

*Demonstração.* Se  $\mu(E) = 0$ , então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é,  $f\chi_E = 0$  em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

**Corolário 1.37.** Se  $(f_n)$  é uma sequência monótona crescente de funções em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  que converge em quase toda parte de  $X$  para a função  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , então

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

*Demonstração.* Seja  $N$  um conjunto de medida nula. Suponha que  $(f_n)$  converge para  $f$  em todo o pontos de  $M = N^c$ . Dessa forma, a sequência  $(f_n \chi_M)$  converge para  $f \chi_M$ , pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f \chi_M \, d\mu = \lim \int f_n \chi_M \, d\mu.$$

Além disso, podemos escrever  $f$  e  $f_n$  da seguinte forma

$$f = f \chi_M + f \chi_N \text{ e } f_n = f_n \chi_M + f_n \chi_N,$$

pois  $M = N^c$ . Como  $\mu(N) = 0$ , as funções  $f \chi_N$  e  $f_n \chi_N$  são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.35, segue que

$$\lim \int f_n \, d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

**Corolário 1.38.** Seja  $(g_n)$  uma sequência em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . Então

$$\int \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

*Demonstração.* Seja  $f_n = g_1 + \dots + g_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $g_n \geq 0$ , temos que  $(f_n)$  é uma sequência crescente que converge para  $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ . Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left( \sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como  $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left( \sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu$$

Portanto

$$\int \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

**Definição 1.39.** O conjunto  $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  das funções integráveis consiste em todas as funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mensuráveis, tais que as integrais

$$\int f^+ d\mu \text{ e } \int f^- d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de  $f$  em relação a  $\mu$  por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

e se  $E$  é um conjunto mensurável

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Qualquer representação de  $f$  como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja  $f$  uma função integrável e escreva  $f$  como  $f = f_1 - f_2$ , onde  $f_1$  e  $f_2$  são funções integráveis não negativas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Como  $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ , segue que

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Da mesma forma que definimos uma medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exige o lema abaixo

**Lema 1.40.** Seja  $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ . A aplicação  $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de  $f$  (em relação a  $\mu$ ).

*Demonstração.* Como  $f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{D}, \mu)$ , pelo Corolário ?? temos que as funções  $\lambda^+, \lambda^- : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \text{ e } \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

são medidas em  $\mathfrak{D}$  e são finitas pelo fato de  $f$  ser uma função integrável. Como  $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$  temos que  $\lambda$  é uma carga.  $\square$

Como a aplicação  $\lambda$  definida acima é uma carga, vemos que se  $(E_n)$  é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ , então

$$\int_E f d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propriedades elementares das integrais de funções mensuráveis

**Teorema 1.41.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável. Então  $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  se, e somente se,  $|f| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ . Além disso

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu. \quad (1.3)$$

*Demonstração.* Seja  $f$  uma função integrável, mostremos que  $|f|$  também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+ d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

é finita pois  $f$  é integrável, e

$$\int |f|^- d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

que é finita. Portanto  $|f|$  é integrável.

Reciprocamente, suponha que  $|f|$  é integrável, dessa forma

$$\begin{aligned} f^+ &\leq f^+ + f^- = |f| \\ f^- &\leq f^+ + f^- = |f| \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} \int f^+ d\mu &\leq \int |f| d\mu \\ \int f^- d\mu &\leq \int |f| d\mu \end{aligned}$$

ambas finitas pois  $|f|$  é integrável. Portanto  $f$  é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integrável e a desigualdade triangular.

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$$

□

**Corolário 1.42.** Se  $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ ,  $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  e  $|f| \leq |g|$ , então  $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  e

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$$



*Demonstração.* Se  $g$  é integrável então pelo Teorema anterior  $|g|$  também o é. Além disso, como  $|f| \leq |g|$

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu,$$

como  $|g|$  é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de  $|f|$  também ser finita, ou seja,  $|f|$  é integrável e novamente pelo Teorema anterior,  $f$  é integrável.  $\square$

**Teorema 1.43.** Sejam  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$  e  $c \in \mathbb{R}$ , então  $cf, f + g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$  e

$$(a) \int cf d\mu = c \int f d\mu$$

$$(b) \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

*Demonstração.*

(a) Se  $c \geq 0$ . Note que  $(cf)^+ = cf^+$  e  $(cf)^- = cf^-$ . Dito isso

$$\int cf d\mu = \int cf^+ - cf^- d\mu$$

como  $cf^+$  e  $cf^-$  são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.32

$$\int cf d\mu = c \int f^+ - f^- d\mu = c \int f d\mu$$

Se  $c < 0$  a demonstração é análoga, basta perceber que  $(cf)^+ = -cf^-$  e  $(cf)^- = -cf^+$  ambas funções não negativas pois  $-c > 0$ .

