

---

## CONTEÚDO

---

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução à Teoria da Medida</b>	<b>5</b>
1.1 Espaços e funções mensuráveis . . . . .	5
1.2 Medida . . . . .	11
1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$ . . . . .	14
1.3 Integral de Lebesgue . . . . .	16
1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$ . . . . .	33
<b>2 Espaços de Sobolev</b>	<b>47</b>
2.1 Preliminares . . . . .	47
2.2 Motivação . . . . .	48
2.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ . . . . .	48
2.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	50
2.5 Aproximações . . . . .	58
2.6 Extensões . . . . .	66
2.7 Traços . . . . .	69
2.8 Desigualdades de Sobolev . . . . .	70
2.8.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev . . . . .	70



---

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$\mathfrak{B}$	Álgebra de Borel
$\widehat{\mathfrak{B}}$	Álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$
$\chi_E$	Função característica do conjunto $E$
$\mathfrak{D}$	$\sigma$ -álgebra
$f^+$	Parte positiva da função $f$
$f^-$	Parte negativa da função $f$
$f \sim_{\mu} g$	$f$ e $g$ são $\mu$ -equivalentes i.e., $f = g$ em quase toda parte em $X$ .
$\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço das funções integráveis em relação a medida $\mu$ .
$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{D}, \mu)$	Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$ .
$\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis
$\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$	Espaço das funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas
$\mu(E)$	Medida do conjunto $E$
$N_{\mu}(\cdot)$	Semi-norma em relação a medida $\mu$ .
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto $X$
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta estendida i.e., $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev



# CAPÍTULO UM

## INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

### 1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de  $\sigma$ -álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

**Definição 1.1.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma família  $\mathfrak{D}$  de subconjuntos de  $X$  é uma  $\sigma$ -álgebra se satisfaz as seguintes condições

1.  $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$
2. Se  $S \in \mathfrak{D}$  então  $S^c = X \setminus S \in \mathfrak{D}$
3. Se  $(S_n)$  é uma sequência de elementos de  $\mathfrak{D}$  então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

O par  $(X, \mathfrak{D})$  é dito espaço mensurável e os subconjuntos de  $\mathfrak{D}$  são chamados de conjuntos mensuráveis (ou  $\mathfrak{D}$ -mensuráveis)

**Exemplo 1.2.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e considere  $\mathfrak{D} = \{\emptyset, X\}$ . Afirmamos que  $\mathfrak{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Com efeito,

1.  $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$  pela definição.
2.  $\emptyset^c = X \in \mathfrak{D}$  e  $X^c = \emptyset \in \mathfrak{D}$
3.  $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \mathfrak{D}$  ou  $\bigcup X = X \in \mathfrak{D}$

**Exemplo 1.3.** Seja  $X = \{a, b, c, d\}$ .  $\mathfrak{D} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$  não é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  pois  $\{a, b\}^c = \{c, d\} \notin \mathfrak{D}$

**Observação:** Seja  $(S_\alpha)$  uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha} S_{\alpha}^c \text{ e } \left(\bigcap_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^c$$

Dessa forma, se  $(S_n)$  é uma sequência de elementos de uma  $\sigma$ -álgebra, então  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

**Observação:** (união finita)

**Observação:** (interseção finita)

**Exemplo 1.4.** Seja  $X$  um conjunto não enumerável e considere

$$\mathfrak{D} = \{S \subseteq X; S \text{ é enumerável ou } S^c \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que  $\mathfrak{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. De fato

1.  $\emptyset \in \mathfrak{D}$  pois é enumerável e  $X \in \mathfrak{D}$  pois  $X^c = \emptyset$  que é enumerável
2. se  $S \in \mathfrak{D}$  temos as seguintes possibilidades  
 $S$  é enumerável, então  $S^c \in \mathfrak{D}$  pois  $(S^c)^c = S$  é enumerável  
 $S^c$  é enumerável, então pela definição da  $\sigma$ -álgebra,  $S^c \in \mathfrak{D}$
3. Seja  $(S_n)$  uma sequência de subconjuntos em  $\mathfrak{D}$ , isto é,  $S_n \in \mathfrak{D}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , aqui temos três possibilidades a serem consideradas  
 $S_n$  é enumerável para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  é enumerável, portanto está em  $\mathfrak{D}$   
 $S_n^c$  é enumerável para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_{n_0}^c$$

é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável  $S_{n_0}^c$ , portanto está em  $\mathfrak{D}$

Se existem  $i, j \in \mathbb{N}$  tais que

$$S_i \subseteq X \text{ e } S_j^c \subseteq X \text{ são enumeráveis}$$

podemos afirmar que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  não é enumerável, pois  $S_j^c$  é enumerável, e como  $X$  não é enumerável, segue que  $S_j$  também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que  $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c$  é enumerável. Com efeito, observe que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_j^c$$

ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$ .

Dessa forma,  $\mathfrak{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra

**Exemplo 1.5.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Se  $\mathfrak{D}_1$  e  $\mathfrak{D}_2$  são  $\sigma$ -álgebras de  $X$  então  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$  também é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de  $X$ , o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor  $\sigma$ -álgebra contendo este.

**Proposição 1.6.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $A \subseteq \mathcal{P}(X)$  uma coleção não vazia de subconjuntos de  $X$ . Então a interseção de todas as  $\sigma$ -álgebras de subconjuntos de  $X$  que contem  $A$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $A$ .

*Demonstração.*

□

**Observação:** ( $\sigma$ -álgebra gerada)

Agora definimos uma  $\sigma$ -álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

**Definição 1.7.** Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  gerada por todos os intervalos abertos  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}$ , ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha) ; x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathfrak{B} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{D}_{\alpha},$$

onde cada  $\mathfrak{D}_{\alpha}$  é uma  $\sigma$ -álgebra que contém  $A$ .

Equivalentemente, podemos dizer que  $\mathfrak{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por todos conjuntos abertos de  $\mathbb{R}$ . É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de  $\mathbb{R}$  pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo  $\mathfrak{B}$  dessa forma é possível ver que não precisamos que  $\mathfrak{B}$  seja uma  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}$  mas sim de qualquer espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$ , nesse caso dizemos que  $\mathfrak{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela topologia  $\mathcal{T}$ . Nesse trabalho a notação  $\mathfrak{B}$  será utilizada apenas para a álgebra de Borel em  $\mathbb{R}$ .

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

**Proposição 1.8.**  $\mathfrak{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por todos intervalos fechados

*Demonstração.*

□

**Exemplo 1.9.** Alguns exemplos de conjuntos que estão em  $\mathfrak{B}$  são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em  $\mathfrak{B}$  pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em  $\mathfrak{B}$  pois se  $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ , então  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$  que é um conjunto em  $\mathfrak{B}$  pois cada  $\{x_n\}$  é um conjunto fechado.
- Todo intervalo do tipo  $[a, b)$  ou  $(a, b]$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  é um conjunto em  $\mathfrak{B}$  pois  $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$  e  $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$ .

A sensação é de que a álgebra de Borel contém todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , isto é  $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Porém este não é o caso, pois existem subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que são bastante difíceis de definir (vide [??]) que não estão em  $\mathfrak{B}$ . Mas se esses conjuntos são tão difíceis de definir por que precisamos de uma  $\sigma$ -álgebra que exclui eles?

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propriedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$  uma propriedade importante não é satisfeita, mas restringindo para o espaço  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  conseguimos definir a mesma medida de forma que todas propriedades são satisfeitas.

**Definição 1.10.** O conjunto  $\overline{\mathbb{R}}$  é dita reta estendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

**Observação:** Operações com  $\infty$  em  $\overline{\mathbb{R}}$

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1. $\infty + \infty = \infty$         | 4. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$             |
| 2. $-\infty - \infty = -\infty$       | 5. $\infty \cdot \infty = \infty$                        |
| 3. $x + \infty = \infty + x = \infty$ | 6. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ se $x > 0$ |

7.  $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$  se  $x < 0$

9.  $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$  se  $x > 0$

8.  $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$  se  $x < 0$

10.  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .

**Proposição 1.11.** Seja  $\mathbb{R}$  a reta estendida. Considere  $E_1 = E \cup \{-\infty\}$ ,  $E_2 = E \cup \{+\infty\}$ ,  $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$  e  $\widehat{\mathfrak{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$  com  $E$  variando na álgebra de Borel  $\mathfrak{B}$ . Então  $\widehat{\mathfrak{B}}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\mathbb{R}$  denominada álgebra estendida de Borel.

*Demonstração.* □

Um conceito bastante importante na teoria da medida, é a ideia de funções mensuráveis

**Definição 1.12.** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser  $\mathfrak{d}$ -mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\}$$

pertence a  $\sigma$ -álgebra.

**Lema 1.13.** As afirmações a seguir são equivalentes para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

(a)  $A_\alpha = \{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

(b)  $B_\alpha = \{x \in X ; f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{d}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

(c)  $C_\alpha = \{x \in X ; f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{d}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

(d)  $D_\alpha = \{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

*Demonstração.* □

**Exemplo 1.14.** A função constante  $x \mapsto c$  é mensurável. Com efeito, se  $\alpha \geq c$ , então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{d}$$

pois o único valor que a função assume é  $c$ . Se  $\alpha < c$ , então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{d}$$

Portanto a função constante é mensurável

**Exemplo 1.15.** A função característica  $\chi_E$  de um subconjunto  $E \in \mathfrak{d}$  é mensurável dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

é mensurável. Dito isso, seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se  $\alpha \geq 1$ , então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{d},$$

pois a imagem de  $\chi_E$  contém apenas os valores 0 e 1. Se  $0 \leq \alpha < 1$  então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = E \in \mathfrak{d}.$$

Por fim, se  $\alpha < 0$ , então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{d}.$$

Portanto  $\chi_E$  é uma função mensurável, desde que  $E$  também seja.



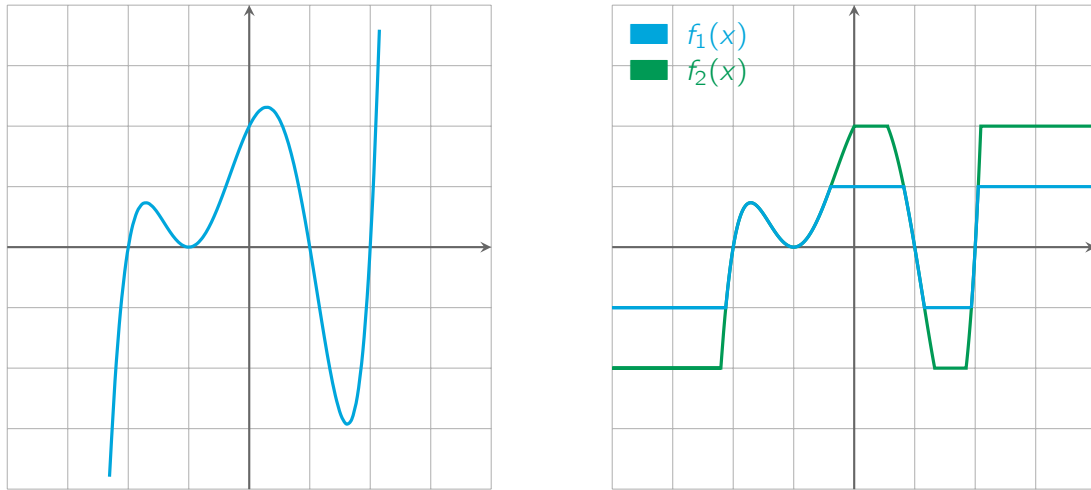


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de  $f$  e à direita o gráfico de  $f_1$  e  $f_2$   
Fonte: Autoral

**Exemplo 1.16.** Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  com  $X \in \mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela continuidade de  $f$ , o conjunto  $f^{-1}((\alpha, \infty))$  é aberto para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dessa forma  $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{B}$ . Portanto  $f$  é mensurável.

**Exemplo 1.17.** Dada uma função  $f$  mensurável. A função *truncagem de  $f$*  (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq n \text{ e } f(x) \geq -n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo  $n \in \mathbb{N}$

Vamos estudar agora algumas propriedades elementares sobre funções mensuráveis

**Proposição 1.18.** Sejam  $X$  um espaço mensurável,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funções mensuráveis e  $c \in \mathbb{R}$ . Então as funções

- (a)  $cf$
- (b)  $f^2 := f \cdot f$
- (c)  $f + g$
- (d)  $fg$
- (e)  $|f|$

são mensuráveis

*Demonstração.*

□

Uma outra definição importante sobre funções mensuráveis é a de parte positiva e negativa de uma função

**Definição 1.19.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma qualquer. Definimos as partes positiva e negativa de  $f$  respectivamente pelas funções não negativas  $f^+ : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f^- : X \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

**Lema 1.20.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Então

(a)  $f = f^+ - f^-$

(b)  $|f| = f^+ + f^-$

(c)  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$

(d)  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

O lema acima é importante para demonstrar a proposição abaixo

**Proposição 1.21.** Seja  $X$  um espaço mensurável. Então  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável se, e somente se,  $f^+$  e  $f^-$  são mensuráveis

*Demonstração.* Segue direto do lema anterior. □

Agora, vamos passar a estudar funções mensuráveis na reta extendida.

**Definição 1.22.** Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é  $\mathfrak{d}$ -mensurável (ou mensurável) se

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$$

para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Além disso, denotamos o conjunto de todas as funções  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  por  $\mathcal{M}(X, \mathfrak{d})$

Em nenhum momento da definição acima mencionamos os elementos  $\pm\infty$ . O motivo será mostrado abaixo

...

