
CONTEÚDO

Lista de Símbolos	1
1 Introdução à Teoria da Medida	5
1.1 Espaços e funções mensuráveis	5
1.2 Medida	11
1.2.1 Construindo uma medida para \mathbb{R}	14
1.3 Integral de Lebesgue	16
1.4 Espaços \mathcal{L}^p	33
2 Espaços de Sobolev	47
2.1 Preliminares	47
2.2 Motivação	48
2.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$	48
2.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	50
2.5 Aproximações	58
2.6 Extensões	62

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathfrak{B}	Álgebra de Borel
$\widehat{\mathfrak{B}}$	Álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$
χ_E	Função característica do conjunto E
\mathfrak{D}	σ -álgebra
f^+	Parte positiva da função f
f^-	Parte negativa da função f
$f \sim_{\mu} g$	f e g são μ -equivalentes i.e., $f = g$ em quase toda parte em X .
$\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço das funções integráveis em relação a medida μ .
$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^p .
$\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis
$\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas
$\mu(E)$	Medida do conjunto E
$N_{\mu}(\cdot)$	Semi-norma em relação a medida μ .
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta estendida i.e., $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de σ -álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma família \mathfrak{D} de subconjuntos de X é uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes condições

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$
2. Se $S \in \mathfrak{D}$ então $S^c = X \setminus S \in \mathfrak{D}$
3. Se (S_n) é uma sequência de elementos de \mathfrak{D} então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

O par (X, \mathfrak{D}) é dito espaço mensurável e os subconjuntos de \mathfrak{D} são chamados de conjuntos mensuráveis (ou \mathfrak{D} -mensuráveis)

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não vazio e considere $\mathfrak{D} = \{\emptyset, X\}$. Afirmamos que \mathfrak{D} é uma σ -álgebra. Com efeito,

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$ pela definição.
2. $\emptyset^c = X \in \mathfrak{D}$ e $X^c = \emptyset \in \mathfrak{D}$
3. $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \mathfrak{D}$ ou $\bigcup X = X \in \mathfrak{D}$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. $\mathfrak{D} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ não é uma σ -álgebra de X pois $\{a, b\}^c = \{c, d\} \notin \mathfrak{D}$

Observação: Seja (S_α) uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha} S_{\alpha}^c \text{ e } \left(\bigcap_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^c$$

Dessa forma, se (S_n) é uma sequência de elementos de uma σ -álgebra, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

Observação: (união finita)

Observação: (interseção finita)

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto não enumerável e considere

$$\mathfrak{D} = \{S \subseteq X; S \text{ é enumerável ou } S^c \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que \mathfrak{D} é uma σ -álgebra. De fato

1. $\emptyset \in \mathfrak{D}$ pois é enumerável e $X \in \mathfrak{D}$ pois $X^c = \emptyset$ que é enumerável
2. se $S \in \mathfrak{D}$ temos as seguintes possibilidades
 S é enumerável, então $S^c \in \mathfrak{D}$ pois $(S^c)^c = S$ é enumerável
 S^c é enumerável, então pela definição da σ -álgebra, $S^c \in \mathfrak{D}$
3. Seja (S_n) uma sequência de subconjuntos em \mathfrak{D} , isto é, $S_n \in \mathfrak{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aqui temos três possibilidades a serem consideradas
 S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável, portanto está em \mathfrak{D}
 S_n^c é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_{n_0}^c$$

é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável $S_{n_0}^c$, portanto está em \mathfrak{D}

Se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

$$S_i \subseteq X \text{ e } S_j^c \subseteq X \text{ são enumeráveis}$$

podemos afirmar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ não é enumerável, pois S_j^c é enumerável, e como X não é enumerável, segue que S_j também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c$ é enumerável. Com efeito, observe que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_j^c$$

ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$.

Dessa forma, \mathfrak{D} é uma σ -álgebra

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio. Se \mathfrak{D}_1 e \mathfrak{D}_2 são σ -álgebras de X então $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ também é uma σ -álgebra de X .

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de X , o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor σ -álgebra contendo este.

Proposição 1.6. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X . Então a interseção de todas as σ -álgebras de subconjuntos de X que contem A é a menor σ -álgebra que contém A .

Demonstração.

□

Observação: (σ -álgebra gerada)

Agora definimos uma σ -álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

Definição 1.7. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a σ -álgebra \mathfrak{B} gerada por todos os intervalos abertos (x, y) em \mathbb{R} , ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha); x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathfrak{B} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{D}_{\alpha},$$

onde cada \mathfrak{D}_{α} é uma σ -álgebra que contém A .

Equivalentemente, podemos dizer que \mathfrak{B} é a σ -álgebra gerada por todos conjuntos abertos de \mathbb{R} . É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de \mathbb{R} pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo \mathfrak{B} dessa forma é possível ver que não precisamos que \mathfrak{B} seja uma σ -álgebra de \mathbb{R} mas sim de qualquer espaço topológico (X, \mathcal{T}) , nesse caso dizemos que \mathfrak{B} é a σ -álgebra gerada pela topologia \mathcal{T} . Nesse trabalho a notação \mathfrak{B} será utilizada apenas para a álgebra de Borel em \mathbb{R} .

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

Proposição 1.8. \mathfrak{B} é a σ -álgebra gerada por todos intervalos fechados

Demonstração.

□

Exemplo 1.9. Alguns exemplos de conjuntos que estão em \mathfrak{B} são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em \mathfrak{B} pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em \mathfrak{B} pois se $B = \{x_1, x_2, \dots\}$, então $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ que é um conjunto em \mathfrak{B} pois cada $\{x_n\}$ é um conjunto fechado.
- Todo intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é um conjunto em \mathfrak{B} pois $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$.

A sensação é de que a álgebra de Borel contém todos os subconjuntos de \mathbb{R} , isto é $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Porém este não é o caso, pois existem subconjuntos de \mathbb{R} que são bastante difíceis de definir (vide [??]) que não estão em \mathfrak{B} . Mas se esses conjuntos são tão difíceis de definir por que precisamos de uma σ -álgebra que exclui eles?

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propriedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uma propriedade importante não é satisfeita, mas restringindo para o espaço $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ conseguimos definir a mesma medida de forma que todas propriedades são satisfeitas.

Definição 1.10. O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é dita reta estendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Observação: Operações com ∞ em $\overline{\mathbb{R}}$

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $\infty + \infty = \infty$ | 4. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$ |
| 2. $-\infty - \infty = -\infty$ | 5. $\infty \cdot \infty = \infty$ |
| 3. $x + \infty = \infty + x = \infty$ | 6. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ se $x > 0$ |

7. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$ se $x < 0$

9. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ se $x > 0$

8. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$ se $x < 0$

10. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Proposição 1.11. Seja \mathbb{R} a reta estendida. Considere $E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$, $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\widehat{\mathfrak{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$ com E variando na álgebra de Borel \mathfrak{B} . Então $\widehat{\mathfrak{B}}$ é uma σ -álgebra em \mathbb{R} denominada álgebra estendida de Borel.

Demonstração. □

Um conceito bastante importante na teoria da medida, é a ideia de funções mensuráveis

Definição 1.12. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser \mathfrak{d} -mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\}$$

pertence a σ -álgebra.

Lema 1.13. As afirmações a seguir são equivalentes para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

(a) $A_\alpha = \{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $B_\alpha = \{x \in X ; f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $C_\alpha = \{x \in X ; f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $D_\alpha = \{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração. □

Exemplo 1.14. A função constante $x \mapsto c$ é mensurável. Com efeito, se $\alpha \geq c$, então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{d}$$

pois o único valor que a função assume é c . Se $\alpha < c$, então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{d}$$

Portanto a função constante é mensurável

Exemplo 1.15. A função característica χ_E de um subconjunto $E \in \mathfrak{d}$ é mensurável dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

é mensurável. Dito isso, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geq 1$, então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{d},$$

pois a imagem de χ_E contém apenas os valores 0 e 1. Se $0 \leq \alpha < 1$ então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = E \in \mathfrak{d}.$$

Por fim, se $\alpha < 0$, então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{d}.$$

Portanto χ_E é uma função mensurável, desde que E também seja.