(b) Sejam  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ , então pelo Teorema 1.41  $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ , como  $|f + g| \leq |f| + |g|$  temos que  $f + g$  é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde  $f^+ + g^+$  e  $f^- + g^-$  são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f + g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.34 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

**Teorema 1.44** (Teorema da Convergência Dominada). Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável  $f$ . Se existe uma função integrável  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  em quase toda parte, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f$  é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

*Demonstração.* Redefinindo as funções  $f_n$  e  $f$  no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo  $X$ . Note que

$$\lim |f_n| \leq g \implies |f| \leq |g|,$$

como por hipótese  $f$  é mensurável e  $g$  é integrável, segue pelo Corolário 1.42 que  $f$  é integrável. Além disso, como  $-g \leq f_n \leq g$  temos que  $g + f_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.41 temos que

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu \\ &= \int (g + \lim f_n) d\mu \\ &= \int \lim (g + f_n) d\mu \\ &= \int \liminf (g + f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu \\ &= \liminf \left( \int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

que implica em

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \quad (1.4)$$

Por outro lado,  $g - f_n \geq 0$ , de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad (1.5)$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

isto é<sup>1</sup>

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  onde a aplicação  $x \mapsto f(x, t)$  é mensurável para todo  $t \in [a, b]$ .

<sup>1</sup> $\limsup x_n \leq x \leq \liminf x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

**Corolário 1.45.** Suponha que para algum  $t_0 \in [a, b]$ , tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t),$$

para cada  $x \in X$  e que existe uma função integrável  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x, t)| \leq g(x)$ , para todo  $x \in X$  e  $t \in [a, b]$ . Então

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

*Demonstração.* Seja  $t_n$  uma sequência em  $[a, b]$  que converge para  $t_0$  e considere a sequência  $(f_n)$  dada por  $f_n(x) = f(x, t_n)$ . Então como  $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$  com  $g$  integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \int f(x, t_0) d\mu(x) &= \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) \\ &= \int \lim f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f(x, t_n) d\mu(x) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

**Corolário 1.46.** Se a aplicação  $t \mapsto f(x, t)$  for contínua em  $[a, b]$  para cada  $x \in X$ , e se existir uma função integrável  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x, t)| \leq g(x)$  para todo  $x \in X$  e  $t \in [a, b]$ . Então a função  $F$  dada por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é contínua.

*Demonstração.* Mostremos que  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$ . Com efeito

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

□

**Corolário 1.47.** Suponha que para algum  $t_0 \in [a, b]$ , a função  $x \rightarrow f(x, t_0)$  seja integrável em  $X$ , que  $\partial_t f$  existe em  $X \times [a, b]$  e que existe uma função integrável  $g$  em  $X$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo  $x \in X$  e  $t \in [a, b]$ . Então a função  $F$  definida por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é diferenciável em  $[a, b]$  e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

*Demonstração.* Seja  $(t_n)$  uma sequência em  $[a, b]$  que converge para  $t$ , com  $t \neq t_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo  $x \in X$ . Desde modo a função  $x \mapsto \partial f / \partial t(x, t)$  é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja  $x \in X$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $s_0$ , entre  $t_0$  e  $t$  tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left| f(x, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right|$$

Como  $f$  é mensurável e a aplicação  $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0| |\partial f / \partial t(x, s_0)|$  é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.42 temos que  $f$  é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo  $x \in X$ . Consequentemente

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| < g(x)$$

para valores de  $n$  suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. □

## 1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue  $\mathcal{L}^p$ , que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências  $p$ -ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

**Proposição 1.48.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. A aplicação  $N_\mu : \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso  $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$  em quase toda parte em  $X$ .

*Demonstração.* Note que

$$1. N_\mu(f) = \int |f| d\mu \geq \int 0 d\mu = 0.$$

$$2. N_\mu(\lambda f) = \int |\lambda f| d\mu = \int |\lambda| |f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$$

$$3. N_\mu(f + g) = \int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$$

Portanto  $N_\mu$  é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

**Observação:** Note que  $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  é um espaço vetorial com as operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Isto se deve ao fato que  $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  é um subespaço vetorial do espaço de funções  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

Estamos interessados em transformar  $\mathcal{L}$  em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

**Definição 1.49.** Sejam  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são  $\mu$ -equivalentes ( $f \sim_\mu g$ ) se  $f \equiv g$  em quase toda parte em  $X$ .

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{[f] ; f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) ; g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  ou espaço das funções somáveis. Esse espaço, munido das operações

$$\begin{aligned}[f] + [g] &= [f + g] \\ [\lambda f] &= \lambda[f]\end{aligned}$$

para todo  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um espaço vetorial.