**Lema 1.23.** Uma função  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é mensurável se, e somente se

$$A = \{x \in X ; f(x) = \infty\} \in \mathfrak{d} \text{ e } B = \{x \in X ; f(x) = -\infty\} \in \mathfrak{d}$$

e a função  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável

*Demonstração.* □

**Observação:** ( $cf \dots \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{d})$ )

...

**Lema 1.24.** Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ . Então as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf f_n(x) & F(x) &= \sup f_n(x) \\ f^*(x) &= \liminf f_n(x) & F^*(x) &= \limsup f_n(x) \end{aligned}$$

pertencem a  $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$

*Demonstração.*

□

...

**Corolário 1.25.** Se  $(f_n)$  é uma sequência em  $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$  que converge para  $f$ . Então  $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$

*Demonstração.*

□

O resultado abaixo é ...

**Proposição 1.26.** Seja  $f$  uma função não negativa em  $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ . Então existe uma sequência  $(\varphi_n)$  em  $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$  tal que

- (a)  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$  para todo  $x \in X$  e  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) cada  $\varphi_n$  possui um número finito de valores reais em sua imagem.
- (c)  $f(x) = \lim \varphi_n(x)$  para cada  $x \in X$ .

*Demonstração.*

□

Para terminar essa seção, vamos definir e ver um exemplo de funções mensuráveis entre espaços mensuráveis

**Definição 1.27.** Sejam  $(X, \mathfrak{D}_X)$  e  $(Y, \mathfrak{D}_Y)$  espaços mensuráveis. Dizemos que uma função  $f : (X, \mathfrak{D}_X) \rightarrow (Y, \mathfrak{D}_Y)$  é mensurável quando

$$f^{-1}(E) \in \mathfrak{D}_X$$

para todo  $E \in \mathfrak{D}_Y$

**Exemplo 1.28.**

## 1.2 Medida

**Definição 1.29.** Uma medida é uma função  $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  que satisfaz

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu(E) \geq 0$  para todo  $S \in \mathfrak{D}$
3. se  $(E_n)$  é uma sequência de subconjuntos disjuntos em  $\mathfrak{D}$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

**Observação:** A tripla  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  onde  $X$  é um conjunto,  $\mathfrak{D}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  e  $\mu$  uma medida em  $\mathfrak{D}$  é chamada de espaço de medida.

**Observação:** (medida finita e  $\sigma$ -finita)

**Exemplo 1.30.** Seja  $(\mathbb{N}, \mathfrak{D})$  um espaço mensurável, onde  $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . A função  $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  dada por  $\mu(E) = \#S$ , se  $S$  é finito, e  $\mu(S) = \infty$  se  $S$  é infinito, é uma medida em  $\mathfrak{D}$ . Com efeito,

1.  $\mu(\emptyset) = 0$  por vacuidade
2.  $\mu(S) \geq 0$  por definição
3. Seja  $(S_n)$  uma sequência disjunta de elementos de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Se existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(S_k) = \infty$ . Então a união é infinita pois contém pelo menos um conjunto infinito. Logo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por outro lado, se  $\mu(S_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos que a união pode ser infinita. Nesse caso

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por fim, se a união é finita, então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $S_n = \emptyset$  para todo  $n > k$ . Assim

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^k S_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto  $\mu$  é uma medida.

**Exemplo 1.31.** Sejam  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida e  $A \in \mathfrak{D}$  um conjunto fixo. Então a função  $\lambda$  dada por

$$\lambda(S) = \mu(A \cap S)$$

é uma medida em  $\mathfrak{D}$ . Com efeito

1.  $\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$  pois  $\mu$  é uma medida
2.  $\lambda(S) \geq 0$  por definição
3. Seja  $(S_n)$  uma sequência de conjuntos disjuntos em  $\mathfrak{D}$ . Então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap S_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(S_n)$$

pois  $\mu$  é uma medida e a sequência  $(A \cap S_n)$  é disjunta.

Portanto  $\lambda$  é uma medida

**Exemplo 1.32.** Sejam  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  medidas em uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{D}$  e  $c_1, c_2, \dots, c_j > 0$ . Então

$$\mu(S) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S)$$

é uma medida em  $\mathfrak{D}$ . De fato

1.  $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(\emptyset) = 0$  pois  $\mu_j(\emptyset) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, k$ .
2.  $\mu(S) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S) \geq 0$  pois  $c_j \mu_j(S) \geq 0$  para todo  $j = 1, \dots, k$ .
3. Seja  $(S_n)$  uma sequência de conjuntos disjuntos em  $\mathfrak{D}$ . Então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto  $\mu$  é uma medida.

O próximo passo é estudar algumas propriedades elementares provenientes da definição de medida.

**Lema 1.33.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. Se  $E \subseteq F$  onde  $E$  e  $F$  são conjuntos mensuráveis. Então  $\mu(E) \leq \mu(F)$

*Demonstração.* Note que

$$F = E \cup (F \setminus E) = E \cup (F \setminus E),$$

onde  $E$  e  $F \setminus E$  são conjuntos mensuráveis disjuntos. Dessa forma

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E).$$

Portanto, como  $\mu$  é uma função não-negativa  $\mu(F) \geq \mu(E)$ . □

**Observação:** Da demonstração do lema anterior, conseguimos ver que se  $E \subseteq F$

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$$

desde que  $\mu(E) < \infty$ .

**Lema 1.34.** Seja  $\mu$  uma medida em  $\mathfrak{D}$ . Então

(a) se  $(E_n)$  é uma sequência crescente em  $\mathfrak{D}$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

(b) se  $(E_n)$  é uma sequência decrescente em  $\mathfrak{D}$  e  $\mu(E_1) < \infty$ , então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

*Demonstração.* □

**Definição 1.35.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. Dizemos que duas funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  são iguais em quase toda parte em  $X$  e denotamos por  $f = g$  qtp em  $X$  se existe um conjunto  $N \in \mathfrak{D}$  com  $\mu(N) = 0$  tal que

$$f(x) = g(x)$$

para todo  $x \notin N$ .

Um outro conceito importante é o conceito de convergência em quase toda parte

**Definição 1.36.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. Dizemos que uma sequência de funções  $(f_n)$  converge para  $f$  em quase toda parte, se existe um conjunto  $N \in \mathfrak{D}$  com  $\mu(N) = 0$  tal que

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

para todo  $x \notin N$ .

Por fim, para terminar essa seção, introduzimos o conceito de carga

**Definição 1.37.** Uma carga é uma função  $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu(S) \geq 0$  para todo  $S \in \mathfrak{D}$
3. se  $(S_n) \subseteq \mathfrak{D}$  é uma sequência de subconjuntos disjuntos em  $\mathfrak{D}$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

isto é uma medida que não satisfaz a não-negatividade.

### 1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$

Nosso objetivo agora é construir uma medida para  $\mathbb{R}$  e mostrar o motivo de utilizar a algebra de Borel ao invés de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

**Definição 1.38.** O comprimento de um intervalo aberto  $I$  é uma função  $\ell$  dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . O tamanho de  $A$  deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . A definição abaixo formaliza essa ideia

**Definição 1.39.** A medida exterior  $m(\cdot)$  de um conjunto  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  é definida por

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k); I_1, I_2, \dots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Essa definição envolve uma soma infinita de uma sequência  $t_1, t_2, \dots$ , de elementos de  $[0, \infty]$ , que é  $\infty$  se pelo menos algum  $t_k = \infty$ , ou se a série definida pelas somas parciais de  $t_k$  é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_k.$$

**Exemplo 1.40.** Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  um conjunto finito. Dado  $\varepsilon > 0$  defina a sequência  $I_k$  de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leq n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então  $I_1, I_2, \dots$ , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo,  $m(A) \leq 2\varepsilon n$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, temos que  $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

**Proposição 1.41.** Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

*Demonstração.* Seja  $A = \{a_1, a_2, \dots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  um conjunto enumerável. Dado  $\varepsilon > 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  defina a sequência

$$I_k = \left( a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right).$$

Dessa forma,  $I_1, I_2, \dots$ , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que  $m(A) < 2\varepsilon$ . Pelo fato de  $\varepsilon$  ser arbitrário, temos que  $m(A) = 0$ . □

Uma outra propriedade da medida exterior é sua invariância a translação

**Proposição 1.42.** Seja  $t \in \mathbb{R}$  e  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a; a \in A\}$$

*Demonstração.* Seja  $I_1, I_2, \dots$ , uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $A$ . Dito isso  $t + I_1, t + I_2, \dots$ , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem  $t + A$ . Logo

$$m(t + A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que  $m(t + A) \leq m(A)$ .

Para verificar a desigualdade na outra direção note que  $A = -t + (t + A)$ , então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t + A)) \leq (t + A).$$

Portanto  $m(A) = m(t + A)$

□

(texto motivador)

**Proposição 1.43.** Seja  $(A_n)$  uma sequência de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

*Demonstração.*

□

(medida do intervalo fechado) (explicar teorema de Heine-Borel)

**Proposição 1.44.** Seja  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ . Então  $m([a, b]) = b - a$

(o pulo do gato)

**Proposição 1.45.** Existem subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{R}$   $A$  e  $B$  tais que

$$m(A \cup B) \neq m(A) + m(B)$$

*Demonstração.*

□

**Teorema 1.46.** Não é possível definir uma medida  $\mu$  que generaliza  $\ell$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.*

□

(agora mostrar que em  $\mathfrak{B}$  é uma medida)

## 1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point" of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  fixo.





Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

**Definição 1.47.** Uma função  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem ( $\#\varphi(X) < \infty$ )

Uma função  $\varphi$  simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \quad (1.1)$$

onde  $a_j \in \mathbb{R}$  e  $\chi_{E_j}$  é a função característica do conjunto  $E_j \in \mathfrak{D}$ . Essa representação é única pelo fato de todos  $a_j$  serem distintos, os conjuntos  $E_j$  serem disjuntos para todo  $j = 1, \dots, n$ , além disso,  $X = \bigcup_{j=1}^n E_j$ .

**Definição 1.48.** Seja  $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de  $\varphi$  em relação a  $\mu$  por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

**Observação:** Adotamos a convenção  $0 \cdot \infty = 0$ . Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 independente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

**Lema 1.49.** Dadas funções simples  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  e  $c \geq 0$  tem-se

- (a)  $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$
- (b)  $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$
- (c) A aplicação  $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$  para todo  $E \in \mathfrak{D}$  é uma medida em  $\mathfrak{D}$ .

*Demonstração.*

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu.$$

Com efeito, para  $c = 0$ ,

$$\int c\varphi d\mu = 0 = c \int \varphi d\mu.$$

por outro lado, para  $c > 0$ , podemos escrever  $c\varphi$  da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n ca_j\chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n ca_j\mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j\mu(E_j) = c \int \varphi d\mu$$

**(b)** Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^m b_k\chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representação para  $\varphi + \psi$  dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j} + \sum_{k=1}^m b_k\chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessariamente é a representação padrão, pois é possível que existam  $j_0, j_1 \in \{1, \dots, n\}$  e  $k_0, k_1 \in \{1, \dots, m\}$ , tais que  $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$ .

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k; j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por  $c_h$  com  $h = 1, \dots, \#H$ , e  $G_h$  a união de todos os conjuntos  $E_j \cap F_k$  tais que  $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos  $G_h$  são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório  $\widetilde{\sum}$  está relacionado aos índices  $1 \leq j \leq n$  e  $1 \leq k \leq m$  tais que  $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de  $\varphi + \psi$  por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h\chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\ &= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) \end{aligned}$$

como  $X$  é a união das famílias  $\{E_j\}$  e  $\{F_k\}$ , temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) \quad e \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

**(c)** Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida em  $\mathfrak{D}$ . Com efeito,

$$1. \lambda(\emptyset) = \int \varphi \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

2. Note que como  $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  os elementos  $a_j$  na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que  $0 \leq \varphi(x)$  para todo  $x \in X$ , daí

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x),$$

pois, como os conjuntos  $E_j$  são disjuntos, existe um único  $1 \leq j_0 \leq n$  tal que  $x \in E_{j_0}$ . Dessa forma, para todo  $j \neq j_0$ ,  $\chi_{E_j}(x) = 0$ , então

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E \cap E_j) \geq 0$$

pois mostramos que  $a_j > 0$  para todo  $1 \leq j \leq n$  e  $\mu$  é uma medida.

3. Considere  $(F_k) \subseteq \mathfrak{F}$  uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned}
 \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi \chi_{\bigcup F_k} \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi \chi_{F_k} d\mu \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k)
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.50.** A função

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porém essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utilizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido. Com efeito, considere o espaço de medida  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu^*)$  onde  $\mathfrak{B}$  é a álgebra de Borel e  $\mu^*$  é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\mu^* = \mu^*(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois  $\mathbb{Q}$  é enumerável.

Agora, podemos estender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negativa (não necessariamente simples)

**Definição 1.51.** A integral de uma função  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$  em relação a  $\mu$  é definida por

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu$$

onde  $\varphi$  são funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$  tais que  $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in X$ .

Além disso, definimos a integral da função  $f$  sobre um conjunto mensurável

**Definição 1.52.** A integral de  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  sobre um conjunto  $E \in \mathfrak{D}$  é dada por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

...

**Lema 1.53.** Sejam  $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  e  $E, F \in \mathfrak{D}$ . Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se  $f \leq g$  tem-se

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

(b) se  $E \subseteq F$  tem-se

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

*Demonstração.*

(a) Seja  $\varphi$  uma função simples em  $M^+$ , então

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu = \int g d\mu$$

(b) Como  $f \chi_E \leq f \chi_F$ , segue do item anterior que

$$\int f \chi_E d\mu \leq \int f \chi_F d\mu,$$

dito isso

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstrado a seguir.

