CONTEÚDO

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{B}$	Álgebra de Borel
$\widehat{\mathfrak{B}}$	Álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$
χ_E	Função caracteristica do conjunto E
$\eth$	σ-álgebra
f^+	Parte positiva da função f
f^-	Parte negativa da função f
$f \sim_\mu g$	f e g são μ-equivalentes i.e., $f = g$ em quase toda parte em X.
$\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$	Espaço das funções integraveis em relação a medida μ.
$\mathcal{L}^p(X, \eth, \mu)$	Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$.
$\mathcal{M}(X, \eth)$	Espaço das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis
$\mathcal{M}^+(X, \eth)$	Espaço das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas
$\mu(E)$	Medida do conjunto E
$N_\mu(\,\cdot\,)$	Semi-norma em relação a medida μ.
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta extendida i.e., $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de σ-álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\eth$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra se satisfaz as seguintes condições

1. $\emptyset, X \in \eth$
2. Se $S \in \eth$ então $S^{\mathcal{C}} = X \setminus S \in \eth$
3. Se (S_n) é uma sequência de elementos de $\eth$ então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

O par $(X, \eth)$ é dito espaço mensurável e os subconjuntos de $\eth$ são chamados de conjuntos mensuráveis (ou $\eth$-mensuráveis)

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não vazio e considere $\eth = \{\emptyset, X\}$. Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. Com efeito,

1. $\emptyset, X \in \eth$ pela definição.
2. $\emptyset^{\mathcal{C}} = X \in \eth$ e $X^{\mathcal{C}} = \emptyset \in \eth$
3. $\mathrm{U}\emptyset = \emptyset \in \eth$ ou $\mathrm{U}X = X \in \eth$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. $\eth = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ não é uma σ-álgebra de X pois $\{a, b\}^{\mathcal{C}} = \{c, d\} \notin \eth$

Observação: Seja (S_α) uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_{\alpha} S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{\alpha} S_\alpha^{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_{\alpha} S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcup_{\alpha} S_\alpha^{\mathcal{C}}$$

Dessa forma, se (S_n) é uma sequência de elementos de uma σ-álgebra, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

Observação: (união finita)

Observação: (interseção finita)

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto não enumerável e considere

$$\eth = \{S \subseteq X\,; S \text{ é enumerável ou } S^{\mathcal{C}} \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. De fato

1. $\emptyset \in \eth$ pois é enumerável e $X \in \eth$ pois $X^{\mathcal{C}} = \emptyset$ que é enumerável

2. se $S \in \eth$ temos as seguintes possibilidades

   S é enumerável, então $S^{\mathcal{C}} \in \eth$ pois $(S^{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}} = S$ é enumerável

   $S^{\mathcal{C}}$ é enumerável, então pela definição da σ-álgebra, $S^{\mathcal{C}} \in \eth$

3. Seja (S_n) uma sequência de subconjuntos em $\eth$, isto é, $S_n \in \eth$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aqui temos três possibilidades a serem consideradas

   S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável, portanto está em $\eth$

   $S_n^{\mathcal{C}}$ é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_{n_0}^{\mathcal{C}}$$

   é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável $S_{n_0}^{\mathcal{C}}$, portanto está em $\eth$

   Se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

   $$S_i \subseteq X \;\text{ e }\; S_j^{\mathcal{C}} \subseteq X \;\text{ são enumeráveis}$$

   podemos afirmar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ não é enumerável, pois $S_j^{\mathcal{C}}$ é enumerável, e como X não é enumerável, segue que S_j também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}}$ é enumerável. Com efeito, observe que

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_j^{\mathcal{C}}$$

   ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$.

Dessa forma, $\eth$ é uma σ-álgebra

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio. Se $\eth_1$ e $\eth_2$ são σ-álgebras de X então $\eth = \eth_1 \cap \eth_2$ também é uma σ-álgebra de X.

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de X, o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor σ-álgebra contendo este.

Proposição 1.6. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Então a interseção de todas as σ-álgebras de subconjuntos de X que contem A é a menor σ-álgebra que contém A.

Demonstração. $\square$

Observação: (σ-álgebra gerada)

Agora definimos uma σ-álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

Definição 1.7. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathfrak{B}$ gerada por todos os intervalos abertos (x, y) em $\mathbb{R}$, ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha)\,;\, x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathfrak{B} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{F}_\alpha,$$

onde cada $\mathfrak{F}_\alpha$ é uma σ-álgebra que contem A.

Equivalentemente, podemos dizer que $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo $\mathfrak{B}$ dessa forma é possível ver que não precisamos que $\mathfrak{B}$ seja uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ mas sim de qualquer espaço topólogico $(X, \mathcal{T})$, nesse caso dizemos que $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada pela topólogia $\mathcal{T}$. Nesse trabalho a notação $\mathfrak{B}$ será utilizada apenas para a álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

Proposição 1.8. $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos intervalos fechados

Demonstração. □

Exemplo 1.9. Alguns exemplos de conjuntos que estão em $\mathfrak{B}$ são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em $\mathfrak{B}$ pois se $B = \{x_1, x_2, \dots\}$, então $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ que é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois cada $\{x_n\}$ é um conjunto fechado.
- Todo intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{k}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a, b + \frac{1}{n})$.

A sensação é de que a álgebra de Borel contem todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, isto é $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Porem este não é o caso, pois existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são bastante dificeis de definir (vide [??]) que não estão em $\mathfrak{B}$. Mas se esses conjuntos são tão dificeis de definir por que precisamos de uma σ-álgebra que exclui eles?

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propiedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uma propiedade importante não é satisfeita, mas restrigindo para o espaço $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ conseguimos definir a mesma medida de forma que todas propiedades são satisfeitas.

Definição 1.10. O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é dita reta extendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Observação: Operações com ∞ em $\overline{\mathbb{R}}$

1. $\infty + \infty = \infty$
2. $-\infty - \infty = -\infty$
3. $x + \infty = \infty + x = \infty$
4. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
5. $\infty \cdot \infty = \infty$
6. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ se $x > 0$

7. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$ se $x < 0$
8. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$ se $x < 0$
9. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ se $x > 0$
10. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Proposição 1.11. Seja $\bar{\mathbb{R}}$ a reta estendida. Considere $E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$, $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\widehat{\mathfrak{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$ com E variando na álgebra de Borel $\mathfrak{B}$. Então $\widehat{\mathfrak{B}}$ é uma σ-álgebra em $\overline{\mathbb{R}}$ denominada álgebra estendida de Borel.

Demonstração. □

Um conceito bastante importante na teoria da medida, é a ideia de funções mensuráveis

Definição 1.12. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser $\mathfrak{F}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\}$$

pertence a σ-álgebra.

Lema 1.13. As afirmações a seguir são equivalentes para uma função $f : X \to \mathbb{R}$

(a) $A_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $B_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $C_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $D_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração. □

Exemplo 1.14. A função constante $x \mapsto c$ é mensurável. Com efeito, se $\alpha \geqslant c$, então

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{F}$$

pois o único valor que a função assume é c. Se $\alpha < c$, então

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{F}$$

Portanto a função constante é mensurável

Exemplo 1.15. A função caracteristica χ_E de um subconjunto $E \in \mathfrak{F}$ é mensurável dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in E \\ 0 \text{ se } x \notin E. \end{cases}$$

é mensurável. Dito isso, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geqslant 1$, então

$$\{x \in X\,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{F},$$

pois a imagem de χ_E contem apenas os valores 0 e 1. Se $0 \leqslant \alpha < 1$ então

$$\{x \in X\,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = E \in \mathfrak{F}.$$

Por fim, se $\alpha < 0$, então

$$\{x \in X\,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{F}.$$

Portanto χ_E é uma função mensurável, desde que E tambem seja.