**Proposição 1.50.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. A aplicação  $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$$

para todo  $[f] \in \mathcal{L}^1$  é uma norma

*Demonstração.* Note que apenas precisamos mostrar que  $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$ , pois as outras propriedades são análogas à demonstração da Proposição 1.48. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto  $\|\cdot\|_1$  é uma norma e  $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$  é um espaço vetorial normado.  $\square$

No restante do texto, adotaremos a notação  $[f] = f$ , ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com o seus representantes.

**Definição 1.51.** Seja  $1 \leq p < \infty$  um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{D}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável, } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^p$ .

Nosso intuito agora é mostrar que  $\mathcal{L}^p$  é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que  $\|\cdot\|_p$  é uma norma em  $\mathcal{L}^p$ .

**Teorema 1.52** (Desigualdade de Young). Sejam  $A, B \geq 0$ ,  $1 \leq p < \infty$  e  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados<sup>a</sup>. Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se,  $A^p = B^q$ .

<sup>a</sup> $p$  e  $q$  são ditos expoentes conjugados se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in (0, 1)$  e defina  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Note que  $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$ . Dessa forma

- $t \in (0, 1)$  então  $\varphi'(t) < 0$  pois  $t^{\alpha-1} > 1$  e então  $1 - t^{\alpha-1} < 0$
- $t \in (1, \infty)$  então  $\varphi'(t) > 0$  pois  $t^{\alpha-1} < 1$  e então  $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que  $\varphi$  é decrescente em  $(0, 1)$  e crescente em  $(1, \infty)$ . Ou seja, como  $\varphi$  é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso  $\varphi(t) \geq \varphi(1)$  para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi(t) = \varphi(1)$  se, e somente se,  $t = 1$ . Assim

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) \implies \alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1 \implies t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

Sejam  $a, b > 0$ , então para  $t = \frac{a}{b}$  temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^\alpha b^{-\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por  $b$ , encontramos

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se  $t = 1$ , isto é  $a = b$ . Agora considere que  $\alpha = \frac{1}{p} \in (0, 1)$ , ou seja,  $1 < p < \infty$ . Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b,$$

e por hipótese  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Logo

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo  $a = A^p$  e  $b = B^q$ , temos o resultado desejado

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando  $A^p = B^q$ . □

**Teorema 1.53** (Desigualdade de Hölder). Sejam  $f \in \mathcal{L}^p$  e  $g \in \mathcal{L}^q$  onde  $1 \leq p < \infty$  e  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados. Então  $fg \in \mathcal{L}^1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

*Demonstração.* Se  $\|f\|_p = 0$  ou  $\|g\|_q = 0$  então  $f \equiv 0$  qtp em  $X$  ou  $g \equiv 0$  qtp em  $X$ . Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que  $\|f\|_p \neq 0$  e  $\|g\|_q \neq 0$ . Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \text{ e } B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q}. \quad (1.6)$$

Como  $f \in \mathcal{L}^p$  e  $g \in \mathcal{L}^q$ , então  $|f|^p$  e  $|g|^q$  são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.42

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto  $|fg|$  é integrável, isto é,  $fg \in \mathcal{L}^1$ .

Por fim, integrando (1.6) com respeito a  $\mu$ , chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} d\mu \leq \int \left( \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q} \right) d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int |g|^q d\mu.$$

Pela definição da norma em  $\mathcal{L}^p$  segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queríamos demonstrar. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando  $p = q$ , o que acontece apenas quando  $p = q = 2$ .

**Corolário 1.54** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se  $f, g \in \mathcal{L}^2$ , então  $fg \in \mathcal{L}^1$  e

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq \int |f|^2 d\mu \int |g|^2 d\mu$$

*Demonstração.* A primeira desigualdade é o Teorema 1.41 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

**Teorema 1.55** (Desigualdade de Minkowski). Se  $f, g \in \mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ , então  $f + g \in \mathcal{L}^p$  e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

*Demonstração.* Na Proposição 1.48 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para  $p = 1$ . Dito isso, seja  $1 < p < \infty$ . Como  $f, g \in \mathcal{L}^p$ , então  $f$  e  $g$  são mensuráveis. Dessa forma,  $f + g$  também é mensurável. Mostremos agora que  $f + g \in \mathcal{L}^p$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\ &\leq 2^p(|f|^p + |g|^p). \end{aligned}$$

Daí

$$\int |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int (|f|^p + |g|^p) d\mu \leq 2^p \left( \int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right)$$



que é uma integral finita. Portanto  $f + g \in \mathcal{L}^p$ .