**Teorema 1.54** (Teorema da Convergência Monótona). Seja  $(f_n)$  uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para  $f$ , então,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

*Demonstração.* Como  $f_n \rightarrow f$  onde  $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , pelo corolário ?? temos que  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . Pela monotonicidade da sequência  $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ , pelo item (a) do lema anterior

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dito isso

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, seja  $0 < \alpha < 1$  e  $\varphi$  uma função simples mensurável tal que  $0 \leq \varphi \leq f$  e considere

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\} = \{x \in X; [f_n - \alpha \varphi](x) \geq 0\}$$

como  $f_n$  e  $\varphi$  são funções mensuráveis, temos que  $A_n \in \mathfrak{D}$ . Além disso,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  já que  $f_n \leq f_{n+1}$  e  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  pois  $\sup\{f_n\} = f$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  e  $0 \leq \varphi \leq f$ . Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha \varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \quad (1.2)$$

Dessa forma, a sequência  $(A_n)$  é monótona crescente e tem união  $X$ , segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi \chi_{A_n} d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

... fazendo  $n \rightarrow \infty$  em 1.2

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo  $0 < \alpha < 1$ , obtemos

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de  $\varphi$  ser uma função simples tal que  $0 \leq \varphi \leq f$  tem-se que

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

□

O Lema 1.49 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, também é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

**Corolário 1.55.** Sejam  $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  e  $c > 0$ , então são válidas as seguintes afirmações

(a)  $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

(b)  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

*Demonstração.*

(a) Se  $c = 0$

$$\int cf \, d\mu = 0 = c \int f \, d\mu.$$

Se  $c > 0$ , considere  $(\varphi_n)$  uma sequência monótona crescente de funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  convergindo para  $f$  (lema ??). Dito isso,  $(c\varphi_n)$  é uma sequência monótona crescente que converge para  $cf$ . Pelo Lema 1.49 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf \, d\mu = \lim \int c\varphi_n \, d\mu = c \lim \int \varphi_n \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere  $(\varphi_n)$  e  $(\psi_n)$  sequências monótonas crescentes de funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  que convergem para  $f$  e  $g$  respectivamente. Dessa forma  $(\varphi_n + \psi_n)$  é uma sequência monótona crescente que converge para  $f + g$ . Portanto

$$\int (f + g) \, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

**Lema 1.56** (Lema de Fatou). Se  $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , então

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

*Demonstração.* Seja  $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$ , dessa forma  $g_m \leq f_n$  para todo  $m \leq n$ . Sendo assim,

$$\int g_m \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$$

para todo  $m \leq n$ . Desse modo

$$\int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que  $(g_m)$  é crescente e converge para seu supremo, ou seja,  $\liminf f_n$ . Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessariamente simples

**Corolário 1.57.** Seja  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . A aplicação  $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por

$$\lambda(E) = \int f \chi_E \, d\mu$$

é uma medida.

*Demonstração.*

1.  $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$ .
2. Como  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  temos que  $\lambda(E) = \int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$ .
3. Sejam  $E_n$  uma sequência de conjuntos disjuntos em  $\mathfrak{D}$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  e considere  $f_n$  definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k}$$

Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que

$$\int f_n d\mu = \int \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \int f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k).$$

Além disso, podemos escrever

$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f \chi_{E_k} = f \chi_E$$

desde que  $(E_n)$  é uma sequência de conjuntos disjuntos.

Por fim, como  $(f_n)$  é uma sequência crescente em  $M^+$  que converge para  $f \chi_E$ , pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$$

Portanto,  $\lambda$  é uma medida. □

**Corolário 1.58.** Seja  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . Então,  $f(x) = 0$  em quase toda parte de  $X$  se, e somente se,

$$\int f d\mu = 0$$

*Demonstração.* Suponha que  $\int f d\mu = 0$  e considere o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X ; f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que  $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$ . Note que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0.$$

Isto nos diz que  $\mu(E_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso

$$E = \{x \in X ; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pois se  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in E_{n_0}$ , logo

$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$



Assim,  $x \in E$ .

Por outro lado, se  $x \in E$ , temos que  $f(x) > 0$ . Utilizando a propriedade Arquimediana, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é,  $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Portanto  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  como queríamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que  $(E_n)$  é uma sequência crescente. Isto nos diz que  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in E^c$  com  $\mu(E) = 0$ , ou seja  $f(x) = 0$  em quase toda parte em  $X$ .

Reciprocamente, suponha que  $f(x) = 0$  em quase toda parte em  $X$ . Se  $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$ , então  $\mu(E) = 0$ . Sendo assim, considerando  $f_n = n\chi_E$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $f \leq \liminf f_n$  e pelo Lema de Fatou

$$0 \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f \, d\mu = 0.$$

□

**Corolário 1.59.** Seja  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , então a aplicação  $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Então, a medida  $\lambda$  é absolutamente contínua em relação a  $\mu$ , isto é, se  $\mu(E) = 0$ , então  $\lambda(E) = 0$

*Demonstração.* Se  $\mu(E) = 0$ , então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é,  $f\chi_E = 0$  em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

**Corolário 1.60.** Se  $(f_n)$  é uma sequência monótona crescente de funções em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  que converge em quase toda parte de  $X$  para a função  $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , então

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

*Demonstração.* Seja  $N$  um conjunto de medida nula. Suponha que  $(f_n)$  converge para  $f$  em todo o pontos de  $M = N^c$ . Dessa forma, a sequência  $(f_n \chi_M)$  converge para  $f \chi_M$ , pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f \chi_M d\mu = \lim \int f_n \chi_M d\mu.$$

Além disso, podemos escrever  $f$  e  $f_n$  da seguinte forma

$$f = f \chi_M + f \chi_N \text{ e } f_n = f_n \chi_M + f_n \chi_N,$$

pois  $M = N^c$ . Como  $\mu(N) = 0$ , as funções  $f \chi_N$  e  $f_n \chi_N$  são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.58, segue que

$$\lim \int f_n d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

**Corolário 1.61.** Seja  $(g_n)$  uma sequência em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{B})$ . Então

$$\int \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

*Demonstração.* Seja  $f_n = g_1 + \dots + g_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $g_n \geq 0$ , temos que  $(f_n)$  é uma sequência crescente que converge para  $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ . Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left( \sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu = \int \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como  $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{B})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left( \sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu$$

Portanto

$$\int \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

**Definição 1.62.** O conjunto  $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  das funções integráveis consiste em todas as funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mensuráveis, tais que as integrais

$$\int f^+ d\mu \text{ e } \int f^- d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de  $f$  em relação a  $\mu$  por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

e se  $E$  é um conjunto mensurável

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Qualquer representação de  $f$  como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja  $f$  uma função integrável e escreva  $f$  como  $f = f_1 - f_2$ , onde  $f_1$  e  $f_2$  são funções integráveis não negativas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Como  $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ , segue que

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Da mesma forma que definimos uma medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exige o lema abaixo

**Lema 1.63.** Seja  $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ . A aplicação  $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de  $f$  (em relação a  $\mu$ ).

*Demonstração.* Como  $f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{D}, \mu)$ , pelo Corolário ?? temos que as funções  $\lambda^+, \lambda^- : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \text{ e } \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

são medidas em  $\mathfrak{D}$  e são finitas pelo fato de  $f$  ser uma função integrável. Como  $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$  temos que  $\lambda$  é uma carga.  $\square$

Como a aplicação  $\lambda$  definida acima é uma carga, vemos que se  $(E_n)$  é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ , então

$$\int_E f \, d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propriedades elementares das integrais de funções mensuráveis

**Teorema 1.64.** Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável. Então  $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  se, e somente se,  $|f| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ . Além disso

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu. \quad (1.3)$$

*Demonstração.* Seja  $f$  uma função integrável, mostremos que  $|f|$  também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+ \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu$$

é finita pois  $f$  é integrável, e

$$\int |f|^- \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$$

que é finita. Portanto  $|f|$  é integrável.

Reciprocamente, suponha que  $|f|$  é integrável, dessa forma

$$\begin{aligned} f^+ &\leq f^+ + f^- = |f| \\ f^- &\leq f^+ + f^- = |f| \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} \int f^+ \, d\mu &\leq \int |f| \, d\mu \\ \int f^- \, d\mu &\leq \int |f| \, d\mu \end{aligned}$$

ambas finitas pois  $|f|$  é integrável. Portanto  $f$  é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integrável e a desigualdade triangular.

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \left| \int f^+ \, d\mu \right| + \left| \int f^- \, d\mu \right| = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu$$

□

**Corolário 1.65.** Se  $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ ,  $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  e  $|f| \leq |g|$ , então  $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  e

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$$

*Demonstração.* Se  $g$  é integrável então pelo Teorema anterior  $|g|$  também o é. Além disso, como  $|f| \leq |g|$

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu,$$

como  $|g|$  é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de  $|f|$  também ser finita, ou seja,  $|f|$  é integrável e novamente pelo Teorema anterior,  $f$  é integrável.  $\square$

**Teorema 1.66.** Sejam  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$  e  $c \in \mathbb{R}$ , então  $cf, f + g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$  e

$$(a) \int cf d\mu = c \int f d\mu$$

$$(b) \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

*Demonstração.*

(a) Se  $c \geq 0$ . Note que  $(cf)^+ = cf^+$  e  $(cf)^- = cf^-$ . Dito isso

$$\int cf d\mu = \int cf^+ - cf^- d\mu$$

como  $cf^+$  e  $cf^-$  são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.55

$$\int cf d\mu = c \int f^+ - f^- d\mu = c \int f d\mu$$

Se  $c < 0$  a demonstração é análoga, basta perceber que  $(cf)^+ = -cf^-$  e  $(cf)^- = -cf^+$  ambas funções não negativas pois  $-c > 0$ .

(b) Sejam  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ , então pelo Teorema 1.64  $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ , como  $|f + g| \leq |f| + |g|$  temos que  $f + g$  é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde  $f^+ + g^+$  e  $f^- + g^-$  são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f + g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.57 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

**Teorema 1.67** (Teorema da Convergência Dominada). Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável  $f$ . Se existe uma função integrável  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  em quase toda parte, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f$  é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

*Demonstração.* Redefinindo as funções  $f_n$  e  $f$  no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo  $X$ . Note que

$$\lim |f_n| \leq g \implies |f| \leq |g|,$$

como por hipótese  $f$  é mensurável e  $g$  é integrável, segue pelo Corolário 1.65 que  $f$  é integrável. Além disso, como  $-g \leq f_n \leq g$  temos que  $g + f_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.64 temos que

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu \\ &= \int (g + \lim f_n) d\mu \\ &= \int \lim (g + f_n) d\mu \\ &= \int \liminf (g + f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu \\ &= \liminf \left( \int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

que implica em

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \quad (1.4)$$

Por outro lado,  $g - f_n \geq 0$ , de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad (1.5)$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

isto é<sup>1</sup>

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  onde a aplicação  $x \mapsto f(x, t)$  é mensurável para todo  $t \in [a, b]$ .

<sup>1</sup> $\limsup x_n \leq x \leq \liminf x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

**Corolário 1.68.** Suponha que para algum  $t_0 \in [a, b]$ , tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t),$$

para cada  $x \in X$  e que existe uma função integrável  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x, t)| \leq g(x)$ , para todo  $x \in X$  e  $t \in [a, b]$ . Então

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

*Demonstração.* Seja  $t_n$  uma sequência em  $[a, b]$  que converge para  $t_0$  e considere a sequência  $(f_n)$  dada por  $f_n(x) = f(x, t_n)$ . Então como  $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$  com  $g$  integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \int f(x, t_0) d\mu(x) &= \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) \\ &= \int \lim f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim \int f(x, t_n) d\mu(x) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

**Corolário 1.69.** Se a aplicação  $t \mapsto f(x, t)$  for contínua em  $[a, b]$  para cada  $x \in X$ , e se existir uma função integrável  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x, t)| \leq g(x)$  para todo  $x \in X$  e  $t \in [a, b]$ . Então a função  $F$  dada por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é contínua.

*Demonstração.* Mostremos que  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$ . Com efeito

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

□

**Corolário 1.70.** Suponha que para algum  $t_0 \in [a, b]$ , a função  $x \rightarrow f(x, t_0)$  seja integrável em  $X$ , que  $\partial_t f$  existe em  $X \times [a, b]$  e que existe uma função integrável  $g$  em  $X$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo  $x \in X$  e  $t \in [a, b]$ . Então a função  $F$  definida por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é diferenciável em  $[a, b]$  e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

*Demonstração.* Seja  $(t_n)$  uma sequência em  $[a, b]$  que converge para  $t$ , com  $t \neq t_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo  $x \in X$ . Desde modo a função  $x \mapsto \partial f / \partial t(x, t)$  é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja  $x \in X$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $s_0$ , entre  $t_0$  e  $t$  tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left| f(x, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right|$$

Como  $f$  é mensurável e a aplicação  $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0| |\partial f / \partial t(x, s_0)|$  é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.65 temos que  $f$  é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo  $x \in X$ . Consequentemente

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| < g(x)$$

para valores de  $n$  suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. □



## 1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue  $\mathcal{L}^p$ , que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências  $p$ -ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

**Proposição 1.71.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. A aplicação  $N_\mu : \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso  $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$  em quase toda parte em  $X$ .