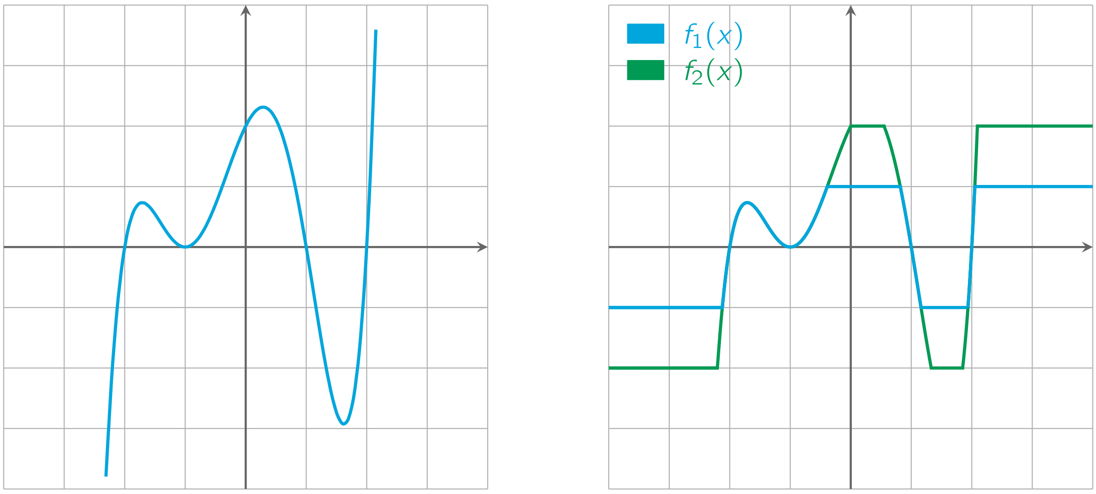


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico de f_1 e f_2
Fonte: Autoral

Exemplo 1.16. Se $f : X \to \mathbb{R}$ com $X \in \mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X \, ; f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela contínuidade de f, o conjunto $f^{-1}((\alpha, \infty))$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma $\{x \in X \, ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{B}$. Portanto f é mensurável.

Exemplo 1.17. Dada uma função f mensurável. A função *truncagem de f* (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leqslant n \text{ e } f(x) \geqslant -n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$

Vamos estudar agora algumas propiedades elementares sobre funções mensuráveis

Proposição 1.18. Sejam X um espaço mensurável, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções

(a) cf

(b) $f^2 := f \cdot f$

(c) $f + g$

(d) fg

(e) $|f|$

são mensuráveis

Demonstração. □

Uma outra definição importante sobre funções mensuráveis e a de parte positiva e negativa de uma função

Definição 1.19. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma qualquer. Definimos as partes positiva e negativa de f respectivamente pelas funções não negativas $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Lema 1.20. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma funçao qualquer. Então

(a) $f = f^+ - f^-$

(b) $|f| = f^+ + f^-$

(c) $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$

(d) $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

O lema acima é importante para demonstrar a proposição abaixo

Proposição 1.21. Seja X um espaço mensurável. Então $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis

Demonstração. Segue direto do lema anterior. □

Agora, vamos passar a estudar funções mensuráveis na reta extendida.

Definição 1.22. Dizemos que uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\eth$-mensurável (ou mensurável) se

$$\{x \in X \,;\, f(x) > \alpha\} \in \eth$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, denotamos o conjunto de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por $\mathcal{M}(X, \eth)$

Em nenhum momento da definição acima mencionamos os elementos $\pm\infty$. O motivo será mostrado abaixo

...

Lema 1.23. Uma funçao $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se

$$A = \{x \in X \,;\, f(x) = \infty\} \in \eth \text{ e } B = \{x \in X \,;\, f(x) = -\infty\} \in \eth$$

e a função $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável

Demonstração. □

Observação: $(cf \cdots \in \mathcal{M}(X, \eth))$

...

Lema 1.24. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{M}(X, \eth)$. Então as funções

$$\begin{array}{ll} f(x) = \inf f_n(x) & F(x) = \sup f_n(x) \\ f^*(x) = \liminf f_n(x) & F^*(x) = \limsup f_n(x) \end{array}$$

pertencem a $\mathcal{M}(X, \eth)$

Demonstração. $\square$

...

Corolário 1.25. Se (f_n) é uma sequência em $\mathcal{M}(X, \eth)$ que converge para f. Então $f \in \mathcal{M}(X, \eth)$

Demonstração. $\square$

O resultado abaixo é ...

Proposição 1.26. Seja f uma função não negativa em $\mathcal{M}(X, \eth)$. Então existe uma sequência (φ_n) em $\mathcal{M}(X, \eth)$ tal que

(a) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

(b) cada φ_n possui um número finito de valores reais em sua imagem.

(c) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ para cada $x \in X$.

Demonstração. $\square$

Para terminar essa seção, vamos definir e ver um exemplo de funções mensuráveis entre espaços mensuráveis

Definição 1.27. Sejam $(X, \eth_X)$ e $(Y, \eth_Y)$ espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : (X, \eth_X) \to (Y, \eth_Y)$ é mensurável quando

$$f^{-1}(E) \in \eth_X$$

para todo $E \in \eth_Y$

Exemplo 1.28.

1.2 Medida

Definição 1.29. Uma medida é uma função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geqslant 0$ para todo $S \in \eth$
3. se $(S_n) \subseteq \eth$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Observação: (espaço de medida)

Observação: (medida finita e σ-finita)

Exemplo 1.30. Seja $(\mathbb{N}, \eth)$ um espaço mensurável, onde $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por $\mu(E) = \#E$, se E é finito, e $\mu(E) = \infty$ se E é infinito, é uma medida em $\eth$. Com efeito,

1. $\mu(\emptyset) = 0$ por vacuidade
2. $\mu(E) \geqslant 0$ por definição
3. .

Exemplo 1.31. Sejam μ uma medida em $\eth$ e $A \in \eth$ um conjunto fixo. Então a função λ dada por

$$\lambda(E) = \mu(A \cap E)$$

é uma medida em $\eth$. Com efeito...

Exemplo 1.32.

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E)$$

...

Lema 1.33. Seja μ uma medida. Se $E, F \in \eth$ com $E \subseteq F$, então $\mu(E) \leqslant \mu(F)$.

Demonstração. □

Observação: $(\mu(E \smallsetminus F))$

Lema 1.34. Seja μ uma medida em $\eth$. Então

(a) se (E_n) é uma sequência crescente em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

(b) se (E_n) é uma sequência decrescente em $\eth$ e $\mu(F_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

Demonstração. □

Definição 1.35. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que duas funções $f : X \to \mathbb{R}$ são iguais em quase toda parte em X e denotamos por $f = g$ qtp em X se existe um conjunto $N \in \eth$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \notin N$.

Um outro conceito importante é o conceito de convergência em quase toda parte

Definição 1.36. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma sequência de funções (f_n) converge para f em quase toda parte, se existe um conjunto $N \in \eth$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \notin N$.

Por fim, para terminar essa seção, introduzimos o conceito de carga

Definição 1.37. Uma carga é uma função $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geqslant 0$ para todo $S \in \eth$
3. se $(S_n) \subseteq \eth$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

isto é uma medida que não satisfaz a não-negatividade.

1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$

Nosso objetivo agora é construir uma medida para $\mathbb{R}$ e mostrar o motivo de utlizar a algebra de Borel ao inves de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definição 1.38. O comprimento de um intervalo aberto I é uma função ℓ dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. O tamanho de A deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. A definição abaixo formaliza essa ideia

Definição 1.39. A medida exterior $m(\,\cdot\,)$ de um conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é definida por

$$m(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)\,;\, I_1, I_2, \ldots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

Essa definição envolve uma soma infinita de uma sequência $t_1, t_2, \ldots,$ de elementos de $[0, \infty]$, que é ∞ se pelo menos algum $t_k = \infty$, ou se a série definida pelas somas parciais de t_k é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Exemplo 1.40. Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto finito. Dado $\varepsilon > 0$ defina a sequência I_k de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leqslant n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo, $m(A) \leqslant 2\varepsilon n$. Como ε é arbitrário, temos que $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

Proposição 1.41. Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto enumerável. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ defina a sequência

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

Dessa forma, $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que $m(A) < 2\varepsilon$. Pelo fato de ε ser arbitrário, temos que $m(A) = 0$. □

Uma outra propiedade da medida exterior é sua invariância a translação

Proposição 1.42. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a\,;\, a \in A\}$$

Demonstração. Seja $I_1, I_2, \ldots,$ uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso $t + I_1, t + I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem $t + A$. Logo

$$m(t + A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que $m(t+A) \leqslant m(A)$.

Para verificar a desigualdade na outra direção note que $A = -t + (t+A)$, então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t+A)) \leqslant (t+A).$$

Portanto $m(A) = m(t+A)$ ☐

(texto motivador)

Proposição 1.43. Seja (A_n) uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Demonstração. ☐

(medida do intervalo fechado) (explicar teorema de Heine-Borel)

Proposição 1.44. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então $m([a,b]) = b - a$

(o pulo do gato)

Proposição 1.45. Existem subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}$ A e B tais que

$$m(A \cup B) \neq m(A) + m(B)$$

Demonstração. ☐

Teorema 1.46. Não é possível definir uma medida μ que generaliza ℓ em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demonstração. ☐

(agora mostrar que em $\mathfrak{B}$ é uma medida)

1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point"of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ fixo.

Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Definição 1.47. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem $(\#\varphi(X) < \infty)$

Uma função φ simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{1.1}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função caracteristica do conjunto $E_j \in \eth$. Essa representação é única pelo fato de todos a_j serem distintos, os conjuntos E_j serem disjuntos para todo $j = 1, \ldots, n$, além disso, $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Definição 1.48. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de φ em relação a μ por

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

Observação: Adotamos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 indepdendente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

Lema 1.49. Dadas funções simples $\varphi, \psi \in M^+(X, \eth)$ e $c \geqslant 0$ tem-se

(a) $\displaystyle\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$

(c) A aplicação $\lambda(E) = \displaystyle\int \varphi \chi_E \, d\mu$ para todo $E \in \eth$ é uma medida em $\eth$.

Demonstração.

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu.$$

Com efeito, para $c = 0$,

$$\int c\varphi \, d\mu = 0 = c \int \varphi \, d\mu.$$

por outro lado, para $c > 0$, podemos escrever $c\varphi$ da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representaçao para $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessáriamente é a representação padrão, pois é possível que existam $j_0, j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ e $k_0, k_1 \in \{1, \ldots, m\}$, tais que $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$.

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k \, ; j \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por c_h com $h = 1, \ldots, \#H$, e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos G_h são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório $\widetilde{\Sigma}$ está relacionado aos indices $1 \leqslant j \leqslant n$ e $1 \leqslant k \leqslant m$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de $\varphi + \psi$ por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h \chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) \, d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\
&= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)
\end{aligned}$$

como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \quad e \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

(c) Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E\, d\mu$$

é uma medida em $\eth$. Com efeito,

1. $\lambda(\emptyset) = \displaystyle\int \varphi \chi_\emptyset\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$

2. Note que como $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ os elementos a_j na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que $0 \leqslant \varphi(x)$ para todo $x \in X$, daí

   $$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

   porem, como os conjuntos E_j são disjuntos, existe um único $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ tal que $x \in E_{j_0}$. Dessa forma, para todo $j \neq j_0$, $\chi_{E_j}(x) = 0$, então

   $$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

   Daí,

   $$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E \cap E_j) \geqslant 0$$

   pois mostramos que $a_j > 0$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ e μ é uma medida.

3. Considere $(F_k) \subseteq \eth$ uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi\chi_{\cup F_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_j\mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j\mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi\chi_{F_k}\, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.50. A função

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porem essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utlizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido Com efeito, considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu^*)$ onde $\mathfrak{B}$ é a álgebra de Borel e μ^* é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}}\, d\mu^* = \mu^*(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Agora, podemos extender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negatíva (não necessáriamente simples)

Definição 1.51. A integral de uma função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ em relação a μ é definida por

$$\int f\, d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi\, d\mu$$

onde φ são funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ tais que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$.

Além disso, definimos a integral da função f sobre um conjunto mensurável

Definição 1.52. A integral de $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ sobre um conjunto $E \in \eth$ é dada por

$$\int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu$$

...

Lema 1.53. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $E, F \in \eth$. Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se $f \leqslant g$ tem-se

$$\int f \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$$

(b) se $E \subseteq F$ tem-se

$$\int_E f \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu$$

Demonstração.

(a) Seja φ uma função simples em M^+, então

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi\in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \sup_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi\in M^+}} \int \varphi \, d\mu = \int g \, d\mu$$

(b) Como $f\chi_E \leqslant f\chi_F$, segue do item anterior que

$$\int f\chi_E \, d\mu \leqslant \int f\chi_F \, d\mu,$$

dito isso

$$\int_E F \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstraado a seguir.

Teorema 1.54 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para f, então,

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ onde $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \eth)$, pelo corolário ?? temos que $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Pela monotonicidade da sequência $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, pelo item **(a)** do lema anterior

$$\int f_n \, d\mu \leqslant \int f_{n+1} \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dito isso

$$\lim \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu.$$

Por outro lado, seja $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ e considere

$$A_n = \{x \in X \, ; f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)\} = \{x \in X \, ; [f_n - \alpha\varphi](x) \geqslant 0\}$$

como f_n e φ são funções mensuráveis, temos que $A_n \in \eth$. Além disso, $A_n \subseteq A_{n+1}$ já que $f_n \leqslant f_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0,1)$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leqslant \int_{A_n} f_n \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu. \tag{1.2}$$

Dessa forma, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X, segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E \, d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi \chi_{\cup A_n} \, d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi \chi_{A_n} \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

... fazendo $n \to \infty$ em 1.2

$$\alpha \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de φ ser uma função simples tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ tem-se que

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

□

O Lema 1.49 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, tambem é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

Corolário 1.55. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $c > 0$, então são válidas as seguintes afirmações

(a) $\displaystyle\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c = 0$

$$\int cf \, d\mu = 0 = c \int f \, d\mu.$$

Se $c > 0$, considere (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ convergindo para f (lema ??). Dito isso, $(c\varphi_n)$ é um sequência monótona crescente que converge para cf. Pelo Lema 1.49 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf \, d\mu = \lim \int c\varphi_n \, d\mu = c \lim \int \varphi_n \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funçoes simplies em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ que convergem para f e g respectivamente. Dessa forma $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f + g$. Portanto

$$\int (f+g) \, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

Lema 1.56 (Lema de Fatou)**.** Se $(f_n) \subseteq M^+(X, \eth)$, então

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$, dessa forma $g_m \leqslant f_n$ para todo $m \leqslant n$. Sendo assim,

$$\int g_m \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu$$

para todo $m \leqslant n$. Desse modo

$$\int g_m \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para seu supremo, ou seja, $\liminf f_n$. Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessáriamente simples

Corolário 1.57. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. A aplicação $\lambda : \eth \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\lambda(E) = \int f \chi_E \, d\mu$$

é uma medida.

Demonstração.

1. $\lambda(\emptyset) = \displaystyle\int_{\emptyset} f\, d\mu = \int f\chi_{\emptyset}\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0.$

2. Como $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ temos que $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu \geqslant \int_E 0\, d\mu = 0$.

3. Sejam E_n uma sequência de conjuntos disjuntos em $\eth$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e considere f_n definida por
$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$
Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que
$$\int f_n\, d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$
Além diso, podemos escrever
$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k} = f\chi_E$$
desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos.
Por fim, como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ que converge para $f\chi_E$, pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que
$$\lambda(E) = \int f\chi_E\, d\mu = \int \lim f_n\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k}$$

Portanto, λ é uma medida. □

Corolário 1.58. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,
$$\int f\, d\mu = 0$$

Demonstração. Suponha que $\displaystyle\int f\, d\mu = 0$ e considere o conjunto
$$E_n = \left\{x \in X\,;\, f(x) > \frac{1}{n}\right\}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \geqslant \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Note que
$$0 = \int f\, d\mu \geqslant \tfrac{1}{n}\int \chi_{E_n}\, d\mu = \tfrac{1}{n}\mu(E_n) \geqslant 0.$$
Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso
$$E = \{x \in X\,;\, f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
pois se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, logo
$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim, $x \in E$.

Por outro lado, se $x \in E$, temos que $f(x) > 0$. Utilizando a propiedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é, $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como queriamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que (E_n) é uma sequência crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$, para todo $x \in E^{\mathcal{C}}$ com $\mu(E) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ em quase toda parte em X. Se $E = \{x \in X \,;\, f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Sendo assim, considerando $f_n = n\chi_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temo que $f \leqslant \liminf f_n$ e pelo Lema de Fatou

$$0 \leqslant \int f\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f\, d\mu = 0.$$

□

Corolário 1.59. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então a aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua em relação a μ, isto é, se $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é, $f\chi_E = 0$ em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1.60. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ que converge em quae toda parte de X para a função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$$

Demonstração. Seja N um conjunto de medida nula. Suponha que (f_n) converge para f em todo o pontos de $M = N^{\mathcal{C}}$. Dessa forma, a sequência $(f_n \chi_M)$ converge para $f\chi_M$, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f\chi_M \, d\mu = \lim \int f_n \chi_M \, d\mu.$$

Além disso, podemos escrever f e f_n da seguinte forma

$$f = f\chi_M + f\chi_N \ \text{ e } \ f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N,$$

pois $M = N^{\mathcal{C}}$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f\chi_N$ e $f_n\chi_N$ são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.58, segue que

$$\lim \int f_n \, d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

Corolário 1.61. Seja (g_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. Então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \cdots + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g_n \geqslant 0$, temos que (f_n) é uma sequência crecente que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu$$

Portanto

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

Definição 1.62. O conjunto $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ das funções integráveis consite em todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, tai que as integrais

$$\int f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \int f^- \, d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de f em relação a μ por

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

e se E é um conjunto mensurável

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Qualquer representação de f como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja f uma função integravel e escreva f como $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções integráveis não negativas, então

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ \, d\mu + \int f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f^- \, d\mu.$$

Como $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, segue que

$$\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.$$

Da mesma forma que definimos um medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exibe o lema abaixo

Lema 1.63. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. A aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de f (em relação a μ).