Também é fácil ver que

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Agora, seja  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Daí  $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$ . De fato,

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q^q = \int |f + g|^{q(p-1)} d\mu = \int |f + g|^p < \infty \quad (1.7)$$

pois  $f + g \in \mathcal{L}^p$ . Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f| |f + g|^{p-1} d\mu = \| |f| + |f + g|^{p-1} \|_1 \leq \| |f| \|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.8)$$

Analogamente

$$\int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.9)$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \\ &\leq \int |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Se  $\|f + g\|_p = 0$ , então

$$\|f + g\|_p = 0 \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que  $\|f + g\|_p \neq 0$  para obter

$$\frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f + g\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados, segue que  $p - \frac{p}{q} = 1$ . Portanto

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para  $1 \leq p < \infty$ . □

Agora, vamos provar que  $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$  é um espaço vetorial normado para  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposição 1.56.** A aplicação  $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

*Demonstração.* Note que

1.  $\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$  pois  $|f| \geq 0$ .
2.  $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ (} f \sim_\mu 0 \text{)}$
3.  $\|\lambda f\|_p = \left( \int |\lambda f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int |\lambda|^p |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( |\lambda|^p \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$
4.  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto  $\|\cdot\|_p$  é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que  $\mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$  é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

**Definição 1.57.** Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $\mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que  $(f_n)$  é de Cauchy se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo  $n, m \geq n_0$

**Definição 1.58.** Sejam  $(f_n)$  uma sequência em  $\mathcal{L}^p$  e  $f \in \mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que  $(f_n)$  é convergente e converge para  $f$  se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$$

para todo  $n \geq n_0$ . Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

**Definição 1.59.** Um espaço métrico  $(X, d)$  é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

**Teorema 1.60** (Teorema de Riesz-Fischer).  $\mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}^p$ . Mostremos que  $(f_n)$  é convergente. Com efeito, sabemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo  $n, m \geq n_0$ . Escolhendo  $\varepsilon$  de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n} \tag{1.10}$$

Defina  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que  $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , pois  $g \geq 0$  e

$$g = |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n|$$

isto é,  $g$  é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis ( $f_n$  é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que  $g \in \mathcal{L}^p$ . De fato

$$\int |g|^p d\mu = \int g^p d\mu,$$

pois  $g \geq 0$ . Pela definição de  $g$  temos

$$\int g^p d\mu = \int \left( |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left( |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \left( |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em  $\mathcal{L}^p$  e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^k \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leq \left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right)^p < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p d\mu < \infty.$$

Portanto,  $g \in \mathcal{L}^p$ . Agora seja,  $E = \{x \in X; g(x) < \infty\} \in \mathfrak{D}$ . Dito isso,  $N = E^c = \{x \in X; g(x) = \infty\} \in \mathfrak{D}$ . Mostremos que  $N$  tem medida nula. Com efeito, suponha que  $\mu(N) > 0$ , dessa forma

$$\int_X |g|^p \geq \int_N |g|^p = \infty \mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois  $g \in \mathcal{L}^p$ . Dessa forma  $\mu(N) = 0$ , isto é,  $g < \infty$  em quase toda parte em  $X$ . Sendo assim, defina  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que  $f \in \mathcal{L}^p$ . Note que

$$f(x) = \left( f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| \chi_E \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente,  $|f|^p < g^p$ . Logo

$$\int |f|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty.$$

Portanto,  $f \in \mathcal{L}^p$ . Por outro lado, para todo  $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= f_1(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Como  $\mu(N) = 0$ , então  $\lim f_n = f$  em quase toda parte em  $X$ . É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \quad (1.11)$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $g \in \mathcal{L}^p$ , então  $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$ . Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left( \int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p d\mu = 0$$

Isto prova que  $\mathcal{L}^p$  é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue,  $\mathcal{L}^\infty$  explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

**Definição 1.61.** Seja  $(X, \mathfrak{F}, \mu)$  um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{F}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^\infty$ . Para cada  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , definimos

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in X\} = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que  $f$  é uma função essencialmente limitada.

**Observação:** Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

isto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leq M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato,  $|f(x)| \leq M$  em quase toda parte em  $X$  se, e somente se, existe  $N \in \mathfrak{D}$  tal que  $\mu(N) = 0$  e  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in N^c$ . Note que  $\{x \in X; |f(x)| > M\} \subseteq N$ , dessa forma

$$\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) \leq \mu(N) = 0$$

Portanto,  $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$ .

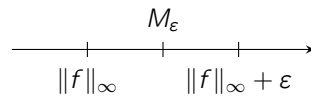
Reciprocamente, se  $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$ , então  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in \{|f(x)| > M\}^c$ , isto é,  $|f(x)| \leq M$  em quase toda parte em  $X$ .

**Proposição 1.62.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo  $f \in \mathcal{L}^\infty$

*Demonstração.* Se  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , então existe  $M \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  em quase toda parte em  $X$ . Daí, como  $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geq 0; |f(x)| \leq M_0 \text{ qtp em } X\}$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$  conseguimos encontrar  $M_\varepsilon \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M_\varepsilon$  em quase toda parte em  $X$ .