*Demonstração.* Note que

$$1. N_\mu(f) = \int |f| d\mu \geq \int 0 d\mu = 0.$$

$$2. N_\mu(\lambda f) = \int |\lambda f| d\mu = \int |\lambda| |f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$$

$$3. N_\mu(f + g) = \int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$$

Portanto  $N_\mu$  é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

**Observação:** Note que  $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  é um espaço vetorial com as operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Isto se deve ao fato que  $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$  é um subespaço vetorial do espaço de funções  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

Estamos interessados em transformar  $\mathcal{L}$  em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

**Definição 1.72.** Sejam  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são  $\mu$ -equivalentes ( $f \sim_\mu g$ ) se  $f \equiv g$  em quase toda parte em  $X$ .

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{[f] ; f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) ; g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  ou espaço das funções somáveis. Esse espaço, munido das operações

$$\begin{aligned}[f] + [g] &= [f + g] \\ [\lambda f] &= \lambda[f]\end{aligned}$$

para todo  $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um espaço vetorial.

**Proposição 1.73.** Seja  $(X, \mathfrak{F}, \mu)$  um espaço de medida. A aplicação  $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$$

para todo  $[f] \in \mathcal{L}^1$  é uma norma

*Demonstração.* Note que apenas precisamos mostrar que  $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$ , pois as outras propriedades são análogas à demonstração da Proposição 1.71. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto  $\|\cdot\|_1$  é uma norma e  $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$  é um espaço vetorial normado.  $\square$

No restante do texto, adotaremos a notação  $[f] = f$ , ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com os seus representantes.

**Definição 1.74.** Seja  $1 \leq p < \infty$  um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{F}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável, } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^p$ .

Nosso intuito agora é mostrar que  $\mathcal{L}^p$  é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que  $\|\cdot\|_p$  é uma norma em  $\mathcal{L}^p$ .

**Teorema 1.75** (Desigualdade de Young). Sejam  $A, B \geq 0$ ,  $1 \leq p < \infty$  e  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados<sup>a</sup>. Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se,  $A^p = B^q$ .

<sup>a</sup> $p$  e  $q$  são ditos expoentes conjugados se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in (0, 1)$  e defina  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Note que  $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$ . Dessa forma

- $t \in (0, 1)$  então  $\varphi'(t) < 0$  pois  $t^{\alpha-1} > 1$  e então  $1 - t^{\alpha-1} < 0$
- $t \in (1, \infty)$  então  $\varphi'(t) > 0$  pois  $t^{\alpha-1} < 1$  e então  $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que  $\varphi$  é decrescente em  $(0, 1)$  e crescente em  $(1, \infty)$ . Ou seja, como  $\varphi$  é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso  $\varphi(t) \geq \varphi(1)$  para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi(t) = \varphi(1)$  se, e somente se,  $t = 1$ . Assim

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) \implies \alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1 \implies t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

Sejam  $a, b > 0$ , então para  $t = \frac{a}{b}$  temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por  $b$ , encontramos

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se  $t = 1$ , isto é  $a = b$ . Agora considere que  $\alpha = \frac{1}{p} \in (0, 1)$ , ou seja,  $1 < p < \infty$ . Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b,$$

e por hipótese  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Logo

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo  $a = A^p$  e  $b = B^q$ , temos o resultado desejado

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando  $A^p = B^q$ . □

**Teorema 1.76** (Desigualdade de Hölder). Sejam  $f \in \mathcal{L}^p$  e  $g \in \mathcal{L}^q$  onde  $1 \leq p < \infty$  e  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados. Então  $fg \in \mathcal{L}^1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

*Demonstração.* Se  $\|f\|_p = 0$  ou  $\|g\|_q = 0$  então  $f \equiv 0$  qtp em  $X$  ou  $g \equiv 0$  qtp em  $X$ . Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que  $\|f\|_p \neq 0$  e  $\|g\|_q \neq 0$ . Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \text{ e } B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q}. \quad (1.6)$$

Como  $f \in \mathcal{L}^p$  e  $g \in \mathcal{L}^q$ , então  $|f|^p$  e  $|g|^q$  são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.65

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto  $|fg|$  é integrável, isto é,  $fg \in \mathcal{L}^1$ .

Por fim, integrando (1.6) com respeito a  $\mu$ , chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} d\mu \leq \int \left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}\right) d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int |g|^q d\mu.$$

Pela definição da norma em  $\mathcal{L}^p$  segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queríamos demonstrar. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando  $p = q$ , o que acontece apenas quando  $p = q = 2$ .

**Corolário 1.77** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se  $f, g \in \mathcal{L}^2$ , então  $fg \in \mathcal{L}^1$  e

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq \int |f|^2 d\mu \int |g|^2 d\mu$$

*Demonstração.* A primeira desigualdade é o Teorema 1.64 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

**Teorema 1.78** (Desigualdade de Minkowski). Se  $f, g \in \mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ , então  $f + g \in \mathcal{L}^p$  e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

*Demonstração.* Na Proposição 1.71 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para  $p = 1$ . Dito isso, seja  $1 < p < \infty$ . Como  $f, g \in \mathcal{L}^p$ , então  $f$  e  $g$  são mensuráveis. Dessa forma,  $f + g$  também é mensurável. Mostremos agora que  $f + g \in \mathcal{L}^p$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\ &\leq 2^p(|f|^p + |g|^p). \end{aligned}$$

Daí

$$\int |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int (|f|^p + |g|^p) d\mu \leq 2^p \left( \int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right)$$

que é uma integral finita. Portanto  $f + g \in \mathcal{L}^p$ .

Também é fácil ver que

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Agora, seja  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Daí  $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$ . De fato,

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q^q = \int |f + g|^{q(p-1)} d\mu = \int |f + g|^p < \infty \quad (1.7)$$

pois  $f + g \in \mathcal{L}^p$ . Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f| |f + g|^{p-1} d\mu = \| |f| + |f + g|^{p-1} \|_1 \leq \| |f| \|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.8)$$

Analogamente

$$\int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.9)$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \\ &\leq \int |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Se  $\|f + g\|_p = 0$ , então

$$\|f + g\|_p = 0 \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que  $\|f + g\|_p \neq 0$  para obter

$$\frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f + g\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados, segue que  $p - \frac{p}{q} = 1$ . Portanto

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para  $1 \leq p < \infty$ . □

Agora, vamos provar que  $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$  é um espaço vetorial normado para  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposição 1.79.** A aplicação  $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

*Demonstração.* Note que

1.  $\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$  pois  $|f| \geq 0$ .
2.  $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ (} f \sim_\mu 0 \text{)}$
3.  $\|\lambda f\|_p = \left( \int |\lambda f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int |\lambda|^p |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( |\lambda|^p \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$
4.  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto  $\|\cdot\|_p$  é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que  $\mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$  é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

**Definição 1.80.** Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $\mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que  $(f_n)$  é de Cauchy se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo  $n, m \geq n_0$

**Definição 1.81.** Sejam  $(f_n)$  uma sequência em  $\mathcal{L}^p$  e  $f \in \mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que  $(f_n)$  é convergente e converge para  $f$  se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$$

para todo  $n \geq n_0$ . Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

**Definição 1.82.** Um espaço métrico  $(X, d)$  é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

**Teorema 1.83** (Teorema de Riesz-Fischer).  $\mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}^p$ . Mostremos que  $(f_n)$  é convergente. Com efeito, sabemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo  $n, m \geq n_0$ . Escolhendo  $\varepsilon$  de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n} \tag{1.10}$$

Defina  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que  $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ , pois  $g \geq 0$  e

$$g = |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n|$$

isto é,  $g$  é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis ( $f_n$  é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que  $g \in \mathcal{L}^p$ . De fato

$$\int |g|^p d\mu = \int g^p d\mu,$$

pois  $g \geq 0$ . Pela definição de  $g$  temos

$$\int g^p d\mu = \int \left( |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left( |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \left( |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em  $\mathcal{L}^p$  e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^k \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leq \left( \|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right)^p < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p d\mu < \infty.$$

Portanto,  $g \in \mathcal{L}^p$ . Agora seja,  $E = \{x \in X; g(x) < \infty\} \in \mathfrak{D}$ . Dito isso,  $N = E^c = \{x \in X; g(x) = \infty\} \in \mathfrak{D}$ . Mostremos que  $N$  tem medida nula. Com efeito, suponha que  $\mu(N) > 0$ , dessa forma

$$\int_X |g|^p \geq \int_N |g|^p = \infty \mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois  $g \in \mathcal{L}^p$ . Dessa forma  $\mu(N) = 0$ , isto é,  $g < \infty$  em quase toda parte em  $X$ . Sendo assim, defina  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que  $f \in \mathcal{L}^p$ . Note que

$$f(x) = \left( f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| \chi_E \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente,  $|f|^p < g^p$ . Logo

$$\int |f|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty.$$

Portanto,  $f \in \mathcal{L}^p$ . Por outro lado, para todo  $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= f_1(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Como  $\mu(N) = 0$ , então  $\lim f_n = f$  em quase toda parte em  $X$ . É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \quad (1.11)$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $g \in \mathcal{L}^p$ , então  $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$ . Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left( \int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p d\mu = 0$$

Isto prova que  $\mathcal{L}^p$  é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue,  $\mathcal{L}^\infty$  explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

**Definição 1.84.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^\infty$ . Para cada  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , definimos

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in X\} = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que  $f$  é uma função essencialmente limitada.

**Observação:** Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

isto segue da seguinte equivalência



$$|f(x)| \leq M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato,  $|f(x)| \leq M$  em quase toda parte em  $X$  se, e somente se, existe  $N \in \mathfrak{D}$  tal que  $\mu(N) = 0$  e  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in N^c$ . Note que  $\{x \in X; |f(x)| > M\} \subseteq N$ , dessa forma

$$\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) \leq \mu(N) = 0$$

Portanto,  $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$ .

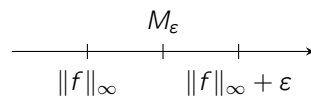
Reciprocamente, se  $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$ , então  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in \{|f(x)| > M\}^c$ , isto é,  $|f(x)| \leq M$  em quase toda parte em  $X$ .

**Proposição 1.85.** Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo  $f \in \mathcal{L}^\infty$

*Demonstração.* Se  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , então existe  $M \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  em quase toda parte em  $X$ . Daí, como  $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geq 0; |f(x)| \leq M_0 \text{ qtp em } X\}$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$  conseguimos encontrar  $M_\varepsilon \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M_\varepsilon$  em quase toda parte em  $X$ .



Como  $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$ , então

$$|f(x)| \leq M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  chegamos a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que  $\mathcal{L}^\infty$  é um espaço vetorial normado

**Proposição 1.86.** A aplicação  $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

*Demonstração.* Note que

1.  $\|f\|_\infty \geq 0$  pois 0 é cota inferior de  $\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$ .
2.  $\|f\|_\infty = 0$ , assim dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M_\varepsilon \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M_\varepsilon$  em quase toda parte em  $X$ , com  $M_\varepsilon < \varepsilon$ . Daí,  $|f(x)| < \varepsilon$  em quase toda parte em  $X$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , encontramos

$$|f(x)| \leq 0 \text{ qtp em } X$$

Dessa forma,  $f(x) = 0$  em quase toda parte em  $X$ .

Reciprocamente,  $\|0\|_\infty = \inf\{M \geq 0; 0 \leq M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3.  $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em  $\mathcal{L}^\infty$ ) Se  $f, g \in \mathcal{L}^\infty$  então as funções são limitadas em quase toda parte em  $X$ , dito isso,  $f + g$  também é limitada em quase toda parte em  $X$ . Logo  $f + g \in \mathcal{L}^\infty$ .

Por outro lado, como  $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ , então existem  $M, \hat{M} \in \mathfrak{D}$  tais que  $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$  e  $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$  para todo  $x \notin M$  e  $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$  para todo  $x \notin \hat{M}$ . Seja  $N = M \cup \hat{M} \in \mathfrak{D}$ . Daí  $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leq \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$ . Além disso

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo  $x \notin N$ , com  $\mu(N) = 0$ . Dessa forma

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto,  $\|\cdot\|_\infty$  é uma norma. □

**Proposição 1.87** (Desigualdade de Hölder em  $\mathcal{L}^\infty$ ). Seja  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida. Se  $f \in \mathcal{L}^1$  e  $g \in \mathcal{L}^\infty$ , então  $fg \in \mathcal{L}^1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

*Demonstração.* Note que se  $g \in \mathcal{L}^\infty$  então  $|g| \leq \|g\|_\infty$  em quase toda parte em  $X$ . Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = \int |f| |g| d\mu \leq \int |f| \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que  $\mathcal{L}^\infty$  também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

**Teorema 1.88** (Teorema de Riesz-Fischer).  $\mathcal{L}^\infty$  é um espaço completo

*Demonstração.* □

Agora vamos construir os espaços  $\ell^p$  que são um caso particular dos espaços  $\mathcal{L}^p$

**Exemplo 1.89.** Sejam  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  e  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$  dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

...