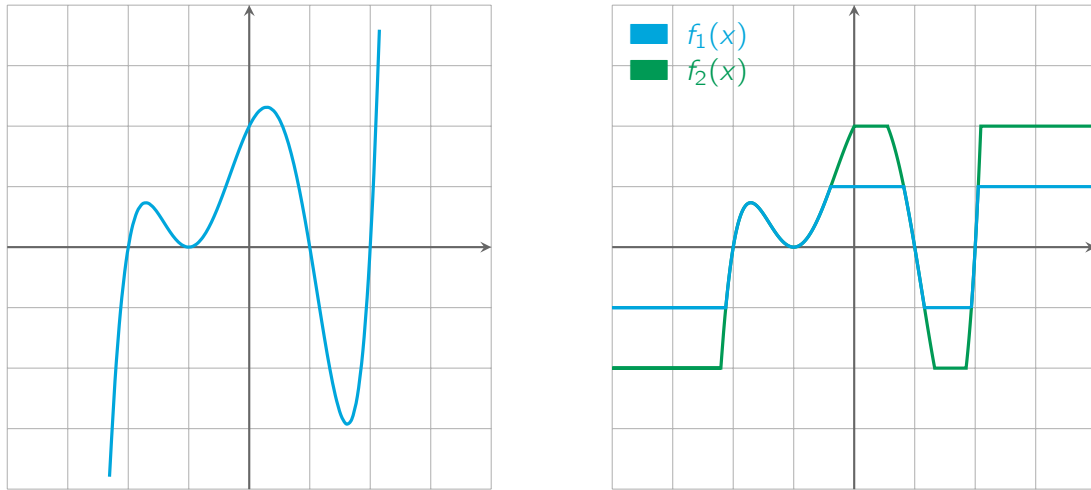


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico de f_1 e f_2
Fonte: Autoral

Exemplo 1.16. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $X \in \mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela continuidade de f , o conjunto $f^{-1}((\alpha, \infty))$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{B}$. Portanto f é mensurável.

Exemplo 1.17. Dada uma função f mensurável. A função *truncagem de f* (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq n \text{ e } f(x) \geq -n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$

Vamos estudar agora algumas propriedades elementares sobre funções mensuráveis

Proposição 1.18. Sejam X um espaço mensurável, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções

- (a) cf
- (b) $f^2 := f \cdot f$
- (c) $f + g$
- (d) fg
- (e) $|f|$

são mensuráveis

Demonstração.

□

Uma outra definição importante sobre funções mensuráveis é a de parte positiva e negativa de uma função

Definição 1.19. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma qualquer. Definimos as partes positiva e negativa de f respectivamente pelas funções não negativas $f^+ : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^- : X \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Lema 1.20. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então

(a) $f = f^+ - f^-$

(b) $|f| = f^+ + f^-$

(c) $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$

(d) $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

O lema acima é importante para demonstrar a proposição abaixo

Proposição 1.21. Seja X um espaço mensurável. Então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis

Demonstração. Segue direto do lema anterior. □

Agora, vamos passar a estudar funções mensuráveis na reta extendida.

Definição 1.22. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é \mathfrak{d} -mensurável (ou mensurável) se

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, denotamos o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por $\mathcal{M}(X, \mathfrak{d})$

Em nenhum momento da definição acima mencionamos os elementos $\pm\infty$. O motivo será mostrado abaixo

...

Lema 1.23. Uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se

$$A = \{x \in X ; f(x) = \infty\} \in \mathfrak{d} \text{ e } B = \{x \in X ; f(x) = -\infty\} \in \mathfrak{d}$$

e a função $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável

Demonstração. □

Observação: ($cf \dots \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{d})$)

...

Lema 1.24. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$. Então as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf f_n(x) & F(x) &= \sup f_n(x) \\ f^*(x) &= \liminf f_n(x) & F^*(x) &= \limsup f_n(x) \end{aligned}$$

pertencem a $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$

Demonstração.

□

...

Corolário 1.25. Se (f_n) é uma sequência em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ que converge para f . Então $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$

Demonstração.

□

O resultado abaixo é ...

Proposição 1.26. Seja f uma função não negativa em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$. Então existe uma sequência (φ_n) em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ tal que

- (a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.
- (b) cada φ_n possui um número finito de valores reais em sua imagem.
- (c) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ para cada $x \in X$.

Demonstração.

□

Para terminar essa seção, vamos definir e ver um exemplo de funções mensuráveis entre espaços mensuráveis

Definição 1.27. Sejam (X, \mathfrak{D}_X) e (Y, \mathfrak{D}_Y) espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : (X, \mathfrak{D}_X) \rightarrow (Y, \mathfrak{D}_Y)$ é mensurável quando

$$f^{-1}(E) \in \mathfrak{D}_X$$

para todo $E \in \mathfrak{D}_Y$

Exemplo 1.28.

1.2 Medida

Definição 1.29. Uma medida é uma função $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) \geq 0$ para todo $S \in \mathfrak{D}$
3. se (E_n) é uma sequência de subconjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Observação: A tripla (X, \mathfrak{D}, μ) onde X é um conjunto, \mathfrak{D} é uma σ -álgebra em X e μ uma medida em \mathfrak{D} é chamada de espaço de medida.

Observação: (medida finita e σ -finita)

Exemplo 1.30. Seja $(\mathbb{N}, \mathfrak{D})$ um espaço mensurável, onde $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A função $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dada por $\mu(E) = \#S$, se S é finito, e $\mu(S) = \infty$ se S é infinito, é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito,

1. $\mu(\emptyset) = 0$ por vacuidade
2. $\mu(S) \geq 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(S_k) = \infty$. Então a união é infinita pois contém pelo menos um conjunto infinito. Logo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por outro lado, se $\mu(S_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que a união pode ser infinita. Nesse caso

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por fim, se a união é finita, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_n = \emptyset$ para todo $n > k$. Assim

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^k S_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

Exemplo 1.31. Sejam (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida e $A \in \mathfrak{D}$ um conjunto fixo. Então a função λ dada por

$$\lambda(S) = \mu(A \cap S)$$

é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito

1. $\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ pois μ é uma medida
2. $\lambda(S) \geq 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathfrak{D} . Então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap S_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(S_n)$$

pois μ é uma medida e a sequência $(A \cap S_n)$ é disjunta.

Portanto λ é uma medida

Exemplo 1.32. Sejam $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ medidas em uma σ -álgebra \mathfrak{D} e $c_1, c_2, \dots, c_j > 0$. Então

$$\mu(S) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S)$$

é uma medida em \mathfrak{D} . De fato

1. $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(\emptyset) = 0$ pois $\mu_j(\emptyset) = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$.
2. $\mu(S) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S) \geq 0$ pois $c_j \mu_j(S) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, k$.
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathfrak{D} . Então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

O próximo passo é estudar algumas propriedades elementares provenientes da definição de medida.

Lema 1.33. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Se $E \subseteq F$ onde E e F são conjuntos mensuráveis. Então $\mu(E) \leq \mu(F)$

Demonstração. Note que

$$F = E \cup (F \setminus E) = E \cup (F \setminus E),$$

onde E e $F \setminus E$ são conjuntos mensuráveis disjuntos. Dessa forma

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E).$$

Portanto, como μ é uma função não-negativa $\mu(F) \geq \mu(E)$. □

Observação: Da demonstração do lema anterior, conseguimos ver que se $E \subseteq F$

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$$

desde que $\mu(E) < \infty$.

Lema 1.34. Seja μ uma medida em \mathfrak{D} . Então

(a) se (E_n) é uma sequência crescente em \mathfrak{D} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

(b) se (E_n) é uma sequência decrescente em \mathfrak{D} e $\mu(E_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

Demonstração. □

Definição 1.35. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Dizemos que duas funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ são iguais em quase toda parte em X e denotamos por $f = g$ qtp em X se existe um conjunto $N \in \mathfrak{D}$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \notin N$.

Um outro conceito importante é o conceito de convergência em quase toda parte

Definição 1.36. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Dizemos que uma sequência de funções (f_n) converge para f em quase toda parte, se existe um conjunto $N \in \mathfrak{D}$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \notin N$.

Por fim, para terminar essa seção, introduzimos o conceito de carga

Definição 1.37. Uma carga é uma função $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geq 0$ para todo $S \in \mathfrak{D}$
3. se $(S_n) \subseteq \mathfrak{D}$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

isto é uma medida que não satisfaz a não-negatividade.