Como  $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$ , então

$$|f(x)| \leq M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  chegamos a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que  $\mathcal{L}^\infty$  é um espaço vetorial normado

**Proposição 1.63.** A aplicação  $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

*Demonstração.* Note que

1.  $\|f\|_\infty \geq 0$  pois 0 é cota inferior de  $\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$ .
2.  $\|f\|_\infty = 0$ , assim dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M_\varepsilon \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M_\varepsilon$  em quase toda parte em  $X$ , com  $M_\varepsilon < \varepsilon$ . Daí,  $|f(x)| < \varepsilon$  em quase toda parte em  $X$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , encontramos

$$|f(x)| \leq 0 \text{ qtp em } X$$

Dessa forma,  $f(x) = 0$  em quase toda parte em  $X$ .

Reciprocamente,  $\|0\|_\infty = \inf\{M \geq 0; 0 \leq M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3.  $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em  $\mathcal{L}^\infty$ ) Se  $f, g \in \mathcal{L}^\infty$  então as funções são limitadas em quase toda parte em  $X$ , dito isso,  $f + g$  também é limitada em quase toda parte em  $X$ . Logo  $f + g \in \mathcal{L}^\infty$ .

Por outro lado, como  $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ , então existem  $M, \hat{M} \in \mathfrak{D}$  tais que  $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$  e  $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$  para todo  $x \notin M$  e  $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$  para todo  $x \notin \hat{M}$ . Seja  $N = M \cup \hat{M} \in \mathfrak{D}$ . Daí  $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leq \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$ . Além disso

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo  $x \notin N$ , com  $\mu(N) = 0$ . Dessa forma

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto,  $\|\cdot\|_\infty$  é uma norma. □

**Proposição 1.64** (Desigualdade de Hölder em  $\mathcal{L}^\infty$ ). Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. Se  $f \in \mathcal{L}^1$  e  $g \in \mathcal{L}^\infty$ , então  $fg \in \mathcal{L}^1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

*Demonstração.* Note que se  $g \in \mathcal{L}^\infty$  então  $|g| \leq \|g\|_\infty$  em quase toda parte em  $X$ . Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = \int |f| |g| d\mu \leq \int |f| \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que  $\mathcal{L}^\infty$  também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

**Teorema 1.65** (Teorema de Riesz-Fischer).  $\mathcal{L}^\infty$  é um espaço completo

*Demonstração.* □

Agora vamos construir os espaços  $\ell^p$  que são um caso particular dos espaços  $\mathcal{L}^p$

**Exemplo 1.66.** Sejam  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  e  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$  dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

...

**Observação:** Denotamos o espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  por  $\ell^p$

**Exemplo 1.67.**  $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \dots$

Vejam mais algumas propriedades importantes dos espaços  $\mathcal{L}^p$

**Proposição 1.68.** Sejam  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida e  $0 < p < q < r \leq \infty$ . Então

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$$

Demonstração. ...

□

**Teorema 1.69** (Desigualdade de Interpolação). Sejam  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida e  $0 < p < q < r \leq \infty$ . Então  $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{L}^q$  e

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde  $\lambda \in (0, 1)$  e

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \quad \left( \text{i.e., } \lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \right) \quad (1.12)$$

Demonstração. Consideremos dois casos

–  $r = \infty$  Note que

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q} \in (0, 1)$$

Além disso, se  $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$ , tem-se que

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q d\mu = \int |f|^{q-p} |f|^p d\mu \leq \int \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p < \infty.$$

Com isso  $f \in \mathcal{L}^q$  e ainda mais

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e como  $\lambda = \frac{p}{q}$ , segue que

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

–  $r < \infty$  Note que multiplicando (1.12) por  $q$ , temos

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1.$$

Com isso,  $\frac{p}{\lambda q}$  e  $\frac{r}{(1-\lambda)q}$  são expoentes conjugados. Dito isso, aplicando a Desigualdade de Hölder com  $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$  temos que

$$\begin{aligned} \int |f|^q d\mu &= \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q} d\mu \\ &= \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \\ &\leq \| |f|^{\lambda q} \|_{\frac{p}{\lambda q}} \| |f|^{(1-\lambda)q} \|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\ &= \left( \int |f|^{\lambda q \cdot \frac{p}{\lambda q}} \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left( \int |f|^{(1-\lambda)q \cdot \frac{r}{(1-\lambda)q}} \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \left( \int |f|^p \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left( \int |f|^q \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Daí,  $f \in \mathcal{L}^q$ . Além disso

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim, mostrada a desigualdade de interpolação.

□

**Proposição 1.70.** Sejam  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  um espaço de medida com  $\mu(X) < \infty$  e  $0 < p < q \leq \infty$ . Então  $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$  e

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

*Demonstração.* ... □

**Teorema 1.71** (Desigualdade de Chebyshev). Sejam  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $f \in \mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então

$$\|f\|_p \geq \alpha [\mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\})]^{\frac{1}{p}}$$

para todo  $\alpha > 0$ .