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+(X, \eth, \mu)$, pelo Corolário ?? temos que as funções $\lambda^+, \lambda^- : \eth \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- \, d\mu.$$

são medidas em $\eth$ e são finitas pelo fato de f ser uma função integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ temos que λ é uma carga. $\square$

Como a aplicação λ definida acima é uma carga, vemos que se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, então

$$\int_E f\,d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propiedades elementares das integrais de funções mensuráveis

Teorema 1.64. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Além disso

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\mu. \tag{1.3}$$

Demonstração. Seja f uma função integrável, mostremos que $|f|$ também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \quad \text{e} \quad |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu$$

é finita pois f é integrável, e

$$\int |f|^-\,d\mu = \int 0\,d\mu = 0$$

que é finita. Portanto $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que $|f|$ é integrável, dessa forma

$$\begin{aligned} f^+ &\leqslant f^+ + f^- = |f| \\ f^- &\leqslant f^+ + f^- = |f| \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} \int f^+\,d\mu &\leqslant \int |f|\,d\mu \\ \int f^-\,d\mu &\leqslant \int |f|\,d\mu \end{aligned}$$

ambas finitas pois $|f|$ é integrável. Portanto f é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integravel e a desigualdade triangular.

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \left|\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right| \leqslant \left|\int f^+\,d\mu\right| + \left|\int f^-\,d\mu\right| = \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int |f|\,d\mu$$

$\square$

Corolário 1.65. Se $f \in \mathcal{M}(X, \eth)$, $g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $|f| \leqslant |g|$, então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

$$\int |f|\,d\mu \leqslant \int |g|\,d\mu$$

Demonstração. Se g é integrável então pelo Teorema anterior $|g|$ também o é. Além disso, como $|f| \leqslant |g|$

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu,$$

como $|g|$ é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de $|f|$ também ser finita, ou seja, $|f|$ é integrável e novamente pelo Teorema anterior, f é integrável. □

Teorema 1.66. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f+g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

(a) $\displaystyle\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c \geqslant 0$. Note que $(cf)^+ = cf^+$ e $(cf)^- = cf^-$. Dito isso

$$\int cf\, d\mu = \int cf^+ - cf^-\, d\mu$$

como cf^+ e cf^- são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.55

$$\int cf\, d\mu = c\int f^+ - f^-\, d\mu = c\int f\, d\mu$$

Se $c < 0$ a demonstração é análoga, basta perceber que $(cf)^+ = -cf^-$ e $(cf)^- = -cf^+$ ambas funções não negativas pois $-c > 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, então pelo Teorema 1.64 $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, como $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ temos que $f+g$ é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f+g)\, d\mu = \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.57 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\, d\mu &= \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\
&= \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\
&= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.
\end{aligned}$$

□

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

Teorema 1.67 (Teorema da Convergência Dominada)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e
$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo X. Note que
$$\lim |f_n| \leqslant g \implies |f| \leqslant |g|,$$
como por hipótese f é mensurável e g é integrável, segue pelo Corolário 1.65 que f é integrável. Além disso, como $-g \leqslant f_n \leqslant g$ temos que $g + f_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.64 temos que
$$\begin{aligned}
\int g \, d\mu + \int f \, d\mu &= \int (g + f) \, d\mu \\
&= \int (g + \lim f_n) \, d\mu \\
&= \int \lim (g + f_n) \, d\mu \\
&= \int \liminf (g + f_n) \, d\mu \\
&\leqslant \liminf \int (g + f_n) \, d\mu \\
&= \liminf \left(\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu \right) \\
&= \int g \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu,
\end{aligned}$$
que implica em
$$\int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu. \tag{1.4}$$

Por outro lado, $g - f_n \geqslant 0$, de forma análoga mostramos que
$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu. \tag{1.5}$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)
$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu,$$
isto é[1]
$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$
Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ onde a aplicação $x \mapsto f(x, t)$ é mensurável para todo $t \in [a, b]$.

[1] $\limsup x_n \leqslant x \leqslant \liminf x_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

Corolário 1.68. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja t_n uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0 e considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = f(x, t_n)$. Então como $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leqslant g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ com g integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\int f(x, t_0)\, d\mu(x) &= \int \lim_{t \to t_0} f(x, t)\, d\mu(x) \\
&= \int \lim f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f(x, t_n)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

Corolário 1.69. Se a aplicação $t \mapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F dada por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração. Mostremos que $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$. Com efeito

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x) = \int f(x, t_0)\, d\mu(x) = F(t_0)$$

□

Corolário 1.70. Suponha que ara algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \to f(x, t_0)$ seja integrável em X, que $\partial_t f$ existe em $X \times [a, b]$ e que existe uma função integrável g em X tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t, com $t \neq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim \frac{f(x, t_n) = f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo $x \in X$. Desde modo a função $x \mapsto \partial f / \partial t\,(x, t)$ é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_0, entre t_0 e t tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left|f(x, t_0) + (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right| \leqslant |f(x, t_0)| + |t - t_0|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right|$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0|\,|\partial f / \partial t\,(x, s_0)|$ é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.65 temos que f é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\lim \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$. Consequentemente

$$\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| < g(x)$$

para valores de n suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \lim \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. $\square$

1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências p-ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

Proposição 1.71. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $N_\mu : \mathcal{L}(X, \eth, \mu) \to \mathbb{R}$ dada por

$$N_\mu(f) = \int |f|\, d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$ em quase toda parte em X.

Demonstração. Note que

1. $N_\mu(f) = \displaystyle\int |f|\, d\mu \geqslant \int 0\, d\mu = 0.$

2. $N_\mu(\lambda f) = \displaystyle\int |\lambda f|\, d\mu = \int |\lambda||f|\, d\mu = |\lambda| \int |f|\, d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$

3. $N_\mu(f+g) = \displaystyle\int |f+g|\, d\mu \leqslant \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$

Portanto N_μ é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f|\, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Observação: Note que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um espaço vetorial com a operações usuais

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto se deve ao fato que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um subespaço vetorial do espaço de funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$.

Estamos interessados em transformar $\mathcal{L}$ em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 1.72. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Dizemos que f e g são μ-equivalentes ($f \sim_\mu g$) se $f \equiv g$ em quase toda parte em X.

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \eth, \mu) = \{[f]\,;\, f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)\,;\, g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^1$ ou espaço das funções somáveis. Esse espaço, munido das operações

$$[f] + [g] = [f + g]$$
$$[\lambda f] = \lambda[f]$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Proposição 1.73. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

para todo $[f] \in \mathcal{L}^1$ é uma norma

Demonstração. Note que apenas precisamos mostrar que $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, pois as outras propiedades são análogas à demonstração da Proposição 1.71. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto $\|\cdot\|_1$ é uma norma e $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado. □

No restante do texto, adotaremos a notação $[f] = f$, ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com o seus representantes.

Definição 1.74. Seja $1 \leqslant p < \infty$ um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \eth, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ é mensurável}, \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$.

Nosso intuito agora é mostrar que $\mathcal{L}^p$ é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathcal{L}^p$.