1.2.1 Construindo uma medida para \mathbb{R}

Nosso objetivo agora é construir uma medida para \mathbb{R} e mostrar o motivo de utilizar a algebra de Borel ao inves de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definição 1.38. O comprimento de um intervalo aberto I é uma função ℓ dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. O tamanho de A deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . A definição abaixo formaliza essa ideia

Definição 1.39. A medida exterior $m(\cdot)$ de um conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é definida por

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k); I_1, I_2, \dots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Essa definição envolve uma soma infinita de uma sequência t_1, t_2, \dots , de elementos de $[0, \infty]$, que é ∞ se pelo menos algum $t_k = \infty$, ou se a série definida pelas somas parciais de t_k é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_k.$$

Exemplo 1.40. Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto finito. Dado $\varepsilon > 0$ defina a sequência I_k de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leq n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então I_1, I_2, \dots , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo, $m(A) \leq 2\varepsilon n$. Como ε é arbitrário, temos que $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

Proposição 1.41. Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, \dots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto enumerável. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ defina a sequência

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right).$$

Dessa forma, I_1, I_2, \dots , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que $m(A) < 2\varepsilon$. Pelo fato de ε ser arbitrário, temos que $m(A) = 0$. □

Uma outra propriedade da medida exterior é sua invariância a translação

Proposição 1.42. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a; a \in A\}$$

Demonstração. Seja I_1, I_2, \dots , uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . Dito isso $t + I_1, t + I_2, \dots$, é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem $t + A$. Logo

$$m(t + A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que $m(t + A) \leq m(A)$.

Para verificar a desigualdade na outra direção note que $A = -t + (t + A)$, então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t + A)) \leq (t + A).$$

Portanto $m(A) = m(t + A)$

□

(texto motivador)

Proposição 1.43. Seja (A_n) uma sequência de subconjuntos de \mathbb{R} . Então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Demonstração.

□

(medida do intervalo fechado) (explicar teorema de Heine-Borel)

Proposição 1.44. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então $m([a, b]) = b - a$

(o pulo do gato)

Proposição 1.45. Existem subconjuntos disjuntos de \mathbb{R} A e B tais que

$$m(A \cup B) \neq m(A) + m(B)$$

Demonstração.

□

Teorema 1.46. Não é possível definir uma medida μ que generaliza ℓ em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demonstração.

□

(agora mostrar que em \mathfrak{B} é uma medida)

1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point" of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida (X, \mathfrak{M}, μ) fixo.



Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Definição 1.47. Uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem ($\#\varphi(X) < \infty$)

Uma função φ simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \quad (1.1)$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \mathfrak{D}$. Essa representação é única pelo fato de todos a_j serem distintos, os conjuntos E_j serem disjuntos para todo $j = 1, \dots, n$, além disso, $X = \bigcup_{j=1}^n E_j$.

Definição 1.48. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de φ em relação a μ por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

Observação: Adotamos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 independente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

Lema 1.49. Dadas funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $c \geq 0$ tem-se

(a) $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$

(b) $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$

(c) A aplicação $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$ para todo $E \in \mathfrak{D}$ é uma medida em \mathfrak{D} .

Demonstração.

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu.$$

Com efeito, para $c = 0$,

$$\int c\varphi d\mu = 0 = c \int \varphi d\mu.$$

por outro lado, para $c > 0$, podemos escrever $c\varphi$ da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n ca_j\chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n ca_j\mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j\mu(E_j) = c \int \varphi d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^m b_k\chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representação para $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j} + \sum_{k=1}^m b_k\chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessariamente é a representação padrão, pois é possível que existam $j_0, j_1 \in \{1, \dots, n\}$ e $k_0, k_1 \in \{1, \dots, m\}$, tais que $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$.

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k; j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por c_h com $h = 1, \dots, \#H$, e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos G_h são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório $\widetilde{\sum}$ está relacionado aos índices $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de $\varphi + \psi$ por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h\chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\ &= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) \end{aligned}$$

como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) \quad e \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

(c) Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito,

$$1. \lambda(\emptyset) = \int \varphi \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

2. Note que como $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ os elementos a_j na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que $0 \leq \varphi(x)$ para todo $x \in X$, daí

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x),$$

pois, como os conjuntos E_j são disjuntos, existe um único $1 \leq j_0 \leq n$ tal que $x \in E_{j_0}$. Dessa forma, para todo $j \neq j_0$, $\chi_{E_j}(x) = 0$, então

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E \cap E_j) \geq 0$$

pois mostramos que $a_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ e μ é uma medida.

3. Considere $(F_k) \subseteq \mathfrak{F}$ uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned}
 \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi \chi_{\bigcup F_k} \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi \chi_{F_k} d\mu \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k)
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.50. A função

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porém essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utilizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido. Com efeito, considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu^*)$ onde \mathfrak{B} é a álgebra de Borel e μ^* é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\mu^* = \mu^*(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois \mathbb{Q} é enumerável.

Agora, podemos estender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negativa (não necessariamente simples)

Definição 1.51. A integral de uma função $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ em relação a μ é definida por

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu$$

onde φ são funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Além disso, definimos a integral da função f sobre um conjunto mensurável

Definição 1.52. A integral de $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ sobre um conjunto $E \in \mathfrak{D}$ é dada por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

...

Lema 1.53. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $E, F \in \mathfrak{D}$. Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se $f \leq g$ tem-se

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

(b) se $E \subseteq F$ tem-se

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

Demonstração.

(a) Seja φ uma função simples em M^+ , então

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu = \int g d\mu$$

(b) Como $f \chi_E \leq f \chi_F$, segue do item anterior que

$$\int f \chi_E d\mu \leq \int f \chi_F d\mu,$$

dito isso

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 1.54 (Teorema da Convergência Monótona). Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para f , então,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \rightarrow f$ onde $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, pelo corolário ?? temos que $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Pela monotonicidade da sequência $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, pelo item (a) do lema anterior

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dito isso

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, seja $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leq \varphi \leq f$ e considere

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\} = \{x \in X; [f_n - \alpha \varphi](x) \geq 0\}$$

como f_n e φ são funções mensuráveis, temos que $A_n \in \mathfrak{D}$. Além disso, $A_n \subseteq A_{n+1}$ já que $f_n \leq f_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0, 1)$ e $0 \leq \varphi \leq f$. Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha \varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \quad (1.2)$$

Dessa forma, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X , segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi \chi_{A_n} d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

... fazendo $n \rightarrow \infty$ em 1.2

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de φ ser uma função simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$ tem-se que

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

□

O Lema 1.49 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, também é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

Corolário 1.55. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $c > 0$, então são válidas as seguintes afirmações

(a) $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

(b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c = 0$

$$\int cf \, d\mu = 0 = c \int f \, d\mu.$$

Se $c > 0$, considere (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ convergindo para f (lema ??). Dito isso, $(c\varphi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para cf . Pelo Lema 1.49 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf \, d\mu = \lim \int c\varphi_n \, d\mu = c \lim \int \varphi_n \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ que convergem para f e g respectivamente. Dessa forma $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f + g$. Portanto

$$\int (f + g) \, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

Lema 1.56 (Lema de Fatou). Se $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$, dessa forma $g_m \leq f_n$ para todo $m \leq n$. Sendo assim,

$$\int g_m \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$$

para todo $m \leq n$. Desse modo

$$\int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para seu supremo, ou seja, $\liminf f_n$. Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessariamente simples

Corolário 1.57. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\lambda(E) = \int f \chi_E \, d\mu$$

é uma medida.

Demonstração.

1. $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$.
2. Como $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ temos que $\lambda(E) = \int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$.
3. Sejam E_n uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e considere f_n definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k}$$

Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que

$$\int f_n d\mu = \int \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \int f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k).$$

Além disso, podemos escrever

$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f \chi_{E_k} = f \chi_E$$

desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos.

Por fim, como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ que converge para $f \chi_E$, pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f \chi_{E_k} d\mu$$

Portanto, λ é uma medida. □

Corolário 1.58. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,

$$\int f d\mu = 0$$

Demonstração. Suponha que $\int f d\mu = 0$ e considere o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X ; f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$. Note que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0.$$

Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso

$$E = \{x \in X ; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pois se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, logo

$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim, $x \in E$.

