
CONTEÚDO

Lista de Símbolos	1
1 Introdução à Teoria da Medida	5
1.1 Espaços e funções mensuráveis	5
1.2 Medida	8
1.3 Integral de Lebesgue	8
1.4 Espaços \mathcal{L}^p	24
1.4.1 Espaços \mathcal{L}^∞	29

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{B}	Álgebra de Borel
χ_E	Função característica do conjunto E
\mathfrak{D}	σ -álgebra
f^+	Parte positiva da função f
f^-	Parte negativa da função f
$f \sim_\mu g$	f e g são μ -equivalentes i.e., $f = g$ em quase toda parte em X .
$\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço das funções integráveis em relação a medida μ .
$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^p .
$\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis
$\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas
$\mu(E)$	Medida do conjunto E
$N_\mu(\cdot)$	Semi-norma em relação a medida μ .
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta estendida i.e., $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de σ -álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma família \mathfrak{D} de subconjuntos de X é uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes condições

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$
2. Se $S \in \mathfrak{D}$ então $S^c = X \setminus S \in \mathfrak{D}$
3. Se (S_n) é uma sequência de elementos de \mathfrak{D} então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

O par (X, \mathfrak{D}) é dito espaço mensurável e os subconjuntos de \mathfrak{D} são chamados de conjuntos mensuráveis (ou \mathfrak{D} -mensuráveis)

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não vazio e considere $\mathfrak{D} = \{\emptyset, X\}$. Afirmamos que \mathfrak{D} é uma σ -álgebra. Com efeito,

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$ pela definição.
2. $\emptyset^c = X \in \mathfrak{D}$ e $X^c = \emptyset \in \mathfrak{D}$
3. $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \mathfrak{D}$ ou $\bigcup X = X \in \mathfrak{D}$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. $\mathfrak{D} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ não é uma σ -álgebra de X pois $\{a, b\}^c = \{c, d\} \notin \mathfrak{D}$

Observação: Seja (S_α) uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha} S_{\alpha}^c \text{ e } \left(\bigcap_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^c$$

Dessa forma, se (S_n) é uma sequência de elementos de uma σ -álgebra, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

Observação:

Observação:

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto não enumerável e considere

$$\mathfrak{D} = \{S \subseteq X; S \text{ é enumerável ou } S^c \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que \mathfrak{D} é uma σ -álgebra. De fato

1. $\emptyset \in \mathfrak{D}$ pois é enumerável e $X \in \mathfrak{D}$ pois $X^c = \emptyset$ que é enumerável
2. se $S \in \mathfrak{D}$ temos as seguintes possibilidades
 S é enumerável, então $S^c \in \mathfrak{D}$ pois $(S^c)^c = S$ é enumerável
 S^c é enumerável, então pela definição da σ -álgebra, $S^c \in \mathfrak{D}$
3. Seja (S_n) uma sequência de subconjuntos em \mathfrak{D} , isto é, $S_n \in \mathfrak{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aqui temos três possibilidades a serem consideradas
 S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável, portanto está em \mathfrak{D}
 S_n^c é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_{n_0}^c$$

é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável $S_{n_0}^c$, portanto está em \mathfrak{D}

Se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

$$S_i \subseteq X \text{ e } S_j^c \subseteq X \text{ são enumeráveis}$$

podemos afirmar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ não é enumerável, pois S_j^c é enumerável, e como X não é enumerável, segue que S_j também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c$ é enumerável. Com efeito, observe que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_j^c$$

ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$.

Dessa forma, \mathfrak{D} é uma σ -álgebra

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio. Se \mathfrak{D}_1 e \mathfrak{D}_2 são σ -álgebras de X então $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ também é uma σ -álgebra de X .

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de X , o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor σ -álgebra contendo este.

Proposição 1.6. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X . Então a interseção de todas as σ -álgebras de subconjuntos de X que contem A é a menor σ -álgebra que contém A .

Demonstração.