**Observação:** Denotamos o espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  por  $\ell^p$

**Exemplo 1.90.**  $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \dots$

Vejam mais algumas propriedades importantes dos espaços  $\mathcal{L}^p$

**Proposição 1.91.** Sejam  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida e  $0 < p < q < r \leq \infty$ . Então

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$$

*Demonstração.* ... □

**Teorema 1.92** (Desigualdade de Interpolação). Sejam  $(X, \mathfrak{D}, \mu)$  um espaço de medida e  $0 < p < q < r \leq \infty$ . Então  $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{L}^q$  e

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde  $\lambda \in (0, 1)$  e

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \quad \left( \text{i.e., } \lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \right) \quad (1.12)$$

*Demonstração.* Consideremos dois casos

–  $r = \infty$  Note que

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q} \in (0, 1)$$

Além disso, se  $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$ , tem-se que

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q d\mu = \int |f|^{q-p} |f|^p d\mu \leq \int \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p < \infty.$$

Com isso  $f \in \mathcal{L}^q$  e ainda mais

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e como  $\lambda = \frac{p}{q}$ , segue que

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

–  $r < \infty$  Note que multiplicando (1.12) por  $q$ , temos

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1.$$

Com isso,  $\frac{p}{\lambda q}$  e  $\frac{r}{(1-\lambda)q}$  são expoentes conjugados. Dito isso, aplicando a Desigualdade de Hölder com  $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$  temos que

$$\begin{aligned} \int |f|^q d\mu &= \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q} d\mu \\ &= \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \\ &\leq \| |f|^{\lambda q} \|_{\frac{p}{\lambda q}} \| |f|^{(1-\lambda)q} \|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\ &= \left( \int |f|^{\lambda q \cdot \frac{p}{\lambda q}} \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left( \int |f|^{(1-\lambda)q \cdot \frac{r}{(1-\lambda)q}} \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \left( \int |f|^p \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left( \int |f|^q \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Daí,  $f \in \mathcal{L}^q$ . Além disso

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim, mostrada a desigualdade de interpolação. □

**Proposição 1.93.** Sejam  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  um espaço de medida com  $\mu(X) < \infty$  e  $0 < p < q \leq \infty$ . Então  $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$  e

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

*Demonstração.* ... □

**Teorema 1.94** (Desigualdade de Chebyshev). Sejam  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $f \in \mathcal{L}^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então

$$\|f\|_p \geq \alpha [\mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\})]^{\frac{1}{p}}$$

para todo  $\alpha > 0$ .

*Demonstração.* ... □

Agora vamos ver um resultado sobre os espaços  $\ell^p$

**Proposição 1.95.** Sejam  $0 < p < q \leq \infty$ . Então  $\ell^p \subseteq \ell^q$  e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

*Demonstração.* Consideremos dois casos

–  $q = \infty$

Seja  $x \in \ell^p$ . Então  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ . É fácil ver que

$$|x_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é,  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$  é cota superior de  $x = (x_n)$ . Dito isso

$$\|x\|_q = \|x\|_{\infty} = \sup |x_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo  $x \in \ell^q$  e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

–  $q < \infty$

Utilizando a Desigualdade de Interpolação com  $r = \infty$  e  $\lambda = \frac{p}{q} \in (0, 1)$  para obter que  $\ell^p = \ell^p \cap \ell^r \subseteq \ell^q$  (pelo caso  $q = \infty$ ) e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\infty}^{1 - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_p^{1 - \frac{p}{q}} = \|x\|_p.$$

Assim, demonstrada a proposição. □

Os proximos resultados estão relacionados a densidade das funções simples em  $\mathcal{L}^p$  e  $\mathcal{L}^{\infty}$

**Definição 1.96.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Um conjunto  $E \subseteq X$  é dito denso em  $X$  se todo ponto de  $X$  é aderente a  $E$ . Isto é, dado  $x \in X$  existe uma sequência  $(x_n)$  de elementos de  $E$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

**Teorema 1.97.** Seja  $1 \leq p < \infty$ . O conjunto das funções simples  $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$  com  $\mu(E_j) < \infty$  para todo  $j = 1, \dots, n$  é denso em  $\mathcal{L}^p$

*Demonstração.* Considere o conjunto

$$Y = \left\{ f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} ; \mu(E_j) < \infty \right\}.$$

Note que dada uma função  $f \in Y$  temos que

$$\int |f|^p d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \right|^p d\mu = \int \sum_{j=1}^n |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(E_j) < \infty.$$

Isto é,  $f \in \mathcal{L}^p$ . Consequentemente  $Y \subseteq \mathcal{L}^p$ .

Por outro lado, seja  $f \in \mathcal{L}^p$  sabemos que  $f = f^+ - f^-$  onde  $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ . Além disso pelo Lema ?? temos que existem seqüências  $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$  de funções simples em  $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$  tais que

$$0 \leq \varphi_n^\pm \leq \varphi_{n+1}^\pm \text{ e } \varphi_n^\pm \rightarrow f^\pm.$$

É fácil ver que  $(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$  é uma seqüência de funções simples tal que

$$\lim(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \lim \varphi_n^+ + \lim \varphi_n^- = f^+ - f^- = f.$$

Seja  $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , assim  $(\varphi_n)$  é uma seqüência de funções simples tal que  $\varphi_n \rightarrow f$ . Perceba que

$$|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leq f^+ + f^- = |f|,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f \in \mathcal{L}^p$ , então

$$\int |\varphi_n|^p d\mu \leq \int |f|^p d\mu < \infty,$$

ou seja,  $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{L}^p$ . Consequentemente, denotando  $\varphi_n$  por

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j \chi_{E_j}$$

segue que

$$|a_j|^p \mu(E_j) \leq \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \mu(E_j) = \int \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \int |\varphi_n|^p d\mu < \infty.$$

Isto nos diz que  $\mu(E_j) < \infty$  para todo  $j = 1, \dots, m_n$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $(\varphi_n) \subseteq Y$ . Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \|\varphi_n - f\|_p^p = \lim \int |\varphi_n - f|^p d\mu = \int \lim |\varphi_n - f|^p d\mu = 0$$

pois

$$\lim \varphi_n = f \text{ e } |\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto  $Y$  é denso em  $\mathcal{L}^p$ , já que dada uma função  $f \in \mathcal{L}^p$ , encontramos uma seqüência em  $Y$  que converge para  $f$ .  $\square$

**Teorema 1.98.** O conjunto das funções simples é denso em  $\mathcal{L}^\infty$ .

*Demonstração.*

□

O proximos resultados são uma generalização da Desigualdade de Hölder

**Lema 1.99.** Sejam  $0 < p, q \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ,  $f \in \mathcal{L}^p$  e  $g \in \mathcal{L}^q$ . Então  $fg \in \mathcal{L}^r$  e

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

*Demonstração.* ...

□

**Proposição 1.100** (Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam  $0 < p_1, \dots, p_N \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N}$  e  $f = f_1 f_2 \dots f_N$  onde  $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$  para todo  $j = 1, \dots, N$ . Então  $f \in \mathcal{L}^p$  e

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_N\|_{p_N}$$

*Demonstração.* Segue por indução do lema anterior.

□

# CAPÍTULO DOIS

## ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev, suas principais propriedades.

### 2.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo

**Definição 2.1.** Seja  $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Definimos o suporte de  $\varphi$  por

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\}}$$

Além disso, se  $\text{supp } \varphi$  é compacto, dizemos que  $\varphi$  tem suporte compacto.

Note que  $\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp } \varphi$ , então  $(\text{supp } \varphi)^c \subseteq \{x \in \Omega ; \varphi(x) = 0\}$ . Ou seja se  $x \notin \text{supp } \varphi$ , então  $\varphi(x) = 0$ . Além disso, se  $\Omega$  é um aberto, então  $\varphi$  se anula em  $\partial\Omega$ .

**Definição 2.2.** Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos o espaço das funções com a  $k$ -ésima derivada contínua por

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é contínua, } f^{(k)} \text{ existe e é contínua}\}$$

**Observação:** O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

**Definição 2.3.** O conjunto das funções  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de  $\Omega$  é denotado por  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$

A definição abaixo será amplamente utilizada nesse capítulo

**Definição 2.4.** O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em  $\Omega$  é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \text{supp } f \text{ é compacto}\}$$

Além disso definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

que é o conjunto das funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  com suporte compacto.

Os resultados abaixo são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

**Teorema 2.5** (Integração por partes em  $\mathbb{R}^n$ ). Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  uma região regular e  $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Então

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

onde  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  é o vetor normal unitário que aponta pra dentro em  $\partial\Omega$ .

*Demonstração.* [1] □

**Teorema 2.6.** (coordenadas polares) . . .

## 2.2 Motivação

### 2.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

**Definição 2.7.** Sejam  $I$  um intervalo aberto, possivelmente ilimitado e  $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I)$ . Dizemos que  $v$  é a derivada fraca de  $u$ , se

$$\int_I u \phi' dx = - \int_I v \phi dx$$

para todo  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ .

Denotamos  $u' = v$  e diremos  $v$  é a derivada de  $u$  no sentido fraco.

**Observação:** Aqui, utilizamos a notação  $dx$  ao invés de  $d\mu$  na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue, suas integrais se coincidem.

**Observação:** (função teste)

**Exemplo 2.8.** A função  $u : I = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é derivável no sentido usual. Já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(1+h)}{h} = 1 \neq 0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(1+h)}{h}.$$



Porem, possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$  temos

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi \Big|_1^2.$$

Como  $\phi$  tem suporte compacto,  $\phi(0) = \phi(2) = 0$ . Assim

$$\int_0^2 u\phi' dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) = - \int_0^1 \phi dx$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral.

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \left( \int_0^1 1\phi dx - \int_1^2 0\phi dx \right) = - \int_0^2 v\phi dx$$

Portanto,  $v$  é a derivada de  $u$  no sentido fraco.

**Exemplo 2.9.** A função  $u : I = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possui derivada fraca. Mostremos que  $u'$  não existe no sentido fraco. Isto é, mostrar que não existe uma função  $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I)$  que satisfaz

$$\int_I u\phi' dx = - \int_I v\phi dx.$$

para toda função  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ . Com efeito, suponha o contrário

$$- \int_0^2 v\phi dx = \int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + 2 \int_1^2 \phi' dx = \int_0^1 \phi dx - \phi(1).$$

Seja  $(\phi_n)$  uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leq \phi_n \leq 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \rightarrow 0 \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando  $\phi(1)$ , substituindo  $\phi$  por  $\phi_n$  e fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[ \int_0^2 v\phi_n dx - \int_0^1 \phi_n dx \right] = 0$$

pois pelo Teorema da Convergência Dominada,  $\phi_n \rightarrow 0$  qtp em  $I$  Portanto  $u$  não possui derivada fraca.

Com a noção de derivada fraca, estamos prontos para definir os espaços de Sobolev  $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

**Definição 2.10.** Seja  $I$  um intervalo aberto, possivelmente ilimitado. Definimos o espaço de Sobolev  $\mathcal{W}^{1,p}(I)$  por

$$\mathcal{W}^{1,p} = \{u \in \mathcal{L}^p; u' \in \mathcal{L}^p\}$$

onde  $u'$  é a derivada de  $u$  no sentido fraco

## 2.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é definir a derivada fraca de ordem superior, generalizar os espaços da seção anterior para funções definidas em um aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$  e explorar algumas propriedades elementares.

Seja  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , então se  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , utilizando integração por partes em  $\mathbb{R}^n$  temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu_i dS - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (i = 1, \dots, n)$$

Como  $\phi$  tem suporte compacto e  $\Omega$  é um aberto, segue que  $\phi$  se anula em  $\partial\Omega$ , como mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

Além disso, se  $u$  for de classe  $\mathcal{C}^k$  com  $k \in \mathbb{N}$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  um multi-índice de ordem  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ , então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi. \quad (2.2)$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (2.1)  $|\alpha|$  vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (2.2) ainda é válida, mesmo se  $u$  não for de classe  $\mathcal{C}^k$ . Note que o lado esquerdo de (2.1) está bem definido se  $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . O problema é que se  $u$  não é uma função de classe  $\mathcal{C}^k$  então o lado direito de (2.1) não faz sentido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função  $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  tal que (2.1) é válida quando substituímos  $D^\alpha u$  por  $v$ .

**Definição 2.11** (Derivada fraca em  $\Omega$ ). Sejam  $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice. Dizemos que  $v$  é a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca de  $u$ , denotada por

$$D^\alpha u = v$$

dado que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi d\mu. \quad (2.3)$$

para toda função de teste  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Isto é, se dado uma função  $u$  e existe uma função  $v$  que satisfaz (2.3) para toda  $\phi$  função de teste, dizemos que  $D^\alpha u = v$  no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função  $v$  que satisfaz (2.3), então  $u$  não possui a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é a sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

**Lema 2.12.** Sejam  $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  e  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Então

$$\int_{\Omega} u \phi = 0$$

se, e somente se  $u \equiv 0$  qtp em  $\Omega$

*Demonstração.*

□

**Proposição 2.13.** Seja  $\alpha$  um multi-índice. Se  $v$  e  $\tilde{v}$  são ambas  $\alpha$ -ésimas derivadas parciais fracas de uma função  $u$ . Então

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

*Demonstração.* Sejam  $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$  tais que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi \, dx$$

para toda  $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ . Daí

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0$$

isto é

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto  $v = \tilde{v}$  qtp em  $\Omega$ .

□

**Exemplo 2.14.** Considere a função  $u$  do exemplo 2.8, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

é a derivada de  $u$  no sentido fraco. Porém a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porém  $v$  e  $\tilde{v}$  são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois  $\{1\}$  é finito, logo tem medida nula.

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ .

**Definição 2.15.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto. Definimos o espaço de Sobolev  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega); \text{ existem } g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mu = - \int_{\Omega} g_i \phi \, d\mu \right\}$$

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ , indutivamente, e pela derivada fraca, veremos as duas e mostraremos que são equivalentes

**Definição 2.16.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto. Definimos o espaço de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}$$

com  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Ou

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1\}$$

onde  $D^\alpha u$  é a  $\alpha$ -ésima derivada parcial de  $u$  no sentido fraco.