Teorema 1.75 (Desigualdade de Young)**.** Sejm $A, B \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjuntados[a]. Então

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

[a] p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração. Seja $\alpha \in (0, 1)$ e defina $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Note que $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$. Dessa forma

– $t \in (0,1)$ então $\varphi'(t) < 0$ pois $t^{\alpha-1} > 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} < 0$

– $t \in (1,\infty)$ então $\varphi'(t) > 0$ pois $t^{\alpha-1} < 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que φ é decrescente em $(0,1)$ e crescente em $(1,\infty)$. Ou seja, como φ é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso $\varphi(t) \geqslant \varphi(1)$ para todo $t \geqslant 0$ e $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Assim

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(t) \implies \alpha t - t^{\alpha} \geqslant \alpha - 1 \implies t^{\alpha} \leqslant \alpha t + (1-\alpha).$$

Sejam $a, b > 0$, então para $t = \frac{a}{b}$ temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \leqslant \alpha\frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^{\alpha}b^{-\alpha} \leqslant \alpha\frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por b, encontramos

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se $t = 1$, isto é $a = b$. Agora considere que $\alpha = \frac{1}{p} \in (0,1)$, ou seja, $1 < p < \infty$. Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b,$$

e por hipótese $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo $a = A^p$ e $b = B^q$, temos o resultado desejado

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando $A^p = B^q$. □

Teorema 1.76 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_q$$

Demonstração. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ então $f \equiv 0$ qtp em X ou $g \equiv 0$ qtp em X. Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\, d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \;\text{ e }\; B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqslant \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}. \tag{1.6}$$

Como $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, então $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.65

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto $|fg|$ é integrável, isto é, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Por fim, integrando (1.6) com respeito a μ, chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q}\,d\mu \leqslant \int \left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}.\right)d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |fg|\,d\mu \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g|^p\,d\mu.$$

Pela definição da norma em $\mathcal{L}^p$ segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\|q\|_p^p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queriamos demonstrar. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando $p = q$, o que acontece apenas quando $p = q = 2$.

Corolário 1.77 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^2$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\left|\int fg\,d\mu\right| \leqslant \int |fg|\,d\mu \leqslant \int |f|^2\,d\mu \int |g|^2\,d\mu$$

Demonstração. A primeira desigualdade é o Teorema 1.64 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

Teorema 1.78 (Desigualdade de Minkowski)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. Na Proposição 1.71 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para $p = 1$. Dito isso, seja $1 < p < \infty$. Como $f, g \in \mathcal{L}^p$, então f e g são mensuráveis. Dessa forma, $f + g$ também é mensurável. Mostremos agora que $f + g \in \mathcal{L}^p$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &\leqslant (|f| + |g|)^p \\
&\leqslant (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\
&= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\
&\leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p).
\end{aligned}$$

Daí

$$\int |f+g|^p\,d\mu \leqslant 2^p \int (|f|^p + |g|^p)\,d\mu \leqslant 2^p \left(\int |f|^p\,d\mu + \int |g|^p\,d\mu\right)$$

que é uma integral finita. Portanto $f+g \in \mathcal{L}^p$.

Também é fácil ver que

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leqslant |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Agora, seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Daí $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$. De fato,

$$\||f+g|^{p-1}\|_q^q = \int |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu = \int |f+g|^p < \infty \tag{1.7}$$

pois $f+g \in \mathcal{L}^p$. Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu = \||f|+|f+g|^{p-1}\|_1 \leqslant \||f|\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q = \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.8}$$

Análogamente

$$\int |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \leqslant \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.9}$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p\, d\mu \\
&\leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&= \int |f||f+g|^{p-1}\, d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leqslant \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Se $\|f+g\|_p = 0$, então

$$\|f+g\|_p = 0 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que $\|f+g\|_p \neq 0$ para obter

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como peq são expoentes conjugados, segue que $p - \frac{p}{q} = 1$. Portanto

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para $1 \leqslant p < \infty$. □

Agora, vamos provar que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leqslant p < \infty$.

Proposição 1.79. A aplicação $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0$ pois $|f| \geqslant 0$.

2. $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p \, d\mu = 0 \iff f = 0$ $(f \sim_\mu 0)$

3. $\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\lambda|^p |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} =$ $|\lambda| \|f\|_p$

4. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto $\|\cdot\|_p$ é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

Definição 1.80. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$

Definição 1.81. Sejam (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é convergente e converge para f se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$. Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

Definição 1.82. Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Teorema 1.83 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p$. Mostremos que (f_n) é convergente. Com efeito, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$. Esscolhendo ε de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{=n} \tag{1.10}$$

Defina $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$, pois $g \geqslant 0$ e

$$g = |f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n|$$

isto é, g é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis (f_n é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que $g \in \mathcal{L}^p$. De fato

$$\int |g|^p \, d\mu = \int g^p \, d\mu,$$

pois $g \geqslant 0$. Pela definição de g temos

$$\int g^p \, d\mu = \int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p \, d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p \, d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p \, d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p \, d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p \, d\mu$$

e utilizando definição da norma em $\mathcal{L}^p$ e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k\to\infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leqslant \liminf_{k\to\infty} \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{k} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leqslant \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right) < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}^p$. Agora seja, $E = \{x \in X\,;\, g(x) < \infty\} \in \mathfrak{F}$. Dito isso, $N = E^C = \{x \in X\,;\, g(x) = \infty\} \in \mathfrak{F}$. Mostremos que N tem medida nula. Com efeito, suponha que $\mu(N) > 0$, dessa forma

$$\int_X |g|^p \geqslant \int_N |g|^p = \infty\mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois $g \in \mathcal{L}^p$. Dessa forma $\mu(N) = 0$, isto é, $g < \infty$ em quase toda parte em X. Sendo assim, defina $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que $f \in \mathcal{L}^p$. Note que

$$f(x) = \left(f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| |\chi_E| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente, $|f|^p < g^p$. Logo

$$\int |f|^p \, d\mu \leqslant \int g^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}^p$. Por outro lado, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\
&= f_1(x) + \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\
&= \lim_{k \to \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\
&= \lim_{k \to \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x).
\end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$, então $\lim f_n = f$ em quase toda parte em X. É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \tag{1.11}$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in \mathcal{L}^p$, então $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

Isto prova que $\mathcal{L}^p$ é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue, $\mathcal{L}^\infty$ explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

Definição 1.84. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \eth, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^\infty$. Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|; x \in X\} = \inf\{M \geqslant 0\,;\, |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que f é uma função essencialmente limitada.

Observação: Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,;\, \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > M\} = 0)\}.$$

sto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X se, e somente se, existe $N \in \eth$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in N^{\mathcal{C}}$. Note que $\{x \in X\,;|f(x)| > M\} \subseteq N$, dessa forma

$$\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) \leqslant \mu(N) = 0$$

Portanto, $\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0$.

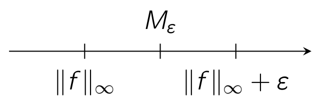
Reciprocamente, se $\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0$, então $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in \{|f(x)| > M\}^{\mathcal{C}}$, isto é, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X.

Proposição 1.85. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $f \in \mathcal{L}^\infty$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$, então existe $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X. Daí, como $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M_0 \text{ qtp em } X\}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ conseguimos encontrar $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X.



Como $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$, então

$$|f(x)| \leqslant M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ chegamos a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço vetorial normado

Proposição 1.86. A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_\infty \geqslant 0$ pois 0 é cota inferior de $\{M \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$.

2. $\|f\|_\infty = 0$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X, com $M_\varepsilon < \varepsilon$. Daí, $|f(x)| < \varepsilon$ em quase toda parte em X. Fazendo $\varepsilon \to 0$, encontramos

   $$|f(x)| \leqslant 0 \text{ qtp em } X$$

   Dessa forma, $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

   Reciprocamente, $\|0\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,;0 \leqslant M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3. $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em $\mathcal{L}^\infty$) Se $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ então as funções são limitadas em quase toda parte em X, dito isso, $f+g$ também é limitada em quase toda parte em X. Logo $f+g \in \mathcal{L}^\infty$.

   Por outro lado, como $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, então existem $M, \hat{M} \in \eth$ tais que $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$ e $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \notin M$ e $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ para todo $x \notin \hat{M}$. Seja $N = M \cup \hat{M} \in \eth$. Daí $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leqslant \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$. Além disso

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

   para todo $x \notin N$, com $\mu(N) = 0$. Dessa forma

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. □

Proposição 1.87 (Desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}^\infty$)**.** Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Demonstração. Note que se $g \in \mathcal{L}^\infty$ então $|g| \leqslant \|g\|_\infty$ em quase toda parte em X. Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu = \int |f| \, |g| \, d\mu \leqslant \int |f| \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \int |f| \, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que $\mathcal{L}^\infty$ também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

Teorema 1.88 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço completo

Demonstração. □

Agora vamos construir os espaços ℓ^p que são um caso particular dos espaços $\mathcal{L}^p$

Exemplo 1.89. Sejam $X = \mathbb{N}$, $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} \, ; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

...

Observação: Denomatomos o espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ por ℓ^p

Exemplo 1.90. $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ...