Por outro lado, se $x \in E$, temos que $f(x) > 0$. Utilizando a propriedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é, $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como queríamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que (E_n) é uma sequência crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$, para todo $x \in E^c$ com $\mu(E) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ em quase toda parte em X .

Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ em quase toda parte em X . Se $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Sendo assim, considerando $f_n = n\chi_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f \leq \liminf f_n$ e pelo Lema de Fatou

$$0 \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f \, d\mu = 0.$$

□

Corolário 1.59. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então a aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua em relação a μ , isto é, se $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é, $f\chi_E = 0$ em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1.60. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ que converge em quase toda parte de X para a função $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

Demonstração. Seja N um conjunto de medida nula. Suponha que (f_n) converge para f em todo o pontos de $M = N^c$. Dessa forma, a sequência $(f_n \chi_M)$ converge para $f \chi_M$, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f \chi_M d\mu = \lim \int f_n \chi_M d\mu.$$

Além disso, podemos escrever f e f_n da seguinte forma

$$f = f \chi_M + f \chi_N \text{ e } f_n = f_n \chi_M + f_n \chi_N,$$

pois $M = N^c$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f \chi_N$ e $f_n \chi_N$ são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.58, segue que

$$\lim \int f_n d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

Corolário 1.61. Seja (g_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \dots + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g_n \geq 0$, temos que (f_n) é uma sequência crescente que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu$$

Portanto

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

Definição 1.62. O conjunto $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ das funções integráveis consiste em todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, tais que as integrais

$$\int f^+ d\mu \text{ e } \int f^- d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de f em relação a μ por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

e se E é um conjunto mensurável

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Qualquer representação de f como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja f uma função integrável e escreva f como $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções integráveis não negativas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Como $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$, segue que

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Da mesma forma que definimos uma medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exige o lema abaixo

Lema 1.63. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de f (em relação a μ).

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{D}, \mu)$, pelo Corolário ?? temos que as funções $\lambda^+, \lambda^- : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \text{ e } \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

são medidas em \mathfrak{D} e são finitas pelo fato de f ser uma função integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ temos que λ é uma carga. \square

Como a aplicação λ definida acima é uma carga, vemos que se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, então

$$\int_E f d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propriedades elementares das integrais de funções mensuráveis

Teorema 1.64. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. Além disso

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu. \quad (1.3)$$

Demonstração. Seja f uma função integrável, mostremos que $|f|$ também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+ d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

é finita pois f é integrável, e

$$\int |f|^- d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

que é finita. Portanto $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que $|f|$ é integrável, dessa forma

$$\begin{aligned} f^+ &\leq f^+ + f^- = |f| \\ f^- &\leq f^+ + f^- = |f| \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} \int f^+ d\mu &\leq \int |f| d\mu \\ \int f^- d\mu &\leq \int |f| d\mu \end{aligned}$$

ambas finitas pois $|f|$ é integrável. Portanto f é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integrável e a desigualdade triangular.

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$$

□

Corolário 1.65. Se $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$, $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e $|f| \leq |g|$, então $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$$

Demonstração. Se g é integrável então pelo Teorema anterior $|g|$ também o é. Além disso, como $|f| \leq |g|$

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu,$$

como $|g|$ é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de $|f|$ também ser finita, ou seja, $|f|$ é integrável e novamente pelo Teorema anterior, f é integrável. \square

Teorema 1.66. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f + g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e

$$(a) \int cf d\mu = c \int f d\mu$$

$$(b) \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Demonstração.

(a) Se $c \geq 0$. Note que $(cf)^+ = cf^+$ e $(cf)^- = cf^-$. Dito isso

$$\int cf d\mu = \int cf^+ - cf^- d\mu$$

como cf^+ e cf^- são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.55

$$\int cf d\mu = c \int f^+ - f^- d\mu = c \int f d\mu$$

Se $c < 0$ a demonstração é análoga, basta perceber que $(cf)^+ = -cf^-$ e $(cf)^- = -cf^+$ ambas funções não negativas pois $-c > 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$, então pelo Teorema 1.64 $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$, como $|f + g| \leq |f| + |g|$ temos que $f + g$ é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f + g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.57 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

\square

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

Teorema 1.67 (Teorema da Convergência Dominada). Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo X . Note que

$$\lim |f_n| \leq g \implies |f| \leq |g|,$$

como por hipótese f é mensurável e g é integrável, segue pelo Corolário 1.65 que f é integrável. Além disso, como $-g \leq f_n \leq g$ temos que $g + f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.64 temos que

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu + \int f \, d\mu &= \int (g + f) \, d\mu \\ &= \int (g + \lim f_n) \, d\mu \\ &= \int \lim (g + f_n) \, d\mu \\ &= \int \liminf (g + f_n) \, d\mu \\ &\leq \liminf \int (g + f_n) \, d\mu \\ &= \liminf \left(\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu \right) \\ &= \int g \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu, \end{aligned}$$

que implica em

$$\int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu. \quad (1.4)$$

Por outro lado, $g - f_n \geq 0$, de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu. \quad (1.5)$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu,$$

isto é¹

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ onde a aplicação $x \mapsto f(x, t)$ é mensurável para todo $t \in [a, b]$.

¹ $\limsup x_n \leq x \leq \liminf x_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

Corolário 1.68. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

Demonstração. Seja t_n uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0 e considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = f(x, t_n)$. Então como $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ com g integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \int f(x, t_0) d\mu(x) &= \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) \\ &= \int \lim f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f(x, t_n) d\mu(x) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

Corolário 1.69. Se a aplicação $t \mapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F dada por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração. Mostremos que $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$. Com efeito

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

□

Corolário 1.70. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \rightarrow f(x, t_0)$ seja integrável em X , que $\partial_t f$ existe em $X \times [a, b]$ e que existe uma função integrável g em X tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t , com $t \neq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo $x \in X$. Desde modo a função $x \mapsto \partial f / \partial t(x, t)$ é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_0 , entre t_0 e t tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left| f(x, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right|$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0| |\partial f / \partial t(x, s_0)|$ é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.65 temos que f é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo $x \in X$. Consequentemente

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| < g(x)$$

para valores de n suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. □

1.4 Espaços \mathcal{L}^p

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue \mathcal{L}^p , que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências p -ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

Proposição 1.71. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. A aplicação $N_\mu : \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$ em quase toda parte em X .

Demonstração. Note que

$$1. N_\mu(f) = \int |f| d\mu \geq \int 0 d\mu = 0.$$

$$2. N_\mu(\lambda f) = \int |\lambda f| d\mu = \int |\lambda| |f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$$

$$3. N_\mu(f + g) = \int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$$

Portanto N_μ é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Observação: Note que $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ é um espaço vetorial com as operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto se deve ao fato que $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ é um subespaço vetorial do espaço de funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Estamos interessados em transformar \mathcal{L} em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 1.72. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. Dizemos que f e g são μ -equivalentes ($f \sim_\mu g$) se $f \equiv g$ em quase toda parte em X .

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{[f] ; f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) ; g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^1 ou espaço das funções somáveis. Esse espaço, munido das operações

$$\begin{aligned}[f] + [g] &= [f + g] \\ [\lambda f] &= \lambda[f]\end{aligned}$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Proposição 1.73. Seja (X, \mathfrak{F}, μ) um espaço de medida. A aplicação $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$$

para todo $[f] \in \mathcal{L}^1$ é uma norma

Demonstração. Note que apenas precisamos mostrar que $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, pois as outras propriedades são análogas à demonstração da Proposição 1.71. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto $\|\cdot\|_1$ é uma norma e $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado. \square

No restante do texto, adotaremos a notação $[f] = f$, ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com os seus representantes.

Definição 1.74. Seja $1 \leq p < \infty$ um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{F}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável, } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^p .

Nosso intuito agora é mostrar que \mathcal{L}^p é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em \mathcal{L}^p .

