CONTEÚDO

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{B}$	Álgebra de Borel
$\widehat{\mathfrak{B}}$	Álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$
χ_E	Função caracteristica do conjunto E
$\eth$	σ-álgebra
f^+	Parte positiva da função f
f^-	Parte negativa da função f
$f \sim_\mu g$	f e g são μ-equivalentes i.e., $f = g$ em quase toda parte em X.
$\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$	Espaço das funções integraveis em relação a medida μ.
$\mathcal{L}^p(X, \eth, \mu)$	Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$.
$\mathcal{M}(X, \eth)$	Espaço das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis
$\mathcal{M}^+(X, \eth)$	Espaço das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas
$\mu(E)$	Medida do conjunto E
$N_\mu(\,\cdot\,)$	Semi-norma em relação a medida μ.
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta extendida i.e., $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de σ-álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\eth$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra se satisfaz as seguintes condições

1. $\emptyset, X \in \eth$
2. Se $S \in \eth$ então $S^{\mathcal{C}} = X \smallsetminus S \in \eth$
3. Se (S_n) é uma sequência de elementos de $\eth$ então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

O par $(X, \eth)$ é dito espaço mensurável e os subconjuntos de $\eth$ são chamados de conjuntos mensuráveis (ou $\eth$-mensuráveis)

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não vazio e considere $\eth = \{\emptyset, X\}$. Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. Com efeito,

1. $\emptyset, X \in \eth$ pela definição.
2. $\emptyset^{\mathcal{C}} = X \in \eth$ e $X^{\mathcal{C}} = \emptyset \in \eth$
3. $\mathrm{U}\emptyset = \emptyset \in \eth$ ou $\mathrm{U}X = X \in \eth$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. $\eth = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ não é uma σ-álgebra de X pois $\{a, b\}^{\mathcal{C}} = \{c, d\} \notin \eth$

Observação: Seja (S_α) uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_\alpha S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_\alpha S_\alpha^{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_\alpha S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcup_\alpha S_\alpha^{\mathcal{C}}$$

Dessa forma, se (S_n) é uma sequência de elementos de uma σ-álgebra, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

Observação:

Observação:

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto não enumerável e considere

$$\eth = \{S \subseteq X\,; S \text{ é enumerável ou } S^{\mathcal{C}} \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. De fato

1. $\emptyset \in \eth$ pois é enumerável e $X \in \eth$ pois $X^{\mathcal{C}} = \emptyset$ que é enumerável
2. se $S \in \eth$ temos as seguintes possibilidades

   S é enumerável, então $S^{\mathcal{C}} \in \eth$ pois $(S^{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}} = S$ é enumerável

   $S^{\mathcal{C}}$ é enumerável, então pela definição da σ-álgebra, $S^{\mathcal{C}} \in \eth$
3. Seja (S_n) uma sequência de subconjuntos em $\eth$, isto é, $S_n \in \eth$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aqui temos três possibilidades a serem consideradas

   S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável, portanto está em $\eth$

   $S_n^{\mathcal{C}}$ é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_{n_0}^{\mathcal{C}}$$

   é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável $S_{n_0}^{\mathcal{C}}$, portanto está em $\eth$

   Se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

   $$S_i \subseteq X \ \text{ e } \ S_j^{\mathcal{C}} \subseteq X \ \text{ são enumeráveis}$$

   podemos afirmar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ não é enumerável, pois $S_j^{\mathcal{C}}$ é enumerável, e como X não é enumerável, segue que S_j também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}}$ é enumerável. Com efeito, observe que

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_j^{\mathcal{C}}$$

   ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$.

Dessa forma, $\eth$ é uma σ-álgebra

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio. Se $\eth_1$ e $\eth_2$ são σ-álgebras de X então $\eth = \eth_1 \cap \eth_2$ também é uma σ-álgebra de X.

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de X, o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor σ-álgebra contendo este.