*Demonstração.* ... □

Agora vamos ver um resultado sobre os espaços  $\ell^p$

**Proposição 1.72.** Sejam  $0 < p < q \leq \infty$ . Então  $\ell^p \subseteq \ell^q$  e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

*Demonstração.* Consideremos dois casos

–  $q = \infty$

Seja  $x \in \ell^p$ . Então  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ . É fácil ver que

$$|x_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é,  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$  é cota superior de  $x = (x_n)$ . Dito isso

$$\|x\|_q = \|x\|_{\infty} = \sup |x_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo  $x \in \ell^q$  e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

–  $q < \infty$

Utilizando a Desigualdade de Interpolação com  $r = \infty$  e  $\lambda = \frac{p}{q} \in (0, 1)$  para obter que  $\ell^p = \ell^p \cap \ell^r \subseteq \ell^q$  (pelo caso  $q = \infty$ ) e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\infty}^{1 - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_p^{1 - \frac{p}{q}} = \|x\|_p.$$

Assim, demonstrada a proposição. □

Os proximos resultados estão relacionados a densidade das funções simples em  $\mathcal{L}^p$  e  $\mathcal{L}^{\infty}$

**Definição 1.73.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Um conjunto  $E \subseteq X$  é dito denso em  $X$  se todo ponto de  $X$  é aderente a  $E$ . Isto é, dado  $x \in X$  existe uma sequência  $(x_n)$  de elementos de  $E$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .



**Teorema 1.74.** Seja  $1 \leq p < \infty$ . O conjunto das funções simples  $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$  com  $\mu(E_j) < \infty$  para todo  $j = 1, \dots, n$  é denso em  $\mathcal{L}^p$

*Demonstração.* Considere o conjunto

$$Y = \left\{ f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} ; \mu(E_j) < \infty \right\}.$$

Note que dada uma função  $f \in Y$  temos que

$$\int |f|^p d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \right|^p d\mu = \int \sum_{j=1}^n |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(E_j) < \infty.$$

Isto é,  $f \in \mathcal{L}^p$ . Consequentemente  $Y \subseteq \mathcal{L}^p$ .

Por outro lado, seja  $f \in \mathcal{L}^p$  sabemos que  $f = f^+ - f^-$  onde  $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . Além disso pelo Lema ?? temos que existem seqüências  $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$  de funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  tais que

$$0 \leq \varphi_n^\pm \leq \varphi_{n+1}^\pm \text{ e } \varphi_n^\pm \rightarrow f^\pm.$$

É fácil ver que  $(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$  é uma seqüência de funções simples tal que

$$\lim(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \lim \varphi_n^+ + \lim \varphi_n^- = f^+ - f^- = f.$$

Seja  $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , assim  $(\varphi_n)$  é uma seqüência de funções simples tal que  $\varphi_n \rightarrow f$ . Perceba que

$$|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leq f^+ + f^- = |f|,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f \in \mathcal{L}^p$ , então

$$\int |\varphi_n|^p d\mu \leq \int |f|^p d\mu < \infty,$$

ou seja,  $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{L}^p$ . Consequentemente, denotando  $\varphi_n$  por

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j \chi_{E_j}$$

segue que

$$|a_j|^p \mu(E_j) \leq \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \mu(E_j) = \int \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \int |\varphi_n|^p d\mu < \infty.$$

Isto nos diz que  $\mu(E_j) < \infty$  para todo  $j = 1, \dots, m_n$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $(\varphi_n) \subseteq Y$ . Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \|\varphi_n - f\|_p^p = \lim \int |\varphi_n - f|^p d\mu = \int \lim |\varphi_n - f|^p d\mu = 0$$

pois

$$\lim \varphi_n = f \text{ e } |\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto  $Y$  é denso em  $\mathcal{L}^p$ , já que dada uma função  $f \in \mathcal{L}^p$ , encontramos uma seqüência em  $Y$  que converge para  $f$ .  $\square$

**Teorema 1.75.** O conjunto das funções simples é denso em  $\mathcal{L}^\infty$ .

*Demonstração.* □

O proximos resultados são uma generalização da Desigualdade de Hölder

**Lema 1.76.** Sejam  $0 < p, q \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ,  $f \in \mathcal{L}^p$  e  $g \in \mathcal{L}^q$ . Então  $fg \in \mathcal{L}^r$  e

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

*Demonstração.* ... □

**Proposição 1.77** (Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam  $0 < p_1, \dots, p_N \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N}$  e  $f = f_1 f_2 \dots f_N$  onde  $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$  para todo  $j = 1, \dots, N$ . Então  $f \in \mathcal{L}^p$  e

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_N\|_{p_N}$$

*Demonstração.* Segue por indução do lema anterior. □

# CAPÍTULO DOIS

## ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev, suas principais propriedades e exemplos que ilustram sua aplicabilidade em problemas de fronteira e outros contextos relevantes da matemática aplicada.