**Observação:** Quando  $p = 2$ , a notação  $H^k(\Omega)$  é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço  $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

onde

$$\langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

**Definição 2.17.** O espaço  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para  $1 \leq p < \infty$  e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$$

para  $p = \infty$ .

**Observação:** Dizemos que uma sequência  $(u_n)$  converge para  $u$  em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por  $u_n \rightarrow u$  em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ . Além disso dizemos que  $(u_n)$  converge para  $u$  em  $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$  se  $u_n$  converge para  $u$  em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$  para todo conjunto aberto  $\Omega'$  compactamente contido em  $\Omega$ , isto é  $\Omega' \subseteq \Omega$  e  $\overline{\Omega'}$  é compacto. Essa inclusão será denotada por  $\Omega' \Subset \Omega$ .

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Isso será feito após o Teorema 2.19 sobre as propriedades da derivada fraca necessárias para verificar que  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$  satisfaz a definição de norma.

**Observação:** Essa não é a única forma de definir uma norma em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ , a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo a norma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

com  $1 \leq p \leq \infty$ , e a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$  é equivalente a

$$\max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

**Exemplo 2.18.** Seja  $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$  a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$x \mapsto |x|^{-\alpha}.$$

Para quais valores de  $\alpha > 0$ ,  $n$  e  $p$ ,  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ . Primeiramente, note que  $u$  é suave fora de  $\mathbf{0}$  com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left( \frac{-\alpha x_1}{|x|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{|x|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  e fixe  $\varepsilon > 0$ . Por integração por partes, temos

$$\int_{\Omega \setminus B[0, \varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega \setminus B[0, \varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B[0, \varepsilon]} u \phi \nu_i dS$$

onde  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  denota o vetor normal que aponta para dentro em  $\partial B[0, \varepsilon]$ . Agora se  $\alpha + 1 < n$ ,  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ . De fato, integrando  $Du$ , temos

$$\int_{\Omega} |Du| dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx.$$

Transformando em coordenadas polares, conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dS dr.$$

Onde a integral de superfície, é igual a área da esfera  $n$ -dimensional de raio  $r$ , dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

que por simplicidade, vamos denotar por  $\sigma(n)r^{n-1}$ . Dessa forma

$$\int \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2} dr = \sigma(n) \left( \frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que se  $n - \alpha - 1 < 0$  então  $0^{n-\alpha-1} = \infty$ . Sendo assim

$$\int_{\Omega} |Du| dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  desde que  $\alpha + 1 < n$ . Nesse caso

$$\left| \int_{\partial B[0, \varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq \int_{\partial B[0, \varepsilon]} |u| |\phi| |\nu_i| dS \leq \|\phi\|_{\infty} \int_{\partial B[0, \varepsilon]} |u| dS \leq \|\phi\|_{\infty} \int_{\partial B[0, \varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha} dS,$$

onde essa última integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0, \varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq C \varepsilon^{n-1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para toda  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , desde que  $0 < \alpha < n - 1$ . Além disso,  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  se, e somente se,  $(\alpha + 1)p < n$ , esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando  $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ . Consequentemente,  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  se, e somente se  $\alpha < \frac{n-p}{p}$ . Em particular  $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  quando  $p \geq n$ .

**Teorema 2.19** (Propriedades da derivada fraca). Seja  $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice com  $1 \leq |\alpha| \leq k$ . Então

(a)  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$  para todos multi-índices  $\alpha$  e  $\beta$  com  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .

(b)  $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  e

$$D^\alpha(\gamma u + v) = \gamma D^\alpha u + D^\alpha v$$

(d) se  $\Omega_0$  é um aberto de  $\Omega$ , então  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$

(e) se  $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ , então  $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \quad (2.4)$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e  $\sigma \leq \alpha$  significa  $\sigma_j \leq \alpha_j$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ .

*Demonstração.*

(a) Mostremos que  $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ . A demonstração para  $D^\alpha D^\beta u$  é análoga. Com efeito

$$\int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx.$$

Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de  $\phi$  ser uma função infinitamente diferenciável, então o operador  $D^\alpha$  é a  $\alpha$ -ésima derivada parcial no sentido usual. Dessa forma  $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ . Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca obtemos

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto  $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$  no sentido fraco.

(b) Suponha que  $D^\alpha u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ , então existe um multi-índice  $\beta$  com  $|\beta| \leq k - |\alpha|$  tal que  $D^\beta(D^\alpha u) \notin \mathcal{L}^p$ . Pelo item anterior temos que  $D^{\alpha+\beta} u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$ , o que é uma contradição, pois por hipótese  $D^\gamma u \in \mathcal{L}^p$  para todo multi-índice  $\gamma$  com  $|\gamma| \leq k$ . Em particular como  $|\beta| \leq k - |\alpha|$ , tem-se  $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leq k$ . Portanto  $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ .

(c) Note que

$$\int_{\Omega} (\gamma u + v) D^\alpha \phi \, dx = \int_{\Omega} \gamma u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \gamma \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas integrais obtemos

$$\gamma \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \gamma (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha v \, dx = \int_{\Omega} (\gamma D^\alpha u + D^\alpha v) \phi \, dx$$

Portanto  $D^\alpha(\gamma u + v) = \gamma D^\alpha u + D^\alpha v$  no sentido fraco.

(d) Seja  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  um aberto, queremos verificar que  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$ . De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega_0} |u|^p \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_0} |D^\alpha u|^p \, dx \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k)$$

são finitas. De fato

$$\int_{\Omega_0} |u|^p dx \leq \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega_0} |D^\alpha u|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx < \infty \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k),$$

ambas pelo fato de  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ . Assim  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$ .

**(e)** Para mostrar que (2.4) é válida, utilizaremos indução sobre  $|\alpha|$ . Com efeito para  $|\alpha| = 1$ , como  $\eta$  e  $\varphi$  são funções infinitamente diferenciáveis no sentido usual, temos que  $D^\alpha(\eta\varphi) = \varphi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \varphi$ . Dessa forma

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \varphi dx = \int_{\Omega} u D^\alpha(\eta\varphi) - \int_{\Omega} u \varphi D^\alpha \eta dx.$$

Como  $\eta$  e  $\varphi$  tem suporte compacto, então  $D^\alpha(\eta\varphi)$  também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral obtemos

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \varphi dx = - \int_{\Omega} \eta \varphi D^\alpha u dx - \int_{\Omega} u \varphi D^\alpha \eta dx = - \int_{\Omega} (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta) \varphi dx.$$

Portanto  $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$  como queríamos mostrar.

Agora seja  $m < k$  e suponha que (2.4) é válida para todo multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq l$  e toda função de teste  $\eta$ . Considere um multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| = m + 1$ . Então  $\alpha$  é da forma  $\alpha = \beta + \gamma$  com  $|\beta| = m$  e  $|\gamma| = 1$ . Daí

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \varphi dx = \int_{\Omega} \eta u D^{\beta+\gamma} \varphi dx = \int_{\Omega} \eta u D^\beta (D^\gamma \varphi) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^\beta(\eta u) D^\gamma \varphi dx.$$

Como  $|\beta| = m$  podemos utilizar a hipótese de indução em  $D^\beta(\eta u)$  e a  $\gamma$ -ésima derivada fraca. Assim

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \varphi dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \left[ \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \right] \varphi dx$$

Além disso, como  $|\gamma| = 1$ , podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[ \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} (D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u) \right] \varphi dx \quad (2.5)$$

onde  $\rho = \sigma + \gamma$ . Note que podemos escrever o somatório dentro da integral da seguinte forma

$$\sum_{\gamma \leq \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u$$

que ainda pode ser expandido em quatro somatórios

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\beta < \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ & + \sum_{0 \leq \sigma < \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Porem, note que  $0 \leq \sigma < \gamma$  implica em  $\sigma = 0$ . Com efeito,  $0 \leq \sigma$  significa que  $0 \leq \sigma_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  e  $\sigma < \gamma$  significa que existe um  $i = 1, \dots, n$  tal que  $\sigma_i < \gamma_i$ . Como  $|\gamma| = 1$ , suponha sem perda de generalidade que  $\gamma = e_1$ . Dessa forma, para  $i = 1$

$$0 \leq \sigma_1 < 1$$

como  $\sigma_i \in \mathbb{N}$  segue que  $\sigma_1 = 0$ . Por outro lado, para  $i = 2, \dots, n$

$$0 \leq \sigma_i < 0$$

que implica em  $\sigma_i = 0$ . Portanto  $\sigma = 0$ . Da mesma forma  $\beta < \rho \leq \alpha$  implica em  $\rho = \alpha$ . Assim, (2.6) pode ser escrito da seguinte forma

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^\alpha \eta. \quad (2.7)$$

Por fim, ao menos de uma mudança de variáveis, escrevemos (2.7) como

$$\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u.$$

Pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (2.5) temos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[ \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^\alpha (\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u$$

como queríamos mostrar.  $\square$

Com os resultados obtidos, é possível verificar que os espaços de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  formam um espaço de Banach.

**Teorema 2.20.**  $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$  com  $1 \leq p \leq \infty$  é um espaço vetorial normado.

*Demonstração.*

$$(1 \leq p < \infty)$$

1. Seja  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Daí

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff D^\alpha u = 0$$

para todo multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ . Em particular se  $\alpha = (0, \dots, 0)$ ,  $u = D^\alpha u = 0$ .

Por outro lado, se  $u = 0$ ,  $D^\alpha u = 0$  para todo multi-índice  $\alpha$ . Sendo assim  $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$ .

2. Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Daí

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha (\lambda u)\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\lambda D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = |\lambda|^p \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Portanto  $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ .



3. Sejam  $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ . Daí

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski em  $\ell^p$

$$\left( \sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ou seja,

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto,  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$  é uma norma em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$ .

( $p = \infty$ )

O caso  $p = \infty$  é análogo ao caso  $1 \leq p < \infty$ . □

**Teorema 2.21.**  $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$  com  $1 \leq p \leq \infty$  é completo

*Demonstração.* Seja  $(u_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Isto é, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo  $n, m > n_0$ . Note que

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p < \varepsilon^p$$

para todo  $n, m > n_0$ . Ou seja,  $(D^\alpha u_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ , que é um espaço completo (Teorema 1.83). Dito isso

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Em particular, se  $\alpha = (0, \dots, 0)$  denotamos  $D^\alpha u_n$  por  $u_n$  e  $u_\alpha$  por  $u$ . Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema da Convergência Dominada (e o teorema no livro do Brezis, ver pág e número) e utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx &= \int_{\Omega} \lim u_n D^\alpha \phi = \lim \int_{\Omega} u_n D^\alpha \phi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \lim D^\alpha u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi \, dx. \end{aligned}$$

Portanto  $D^\alpha u = u_\alpha$  e consequentemente  $u_n \rightarrow u$  em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$ .

Por outro lado, considere  $(u_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo  $n, m > n_0$ . Além disso

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo  $n, m > n_0$ . Isto nos diz que  $(D^\alpha u_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}^\infty$  que é um espaço completo (Teorema 1.88). Sendo assim

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^\infty(\Omega)$$

De forma análoga ao caso  $1 \leq p < \infty$ , mostramos que  $D^\alpha u = u_\alpha$  e portanto  $u_n \rightarrow u$  em  $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$ .  $\square$

## 2.5 Aproximações

Não é ideal ficar voltando o tempo todo à definição de derivadas fracas. Para explorar as propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev, precisamos de métodos sistemáticos para aproximar funções nesses espaços por funções mais suaves. A técnica de molificação, que envolve a convolução de uma função com uma molificadora suave e com suporte compacto, oferece essa ferramenta. Esse processo resulta em uma sequência de funções suaves que convergem para a função original nas normas de Sobolev, permitindo a aproximação de funções com regularidade fraca por funções suaves. As molificadoras são essenciais na teoria dos espaços de Sobolev, possibilitando o estudo de soluções fracas para equações diferenciais parciais e estabelecendo resultados importantes de densidade.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

conhecida como molificador de Friedrich, onde  $c > 0$  é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$  com suporte compacto satisfazendo.

...

Dada uma função molificadora, para cada  $\varepsilon > 0$  definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (2.9)$$

essa função  $\eta_\varepsilon$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\text{supp } \eta_\varepsilon \subseteq B[0, \varepsilon]$  e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1.$$

Essa função será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em  $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ . Se  $u$  é uma função localmente integrável, definimos a molificação de  $u$  por  $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ , isto é

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy = \int_{B[0,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(y) u(x-y) \, dy$$

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propriedades importantes sobre essas aproximações.

**Teorema 2.22** (Aproximação local por funções suaves). Seja  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$  e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ em } \Omega_\varepsilon$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então

(a)  $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$  para cada  $\varepsilon > 0$

(b)  $u^\varepsilon \rightarrow u$  em  $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$

*Demonstração.*

(a) Seja  $g(x) = (x - y)/\varepsilon$ , daí, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right).$$

Por outro lado, sejam  $x \in \Omega_\varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $h$  de forma que  $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$ . Daí

$$\frac{u^\varepsilon(x + he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] u(y) dy$$

Note que, novamente utilizando a regra da cadeia

$$\frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right)$$

quando  $h \rightarrow 0$ . Isto é

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left( \frac{x - y}{\varepsilon} \right) u(y) dy = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) u(y) dy.$$

Indutivamente, mostramos que  $D^\alpha u^\varepsilon$  existe e

$$D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u.$$

O fato de  $u^\varepsilon$  ser de classe  $\mathcal{C}^\infty$  segue do fato de  $\eta_\varepsilon$  ser de classe  $\mathcal{C}^\infty$  por definição e  $u$  ser integrável.