Teorema 1.75 (Desigualdade de Young). Sejam $A, B \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados^a. Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

^a p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração. Seja $\alpha \in (0, 1)$ e defina $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Note que $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$. Dessa forma

- $t \in (0, 1)$ então $\varphi'(t) < 0$ pois $t^{\alpha-1} > 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} < 0$
- $t \in (1, \infty)$ então $\varphi'(t) > 0$ pois $t^{\alpha-1} < 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que φ é decrescente em $(0, 1)$ e crescente em $(1, \infty)$. Ou seja, como φ é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ para todo $t \geq 0$ e $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Assim

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) \implies \alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1 \implies t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

Sejam $a, b > 0$, então para $t = \frac{a}{b}$ temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por b , encontramos

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se $t = 1$, isto é $a = b$. Agora considere que $\alpha = \frac{1}{p} \in (0, 1)$, ou seja, $1 < p < \infty$. Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b,$$

e por hipótese $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo $a = A^p$ e $b = B^q$, temos o resultado desejado

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando $A^p = B^q$. □

Teorema 1.76 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Demonstração. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ então $f \equiv 0$ qtp em X ou $g \equiv 0$ qtp em X . Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \text{ e } B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q}. \quad (1.6)$$

Como $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, então $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.65

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto $|fg|$ é integrável, isto é, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Por fim, integrando (1.6) com respeito a μ , chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} d\mu \leq \int \left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q} \right) d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int |g|^q d\mu.$$

Pela definição da norma em \mathcal{L}^p segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queríamos demonstrar. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando $p = q$, o que acontece apenas quando $p = q = 2$.

Corolário 1.77 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se $f, g \in \mathcal{L}^2$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq \int |f|^2 d\mu \int |g|^2 d\mu$$

Demonstração. A primeira desigualdade é o Teorema 1.64 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

Teorema 1.78 (Desigualdade de Minkowski). Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. Na Proposição 1.71 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para $p = 1$. Dito isso, seja $1 < p < \infty$. Como $f, g \in \mathcal{L}^p$, então f e g são mensuráveis. Dessa forma, $f + g$ também é mensurável. Mostremos agora que $f + g \in \mathcal{L}^p$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\ &\leq 2^p(|f|^p + |g|^p). \end{aligned}$$

Daí

$$\int |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int (|f|^p + |g|^p) d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right)$$

que é uma integral finita. Portanto $f + g \in \mathcal{L}^p$.

Também é fácil ver que

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Agora, seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Daí $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$. De fato,

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q^q = \int |f + g|^{q(p-1)} d\mu = \int |f + g|^p < \infty \quad (1.7)$$

pois $f + g \in \mathcal{L}^p$. Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f| |f + g|^{p-1} d\mu = \| |f| + |f + g|^{p-1} \|_1 \leq \| |f| \|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.8)$$

Analogamente

$$\int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.9)$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \\ &\leq \int |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Se $\|f + g\|_p = 0$, então

$$\|f + g\|_p = 0 \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que $\|f + g\|_p \neq 0$ para obter

$$\frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f + g\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como p e q são expoentes conjugados, segue que $p - \frac{p}{q} = 1$. Portanto

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para $1 \leq p < \infty$. □

Agora, vamos provar que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.79. A aplicação $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ pois $|f| \geq 0$.
2. $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ (} f \sim_\mu 0 \text{)}$
3. $\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\lambda|^p |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$
4. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto $\|\cdot\|_p$ é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

Definição 1.80. Seja (f_n) uma sequência em \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$. Dizemos que (f_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$

Definição 1.81. Sejam (f_n) uma sequência em \mathcal{L}^p e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$. Dizemos que (f_n) é convergente e converge para f se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

Definição 1.82. Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Teorema 1.83 (Teorema de Riesz-Fischer). \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em \mathcal{L}^p . Mostremos que (f_n) é convergente. Com efeito, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$. Escolhendo ε de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n} \tag{1.10}$$

Defina $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, pois $g \geq 0$ e

$$g = |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n|$$

isto é, g é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis (f_n é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que $g \in \mathcal{L}^p$. De fato

$$\int |g|^p d\mu = \int g^p d\mu,$$

pois $g \geq 0$. Pela definição de g temos

$$\int g^p d\mu = \int \left(|f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left(|f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em \mathcal{L}^p e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^k \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leq \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right)^p < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}^p$. Agora seja, $E = \{x \in X; g(x) < \infty\} \in \mathfrak{D}$. Dito isso, $N = E^c = \{x \in X; g(x) = \infty\} \in \mathfrak{D}$. Mostremos que N tem medida nula. Com efeito, suponha que $\mu(N) > 0$, dessa forma

$$\int_X |g|^p \geq \int_N |g|^p = \infty \mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois $g \in \mathcal{L}^p$. Dessa forma $\mu(N) = 0$, isto é, $g < \infty$ em quase toda parte em X . Sendo assim, defina $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que $f \in \mathcal{L}^p$. Note que

$$f(x) = \left(f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| \chi_E \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente, $|f|^p < g^p$. Logo

$$\int |f|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}^p$. Por outro lado, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= f_1(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$, então $\lim f_n = f$ em quase toda parte em X . É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \quad (1.11)$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in \mathcal{L}^p$, então $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p d\mu = 0$$

Isto prova que \mathcal{L}^p é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue, \mathcal{L}^∞ explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

Definição 1.84. Seja (X, \mathfrak{F}, μ) um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{F}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^∞ . Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in X\} = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que f é uma função essencialmente limitada.

Observação: Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

isto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leq M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato, $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X se, e somente se, existe $N \in \mathfrak{D}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in N^c$. Note que $\{x \in X; |f(x)| > M\} \subseteq N$, dessa forma

$$\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) \leq \mu(N) = 0$$

Portanto, $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$.

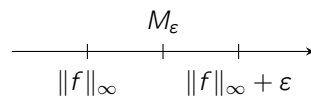
Reciprocamente, se $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$, então $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \{|f(x)| > M\}^c$, isto é, $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X .

Proposição 1.85. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $f \in \mathcal{L}^\infty$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$, então existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X . Daí, como $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geq 0; |f(x)| \leq M_0 \text{ qtp em } X\}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ conseguimos encontrar $M_\varepsilon \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\varepsilon$ em quase toda parte em X .



Como $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$, então

$$|f(x)| \leq M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ chegamos a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que \mathcal{L}^∞ é um espaço vetorial normado

Proposição 1.86. A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_\infty \geq 0$ pois 0 é cota inferior de $\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$.
2. $\|f\|_\infty = 0$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\varepsilon$ em quase toda parte em X , com $M_\varepsilon < \varepsilon$. Daí, $|f(x)| < \varepsilon$ em quase toda parte em X . Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, encontramos

$$|f(x)| \leq 0 \text{ qtp em } X$$

Dessa forma, $f(x) = 0$ em quase toda parte em X .

Reciprocamente, $\|0\|_\infty = \inf\{M \geq 0; 0 \leq M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3. $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em \mathcal{L}^∞) Se $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ então as funções são limitadas em quase toda parte em X , dito isso, $f + g$ também é limitada em quase toda parte em X . Logo $f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

Por outro lado, como $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, então existem $M, \hat{M} \in \mathfrak{D}$ tais que $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$ e $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \notin M$ e $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ para todo $x \notin \hat{M}$. Seja $N = M \cup \hat{M} \in \mathfrak{D}$. Daí $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leq \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$. Além disso

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $x \notin N$, com $\mu(N) = 0$. Dessa forma

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. □

Proposição 1.87 (Desigualdade de Hölder em \mathcal{L}^∞). Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Demonstração. Note que se $g \in \mathcal{L}^\infty$ então $|g| \leq \|g\|_\infty$ em quase toda parte em X . Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = \int |f| |g| d\mu \leq \int |f| \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que \mathcal{L}^∞ também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

Teorema 1.88 (Teorema de Riesz-Fischer). \mathcal{L}^∞ é um espaço completo

Demonstração. □

Agora vamos construir os espaços ℓ^p que são um caso particular dos espaços \mathcal{L}^p

Exemplo 1.89. Sejam $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

...