Proposição 1.6. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Então a interseção de todas as σ-álgebras de subconjuntos de X que contem A é a menor σ-álgebra que contém A.

Demonstração. □

Agora definimos uma σ-álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

Definição 1.7. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathfrak{B}$ gerada por todos os intervalos abertos (x, y) em $\mathbb{R}$, ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha)\,; x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathfrak{B} = \bigcap_\alpha \mathfrak{F}_\alpha,$$

onde cada $\mathfrak{F}_\alpha$ é uma σ-álgebra que contem A.

Equivalentemente, podemos dizer que $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo $\mathfrak{B}$ dessa forma é possível ver que não precisamos que $\mathfrak{B}$ seja uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ mas sim de qualquer espaço topólogico $(X, \mathcal{T})$, nesse caso dizemos que $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada pela topólogia $\mathcal{T}$. Nesse trabalho a notação $\mathfrak{B}$ será utilizada apenas para a álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

Proposição 1.8. $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos intervalos fechados

Demonstração. □

Exemplo 1.9. Alguns exemplos de conjuntos que estão em $\mathfrak{B}$ são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em $\mathfrak{B}$ pois se $B = \{x_1, x_2, \dots\}$, então $B = \bigcup_{n=1}^\infty \{x_n\}$ que é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois cada $\{x_n\}$ é um conjunto fechado.
- Todo intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois $[a, b) = \bigcap_{n=1}^\infty (a - \frac{1}{k}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^\infty (a, b + \frac{1}{n})$.

A sensação é de que a álgebra de Borel contem todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, isto é $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Porem este não é o caso, pois existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são bastante dificeis de definir (vide [??]) que não estão em $\mathfrak{B}$. Mas se esses conjuntos são tão dificeis de definir por que precisamos de uma σ-álgebra que exclui eles.

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propiedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uma propiedade importante não é satisfeita, mas restrigindo para o espaço $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ conseguimos definir a mesma medida de forma que todas propiedades são satisfeitas.

Definição 1.10. O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é dita reta extendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Observação: Operações com ∞ em $\overline{\mathbb{R}}$

Proposição 1.11. Seja $\bar{\mathbb{R}}$ a reta estendida. Considere $E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$, $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\widehat{\mathfrak{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$ com E variando na álgebra de Borel $\mathfrak{B}$. Então $\widehat{\mathfrak{B}}$ é uma σ-álgebra em $\overline{\mathbb{R}}$ denominada álgebra estendida de Borel.

Demonstração. □

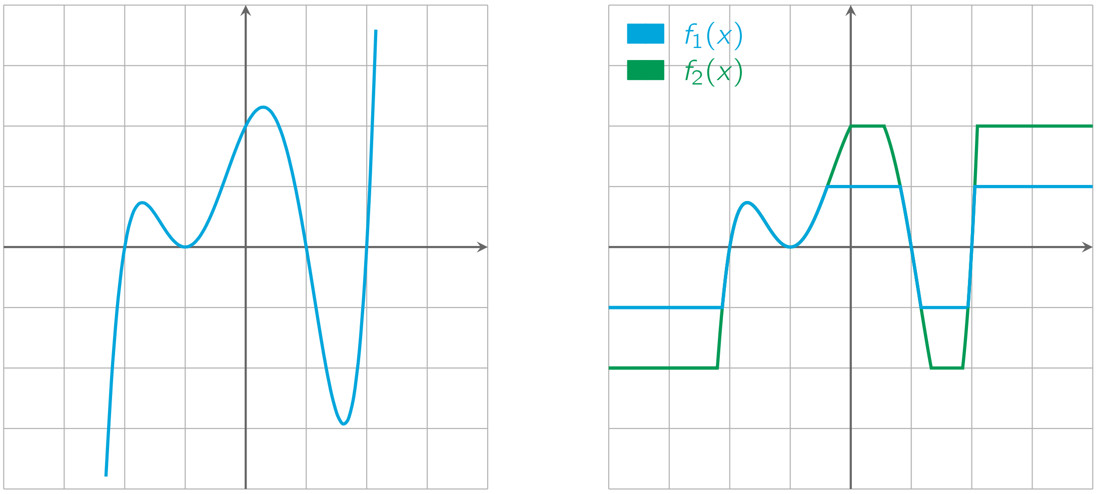


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico de f_1 e f_2
Fonte: Autoral

Definição 1.12. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser $\mathfrak{F}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\}$$

pertence a σ-álgebra.