Vejamos mais alguma propiedades importantes dos espaços $\mathcal{L}^p$

Proposição 1.91. Sejam $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p < q < r \leqslant \infty$. Então

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$$

Demonstração. . . . □

Teorema 1.92 (Desigualdade de Interpolação)**.** Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p < q < r \leqslant \infty$. Então $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{L}^q$ e

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde $\lambda \in (0,1)$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \qquad \left(\text{i.e., } \lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}\right) \tag{1.12}$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $r = \infty$ Note que

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q} \in (0,1)$$

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$, tem-se que

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \, d\mu = \int |f|^{q-p} |f|^p \, d\mu \leqslant \int \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p = \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p < \infty.$$

Com isso $f \in \mathcal{L}^q$ e ainda mais

$$\|f\|_q^q \leqslant \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e como $\lambda = \frac{p}{q}$, segue que

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

– $r < \infty$ Note que multiplicando (1.12) por q, temos

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1.$$

Com isso, $\frac{p}{\lambda q}$ e $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ são expoentes conjungados. Dito isso, aplicando a Desigualdade de Hölder com $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$ temos que

$$\begin{aligned}
\int |f|^q \, d\mu &= \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q} \, d\mu \\
&= \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \\
&\leqslant \||f|^{\lambda q}\|_{\frac{p}{\lambda q}} \|f^{(1-\lambda)q}\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\
&= \left(\int |f|^{\lambda q \cdot \frac{p}{\lambda q}}\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^{(1-\lambda)q \cdot \frac{r}{(1-\lambda)q}}\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\
&= \left(\int |f|^p\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^q\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\
&= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Daí, $f \in \mathcal{L}^q$. Além disso

$$\|f\|_q^q \leqslant \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|^{(1-\lambda)q} \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim, mostrada a desiguldadde de interpolação. □

Proposição 1.93. Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q \leqslant \infty$. Então $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ e
$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$$

Demonstração. ... □

Teorema 1.94 (Desigualdade de Chebyshev)**.** Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então

$$\|f\|_p \geqslant \alpha[\,\mu\,(\{x \in X\,;\,|f(x)| > \alpha\})\,]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. ... □

Agora vamos ver um resultado sobre os espaços ℓ^p

Proposição 1.95. Sejam $0 < p < q \leqslant \infty$. Então $\ell^p \subseteq \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $q = \infty$

Seja $x \in \ell^p$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. É fácil ver que

$$|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ é cota superior de $x = (x_n)$. Dito isso

$$\|x\|_q = \|x\|_\infty = \sup|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo $x \in \ell^q$ e
$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p.$$

– $q < \infty$

Utilizando a Desigualdade de Interpolação com $r = \infty$ e $\lambda = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ para obter que $\ell^p = \ell^p \cap \ell^r \subseteq \ell^q$ (pelo caso $q = \infty$) e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p^{\frac{p}{q}}\|x\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \leqslant \|x\|_p^{\frac{p}{q}}\|x\|_p^{1-\frac{p}{q}} = \|x\|_p.$$

Assim, demonstrada a proposição. □

Os proximos resultados estão relacionados a densidade das funções simples em $\mathcal{L}^p$ e $\mathcal{L}^\infty$

Definição 1.96. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $E \subseteq X$ é dito denso em X se todo ponto de X é aderente a E. Isto é, dado $x \in X$ existe uma sequência (x_n) de elementos de E tal que $x_n \to x$.

Teorema 1.97. Seja $1 \leqslant p < \infty$. O conjunto das funções simples $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ com $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, n$ é denso em $\mathcal{L}^p$

Demonstração. Considere o conjunto

$$Y = \left\{ f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \, ; \mu(E_j) < \infty \right\}.$$

Note que dada uma função $f \in Y$ temos que

$$\int |f|^p \, d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \right| d\mu = \int \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \mu(E_j) < \infty.$$

Isto é, $f \in \mathcal{L}^p$. Consequentemente $Y \subseteq \mathcal{L}^p$.

Por outro lado, seja $f \in \mathcal{L}^p$ sabemos que $f = f^+ - f^-$ onde $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Além disso pelo Lema ?? temos que existem sequências $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$ de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ tais que

$$0 \leqslant \varphi_n^{\pm} \leqslant \varphi_{n+1}^{\pm} \text{ e } \varphi_n^{\pm} \to f^{\pm}.$$

É fácil ver que $(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \subseteq \mathcal{M}(X, \eth)$ é uma sequência de funções simples tal que

$$\lim(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \lim \varphi_n^+ + \lim \varphi_n^- = f^+ - f^- = f.$$

Seja $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim (φ_n) é uma sequência de funções simples tal que $\varphi_n \to f$. Perceba que

$$|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leqslant f^+ + f^- = |f|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f \in \mathcal{L}^p$, então

$$\int |\varphi_n|^p \, d\mu \leqslant \int |f|^p \, d\mu < \infty,$$

ou seja, $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{L}^p$. Consequentemente, denotando φ_n por

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j \chi_{E_j}$$

segue que

$$|a_j|^p \mu(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \mu(E_j) = \int \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \chi_{E_j} \, d\mu = \int |\varphi_n|^p \, d\mu < \infty.$$

Isto nos diz que $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, m_n$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(\varphi_n) \subseteq Y$. Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \|\varphi_n - f\|_p^p = \lim \int |\varphi_n - f|^p \, d\mu = \int \lim |\varphi_n - f|^p \, d\mu = 0$$

pois

$$\lim \varphi_n = f \text{ e } |\varphi_n - f|^p \leqslant 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto Y é denso em $\mathcal{L}^p$, já que dada uma função $f \in \mathcal{L}^p$, encontramos uma sequência em Y que converge para f. $\square$

Teorema 1.98. O conjunto das funções simples é denso em $\mathcal{L}^\infty$.

Demonstração. □

O proximos resultados são uma generalização da Desigualdade de Hölder

Lema 1.99. Sejam $0 < p, q \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$. Então $fg \in \mathcal{L}^r$ e

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração. ... □

Proposição 1.100 (Desigualdade de Hölder Generalizada)**.** Sejam $0 < p_1, \dots, p_N \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \cdots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$ para todo $j = 1, \dots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_N\|_{p_N}$$

Demonstração. Segue por indução do lema anterior. □

CAPÍTULO DOIS

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev, suas principais propriedades e exemplos que ilustram sua aplicabilidade em problemas de fronteira e outros contextos relevantes da matemática aplicada.

2.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo

Definição 2.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega\,; \varphi(x) \neq 0\}}$$

Além disso, se $\operatorname{supp}\varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega\,; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp}\varphi$, então $(\operatorname{supp}\varphi)^{\mathcal{C}} \subseteq \{x \in \Omega\,; \varphi(x) = 0\}$. Ou seja se $x \notin \operatorname{supp}\varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Além disso, se Ω é um aberto, então φ se anula em $\partial\Omega$.

Definição 2.2. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos o espaço das funções com a k-ésima derivada contínua por

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\,; f \text{ é contínua, } f^{(k)} \text{ existe e é contínua}\}$$

Observação: O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

Definição 2.3. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$

A definição abaixo será âmplamente utilizada nesse capítulo

Definição 2.4. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,;\, \operatorname{supp} f \text{ é compacto}\}$$

Além disso definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ com suporte compacto.

Os resultados abaixos são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

Teorema 2.5 (Integração por partes em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular e $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \, dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta pra dentro em $\partial\Omega$.

Demonstração. [1] □

Teorema 2.6. (coordenadas polares) ...

2.2 Motivação

2.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

Definição 2.7. Sejam I um intervalo aberto, possívelmente ilimitado e $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$. Dizemos que v é a derivada fraca de u, se

$$\int_I u\phi' \, dx = -\int_I v\phi \, dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

Denotamos $u' = v$ e diremos v é a derivada de u no sentido fraco.

Observação: (sobre a notação dx e $d\mu$)

Observação: (função teste)

Exemplo 2.8. A função $u : I = (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é derivavel no sentido usual. Já que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{u(1+h)}{h} = 1 \neq 0 = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(1+h)}{h}.$$

Porem, possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ temos

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = \int_0^1 x\phi'\,dx + \int_1^2 \phi'\,dx = x\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi\,dx + \phi\Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi\,dx - \phi(1) = -\int_0^1 \phi\,dx$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral.