□

Agora definimos uma σ -álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

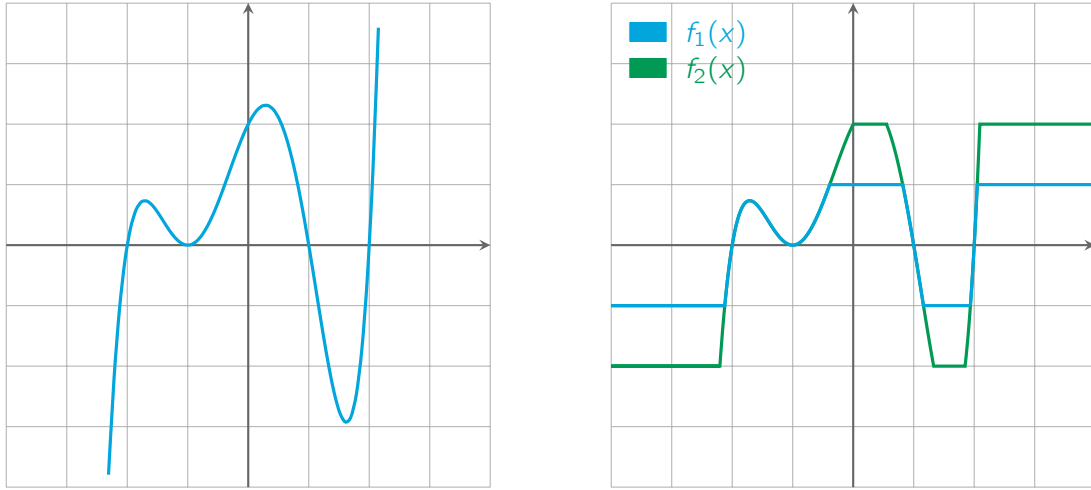


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico de f_1 e f_2

Fonte: Autoral

Definição 1.7. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a σ -álgebra \mathcal{B} gerada por todos os intervalos abertos (a, b) em \mathbb{R} , ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(a_\alpha, b_\alpha) ; a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}, a_\alpha < b_\alpha\}$$

temos que

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{D}_{\alpha},$$

onde cada \mathfrak{D}_{α} é uma σ -álgebra que contém A .

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

Definição 1.8. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser \mathfrak{D} -mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\}$$

pertence a σ -álgebra.

Exemplo 1.9. A função constante $x \mapsto c$ é mensurável. Com efeito, se $\alpha \geq c$, então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{D}$$

pois o único valor que a função assume é c . Se $\alpha < c$, então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{D}$$

Exemplo 1.10. A função característica χ_S de um subconjunto $S \in \mathfrak{D}$ é mensurável

Exemplo 1.11. Dada uma função f mensurável. A função *truncagem de f* (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$



Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

1.2 Medida

Definição 1.12. Uma medida é uma função $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geq 0$ para todo $S \in \mathfrak{D}$
3. se $(S_n) \subseteq \mathfrak{D}$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Exemplo 1.13. Seja $(\mathbb{N}, \mathfrak{D})$ um espaço mensurável, onde $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A função $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definida por $\mu(E) = \#E$, se E é finito, e $\mu(E) = \infty$ se E é infinito, é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito,

1. $\mu(\emptyset) = 0$ por vacuidade

1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point" of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida (X, \mathfrak{M}, μ) fixo.

Definição 1.14. Uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem ($\#\varphi(X) < \infty$)

Uma função φ simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \quad (1.1)$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \mathfrak{D}$. Essa representação é única pelo fato de todos a_j serem distintos, os conjuntos E_j serem disjuntos para todo $j = 1, \dots, n$, além disso, $X = \bigcup_{j=1}^n E_j$.

Definição 1.15. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de φ em relação a μ por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

Observação: Adotamos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 independente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

Lema 1.16. Dadas funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $c \geq 0$ tem-se

(a) $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$

(b) $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$

(c) A aplicação $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$ para todo $E \in \mathfrak{D}$ é uma medida em \mathfrak{D} .

Demonstração.

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu.$$

Com efeito, para $c = 0$,

$$\int c\varphi d\mu = 0 = c \int \varphi d\mu.$$

por outro lado, para $c > 0$, podemos escrever $c\varphi$ da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n ca_j \chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n ca_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = c \int \varphi d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representação para $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessariamente é a representação padrão, pois é possível que existam $j_0, j_1 \in \{1, \dots, n\}$ e $k_0, k_1 \in \{1, \dots, m\}$, tais que $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$.