Exemplo 1.13. A função constante $x \mapsto c$ é mensurável. Com efeito, se $\alpha \geqslant c$, então

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{F}$$

pois o único valor que a função assume é c. Se $\alpha < c$, então

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{F}$$

Exemplo 1.14. A função caracteristica χ_S de um subconjunto $S \in \mathfrak{F}$ é mensurável

Exemplo 1.15. Se $f : X \to \mathbb{R}$ com $X \in \mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela contínuidade de f, o conjunto $f^{-1}((\alpha, \infty))$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma $\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{B}$. Portanto f é mensurável.

Exemplo 1.16. Dada uma função f mensurável. A função *truncagem de f* (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leqslant n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$

1.2 Medida

Definição 1.17. Uma medida é uma função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geqslant 0$ para todo $S \in \eth$
3. se $(S_n) \subseteq \eth$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Exemplo 1.18. Seja $(\mathbb{N}, \eth)$ um espaço mensurável, onde $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por $\mu(E) = \#E$, se E é finito, e $\mu(E) = \infty$ se E é infinito, é uma medida em $\eth$. Com efeito,

1. $\mu(\emptyset) = 0$ por vacuidade
2. $\mu(E) \geqslant 0$ por definição
3. .

1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$

Nosso objetivo agora é construir uma medida para $\mathbb{R}$ e mostrar o motivo de utlizar a algebra de Borel ao inves de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definição 1.19. O comprimento de um intervalo aberto I é uma função ℓ dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. O tamanho de A deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. A definição abaixo formaliza essa ideia

Definição 1.20. A medida exterior $m(\,\cdot\,)$ de um conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é definida por

$$m(A) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)\,;\, I_1, I_2, \dots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

Essa definição envolve uma suoma infinita de uma sequência $t_1, t_2, \dots,$ de elementos de $[0, \infty]$, que é ∞ se pelo menos algum $t_k = \infty$, ou se a série definida pelas somas parciais de t_k é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Exemplo 1.21. Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto finito. Dado $\varepsilon > 0$ defina a sequência I_k de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leqslant n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo, $m(A) \leqslant 2\varepsilon n$. Como ε é arbitrário, temos que $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

Proposição 1.22. Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto enumerável. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ defina a sequência

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

Dessa forma, $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que $m(A) < 2\varepsilon$. Pelo fato de ε ser arbitrário, temos que $m(A) = 0$. □

Uma outra propiedade da medida exterior é sua invariância a translação

Proposição 1.23. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a\,;\, a \in A\}$$

Demonstração. Seja $I_1, I_2, \ldots,$ uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso $t + I_1, t + I_2, \ldots$, é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem $t + A$. Logo

$$m(t + A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que $m(t + A) \leqslant m(A)$.

Para verificar a desigualdade na outra direção note que $A = -t + (t + A)$, então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t + A)) \leqslant (t + A).$$

Portanto $m(A) = m(t + A)$ □

1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

The "point"of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ fixo.

Definição 1.24. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem ($\#\varphi(X) < \infty$)

Uma função φ simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{1.1}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função caracteristica do conjunto $E_j \in \mathfrak{F}$. Essa representação é única pelo fato de todos a_j serem distintos, os conjuntos E_j serem disjuntos para todo $j = 1, \ldots, n$, além disso, $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Definição 1.25. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de φ em relação a μ por

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

Observação: Adotamos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 indepdendente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

Lema 1.26. Dadas funções simples $\varphi, \psi \in M^+(X, \mathfrak{F})$ e $c \geqslant 0$ tem-se

(a) $\displaystyle\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$

(c) A aplicação $\lambda(E) = \displaystyle\int \varphi\chi_E \, d\mu$ para todo $E \in \mathfrak{F}$ é uma medida em $\mathfrak{F}$.