Observação: Denotamos o espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ por ℓ^p

Exemplo 1.90. $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \dots$

Vejam mais algumas propriedades importantes dos espaços \mathcal{L}^p

Proposição 1.91. Sejam (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida e $0 < p < q < r \leq \infty$. Então

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$$

Demonstração. ... □

Teorema 1.92 (Desigualdade de Interpolação). Sejam (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida e $0 < p < q < r \leq \infty$. Então $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{L}^q$ e

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde $\lambda \in (0, 1)$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \quad \left(\text{i.e., } \lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \right) \quad (1.12)$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $r = \infty$ Note que

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q} \in (0, 1)$$

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$, tem-se que

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q d\mu = \int |f|^{q-p} |f|^p d\mu \leq \int \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p < \infty.$$

Com isso $f \in \mathcal{L}^q$ e ainda mais

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e como $\lambda = \frac{p}{q}$, segue que

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

– $r < \infty$ Note que multiplicando (1.12) por q , temos

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1.$$

Com isso, $\frac{p}{\lambda q}$ e $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ são expoentes conjugados. Dito isso, aplicando a Desigualdade de Hölder com $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$ temos que

$$\begin{aligned} \int |f|^q d\mu &= \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q} d\mu \\ &= \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \\ &\leq \| |f|^{\lambda q} \|_{\frac{p}{\lambda q}} \| |f|^{(1-\lambda)q} \|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\ &= \left(\int |f|^{\lambda q \cdot \frac{p}{\lambda q}} \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^{(1-\lambda)q \cdot \frac{r}{(1-\lambda)q}} \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \left(\int |f|^p \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^q \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Daí, $f \in \mathcal{L}^q$. Além disso

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim, mostrada a desigualdade de interpolação. □

Proposição 1.93. Sejam (X, \mathfrak{B}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q \leq \infty$. Então $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Demonstração. ... □

Teorema 1.94 (Desigualdade de Chebyshev). Sejam (X, \mathfrak{B}, μ) um espaço de medida e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$. Então

$$\|f\|_p \geq \alpha [\mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\})]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. ... □

Agora vamos ver um resultado sobre os espaços ℓ^p

Proposição 1.95. Sejam $0 < p < q \leq \infty$. Então $\ell^p \subseteq \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $q = \infty$

Seja $x \in \ell^p$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. É fácil ver que

$$|x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ é cota superior de $x = (x_n)$. Dito isso

$$\|x\|_q = \|x\|_{\infty} = \sup |x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo $x \in \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

– $q < \infty$

Utilizando a Desigualdade de Interpolação com $r = \infty$ e $\lambda = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ para obter que $\ell^p = \ell^p \cap \ell^r \subseteq \ell^q$ (pelo caso $q = \infty$) e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\infty}^{1 - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_p^{1 - \frac{p}{q}} = \|x\|_p.$$

Assim, demonstrada a proposição. □

Os proximos resultados estão relacionados a densidade das funções simples em \mathcal{L}^p e \mathcal{L}^{∞}

Definição 1.96. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $E \subseteq X$ é dito denso em X se todo ponto de X é aderente a E . Isto é, dado $x \in X$ existe uma sequência (x_n) de elementos de E tal que $x_n \rightarrow x$.

Teorema 1.97. Seja $1 \leq p < \infty$. O conjunto das funções simples $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ com $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, n$ é denso em \mathcal{L}^p

Demonstração. Considere o conjunto

$$Y = \left\{ f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} ; \mu(E_j) < \infty \right\}.$$

Note que dada uma função $f \in Y$ temos que

$$\int |f|^p d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \right|^p d\mu = \int \sum_{j=1}^n |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(E_j) < \infty.$$

Isto é, $f \in \mathcal{L}^p$. Consequentemente $Y \subseteq \mathcal{L}^p$.

Por outro lado, seja $f \in \mathcal{L}^p$ sabemos que $f = f^+ - f^-$ onde $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Além disso pelo Lema ?? temos que existem seqüências $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$ de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ tais que

$$0 \leq \varphi_n^\pm \leq \varphi_{n+1}^\pm \text{ e } \varphi_n^\pm \rightarrow f^\pm.$$

É fácil ver que $(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ é uma seqüência de funções simples tal que

$$\lim(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \lim \varphi_n^+ + \lim \varphi_n^- = f^+ - f^- = f.$$

Seja $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim (φ_n) é uma seqüência de funções simples tal que $\varphi_n \rightarrow f$. Perceba que

$$|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leq f^+ + f^- = |f|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f \in \mathcal{L}^p$, então

$$\int |\varphi_n|^p d\mu \leq \int |f|^p d\mu < \infty,$$

ou seja, $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{L}^p$. Consequentemente, denotando φ_n por

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j \chi_{E_j}$$

segue que

$$|a_j|^p \mu(E_j) \leq \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \mu(E_j) = \int \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \int |\varphi_n|^p d\mu < \infty.$$

Isto nos diz que $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, m_n$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(\varphi_n) \subseteq Y$. Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \|\varphi_n - f\|_p^p = \lim \int |\varphi_n - f|^p d\mu = \int \lim |\varphi_n - f|^p d\mu = 0$$

pois

$$\lim \varphi_n = f \text{ e } |\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto Y é denso em \mathcal{L}^p , já que dada uma função $f \in \mathcal{L}^p$, encontramos uma seqüência em Y que converge para f . \square

Teorema 1.98. O conjunto das funções simples é denso em \mathcal{L}^∞ .

Demonstração.

□

O proximos resultados são uma generalização da Desigualdade de Hölder

Lema 1.99. Sejam $0 < p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$. Então $fg \in \mathcal{L}^r$ e

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração. ...

□

Proposição 1.100 (Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam $0 < p_1, \dots, p_N \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \dots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$ para todo $j = 1, \dots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_N\|_{p_N}$$

Demonstração. Segue por indução do lema anterior.

□

CAPÍTULO DOIS

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev, suas principais propriedades e exemplos que ilustram sua aplicabilidade em problemas de fronteira e outros contextos relevantes da matemática aplicada.

2.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo

Definição 2.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\}}$$

Além disso, se $\text{supp } \varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp } \varphi$, então $(\text{supp } \varphi)^c \subseteq \{x \in \Omega ; \varphi(x) = 0\}$. Ou seja se $x \notin \text{supp } \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Além disso, se Ω é um aberto, então φ se anula em $\partial\Omega$.

Definição 2.2. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . Definimos o espaço das funções com a k -ésima derivada contínua por

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é contínua, } f^{(k)} \text{ existe e é contínua}\}$$

Observação: O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

Definição 2.3. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$

A definição abaixo será amplamente utilizada nesse capítulo

Definição 2.4. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \text{supp } f \text{ é compacto}\}$$

Além disso definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k com suporte compacto.

Os resultados abaixo são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

Teorema 2.5 (Integração por partes em \mathbb{R}^n). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular e $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Então

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta pra dentro em $\partial\Omega$.

Demonstração. [1] □

Teorema 2.6. (coordenadas polares) . . .

2.2 Motivação

2.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

Definição 2.7. Sejam I um intervalo aberto, possivelmente ilimitado e $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I)$. Dizemos que v é a derivada fraca de u , se

$$\int_I u \phi' dx = - \int_I v \phi dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

Denotamos $u' = v$ e diremos v é a derivada de u no sentido fraco.

Observação: Aqui, utilizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue, suas integrais se coincidem.

Observação: (função teste)

Exemplo 2.8. A função $u : I = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é derivável no sentido usual. Já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(1+h)}{h} = 1 \neq 0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(1+h)}{h}.$$

Porem, possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ temos

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi \Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim

$$\int_0^2 u\phi' dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) = - \int_0^1 \phi dx$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral.

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \left(\int_0^1 1\phi dx - \int_1^2 0\phi dx \right) = - \int_0^2 v\phi dx$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 2.9. A função $u : I = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possui derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto é, mostrar que não existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I)$ que satisfaz

$$\int_I u\phi' dx = - \int_I v\phi dx.$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Com efeito, suponha o contrário

$$- \int_0^2 v\phi dx = \int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + 2 \int_1^2 \phi' dx = \int_0^1 \phi dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leq \phi_n \leq 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \rightarrow 0 \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v\phi_n dx - \int_0^1 \phi_n dx \right] = 0$$

pois pelo Teorema da Convergência Dominada, $\phi_n \rightarrow 0$ qtp em I Portanto u não possui derivada fraca.

Com a noção de derivada fraca, estamos prontos para definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

Definição 2.10. Seja I um intervalo aberto, possivelmente ilimitado. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p} = \{u \in \mathcal{L}^p; u' \in \mathcal{L}^p\}$$

onde u' é a derivada de u no sentido fraco

2.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é definir a derivada fraca de ordem superior, generalizar os espaços da seção anterior para funções definidas em um aberto Ω do \mathbb{R}^n e explorar algumas propriedades elementares.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes em \mathbb{R}^n temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu_i dS - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (i = 1, \dots, n)$$

Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula em $\partial\Omega$, como mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

Além disso, se u for de classe \mathcal{C}^k com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi. \quad (2.2)$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (2.1) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (2.2) ainda é válida, mesmo se u não for de classe \mathcal{C}^k . Note que o lado esquerdo de (2.1) está bem definido se $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$. O problema é que se u não é uma função de classe \mathcal{C}^k então o lado direito de (2.1) não faz sentido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tal que (2.1) é válida quando substituímos $D^\alpha u$ por v .