(b) Afirmamos que a  $\alpha$ -ésima derivada parcial de  $u^\varepsilon$  no sentido usual é igual a convolução de  $\eta_\varepsilon$  com a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca de  $u$  para todo  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ . Isto é

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Com efeito, no item (a) vimos que  $D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u$ . Primeiramente, se  $g(x) = x - y$ , temos

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_\varepsilon \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_k}(x - y) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y).$$

Por outro lado, se  $h(y) = x - y$ , obtemos

$$D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_\varepsilon \circ h)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_k}(x - y) \frac{\partial h_k}{\partial y_i}(x) = -\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x - y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = -D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y).$$

Repetindo esse cálculo  $|\alpha|$  vezes, obtemos

$$D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y).$$

Dessa forma

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy.$$

Fixando  $x \in \Omega_\varepsilon$ , a função  $\phi_x(y) = \eta_\varepsilon(x-y)$  é suave e tem suporte compacto em  $\Omega$ . Aplicando a definição de derivada fraca com função de teste  $\eta_\varepsilon(x-y)$ , segue que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y) dy$$

Portanto

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Além disso, afirmamos que dados abertos  $V, W$  tais que  $V \Subset W \Subset \Omega$ , uma função  $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Com efeito, note que se  $1 < p < \infty$  e  $x \in V$

$$|v^\varepsilon(x)| = \left| \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) v(y) dy \right| \leq \int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) v(y) \right| dy.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral, obtemos

$$\int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) v(y) \right| dy \leq \left( \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Como  $\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dy = 1$  e utilizando o Teorema de Fubini, segue que

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|^p dx = \int_V \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy dx \leq \int_W |v(y)|^p \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dx dy.$$

Isto é

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Por fim, seja  $V \Subset \Omega$  um aberto. Afirmamos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ em } \mathcal{L}^p(V)$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para todo  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ . De fato, seja  $W$  um aberto de forma que  $V \Subset W \Subset \Omega$ ,  $\delta > 0$ , utilizando a afirmação anterior com  $v^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$  e  $v = D^\alpha u$  escolhendo  $w \in \mathcal{C}(W)$  tal que

$$\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} < \delta.$$

Temos

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} &\leq \|D^\alpha u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leq \|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(W)} \\ &\leq 2\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leq 2\delta + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} \end{aligned}$$

Como  $w \in \mathcal{C}(W)$ , então  $w^\varepsilon \rightarrow w$  uniformemente em  $V$ . Portanto  $D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  em  $\mathcal{L}^p(V)$ . Dessa forma

$$\|u^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}^p \rightarrow 0$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Portanto

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$$

como queríamos mostrar □

**Exemplo 2.23.** A função  $u(x) = |x|$  definida no intervalo aberto  $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$  é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ . Com efeito, dada uma função  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  temos que

$$\int_{\Omega} u \phi' dx = \int_{-1}^1 u \phi' dx = \int_{-1}^0 u \phi' dx + \int_0^1 u \phi' dx.$$

Utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} u \phi' dx = \left[ x \phi \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \phi dx + \left[ -x \phi \right]_0^1 - \int_0^1 -\phi dx.$$

Como  $\phi$  tem suporte compacto em  $\Omega$ , então

$$\left[ x \phi \right]_{-1}^0 + \left[ -x \phi \right]_0^1 = 0$$

Sendo assim

$$\int_{\Omega} u \phi' dx = - \int_{-1}^0 \phi dx - \int_0^1 -\phi dx = - \int_{\Omega} \text{sgn}(x) \phi dx.$$

Portanto

$$u' = \text{sgn}(x)$$

no sentido fraco, onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Além disso

$$\int_{\Omega} |\text{sgn}(x)|^p dx = \int_{-1}^1 1^p dx = \left[ x \right]_{-1}^1 = 2 < \infty$$

Assim  $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  e portanto  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  para  $1 \leq p < \infty$ . Vamos utilizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de  $u$ . Seja  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

onde  $c$  é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$$

isto é

$$c = \left( \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx \right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função  $\eta$  não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Daí definimos a função molificadora  $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

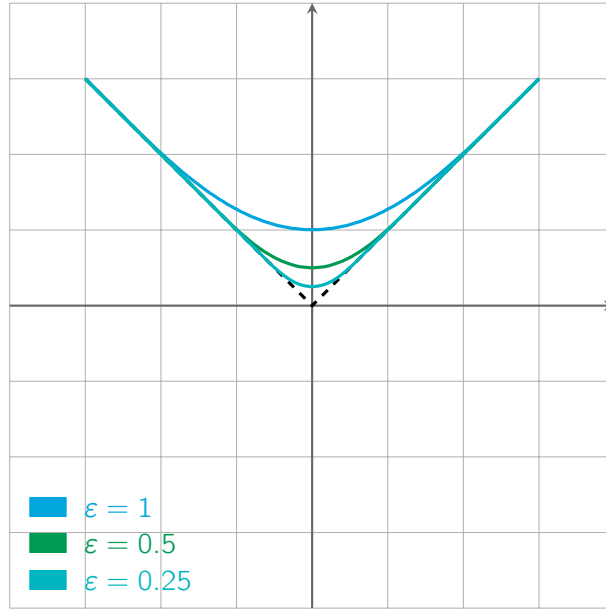


Figura 2.1: Aproximações suaves da função  $|x|$  (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora  $\eta_\epsilon$  com  $\epsilon = 1, 0.5, 0.25$

Fonte: Autoral

Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\epsilon dx = 1 \text{ e } \text{supp } \eta = [-\epsilon, \epsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar  $u$ . Com efeito

$$u^\epsilon(x) = \int_{[-\epsilon, \epsilon]} \eta_\epsilon(x) u(x - y) dy$$

A Figura 2.1 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de  $\epsilon$

**Observação:** (converge para a função delta de Dirac)

**Exemplo 2.24.** Seja  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ . A função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de  $|\cdot|$  não ser diferenciável. Por outro lado,  $u$  possui derivadas parciais fracas em  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  quando  $0 < p < 2$  dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}$$

Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a  $i$ -ésima coordenada. Utilizando integração por partes obtemos

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i ds - \int_{\Omega} \phi D^{e_i} u dx$$

onde  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Para calcular  $D^{e_i} u$  precisamos dividir o domínio  $\Omega$  em  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  e  $\Omega_4$ , onde  $\Omega_i$  é a restrição ao  $i$ -ésimo quadrante. Note que em  $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$ . Logo, nesse conjunto  $D^{e_i} u$  existe no sentido usual e é dada por

$$D^{e_i} u = \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}}.$$

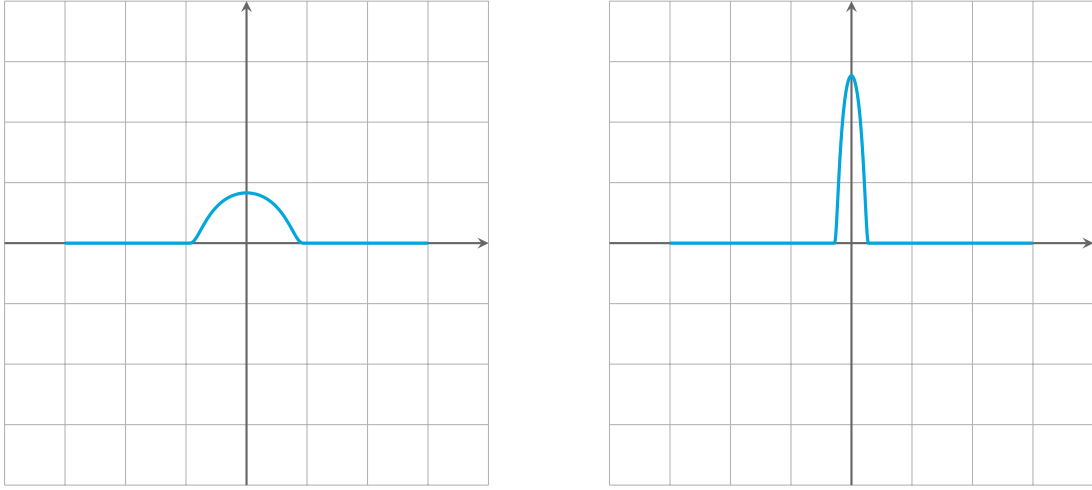


Figura 2.2: Funções  $\eta$  e  $\eta_\varepsilon$  com  $\varepsilon = 0.3$   
Fonte: Autoral

De forma análoga

$$\begin{aligned} D^{e_i} u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_2 \text{ e } \Omega_3 \\ D^{e_i} u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_4. \end{aligned}$$

Dito isso

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_i} u \, dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx$$

que podemos escrever como

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_i} u \, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx = \int_{\Omega} \text{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx$$

Por fim, como  $\phi$  tem suporte compacto em  $\Omega$ ,  $\phi$  se anula em  $\partial\Omega$ . Dessa forma

$$\int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i \, ds = 0.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi \, dx = - \int_{\Omega} \text{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx.$$

Isto é

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \text{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

como queríamos mostrar. Além disso

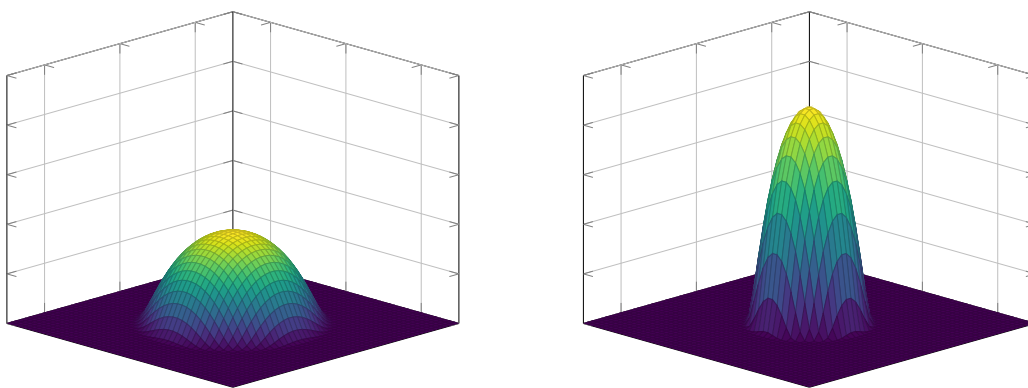
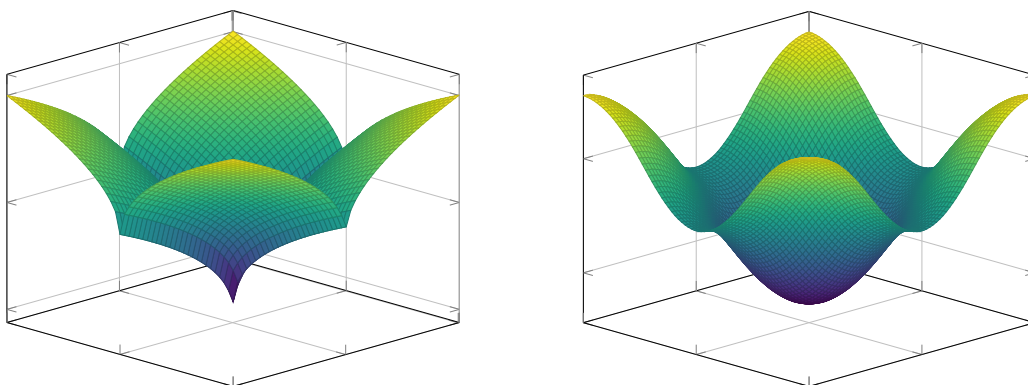
$$\int_{\Omega} |D^{e_i}(x_1, x_2)|^p \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2} \text{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \right|^p \, dx_i \, dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\text{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i \, dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini

$$\frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\text{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i \, dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 dx_j \int_{-1}^1 |\text{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\text{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i.$$

Daí, precisamos ver para quais valores de  $p$  essa integral é finita, sendo assim

$$\frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\text{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-2}} \int_0^1 x_i^{\frac{p}{2}-1} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-2}} \left[ -\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2} - 1} \right]$$

Figura 2.3:  $\eta$  e  $\eta_\epsilon$  com  $\epsilon = 0.5$ Figura 2.4: À esquerda, a função  $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$  e à direita sua aproximação suave  $u^\epsilon$  com  $\epsilon = 0.5$ 

Fonte: Autoral

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$  quando  $p < 2$ . Portanto  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  desde que  $0 < p < 2$ .

Agora defina  $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(ver Figura 2.3) e  $\eta_\epsilon$  da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para  $u$ .

$$u^\epsilon(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2) dy$$

Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para  $u^\epsilon$ . A figura 2.4 mostra o gráfico de  $u$ , onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave  $u^\epsilon$ .

**Teorema 2.25.** Sejam  $\Omega$  um aberto limitado e  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então existem funções  $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  tais que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$



*Demonstração.* Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

onde  $\Omega_i = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$ . Defina  $V_i = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$ . Além disso, escolha qualquer aberto  $V_0 \Subset \Omega$  de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

e seja  $(\phi_i)_{i=0}^{\infty}$  uma partição da unidade suave subordinada aos abertos  $(V_i)_{i=0}^{\infty}$ , isto é

$$0 \leq \phi_i \leq 1 \text{ com } \phi_i \in \mathcal{C}_c^{\infty}(V_i) \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = 1 \text{ em } \Omega.$$

Agora escolha uma função  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ , vimos que

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \text{ e } \text{supp } \phi_i u \subseteq V_i.$$

Fixando  $\delta > 0$ , escolha um  $\varepsilon_i > 0$  de forma que  $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u$  satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e } \text{supp } u^i \subseteq W_i$$

com  $W_i = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} \supseteq V_i$ .