Demonstração.

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu.$$

Com efeito, para $c = 0$,

$$\int c\varphi \, d\mu = 0 = c \int \varphi \, d\mu.$$

por outro lado, para $c > 0$, podemos escrever $c\varphi$ da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representaçao para $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessáriamente é a representação padrão, pois é possível que existam $j_0, j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ e $k_0, k_1 \in \{1, \ldots, m\}$, tais que $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$.

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k \,;\, j \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por c_h com $h = 1, \ldots, \#H$, e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos G_h são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório $\widetilde{\Sigma}$ está relacionado aos indices $1 \leqslant j \leqslant n$ e $1 \leqslant k \leqslant m$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de $\varphi + \psi$ por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h \chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi)\, d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\
&= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)
\end{aligned}$$

como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \quad e \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

(c) Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E\, d\mu$$

é uma medida em $\mathfrak{F}$. Com efeito,

1. $\lambda(\emptyset) = \displaystyle\int \varphi \chi_\emptyset\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$

2. Note que como $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ os elementos a_j na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que $0 \leqslant \varphi(x)$ para todo $x \in X$, daí

$$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

porem, como os conjuntos E_j são disjuntos, existe um único $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ tal que $x \in E_{j_0}$. Dessa forma, para todo $j \neq j_0$, $\chi_{E_j}(x) = 0$, então

$$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi\chi_E \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E \cap E_j) \geqslant 0$$

pois mostramos que $a_j > 0$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ e μ é uma medida.

3. Considere $(F_k) \subseteq \eth$ uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi\chi_{\cup F_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi\chi_{F_k} \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.27. A função

$$\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porem essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utlizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido De fato, considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$ onde $\mathfrak{B}$ é a álgebra de Borel e μ é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} \, d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Agora, podemos extender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negatíva (não necessáriamente simples)

Definição 1.28. A integral de uma função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ em relação a μ é definida por

$$\int f \, d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi \, d\mu$$

onde φ são funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ tais que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$.

Além disso, definimos a integral da função f sobre um conjunto mensurável

Definição 1.29. A integral de $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ sobre um conjunto $E \in \eth$ é dada por

$$\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu$$

...

Lema 1.30. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $E, F \in \eth$. Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se $f \leqslant g$ tem-se
$$\int f \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$$

(b) se $E \subseteq F$ tem-se
$$\int_E f \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu$$

Demonstração.

(a) Seja φ uma função simples em M^+, então

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu = \int g \, d\mu$$

(b) Como $f\chi_E \leqslant f\chi_F$, segue do item anterior que

$$\int f\chi_E \, d\mu \leqslant \int f\chi_F \, d\mu,$$

dito isso
$$\int_E F \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstraado a seguir.

Teorema 1.31 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para f, então,

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ onde $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \eth)$, pelo corolário ?? temos que $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Pela monotonicidade da sequência $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, pelo item **(a)** do lema anterior

$$\int f_n \, d\mu \leqslant \int f_{n+1} \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dito isso
$$\lim \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu.$$

Por outro lado, seja $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ e considere

$$A_n = \{x \in X\,;\, f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)\} = \{x \in X\,;\, [f_n - \alpha\varphi](x) \geqslant 0\}$$

como f_n e φ são funções mensuráveis, temos que $A_n \in \eth$. Além disso, $A_n \subseteq A_{n+1}$ já que $f_n \leqslant f_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0,1)$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leqslant \int_{A_n} f_n \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu. \tag{1.2}$$

Dessa forma, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X, segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi\chi_E \, d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi\chi_{\cup A_n} \, d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi\chi_{A_n} \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