Definição 2.11 (Derivada fraca em Ω). Sejam $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , denotada por

$$D^\alpha u = v$$

dado que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi d\mu. \quad (2.3)$$

para toda função de teste $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (2.3) para toda ϕ função de teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (2.3), então u não possui a α -ésima derivada parcial fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é a sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 2.12. Sejam $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} u \phi = 0$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω

Demonstração. □

Proposição 2.13. Seja α um multi-índice. Se v e \tilde{v} são ambas α -ésimas derivadas parciais fracas de uma função u . Então

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi \, dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Daí

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0$$

isto é

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto $v = \tilde{v}$ qtp em Ω . □

Exemplo 2.14. Considere a função u do exemplo 2.8, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

é a derivada de u no sentido fraco. Porém a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porém v e \tilde{v} são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 2.15. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) ; \text{ existem } g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mu = - \int_{\Omega} g_i \phi \, d\mu \right\}$$

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, indutivamente, e pela derivada fraca, veremos as duas e mostraremos que são equivalentes

Definição 2.16. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}$$

com $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Ou

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1\}$$

onde $D^\alpha u$ é a α -ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

onde

$$\langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Definição 2.17. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty$$

para $p = \infty$.

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Além disso dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω , isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \Subset \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Isso será feito após o Teorema 2.19 sobre as propriedades da derivada fraca necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Observação: (norma equivalente)

Exemplo 2.18. Seja $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto |x|^{-\alpha}.$$

Para quais valores de $\alpha > 0$, n e p , $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de $\mathbf{0}$ com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{|x|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{|x|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes, temos

$$\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ denota o vetor normal que aponta para dentro em $\partial B[0, \varepsilon]$. Agora se $\alpha + 1 < n$, $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando Du , temos

$$\int_{\Omega} |Du| dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx.$$

Transformando em coordenadas polares, conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dS dr.$$

Onde a integral de superfície, é igual a área da esfera n -dimensional de raio r , dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

que por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n)r^{n-1}$. Dessa forma

$$\int \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2} dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim

$$\int_{\Omega} |Du| dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| |\phi| |\nu_i| dS \leq \|\phi\|_{\infty} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leq \|\phi\|_{\infty} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha} dS,$$

onde essa última integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq C \varepsilon^{n-1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n - 1$. Além disso, $|Du(x)| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha + 1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geq n$.

Teorema 2.19 (Propriedades da derivada fraca). Seja $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leq |\alpha| \leq k$. Então

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(b) $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\gamma u + v) = \gamma D^\alpha u + D^\alpha v$$

(d) se Ω_0 é um aberto de Ω , então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$

(e) se $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \quad (2.4)$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leq \alpha$ significa $\sigma_j \leq \alpha_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$. A demonstração para $D^\alpha D^\beta u$ é análoga. Com efeito

$$\int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx.$$

Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável, então o operador D^α é a α -ésima derivada parcial no sentido usual. Dessa forma $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca obtemos

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^\alpha u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β com $|\beta| \leq k - |\alpha|$ tal que $D^\beta(D^\alpha u) \notin \mathcal{L}^p$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta} u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^\gamma u \in \mathcal{L}^p$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leq k$. Em particular como $|\beta| \leq k - |\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leq k$. Portanto $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_{\Omega} (\gamma u + v) D^\alpha \phi \, dx = \int_{\Omega} \gamma u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \gamma \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas integrais obtemos

$$\gamma \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \gamma (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha v \, dx = \int_{\Omega} (\gamma D^\alpha u + D^\alpha v) \phi \, dx$$

Portanto $D^\alpha(\gamma u + v) = \gamma D^\alpha u + D^\alpha v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega_0 \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega_0} |u|^p \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_0} |D^\alpha u|^p \, dx \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k)$$

são finitas. De fato

$$\int_{\Omega_0} |u|^p dx \leq \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega_0} |D^\alpha u|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx < \infty \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k),$$

ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$.

(e) Para mostrar que (2.4) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$. Com efeito para $|\alpha| = 1$, como η e φ são funções infinitamente diferenciáveis no sentido usual, temos que $D^\alpha(\eta\varphi) = \phi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \phi$. Dessa forma

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} u D^\alpha(\eta\phi) - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx.$$

Como η e ϕ tem suporte compacto, então $D^\alpha(\eta\phi)$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral obtemos

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = - \int_{\Omega} \eta \phi D^\alpha u dx - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx = - \int_{\Omega} (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta) \phi dx.$$

Portanto $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$ como queríamos mostrar.

Agora seja $m < k$ e suponha que (2.4) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq l$ e toda função de teste η . Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m + 1$. Então α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Daí

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^{\beta+\gamma} \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^\beta (D^\gamma \phi) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^\beta(\eta u) D^\gamma \phi dx.$$

Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^\beta(\eta u)$ e a γ -ésima derivada fraca. Assim

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \right] \phi dx$$

Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} (D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u) \right] \phi dx \quad (2.5)$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório dentro da integral da seguinte forma

$$\sum_{\gamma \leq \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u$$

que ainda pode ser expandido em quatro somatórios

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\beta < \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ & + \sum_{0 \leq \sigma < \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Porem, note que $0 \leq \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leq \sigma$ significa que $0 \leq \sigma_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $i = 1, \dots, n$ tal que $\sigma_i < \gamma_i$. Como $|\gamma| = 1$, suponha sem perda de generalidade que $\gamma = e_1$. Dessa forma, para $i = 1$

$$0 \leq \sigma_1 < 1$$

como $\sigma_i \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \dots, n$

$$0 \leq \sigma_i < 0$$

que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma $\beta < \rho \leq \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (2.6) pode ser escrito da seguinte forma

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^\alpha \eta. \quad (2.7)$$

Por fim, ao menos de uma mudança de variáveis, escrevemos (2.7) como

$$\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u.$$

Pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (2.5) temos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u$$

como queríamos mostrar. \square

Com os resultados obtidos, é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ formam um espaço de Banach.

Teorema 2.20. $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ com $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração.

$$(1 \leq p < \infty)$$

1. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff D^\alpha u = 0$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Em particular se $\alpha = (0, \dots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α . Sendo assim $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(\lambda u)\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\lambda D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = |\lambda|^p \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Portanto $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski em ℓ^p

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ou seja,

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.

($p = \infty$)

O caso $p = \infty$ é análogo ao caso $1 \leq p < \infty$. □

Teorema 2.21. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$ com $1 \leq p \leq \infty$ é completo

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Note que

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p < \varepsilon^p$$

para todo $n, m > n_0$. Ou seja, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, que é um espaço completo (Teorema 1.83). Dito isso

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$ denotamos $D^\alpha u_n$ por u_n e u_α por u . Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema da Convergência Dominada (e o teorema no livro do Brezis, ver pág e número) e utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx &= \int_{\Omega} \lim u_n D^\alpha \phi = \lim \int_{\Omega} u_n D^\alpha \phi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \lim D^\alpha u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi \, dx. \end{aligned}$$

Portanto $D^\alpha u = u_\alpha$ e consequentemente $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.