Seja  $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i$  (... ta confuso nas notas...). Como  $u = u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^n \phi_i u$  para cada  $V \Subset \Omega$  temos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \delta.$$

Passando o supremo sobre os conjuntos  $V \Subset \Omega$  obtemos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \delta.$$

Ou seja, podemos definir para cada  $\delta > 0$  ...

□

**Definição 2.26.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Dizemos que  $\partial\Omega$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  se para cada ponto  $x_0 \in \partial\Omega$  existe  $r > 0$  e uma função de classe  $\mathcal{C}^k$   $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[x_0, r] = \{x \in B[x_0, r]; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

De forma análoga,  $\partial\Omega$  é de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  se é de classe  $\mathcal{C}^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.27.** Sejam  $\Omega$  um aberto limitado com  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então existem funções  $u_n \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$  tais que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

*Demonstração.*

□

## 2.6 Extensões

(introdução)

**Teorema 2.28.** Sejam  $\Omega$  um aberto limitado com  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  e um  $\Omega'$  um aberto tal que  $\Omega \Subset \Omega'$ . Então existe um operador linear limitado  $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $1 \leq p < \infty$  tal que para cada  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$

(a)  $Eu = u$  qtp em  $\Omega$

(b)  $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$

(c)  $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ , onde a constante  $c$  depende apenas de  $p$ ,  $\Omega$  e  $\Omega'$

*Demonstração.* Seja  $x^0 \in \partial\Omega$  e suponha que  $\partial\Omega$  esteja contido no plano  $\{x_n = 0\}$  perto de  $x^0$ . Dessa forma, podemos supor que existe uma bola  $B = B(x^0, r)$  tal que

$$\begin{aligned} B^+ &= B \cap \{x_n \geq 0\} \subseteq \bar{\Omega} \\ B^- &= B \cap \{x_n \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned}$$

Além disso, suponha inicialmente que  $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2}) & \text{se } x \in B^- \end{cases}$$

que chamamos de reflexão de ordem superior da função  $u$  de  $B^+$  a  $B^-$ . Afirmamos que  $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$ . Com efeito, denotando  $u^- = \bar{u}|_{B^-}$ ,  $u^+ = \bar{u}|_{B^+}$ , podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \quad \text{em } \{x_n = 0\}.$$

De fato, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = 3u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2})$$

quando  $x_n = 0$ , obtemos

$$\left. \frac{\partial u^-}{\partial x_n} \right|_{\{x_n=0\}} = 3u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \left. \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \right|_{\{x_n=0\}}$$

Além disso

$$u^+ = u^- \quad \text{e} \quad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i}$$

ambos em  $\{x_n = 0\}$ . Portanto  $D^\alpha u^- = D^\alpha u^+$  em  $\{x_n = 0\}$  com  $|\alpha| \leq 1$ . Sendo assim,  $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$ , pois fora de  $\{x_n = 0\}$ , as componentes de  $\bar{u}$  já eram de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , então apenas restava verificar que em  $B^+ \cap B^- = B \cap \{x_n = 0\}$  as componentes em  $B^+$  e  $B^-$  se igualavam, implicando a continuidade  $\bar{u}$  e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \quad (2.10)$$

onde  $c$  é uma constante positiva que não depende de  $u$ . De fato

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[ \int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right].$$

Como  $B = B^+ \cup B^-$ , e denotando  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  por  $x'$  podemos reescrever o ultimo somatório da seguinte forma

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} \left[ \int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[ \int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + \int_{B^-} |4D^\alpha u(x', -\frac{x_n}{2}) - 3D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx \right]$$

que é menor ou igual a

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} \left[ \int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + 3 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx + 4 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx \right]$$

Porem,  $-x_n, -\frac{x_n}{2} \geq 0$ , então podemos considerar que as integrais em  $B^-$  são integrais sobre  $B^+$ . Dito isso, ao menos de uma mudança de variáveis, obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[ \int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[ \int_{B^+} |D^\alpha u|^p dx \right] = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}^p$$

Portanto

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}$$

Por outro lado, se  $\partial\Omega$  está necessariamente contido no plano  $\{x_n = 0\}$  perto de  $x^0$ . Neste caso, existe um homeomorfismo  $\Phi$  com inversa  $\Psi$  que planifica  $\partial\Omega$  perto de  $x^0$ . Utilizando a função  $\gamma$  da Definição 2.26, definimos o homomorfismo  $\Phi$  por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

De forma análoga definimos  $\Psi$  por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})).$$

Dessa forma  $\Psi^{-1} = \Phi$ . Sendo assim, seja  $y = \Phi(x)$  (ou seja  $x = \Psi(y)$ ) e definimos  $u'(y) = u(\Psi(y))$ , daí como foi feito anteriormente, podemos escolher uma bola  $B = B(y_0, r)$  e definimos  $\bar{u}'$  de forma que  $\bar{u}' \in \mathcal{C}^1(B)$  e

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}. \quad (2.11)$$

Seja  $W = \Psi(B)$ , assim conseguimos obter uma extensão  $\bar{u}$  de  $u$  para  $W$  com

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para  $\bar{u}(w) = \bar{u}'(\Phi(w))$ , obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis

$$\|D^\alpha \bar{u}'\|_{\mathcal{L}^p(B)} = \int_B |D^\alpha \bar{u}'(y)|^p dy = \int_B |D^\alpha \bar{u}(\Psi(y))|^p dy = \int_W |D^\alpha \bar{u}(x)|^p dx = \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Dessa forma, passando o somatório

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)}. \quad (2.12)$$

Além disso

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u'\|_{\mathcal{L}^p(B^+)} &= \int_{B^+} |D^\alpha u'(y)|^p dy = \int_{B^+} |D^\alpha u(\Psi(y))|^p dy \\ &= \int_{\Psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p dx \leq \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx = \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Isto significa que

$$\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \quad (2.13)$$

Portanto, por (2.12) e (2.13) obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \quad (2.14)$$

como queríamos mostrar.

Como  $\partial\Omega$  é compacto, e  $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x \in \partial\Omega} W_x$ , que é uma cobertura aberta, pois  $W_x = \Psi(B(y_0, r))$  (?), e imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto. Pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma subcobertura finita de  $\partial\Omega$ , sendo assim, existem uma quantidade finita de pontos  $x_i^0 \in \partial\Omega$ , abertos  $W_i$  e extensões  $\bar{u}_i$  de  $u$  em  $W_i$  de forma que  $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N W_i$  e considere  $W_0 \Subset \Omega$  tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N W_i.$$

Seja  $(\phi_i)_{i=0}^N$  uma partição da unidade suave subordinada aos abertos  $(W_i)_{i=0}^N$  e defina

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N \phi_i \bar{u}_i$$

onde  $\bar{u}_i$  está associada a  $W_i$  e  $\bar{u}_0 = u$ . Daí obtemos a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Com efeito

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{n=1}^N \|D^\alpha (\phi_i \bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p$$

onde  $c$  é uma constante positiva que depende de  $p$ . Daí utilizando a regra de Leibniz para derivada do produto em  $\phi_i \bar{u}_i$  obtemos

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha (\phi_i \bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Como  $\text{supp } D^\sigma \phi_i \subseteq \text{supp } \phi_i \subseteq W_i$ , então o suporte de  $D^\sigma \phi_i$  também é compacto (pois  $W_i$  é limitado), sendo assim  $\max |D^\sigma \phi_i|$  existe. Portanto

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(W_i)}^p$$

onde agora a constante  $c$  também depende de  $W_i$ . Além disso

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(W_i)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W_i)}^p.$$

Por fim, utilizando (2.14)

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W_i)}^p \leq c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p$$

onde  $c$  depende de  $W_i$ ,  $p$  e  $N$ . Portanto

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

Defina  $\Omega'$  de forma que  $\bigcup_{i=0}^N W_i \subseteq \Omega'$ . Dessa forma  $\text{supp } \bar{u} \in \Omega'$ .

Defina  $\tilde{E} : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$  dada por  $\tilde{E}u = \bar{u}$ . Temos que  $\tilde{E}$  é linear,

$$\|\tilde{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e  $\text{supp } \tilde{E}u \subseteq \Omega'$ . Sendo assim definimos  $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  com  $1 \leq p < \infty$  por

$$Eu = \begin{cases} \bar{u} & \text{se } u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \\ \lim \bar{u}_k & \text{se } u \notin C^\infty(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

onde  $(u_k)$  é uma sequência de funções em  $C^\infty(\bar{\Omega})$  que converge para  $u$ , sabemos que essa sequência existe pois mostramos que  $C^\infty(\bar{\Omega})$  é denso em  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ . Além disso

$$\begin{aligned} \|Eu - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\bar{u}_k - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pois  $u_k \rightarrow u$ . Portanto  $Eu = u$  qtp em  $\Omega$ , provando o item **(a)**.

Para verificar o item **(b)**, basta ver que por definição  $\text{supp } \bar{u}_k \subseteq \Omega'$ . Dessa forma  $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$

Por fim, para mostrar o item **(c)**. Note que  $E$  é um operador limitado, pois

$$\|E\| = \|\tilde{E}\| \leq c$$

Portanto

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

□

## 2.7 Traços

(introdução)

**Teorema 2.29.** Seja  $\Omega$  um aberto limitado e  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Então existe um operador linear limitado  $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$  tal que

**(a)**  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  se  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$

**(b)**  $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$  onde  $c$  depende apenas de  $p$  e  $\Omega$ .

*Demonstração.*

□

**Teorema 2.30** (Funções traço zero em  $\mathcal{W}^{1,p}$ ). Seja  $\Omega$  um aberto limitado com  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

onde  $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$  é o fecho de  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  em  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ . Por definição existe uma sequência de funções  $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Como  $u_k$  tem suporte compacto em  $\Omega$  então  $u_k$  se anula em  $\partial\Omega$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Sendo assim  $Tu_k = 0$  em  $\partial\Omega$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$  é um operador linear limitado. Portanto

$$Tu = T(\lim u_k) = \lim Tu_k = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Reciprocamente, suponha que  $Tu = 0$  em  $\partial\Omega \dots$

□

## 2.8 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços ...

### 2.8.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja  $1 \leq p < n$ . Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (2.15)$$

onde  $c$  é uma constante positiva,  $1 \leq q < \infty$  e  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , de forma que  $c$  e  $q$  não dependam de  $u$ .

Primeiramente vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (2.15) existe, o valor de  $q$  não é arbitrário, mas sim admite uma forma específica. Para isso seja  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  não-nula e  $\lambda > 0$ . Sendo assim, definimos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (2.15) a  $u_\lambda$ , obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.16)$$

Note que

$$\|u_\lambda^q\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^q$$

e

$$\begin{aligned} \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D(u(\lambda x))|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \end{aligned}$$

Utilizando essas igualdades em (2.16), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

que podemos reescrever como

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (2.17)$$

Observe que se  $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$ , obtemos uma contradição quando  $\lambda \rightarrow 0$ , pois isso implicaria em  $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = 0$ , que só acontece se  $u = 0$  que é uma contradição. De forma análoga se

$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$  obtemos uma contradição quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Sendo assim, para que a igualdade (2.15) seja válida, precisamos que

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$$

ou seja

$$q = \frac{np}{n-p}$$

Isso motiva a definição abaixo

**Definição 2.31.** Se  $1 \leq p < n$  o expoente conjugado de Sobolev de  $p$  é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Os calculos no início da seção mostram que a desigualdade (2.15) somente é válida quando  $q = p^*$ . O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é verídica

**Teorema 2.32** (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Seja  $1 \leq p < n$ . Então existe uma constante  $c$  que depende apenas de  $p$  e  $n$ , tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (2.18)$$

para toda função  $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* Consideremos dois casos

( $p = 1$ )

Como por hipótese,  $u$  tem suporte compacto, temos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) dy_i$$

e daí

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \right| dy_i \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i$$

e elevando ambos os lados a  $\frac{1}{n-1}$  e passando ao produtório de  $i = 1$  até  $n$  obtemos

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando  $(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$  por  $X_i$  e Integrando ambos os lados em relação a  $x_1$  de  $-\infty$  a  $\infty$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \end{aligned}$$

Porém,  $Du(X_1)$  não depende de  $x_1$ , então a sua integral é constante em relação a  $x_1$  e pode “sair” da integral, sendo assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, a desigualdade se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a  $x_2$  de  $-\infty$  a  $\infty$  obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

que podemos reescrever da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{\frac{1}{n-1}} l_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n l_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

onde

$$l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \text{ e } l_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \quad (i = 2, \dots, n).$$

Porem,  $l_2$  é constante em relação a  $x_2$  então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq l_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n l_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_2)| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, temos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{n-1}}$$

Ou seja

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \quad (2.19)$$

como queríamos mostrar.

$$(1 < p < n)$$

Considere a função  $|u|^\gamma$  com  $\gamma > 1$  a ser decidido. Utilizando a desigualdade no caso  $p = 1$  temos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx$$

utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral obtemos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Escolhendo  $\gamma$  de forma que  $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$ . Isto é

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

nesse caso,  $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$ . Sendo assim

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalizando a demonstração □

**Observação:** (suporte compacto é necessário)



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
- [2] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.
- [3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [4] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [5] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [6] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.
- [7] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [8] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.