... fazendo $n \to \infty$ em 1.2

$$\alpha \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de φ ser uma função simples tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ tem-se que

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

□

O Lema 1.26 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, tambem é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

Corolário 1.32. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $c > 0$, então são válidas as seguintes afirmações

(a) $\displaystyle\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c = 0$

$$\int cf\, d\mu = 0 = c \int f\, d\mu.$$

Se $c > 0$, considere (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ convergindo para f (lema ??). Dito isso, $(c\varphi_n)$ é um sequência monótona crescente que converge para cf. Pelo Lema 1.26 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf\, d\mu = \lim \int c\varphi_n\, d\mu = c \lim \int \varphi_n\, d\mu = c \int f\, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funçoes simplies em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ que convergem para f e g respectivamente. Dessa forma $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f + g$. Portanto

$$\int (f+g)\, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \lim \int \varphi_n\, d\mu + \lim \int \psi_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

Lema 1.33 (Lema de Fatou)**.** Se $(f_n) \subseteq M^+(X, \mathfrak{F})$, então

$$\int \liminf f_n\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$, dessa forma $g_m \leqslant f_n$ para todo $m \leqslant n$. Sendo assim,

$$\int g_m\, d\mu \leqslant \int f_n\, d\mu$$

para todo $m \leqslant n$. Desse modo

$$\int g_m\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu.$$

Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para seu supremo, ou seja, $\liminf f_n$. Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n\, d\mu = \lim \int g_m\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessáriamente simples

Corolário 1.34. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\lambda(E) = \int f\chi_E\, d\mu$$

é uma medida.

Demonstração.

1. $\lambda(\emptyset) = \displaystyle\int_{\emptyset} f\, d\mu = \int f\chi_{\emptyset}\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0.$

2. Como $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ temos que $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu \geqslant \int_E 0\, d\mu = 0.$

3. Sejam E_n uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathfrak{F}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e considere f_n definida por
$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$
Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que
$$\int f_n\, d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$
Além diso, podemos escrever
$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k} = f\chi_E$$
desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos.
Por fim, como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ que converge para $f\chi_E$, pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que
$$\lambda(E) = \int f\chi_E\, d\mu = \int \lim f_n\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k}$$

Portanto, λ é uma medida. □

Corolário 1.35. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,
$$\int f\, d\mu = 0$$

Demonstração. Suponha que $\displaystyle\int f\, d\mu = 0$ e considere o conjunto
$$E_n = \left\{ x \in X\,;\, f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \geqslant \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Note que
$$0 = \int f\, d\mu \geqslant \frac{1}{n} \int \chi_{E_n}\, d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geqslant 0.$$
Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso
$$E = \{x \in X\,;\, f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
pois se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, logo
$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim, $x \in E$.

Por outro lado, se $x \in E$, temos que $f(x) > 0$. Utilizando a propiedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é, $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como queriamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que (E_n) é uma sequência crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$, para todo $x \in E^{\mathcal{C}}$ com $\mu(E) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ em quase toda parte em X. Se $E = \{x \in X\,;\, f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Sendo assim, considerando $f_n = n\chi_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temo que $f \leqslant \liminf f_n$ e pelo Lema de Fatou

$$0 \leqslant \int f\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f\, d\mu = 0.$$

$\square$

Corolário 1.36. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então a aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua em relação a μ, isto é, se $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é, $f\chi_E = 0$ em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu = 0.$$

$\square$

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1.37. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ que converge em quae toda parte de X para a função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$$

Demonstração. Seja N um conjunto de medida nula. Suponha que (f_n) converge para f em todo o pontos de $M = N^{\mathcal{C}}$. Dessa forma, a sequência $(f_n\chi_M)$ converge para $f\chi_M$, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f\chi_M \, d\mu = \lim \int f_n\chi_M \, d\mu.$$