Por outro lado, considere (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Além disso

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Isto nos diz que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em \mathcal{L}^∞ que é um espaço completo (Teorema 1.88). Sendo assim

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^\infty(\Omega)$$

De forma análoga ao caso $1 \leq p < \infty$, mostramos que $D^\alpha u = u_\alpha$ e portanto $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. \square

2.5 Aproximações

Não é ideal ficar voltando o tempo todo à definição de derivadas fracas. Para explorar as propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev, precisamos de métodos sistemáticos para aproximar funções nesses espaços por funções mais suaves. A técnica de molificação, que envolve a convolução de uma função com uma molificadora suave e com suporte compacto, oferece essa ferramenta. Esse processo resulta em uma sequência de funções suaves que convergem para a função original nas normas de Sobolev, permitindo a aproximação de funções com regularidade fraca por funções suaves. As molificadoras são essenciais na teoria dos espaços de Sobolev, possibilitando o estudo de soluções fracas para equações diferenciais parciais e estabelecendo resultados importantes de densidade.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

conhecida como molificador de Friedrich. Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (2.9)$$

essa função η_ε é a função que será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Teorema 2.22 (Aproximação local por funções suaves). Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ em } \Omega_\varepsilon$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então

- (a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ para cada $\varepsilon > 0$
- (b) $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$

Demonstração. \square

Exemplo 2.23. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ (caso análogo ao que foi feito no Exemplo 2.8). Vamos utilizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u . Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

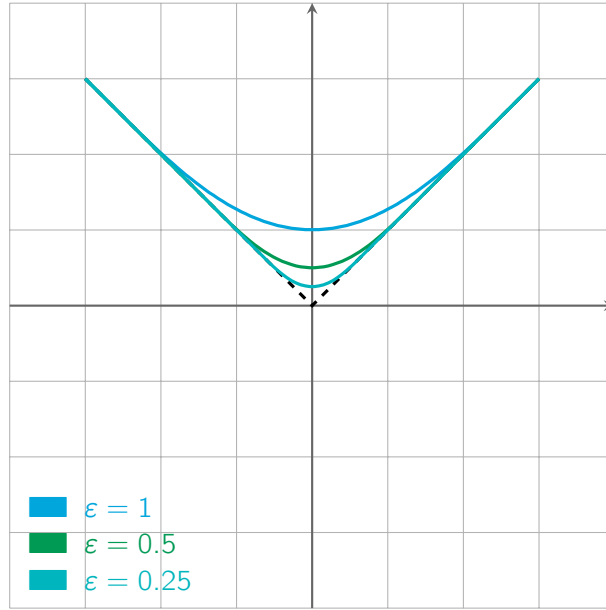


Figura 2.1: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ϵ com $\epsilon = 1, 0.5, 0.25$

Fonte: Autoral

onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$$

isto é

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) dx \right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Daí definimos a função molificadora $\eta_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\epsilon dx = 1 \text{ e } \text{supp } \eta = [-\epsilon, \epsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u . Com efeito

$$u^\epsilon(x) = \int_{[-\epsilon, \epsilon]} \eta_\epsilon(x) u(x - y) dy$$

A Figura 2.1 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ϵ

Observação: (converge para a função delta de Dirac)

Exemplo 2.24. Seja $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não é diferenciável, mas possui derivada fraca em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para $0 < p < 2$. Com efeito, note que

...

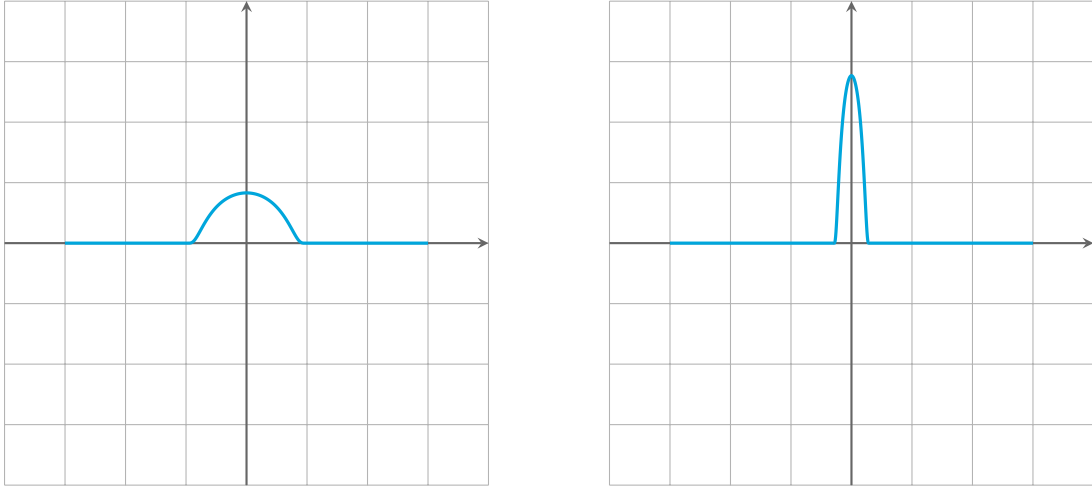


Figura 2.2: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$
Fonte: Autoral

Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ quando $0 < p < 2$ dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}$$

onde

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Com efeito, note que

...

Além disso

$$\int_{\Omega} |D^{e_i}(x_1, x_2)|^p dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \right|^p dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini

$$\frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 dx_j \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i = \frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i$$

...

$$\frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i = \frac{1}{2^{p-2}} \int_0^1 x_i^{\frac{p}{2}+1} dx = \frac{1}{2^{p-2}} \left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2} - 1} \right]$$

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando $p < 2$. Portanto $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(ver Figura 2.3) e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u .

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2) dy$$

Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε . A figura 2.4 mostra o gráfico de u , onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε .

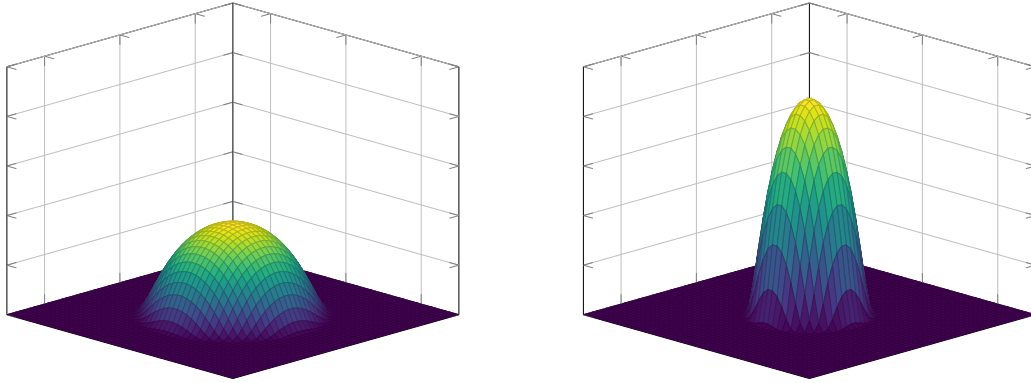


Figura 2.3: η e η_ε com $\varepsilon = 0.5$

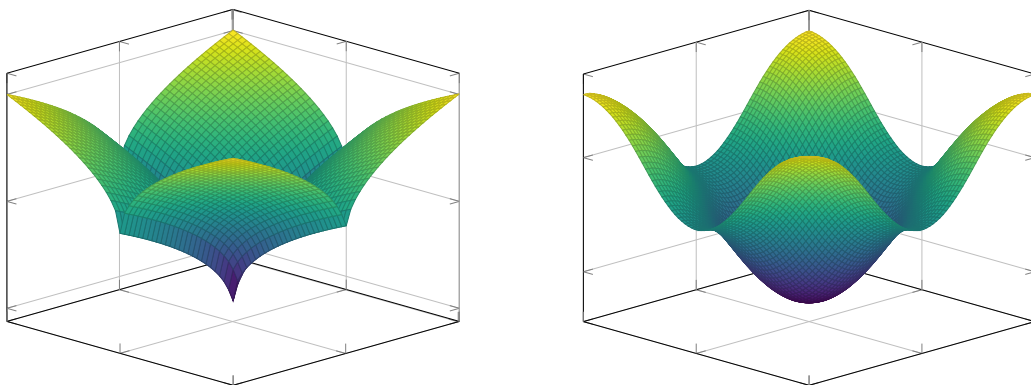


Figura 2.4: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^ε com $\varepsilon = 0.5$

Fonte: Autoral

Teorema 2.25. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existem funções $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. □

Definição 2.26. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Dizemos que $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^k se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma função de classe \mathcal{C}^k $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[x_0, r] = \{x \in B[x_0, r] ; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^∞ se é de classe \mathcal{C}^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.27. Sejam Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existem funções $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ tais que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. □

2.6 Extensões

(introdução)

Teorema 2.28. Sejam Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 e um Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

1. $Eu = u$ qtp em Ω
2. $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$
3. $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p , Ω e Ω'

BIBLIOGRAFIA

- [1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
- [2] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.
- [3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [4] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [5] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [6] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.
- [7] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [8] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.