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = -\left(\int_0^1 1\phi\,dx - \int_1^2 0\phi\,dx\right) = -\int_0^2 v\phi\,dx$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 2.9. A função $u : I = (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possuí derivada fraca. ... (continuar)

Com a noção de derivada fraca, estamos prontos para definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

Definição 2.10. Seja I um intervalo aberto, possívelmente ilimitado. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p} = \{u \in \mathcal{L}^p\,;\, u' \in \mathcal{L}^p\}$$

onde u' é a derivada de u no sentido fraco

2.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é definir a derivada fraca de ordem superior, generalizar os espaços da seção anterior para funções definidas em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e explorar algumas propiedades elementares.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} u\phi\nu_i\,dS - \int_\Omega \phi\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula em $\partial\Omega$, como mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega \phi\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx. \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Além disso, se u for de classe $\mathcal{C}^k$ com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\phi. \tag{2.2}$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha\phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (2.1) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (2.2) ainda é válida, mesmo se u não for de classe $\mathcal{C}^k$. Note que o lado esquerdo de (2.1) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. O problema é que se u não é uma função de classe $\mathcal{C}^k$ então o lado direito de (2.1) não faz sentido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que (2.1) é válida quando substituimos $D^\alpha u$ por v.

Definição 2.11 (Derivada fraca em Ω)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, denotada por

$$D^\alpha u = v$$

dado que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi \, d\mu. \tag{2.3}$$

para toda função de teste $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (2.3) para toda ϕ função de teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (2.3), então u não possui a α-ésima derivada parcial fraca.

Lema 2.12. Seja α um multi-índice. Se v e $\tilde{v}$ são ambas α-ésimas derivadas parciais fracas de uma função u. Então

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v} \phi \, dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Daí

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0$$

isto é

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto $v = \tilde{v}$ qtp em Ω. ☐

Exemplo 2.13. Considere a função u do exemplo 2.8, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

é a derivada de u no sentido fraco. Porem a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porem v e $\tilde{v}$ são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podmos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 2.14. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,;\text{existem } g_i : \Omega \to \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, d\mu = -\int g_i \phi \, d\mu \right\}$$

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, indutivamente, e pela derivada fraca, veremos as duas e mostraremos que são equivalentes

Definição 2.15. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,; D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k\}$$

com $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Ou

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega)\,; D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1 \right\}$$

onde $D^\alpha u$ é a α-ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert[1]

Definição 2.16. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leqslant p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_\infty$$

para $p = \infty$.

Observação: $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$

Observação: (ainda vamos verificar que é uma norma, precisamos de um teorema antes)

Observação: (norma equivalente)

Exemplo 2.17. Seja $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto |x|^{-\alpha}.$$

Para quais valores de $\alpha > 0$, n e p, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de $\mathbf{0}$ com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

[1] espaço vetorial completo com produto interno

e daí, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{|x|^{\alpha+2}}, \ldots, \frac{-\alpha x_n}{|x|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes, temos

$$\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i \, dS$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ denota o vetor normal que aponta para dentro em $\partial B[\mathbf{0}, \varepsilon]$. Agora se $\alpha + 1 < n$, $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando Du, temos

$$\int_\Omega |Du|\, dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\, dx.$$

Transformando em coordenadas polares, conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\, dx = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\, dSdr = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}}\, dSdr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dSdr.$$

Onde a integral de superficie, é igual a area da esfera n-dimensional de raio r, dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

que por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n) r^{n-1}$. Dessa forma

$$\int \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dSdr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2}\, dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim

$$\int_\Omega |Du|\, dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i \, dS \right| \leqslant \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u||\phi||\nu_i|\, dS \leqslant \|\phi\|_\infty \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leqslant \|\phi\|_\infty \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha}\, dS,$$

onde essa ultima integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i \, dS \right| \leqslant C\varepsilon^{n-1-\alpha} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n - 1$. Além disso, $|Du(x)| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha + 1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geqslant n$.

Teorema 2.18 (Propiedades da derivada fraca)**.** Seja $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Então

(a) $D^{\beta}(D^{\alpha}u) = D^{\alpha}(D^{\beta}u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$.

(b) $D^{\alpha}u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^{\alpha}(\gamma u + v) = \gamma D^{\alpha}u + D^{\alpha}v$$

(d) se Ω_0 é um aberto de Ω, então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$

(e) se $\eta \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^{\alpha}(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^{\sigma}\eta D^{\alpha-\sigma}u \tag{2.4}$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leqslant \alpha$ significa $\sigma_j \leqslant \alpha_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^{\beta}D^{\alpha}u = D^{\alpha+\beta}u$. A demonstração para $D^{\alpha}D^{\beta}u$ é análoga. Com efeito

$$\int_{\Omega} D^{\alpha}uD^{\beta}\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} uD^{\alpha}D^{\beta}\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} uD^{\alpha+\beta}\phi\, dx.$$

Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável, então o operador D^{α} é a α-ésima derivada parcial no sentido usual. Dessa forma $D^{\beta}D^{\alpha}u = D^{\alpha+\beta}u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca obtemos

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} uD^{\alpha+\beta}\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta}u\, dx = (-1)^{|\beta|}\int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta}u\, dx.$$

Portanto $D^{\beta}D^{\alpha}u = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^{\alpha}u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β com $|\beta| \leqslant k - |\alpha|$ tal que $D^{\beta}(D^{\alpha}u) \notin \mathcal{L}^p$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta}u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^{\gamma}u \in \mathcal{L}^p$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leqslant k$. Em particular como $|\beta| \leqslant k - |\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leqslant k$. Portanto $D^{\alpha}u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_{\Omega}(\gamma u + v)D^{\alpha}\phi\, dx = \int_{\Omega}\gamma uD^{\alpha}\phi\, dx + \int_{\Omega} vD^{\alpha}\phi\, dx = \gamma\int_{\Omega} uD^{\alpha}\phi\, dx + \int_{\Omega} vD^{\alpha}\phi\, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas integrais obtemos

$$\gamma\int_{\Omega} uD^{\alpha}\phi\, dx + \int_{\Omega} vD^{\alpha}\phi\, dx = \gamma(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\phi D^{\alpha}u\, dx + (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\phi D^{\alpha}v\, dx = \int(\gamma D^{\alpha}u + D^{\alpha}v)\phi\, dx$$

Portanto $D^{\alpha}(\gamma u + v) = \gamma D^{\alpha}u + D^{\alpha}v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega_0 \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega_0}|u|^p\, dx \ \text{ e } \int_{\Omega_0}|D^{\alpha}u|^p\, dx \ \ (\forall\alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leqslant k)$$

são finitas. De fato
$$\int_{\Omega_0} |u|^p\,dx \leqslant \int_\Omega |u|^p\,dx < \infty$$
e
$$\int_{\Omega_0} |D^\alpha u|^p\,dx \leqslant \int_\Omega |D^\alpha u|^p\,dx < \infty \ \ (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leqslant k),$$
ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$.

(e) Para mostrar que (2.4) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$. Com efeito para $|\alpha| = 1$, como η e φ são funções infinitamente diferenciáveis no sentido usual, temos que $D^\alpha(\eta\varphi) = \phi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \phi$. Dessa forma
$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\,dx = \int_\Omega u D^\alpha(\eta\phi) - \int_\Omega u\phi D^\alpha \eta\,dx.$$
Como η e ϕ tem suporte compacto, então $D^\alpha(\eta\phi)$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral obtemos
$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\,dx = -\int_\Omega \eta\phi D^\alpha u\,dx - \int_\Omega u\phi D^\alpha \eta\,dx = -\int_\Omega (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta)\phi\,dx.$$
Portanto $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$ como queriamos mostrar.

Agora seja $m < k$ e suponha que (2.4) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant l$ e toda função de teste η. Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m + 1$. Então α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Daí
$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\,dx = \int_\Omega \eta u D^{\beta+\gamma}\phi\,dx = \int_\Omega \eta u D^\beta(D^\gamma \phi)\,dx = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^\beta(\eta u) D^\gamma \phi\,dx.$$
Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^\beta(\eta u)$ e a γ-ésima derivada fraca. Assim
$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\,dx = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega \left[\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u\right] D^\gamma \phi\,dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|}\int_\Omega \left[\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma} D^\gamma(D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u)\right]\phi\,dx$$
Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo
$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \left[\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}\left(D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u\right)\right]\phi\,dx \tag{2.5}$$
onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório dentro da integral da seguinte forma
$$\sum_{\gamma\leqslant\rho\leqslant\alpha}\binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0\leqslant\sigma\leqslant\beta}\binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u$$
que ainda pode ser expandido em quatro somatórios
$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\leqslant\rho\leqslant\beta}\binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\beta<\rho\leqslant\alpha}\binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ + \sum_{0\leqslant\sigma<\beta}\binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma\leqslant\sigma\leqslant\beta}\binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u.\end{aligned} \tag{2.6}$$
Porem, note que $0 \leqslant \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leqslant \sigma$ significa que $0 \leqslant \sigma_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $i = 1, \ldots, n$ tal que $\sigma_i < \gamma_i$. Como $|\gamma| = 1$, suponha sem perda de generalidade que $\gamma = e_1$. Dessa forma, para $i = 1$
$$0 \leqslant \sigma_1 < 1$$

como $\sigma_i \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \ldots, n$

$$0 \leqslant \sigma_i < 0$$

que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma $\beta < \rho \leqslant \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (2.6) pode ser escrito da seguinte forma

$$\eta D^{\alpha} u + \sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^{\rho} \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^{\alpha} \eta. \tag{2.7}$$

Por fim, ao menos de uma mudança de variaveis, escrevemos (2.7) como

$$\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u.$$

Pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (2.5) temos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^{\alpha}(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u$$

como queriamos mostrar. □

Com os resultados obtidos, é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ formam um espaço de Banach.