Além disso, podemos escrever f e f_n da seguinte forma

$$f = f\chi_M + f\chi_N \ \text{ e } \ f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N,$$

pois $M = N^{\mathcal{C}}$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f\chi_N$ e $f_n\chi_N$ são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.35, segue que

$$\lim \int f_n \, d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

Corolário 1.38. Seja (g_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. Então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \cdots + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g_n \geqslant 0$, temos que (f_n) é uma sequência crecente que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu$$

Portanto

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

Definição 1.39. O conjunto $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ das funções integráveis consite em todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, tai que as integrais

$$\int f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \int f^- \, d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de f em relação a μ por

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

e se E é um conjunto mensurável

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Qualquer representação de f como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja f uma função integravel e escreva f como $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções integráveis não negativas, então

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ \, d\mu + \int f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f^- \, d\mu.$$

Como $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, segue que

$$\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.$$

Da mesma forma que definimos um medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exibe o lema abaixo

Lema 1.40. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. A aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de f (em relação a μ).

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+(X, \eth, \mu)$, pelo Corolário ?? temos que as funções $\lambda^+, \lambda^- : \eth \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- \, d\mu.$$

são medidas em $\eth$ e são finitas pelo fato de f ser uma função integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ temos que λ é uma carga. $\square$

Como a aplicação λ definida acima é uma carga, vemos que se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, então

$$\int_E f\, d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propiedades elementares das integrais de funções mensuráveis

Teorema 1.41. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Além disso

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leqslant \int |f|\, d\mu. \tag{1.3}$$

Demonstração. Seja f uma função integrável, mostremos que $|f|$ também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \quad \text{e} \quad |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu$$

é finita pois f é integrável, e

$$\int |f|^-\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$$

que é finita. Portanto $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que $|f|$ é integrável, dessa forma

$$f^+ \leqslant f^+ + f^- = |f|$$
$$f^- \leqslant f^+ + f^- = |f|$$

sendo assim

$$\int f^+\, d\mu \leqslant \int |f|\, d\mu$$
$$\int f^-\, d\mu \leqslant \int |f|\, d\mu$$

ambas finitas pois $|f|$ é integrável. Portanto f é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integravel e a desigualdade triangular.

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \left|\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\right| \leqslant \left|\int f^+\, d\mu\right| + \left|\int f^-\, d\mu\right| = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu = \int |f|\, d\mu$$

□

Corolário 1.42. Se $f \in \mathcal{M}(X, \eth)$, $g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $|f| \leqslant |g|$, então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu$$

Demonstração. Se g é integrável então pelo Teorema anterior $|g|$ também o é. Além disso, como $|f| \leqslant |g|$

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu,$$

como $|g|$ é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de $|f|$ também ser finita, ou seja, $|f|$ é integrável e novamente pelo Teorema anterior, f é integrável. □

Teorema 1.43. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f+g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

(a) $\displaystyle\int cf\, d\mu = c\int f\, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c \geqslant 0$. Note que $(cf)^+ = cf^+$ e $(cf)^- = cf^-$. Dito isso

$$\int cf\, d\mu = \int cf^+ - cf^-\, d\mu$$

como cf^+ e cf^- são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.32

$$\int cf\, d\mu = c\int f^+ - f^-\, d\mu = c\int f\, d\mu$$

Se $c < 0$ a demonstração é análoga, basta perceber que $(cf)^+ = -cf^-$ e $(cf)^- = -cf^+$ ambas funções não negativas pois $-c > 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, então pelo Teorema 1.41 $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, como $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ temos que $f+g$ é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f+g)\, d\mu = \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.34 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.\end{aligned}$$