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k : j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por c_h com $h = 1, \dots, \#H$, e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos G_h são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório $\widetilde{\sum}$ está relacionado aos índices $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de $\varphi + \psi$ por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h \chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\ &= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) \end{aligned}$$

como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) \quad \text{e} \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

(c) Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito,

1. $\lambda(\emptyset) = \int \varphi \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$
2. Note que como $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ os elementos a_j na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que $0 \leq \varphi(x)$ para todo $x \in X$, daí

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x),$$

pois, como os conjuntos E_j são disjuntos, existe um único $1 \leq j_0 \leq n$ tal que $x \in E_{j_0}$. Dessa forma, para todo $j \neq j_0$, $\chi_{E_j}(x) = 0$, então

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E \cap E_j) \geq 0$$

pois mostramos que $a_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ e μ é uma medida.

3. Considere $(F_k) \subseteq \mathfrak{D}$ uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi \chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_j \mu(F_k \cap E_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi \chi_{F_k} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k) \end{aligned}$$

□

Agora, podemos estender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negativa (não necessariamente simples)

Definição 1.17. A integral de uma função $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ em relação a μ é definida por

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu$$

onde φ são funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Além disso, definimos a integral da função f sobre um conjunto mensurável

Definição 1.18. A integral de $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ sobre um conjunto $E \in \mathfrak{D}$ é dada por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

...

Lema 1.19. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $E, F \in \mathfrak{D}$. Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se $f \leq g$ tem-se

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

(b) se $E \subseteq F$ tem-se

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

Demonstração.

(a) Seja φ uma função simples em M^+ , então

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu = \int g d\mu$$

(b) Como $f \chi_E \leq f \chi_F$, segue do item anterior que

$$\int f \chi_E d\mu \leq \int f \chi_F d\mu,$$

dito isso

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 1.20 (Teorema da Convergência Monótona). Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para f , então,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \rightarrow f$ onde $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, pelo corolário ?? temos que $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Pela monotonicidade da sequência $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, pelo item **(a)** do lema anterior

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dito isso

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, seja $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leq \varphi \leq f$ e considere

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\} = \{x \in X; [f_n - \alpha \varphi](x) \geq 0\}$$

como f_n e φ são funções mensuráveis, temos que $A_n \in \mathfrak{D}$. Além disso, $A_n \subseteq A_{n+1}$ já que $f_n \leq f_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0, 1)$ e $0 \leq \varphi \leq f$. Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha \varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \quad (1.2)$$

Dessa forma, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X , segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi \chi_{A_n} d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

... fazendo $n \rightarrow \infty$ em 1.2

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de φ ser uma função simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$ tem-se que

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in \mathcal{M}^+}} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

□

O Lema 1.16 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, também é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

Corolário 1.21. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $c > 0$, então são válidas as seguintes afirmações

(a) $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$

(b) $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c = 0$

$$\int cf \, d\mu = 0 = c \int f \, d\mu.$$

Se $c > 0$, considere (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ convergindo para f (lema ??). Dito isso, $(c\varphi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para cf . Pelo Lema 1.16 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf \, d\mu = \lim \int c\varphi_n \, d\mu = c \lim \int \varphi_n \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ que convergem para f e g respectivamente. Dessa forma $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f + g$. Portanto

$$\int (f + g) \, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

Lema 1.22 (Lema de Fatou). Se $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$, dessa forma $g_m \leq f_n$ para todo $m \leq n$. Sendo assim,

$$\int g_m \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$$

para todo $m \leq n$. Desse modo

$$\int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para seu supremo, ou seja, $\liminf f_n$. Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessariamente simples

Corolário 1.23. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu$$

é uma medida.

Demonstração.

1. $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$.
2. Como $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ temos que $\lambda(E) = \int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$.
3. Sejam E_n uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e considere f_n definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k}$$

Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que

$$\int f_n d\mu = \int \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \int f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k).$$

Além disso, podemos escrever

$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f \chi_{E_k} = f \chi_E$$

desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos.

Por fim, como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ que converge para $f \chi_E$, pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$$

Portanto, λ é uma medida. □

Corolário 1.24. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,

$$\int f d\mu = 0$$

Demonstração. Suponha que $\int f d\mu = 0$ e considere o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X ; f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$. Note que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0.$$

Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso

$$E = \{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pois se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, logo

$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim, $x \in E$.

Por outro lado, se $x \in E$, temos que $f(x) > 0$. Utilizando a propriedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é, $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como queríamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que (E_n) é uma sequência crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$, para todo $x \in E^c$ com $\mu(E) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ em quase toda parte em X .

Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ em quase toda parte em X . Se $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Sendo assim, considerando $f_n = n\chi_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f \leq \liminf f_n$ e pelo Lema de Fatou

$$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f d\mu = 0.$$

□

Corolário 1.25. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então a aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua em relação a μ , isto é, se $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é, $f\chi_E = 0$ em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1.26. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ que converge em quae toda parte de X para a função $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

Demonstração. Seja N um conjunto de medida nula. Suponha que (f_n) converge para f em todo o pontos de $M = N^c$. Dessa forma, a sequência $(f_n \chi_M)$ converge para $f \chi_M$, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f \chi_M \, d\mu = \lim \int f_n \chi_M \, d\mu.$$

Além disso, podemos escrever f e f_n da seguinte forma

$$f = f \chi_M + f \chi_N \text{ e } f_n = f_n \chi_M + f_n \chi_N,$$

pois $M = N^c$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f \chi_N$ e $f_n \chi_N$ são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.24, segue que

$$\lim \int f_n \, d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

Corolário 1.27. Seja (g_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \dots + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g_n \geq 0$, temos que (f_n) é uma sequência crescente que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu$$

Portanto

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

Definição 1.28. O conjunto $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ das funções integráveis consiste em todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, tais que as integrais

$$\int f^+ d\mu \text{ e } \int f^- d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de f em relação a μ por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

e se E é um conjunto mensurável

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Qualquer representação de f como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja f uma função integrável e escreva f como $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções integráveis não negativas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Como $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$, segue que

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Da mesma forma que definimos uma medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exige o lema abaixo

Lema 1.29. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de f (em relação a μ).

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{D}, \mu)$, pelo Corolário ?? temos que as funções $\lambda^+, \lambda^- : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \text{ e } \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

são medidas em \mathfrak{D} e são finitas pelo fato de f ser uma função integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ temos que λ é uma carga. \square

Como a aplicação λ definida acima é uma carga, vemos que se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, então

$$\int_E f \, d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propriedades elementares das integrais de funções mensuráveis

Teorema 1.30. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. Além disso

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu. \quad (1.3)$$

Demonstração. Seja f uma função integrável, mostremos que $|f|$ também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+ \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu$$

é finita pois f é integrável, e

$$\int |f|^- \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$$

que é finita. Portanto $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que $|f|$ é integrável, dessa forma

$$f^+ \leq f^+ + f^- = |f|$$

$$f^- \leq f^+ + f^- = |f|$$

sendo assim

$$\int f^+ \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$$

$$\int f^- \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$$

ambas finitas pois $|f|$ é integrável. Portanto f é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integrável e a desigualdade triangular.

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \left| \int f^+ \, d\mu \right| + \left| \int f^- \, d\mu \right| = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu$$

□

Corolário 1.31. Se $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$, $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e $|f| \leq |g|$, então $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$$

Demonstração. Se g é integrável então pelo Teorema anterior $|g|$ também o é. Além disso, como $|f| \leq |g|$

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu,$$

como $|g|$ é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de $|f|$ também ser finita, ou seja, $|f|$ é integrável e novamente pelo Teorema anterior, f é integrável. \square

Teorema 1.32. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f + g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e

$$(a) \int cf d\mu = c \int f d\mu$$

$$(b) \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Demonstração.

(a) Se $c \geq 0$. Note que $(cf)^+ = cf^+$ e $(cf)^- = cf^-$. Dito isso

$$\int cf d\mu = \int cf^+ - cf^- d\mu$$

como cf^+ e cf^- são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.21

$$\int cf d\mu = c \int f^+ - f^- d\mu = c \int f d\mu$$

Se $c < 0$ a demonstração é análoga, basta perceber que $(cf)^+ = -cf^-$ e $(cf)^- = -cf^+$ ambas funções não negativas pois $-c > 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$, então pelo Teorema 1.30 $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$, como $|f + g| \leq |f| + |g|$ temos que $f + g$ é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f + g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.23 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

\square

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

Teorema 1.33 (Teorema da Convergência Dominada). Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo X . Note que

$$\lim |f_n| \leq g \implies |f| \leq |g|,$$

como por hipótese f é mensurável e g é integrável, segue pelo Corolário 1.31 que f é integrável. Além disso, como $-g \leq f_n \leq g$ temos que $g + f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.30 temos que

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu \\ &= \int (g + \lim f_n) d\mu \\ &= \int \lim (g + f_n) d\mu \\ &= \int \liminf (g + f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu \\ &= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

que implica em

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \quad (1.4)$$

Por outro lado, $g - f_n \geq 0$, de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad (1.5)$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

isto é¹

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ onde a aplicação $x \mapsto f(x, t)$ é mensurável para todo $t \in [a, b]$.