Teorema 2.19. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço vetorial normado.

Teorema 2.20. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$ com $1 \leqslant p < \infty$ é completo

2.5 Aproximações

Não é ideal ficar voltando o tempo todo à definição de derivadas fracas. Para explorar as propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev, precisamos de métodos sistemáticos para aproximar funções nesses espaços por funções mais suaves. A técnica de molificação, que envolve a convolução de uma função com uma molificadora suave e com suporte compacto, oferece essa ferramenta. Esse processo resulta em uma sequência de funções suaves que convergem para a função original nas normas de Sobolev, permitindo a aproximação de funções com regularidade fraca por funções suaves. As molificadoras são essenciais na teoria dos espaços de Sobolev, possibilitando o estudo de soluções fracas para equações diferenciais parciais e estabelecendo resultados importantes de densidade.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

conhecida como molificador de Friedrich. Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

essa função η_ε é a função que será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Teorema 2.21 (Aproximação local por funções suaves)**.** Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \quad \text{em } \Omega_\varepsilon$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\, d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então

(a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ para cada $\varepsilon > 0$

(b) $u^\varepsilon \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$

Demonstração. ... □

Exemplo 2.22. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $I = (-1, 1)$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$ (caso análogo ao que foi feito no Exemplo 2.8). Vamos utiizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u. Seja $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{se } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$$

isto é

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)\, dx\right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Daí definimos a função molificadora $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon\, dx = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}\eta = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u. Com efeito

$$u^\varepsilon(x) = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x) u(x-y)\, dy$$

A Figura 2.1 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ε

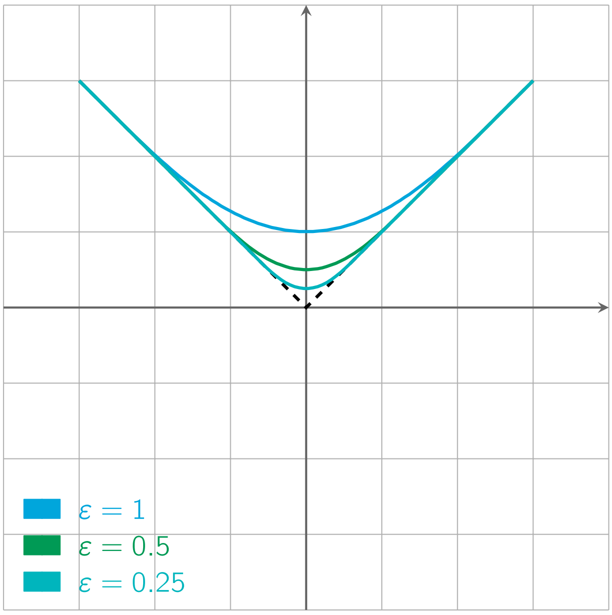


Figura 2.1: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ε com $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$
Fonte: Autoral

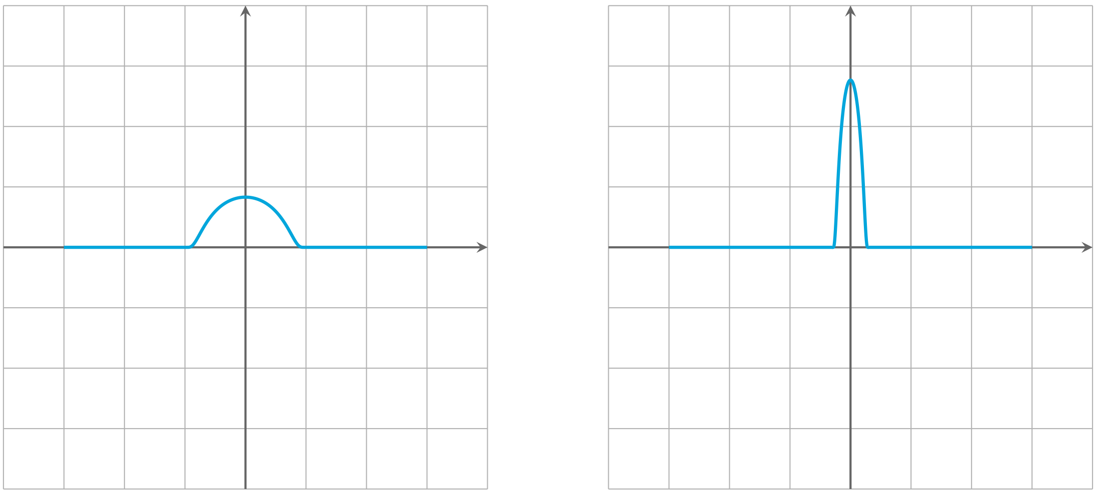


Figura 2.2: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$
Fonte: Autoral

Observação: (converge para a função delta de Dirac)

Exemplo 2.23. Seja $\Omega = (-1,1)\times(-1,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não é diferenciável, mas possui derivada fraca em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para $0 < p < 2$. Com efeito, note que

$$\dots$$

Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ quando $0 < p < 2$ dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\text{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}$$

onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Com efeito, note que

$$\dots$$

Além disso

$$\int_\Omega |D^{e_i}(x_1,x_2)|^p \, dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{2}\text{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\right|^p dx_i dx_j = \frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\text{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini

$$\frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\text{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1} dx_j \int_{-1}^{1} |\text{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-1}}\int_{-1}^{1} |\text{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i$$

...

$$\frac{1}{2^{p-1}}\int_{-1}^{1} |\text{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-2}}\int_{0}^{1} x_i^{\frac{p}{2}+1} \, dx = \frac{1}{2^{p-2}}\left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}-1}\right]$$

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando $p < 2$. Portanto $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \dots$$

e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u.

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_\Omega \eta(x_1, x_2)u(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \, dy$$

Utilizando um metodo numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε. A figura 2.3 mostra o gráfico de u, onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε.

Teorema 2.24. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então existem funções $u_n \in \mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tais que

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. □

Teorema 2.25. Sejam Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então existem funções $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tais que

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

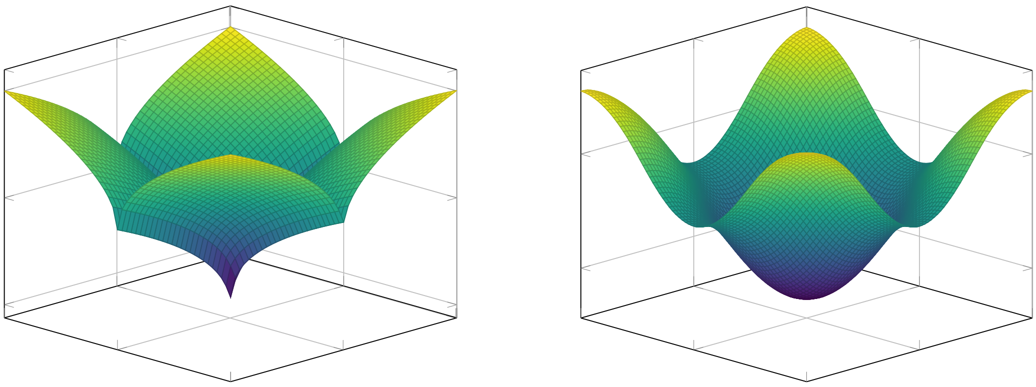


Figura 2.3: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$
e à direita sua aproximação suave u^{ε} com $\varepsilon = 0.5$
Fonte: Autoral

BIBLIOGRAFIA

[1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.

[2] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.

[3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[4] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.

[5] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: `1604.02484 [math.HO]`.

[6] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.

[7] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.

[8] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.