### 2.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo

**Definição 2.1.** Seja  $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Definimos o suporte de  $\varphi$  por

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\}}$$

Além disso, se  $\text{supp } \varphi$  é compacto, dizemos que  $\varphi$  tem suporte compacto.

Note que  $\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp } \varphi$ , então  $(\text{supp } \varphi)^c \subseteq \{x \in \Omega ; \varphi(x) = 0\}$ . Ou seja se  $x \notin \text{supp } \varphi$ , então  $\varphi(x) = 0$ . Além disso, se  $\Omega$  é um aberto, então  $\varphi$  se anula em  $\partial\Omega$ .

**Definição 2.2.** Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos o espaço das funções com a  $k$ -ésima derivada contínua por

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é contínua, } f^{(k)} \text{ existe e é contínua}\}$$

**Observação:** O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

**Definição 2.3.** O conjunto das funções  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de  $\Omega$  é denotado por  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$

A definição abaixo será amplamente utilizada nesse capítulo

**Definição 2.4.** O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em  $\Omega$  é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \text{supp } f \text{ é compacto}\}$$

Além disso definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

que é o conjunto das funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  com suporte compacto.

Os resultados abaixo são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

**Teorema 2.5** (Integração por partes em  $\mathbb{R}^n$ ). Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  uma região regular e  $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Então

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

onde  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  é o vetor normal unitário que aponta pra dentro em  $\partial\Omega$ .

*Demonstração.* [1] □

**Teorema 2.6.** (coordenadas polares) . . .

## 2.2 Motivação

### 2.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

**Definição 2.7.** Sejam  $I$  um intervalo aberto, possivelmente ilimitado e  $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ . Dizemos que  $v$  é a derivada fraca de  $u$ , se

$$\int_I u \phi' dx = - \int_I v \phi dx$$

para todo  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ .

Denotamos  $u' = v$  e diremos  $v$  é a derivada de  $u$  no sentido fraco.

**Observação:** (sobre a notação  $dx$  e  $d\mu$ )

**Observação:** (função teste)

**Exemplo 2.8.** A função  $u : I = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é derivável no sentido usual. Já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(1+h)}{h} = 1 \neq 0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(1+h)}{h}.$$

Porem, possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$  temos

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi \Big|_1^2.$$

Como  $\phi$  tem suporte compacto,  $\phi(0) = \phi(2) = 0$ . Assim

$$\int_0^2 u\phi' dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) = - \int_0^1 \phi dx$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral.

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \left( \int_0^1 1\phi dx - \int_1^2 0\phi dx \right) = - \int_0^2 v\phi dx$$

Portanto,  $v$  é a derivada de  $u$  no sentido fraco.

**Exemplo 2.9.** A função  $u : I = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possui derivada fraca. ... (continuar)

Com a noção de derivada fraca, estamos prontos para definir os espaços de Sobolev  $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

**Definição 2.10.** Seja  $I$  um intervalo aberto, possivelmente ilimitado. Definimos o espaço de Sobolev  $\mathcal{W}^{1,p}(I)$  por

$$\mathcal{W}^{1,p} = \{u \in \mathcal{L}^p; u' \in \mathcal{L}^p\}$$

onde  $u'$  é a derivada de  $u$  no sentido fraco

## 2.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é definir a derivada fraca de ordem superior, generalizar os espaços da seção anterior para funções definidas em um aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$  e explorar algumas propriedades elementares.

Seja  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , então se  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , utilizando integração por partes em  $\mathbb{R}^n$  temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu_i dS - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (i = 1, \dots, n)$$

Como  $\phi$  tem suporte compacto e  $\Omega$  é um aberto, segue que  $\phi$  se anula em  $\partial\Omega$ , como mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

Além disso, se  $u$  for de classe  $\mathcal{C}^k$  com  $k \in \mathbb{N}$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  um multi-índice de ordem  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ , então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi. \quad (2.2)$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (2.1)  $|\alpha|$  vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (2.2) ainda é válida, mesmo se  $u$  não for de classe  $\mathcal{C}^k$ . Note que o lado esquerdo de (2.1) está bem definido se  $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . O problema é que se  $u$  não é uma função de classe  $\mathcal{C}^k$  então o lado direito de (2.1) não faz sentido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função  $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  tal que (2.1) é válida quando substituímos  $D^\alpha u$  por  $v$ .