¹ $\limsup x_n \leq x \leq \liminf x_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

Corolário 1.34. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

Demonstração. Seja t_n uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0 e considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = f(x, t_n)$. Então como $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ com g integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \int f(x, t_0) d\mu(x) &= \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) \\ &= \int \lim f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f(x, t_n) d\mu(x) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

Corolário 1.35. Se a aplicação $t \mapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F dada por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração. Mostremos que $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$. Com efeito

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

□

Corolário 1.36. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \rightarrow f(x, t_0)$ seja integrável em X , que $\partial_t f$ existe em $X \times [a, b]$ e que existe uma função integrável g em X tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t , com $t \neq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo $x \in X$. Desse modo a função $x \mapsto \partial f / \partial t(x, t)$ é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_0 , entre t_0 e t tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left| f(x, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right|$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0| |\partial f / \partial t(x, s_0)|$ é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.31 temos que f é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo $x \in X$. Consequentemente

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| < g(x)$$

para valores de n suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. □

1.4 Espaços \mathcal{L}^p

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue \mathcal{L}^p , que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências p -ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

Proposição 1.37. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. A aplicação $N_\mu : \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$ em quase toda parte em X .

Demonstração. Note que

$$1. N_\mu(f) = \int |f| d\mu \geq \int 0 d\mu = 0.$$

$$2. N_\mu(\lambda f) = \int |\lambda f| d\mu = \int |\lambda| |f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$$

$$3. N_\mu(f + g) = \int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$$

Portanto N_μ é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Observação: Note que $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ é um espaço vetorial com as operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto se deve ao fato que $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ é um subespaço vetorial do espaço de funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Estamos interessados em transformar \mathcal{L} em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 1.38. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. Dizemos que f e g são μ -equivalentes ($f \sim_\mu g$) se $f \equiv g$ em quase toda parte em X .

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{[f] ; f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) ; g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^1 . Esse espaço, munido das operações

$$[f] + [g] = [f + g]$$

$$[\lambda f] = \lambda[f]$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Proposição 1.39. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. A aplicação $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$$

para todo $[f] \in \mathcal{L}^1$ é uma norma

Demonstração. Note que apenas precisamos mostrar que $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, pois as outras propriedades são análogas à demonstração da Proposição 1.37. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto $\|\cdot\|_1$ é uma norma e $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado. \square

No restante do texto, adotaremos a notação $[f] = f$, ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com o seus representantes.

Definição 1.40. Seja $1 \leq p < \infty$ um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{D}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável, } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^p .

Nosso intuito agora é mostrar que \mathcal{L}^p é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em \mathcal{L}^p .

Teorema 1.41 (Desigualdade de Young). Sejam $A, B \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados^a. Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

^a p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração. \square

Teorema 1.42 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Demonstração. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando $p = q$, o que acontece apenas quando $p = q = 2$.

Corolário 1.43 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se $f, g \in \mathcal{L}^2$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \int |fg| \, d\mu \leq \int |f|^2 \, d\mu \int |g|^2 \, d\mu$$

Demonstração. A primeira desigualdade é o Teorema 1.30 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

Teorema 1.44 (Desigualdade de Minkowski). Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. □

Agora, vamos provar que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.45. A aplicação $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ pois $|f| \geq 0$.
2. $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p \, d\mu = 0 \iff f = 0$ (como classes de equivalência)
3. $\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\lambda|^p |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$
4. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto $\|\cdot\|_p$ é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

Definição 1.46. Seja (f_n) uma sequência em \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$. Dizemos que (f_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$

Definição 1.47. Sejam (f_n) uma sequência em \mathcal{L}^p e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$. Dizemos que (f_n) é convergente e converge para f se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

Definição 1.48. Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Teorema 1.49 (Teorema de Riesz-Fischer). \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em \mathcal{L}^p . Mostremos que (f_n) é convergente. Com efeito, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$. Escolhendo ε de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n} \quad (1.6)$$

Defina $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, pois $g \geq 0$ e

$$g = |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n|$$

isto é, g é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis (f_n é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que $g \in \mathcal{L}^p$. De fato

$$\int |g|^p d\mu = \int g^p d\mu,$$

pois $g \geq 0$. Pela definição de g temos

$$\int g^p d\mu = \int \left(|f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left(|f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em \mathcal{L}^p e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^k \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.6) temos que

$$\left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leq \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right)^p < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}^p$. Agora seja, $E = \{x \in X; g(x) < \infty\} \in \mathfrak{D}$. Dito isso, $N = E^c = \{x \in X; g(x) = \infty\} \in \mathfrak{D}$. Mostremos que N tem medida nula. Com efeito, suponha que $\mu(N) > 0$, dessa forma

$$\int_X |g|^p \geq \int_N |g|^p = \infty \mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois $g \in \mathcal{L}^p$. Dessa forma $\mu(N) = 0$, isto é, $g < \infty$ em quase toda parte em X . Sendo assim, defina $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que $f \in \mathcal{L}^p$. Note que

$$f(x) = \left(f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| \chi_E \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente, $|f|^p < g^p$. Logo

$$\int |f|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}^p$. Por outro lado, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= f_1(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$, então $\lim f_n = f$ em quase toda parte em X . É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \quad (1.7)$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in \mathcal{L}^p$, então $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p d\mu = 0$$

Isto prova que \mathcal{L}^p é completo. \square

1.4.1 Espaços \mathcal{L}^∞

Agora estudaremos um novo espaço...

Definição 1.50. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^∞ . Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que f é uma função essencialmente limitada.

Observação: Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

isto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leq M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato, $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X se, e somente se, existe $N \in \mathfrak{D}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in N^c$. Note que $\{x \in X; |f(x)| > M\} \subseteq N$, dessa forma

$$\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) \leq \mu(N) = 0$$

Portanto, $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$.

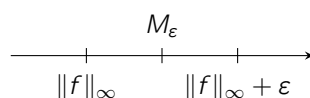
Reciprocamente, se $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$, então $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \{|f(x)| > M\}^c$, isto é, $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X .

Proposição 1.51. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $f \in \mathcal{L}^\infty$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$, então existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X . Daí, como $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geq 0; |f(x)| \leq M_0 \text{ qtp em } X\}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ conseguimos encontrar $M_\varepsilon \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\varepsilon$ em quase toda parte em X .



Como $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$, então

$$|f(x)| \leq M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ chegamos a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que \mathcal{L}^∞ é um espaço vetorial normado

Proposição 1.52. A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_\infty \geq 0$ pois 0 é cota inferior de $\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$.
2. $\|f\|_\infty = 0$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\varepsilon$ em quase toda parte em X , com $M_\varepsilon < \varepsilon$. Daí, $|f(x)| < \varepsilon$ em quase toda parte em X . Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, encontramos

$$|f(x)| \leq 0 \text{ qtp em } X$$

Dessa forma, $f(x) = 0$ em quase toda parte em X .

Reciprocamente, $\|0\|_\infty = \inf\{M \geq 0; 0 \leq M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3. $\|\lambda f\|$
4. (Desigualdade de Minkowski em \mathcal{L}^∞) Se $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ então as funções são limitadas em quase toda parte em X , dito isso, $f + g$ também é limitada em quase toda parte em X . Logo $f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

Por outro lado, como $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, então existem $M, \hat{M} \in \mathfrak{D}$ tais que $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$ e $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \notin M$ e $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ para todo $x \notin \hat{M}$. Seja $N = M \cup \hat{M} \in \mathfrak{D}$. Daí $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leq \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$. Além disso

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $x \notin N$, com $\mu(N) = 0$. Dessa forma

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma.

□

Proposição 1.53 (Desigualdade de Hölder em \mathcal{L}^∞). Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Demonstração. Note que se $g \in \mathcal{L}^\infty$ então $|g| \leq \|g\|_\infty$ em quase toda parte em X . Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = \int |f| |g| d\mu \leq \int |f| \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [2] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [3] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [4] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [5] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. sexta. IMPA, 2020.