**Definição 2.11** (Derivada fraca em  $\Omega$ ). Sejam  $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice. Dizemos que  $v$  é a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca de  $u$ , denotada por

$$D^\alpha u = v$$

dado que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi \, d\mu. \quad (2.3)$$

para toda função de teste  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Isto é, se dado uma função  $u$  e existe uma função  $v$  que satisfaz (2.3) para toda  $\phi$  função de teste, dizemos que  $D^\alpha u = v$  no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função  $v$  que satisfaz (2.3), então  $u$  não possui a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca.

**Lema 2.12.** Seja  $\alpha$  um multi-índice. Se  $v$  e  $\tilde{v}$  são ambas  $\alpha$ -ésimas derivadas parciais fracas de uma função  $u$ . Então

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

*Demonstração.* Sejam  $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  tais que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx \text{ e } \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi \, dx$$

para toda  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Daí

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0$$

isto é

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto  $v = \tilde{v}$  qtp em  $\Omega$ . □

**Exemplo 2.13.** Considere a função  $u$  do exemplo 2.8, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

é a derivada de  $u$  no sentido fraco. Porém a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porém  $v$  e  $\tilde{v}$  são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois  $\{1\}$  é finito, logo tem medida nula.

...

**Definição 2.14.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto. Definimos o espaço de Sobolev  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) ; \text{ existem } g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu = - \int_{\Omega} g_i \phi d\mu \right\}$$

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ , indutivamente, e pela derivada fraca, veremos as duas e mostraremos que são equivalentes

**Definição 2.15.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto. Definimos o espaço de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{L}^p ; D^{\alpha} u \in \mathcal{L}^p \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k \}$$

com  $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ . Ou

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega) ; D^{\alpha} u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1 \}$$

onde  $D^{\alpha} u$  é a  $\alpha$ -ésima derivada parcial de  $u$  no sentido fraco.

**Observação:** (notação  $H^k(\Omega)$ )

**Definição 2.16.** O espaço  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para  $1 \leq p < \infty$  e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^{\alpha} u|$$

para  $p = \infty$ .

**Observação:** (norma equivalente)

**Exemplo 2.17.** Seja  $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$  a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$x \mapsto |x|^{-\alpha}.$$

Para quais valores de  $\alpha > 0$ ,  $n$  e  $p$ ,  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ . Primeiramente, note que  $u$  é suave fora de  $\mathbf{0}$  com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left( \frac{-\alpha x_1}{|x|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{|x|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  e fixe  $\varepsilon > 0$ . Por integração por partes, temos

$$\int_{\Omega \setminus B[0, \varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega \setminus B[0, \varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B[0, \varepsilon]} u \phi \nu_i dS$$

onde  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  denota o vetor normal que aponta para dentro em  $\partial B[0, \varepsilon]$ . Agora se  $\alpha + 1 < n$ ,  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ . De fato, integrando  $Du$ , temos

$$\int_{\Omega} |Du| dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx.$$

Transformando em coordenadas polares, conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dS dr.$$

Onde a integral de superfície, é igual a área da esfera  $n$ -dimensional de raio  $r$ , dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

que por simplicidade, vamos denotar por  $\sigma(n)r^{n-1}$ . Dessa forma

$$\int \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2} dr = \sigma(n) \left( \frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que se  $n - \alpha - 1 < 0$  então  $0^{n-\alpha-1} = \infty$ . Sendo assim

$$\int_{\Omega} |Du| dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  desde que  $\alpha + 1 < n$ . Nesse caso

$$\left| \int_{\partial B[0, \varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq \int_{\partial B[0, \varepsilon]} |u| |\phi| |\nu_i| dS \leq \|\phi\|_{\infty} \int_{\partial B[0, \varepsilon]} |u| dS \leq \int_{\partial B[0, \varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha} dS,$$

onde essa última integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0, \varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq C \varepsilon^{n-1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para toda  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , desde que  $0 \leq \alpha < n - 1$ . Além disso,  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  se, e somente se,  $(\alpha + 1)p < n$ , esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ . Consequentemente,  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  se, e somente se  $\alpha < \frac{n-p}{p}$ . Em particular  $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  quando  $p \geq n$ .



**Teorema 2.18** (Propriedades da derivada fraca). Seja  $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice com  $1 \leq |\alpha| \leq k$ . Então

1.  $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$
2.  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$  para todos multi-índices  $\alpha$  e  $\beta$  com  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .
3. para todo  $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma u + \lambda v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  e

$$D^\alpha(\gamma u + \lambda v) = \gamma D^\alpha u + \lambda D^\alpha v$$

4. se  $\Omega_0$  é um aberto de  $\Omega$ , então  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$
5. se  $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , então  $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta D^{\alpha-\beta} u$$

onde

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e  $\beta \leq \alpha$  significa  $\beta_j \leq \alpha_j$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ .

*Demonstração.* . . .

□



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
- [2] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.
- [3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [4] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [5] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [6] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [7] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.