□

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

Teorema 1.44 (Teorema da Convergência Dominada)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo X. Note que

$$\lim |f_n| \leqslant g \implies |f| \leqslant |g|,$$

como por hipótese f é mensurável e g é integrável, segue pelo Corolário 1.42 que f é integrável. Além disso, como $-g \leqslant f_n \leqslant g$ temos que $g + f_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.41 temos que

$$\begin{aligned}
\int g \, d\mu + \int f \, d\mu &= \int (g + f) \, d\mu \\
&= \int (g + \lim f_n) \, d\mu \\
&= \int \lim (g + f_n) \, d\mu \\
&= \int \liminf (g + f_n) \, d\mu \\
&\leqslant \liminf \int (g + f_n) \, d\mu \\
&= \liminf \left(\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu \right) \\
&= \int g \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu,
\end{aligned}$$

que implica em

$$\int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu. \tag{1.4}$$

Por outro lado, $g - f_n \geqslant 0$, de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu. \tag{1.5}$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu,$$

isto é[1]

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ onde a aplicação $x \mapsto f(x, t)$ é mensurável para todo $t \in [a, b]$.

[1] $\limsup x_n \leqslant x \leqslant \liminf x_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

Corolário 1.45. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja t_n uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0 e considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = f(x, t_n)$. Então como $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leqslant g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ com g integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\int f(x, t_0)\, d\mu(x) &= \int \lim_{t \to t_0} f(x, t)\, d\mu(x) \\
&= \int \lim f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f(x, t_n)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

Corolário 1.46. Se a aplicação $t \mapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F dada por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração. Mostremos que $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$. Com efeito

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x) = \int f(x, t_0)\, d\mu(x) = F(t_0)$$

□

Corolário 1.47. Suponha que ara algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \to f(x, t_0)$ seja integrável em X, que $\partial_t f$ existe em $X \times [a, b]$ e que existe uma função integrável g em X tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t, com $t \neq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim \frac{f(x, t_n) = f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo $x \in X$. Desde modo a função $x \mapsto \partial f / \partial t\, (x, t)$ é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_0, entre t_0 e t tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left|f(x, t_0) + (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right| \leqslant |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right|$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0|\, |\partial f / \partial t\, (x, s_0)|$ é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.42 temos que f é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim \left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\lim \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$. Consequentemente

$$\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| < g(x)$$

para valores de n suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \lim \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. $\square$

1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências p-ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

Proposição 1.48. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $N_\mu : \mathcal{L}(X, \eth, \mu) \to \mathbb{R}$ dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| \, d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$ em quase toda parte em X.

Demonstração. Note que

1. $N_\mu(f) = \displaystyle\int |f| \, d\mu \geqslant \int 0 \, d\mu = 0.$
2. $N_\mu(\lambda f) = \displaystyle\int |\lambda f| \, d\mu = \int |\lambda||f| \, d\mu = |\lambda| \int |f| \, d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$
3. $N_\mu(f+g) = \displaystyle\int |f+g| \, d\mu \leqslant \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$

Portanto N_μ é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Observação: Note que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um espaço vetorial com a operações usuais

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto se deve ao fato que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um subespaço vetorial do espaço de funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$.

Estamos interessados em transformar $\mathcal{L}$ em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 1.49. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Dizemos que f e g são μ-equivalentes ($f \sim_\mu g$) se $f \equiv g$ em quase toda parte em X.

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \eth, \mu) = \{[f] \,;\, f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu) \,;\, g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^1$. Esse espaço, munido das operações

$$[f] + [g] = [f + g]$$
$$[\lambda f] = \lambda[f]$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Proposição 1.50. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $\| \cdot \|_1 : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

para todo $[f] \in \mathcal{L}^1$ é uma norma

Demonstração. Note que apenas precisamos mostrar que $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, pois as outras propiedades são análogas à demonstração da Proposição 1.48. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto $\| \cdot \|_1$ é uma norma e $(\mathcal{L}^1, \| \cdot \|_1)$ é um espaço vetorial normado. □

No restante do texto, adotaremos a notação $[f] = f$, ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com o seus representantes.

Definição 1.51. Seja $1 \leqslant p < \infty$ um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \eth, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \, ; f \text{ é mensurável}, \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$.

Nosso intuito agora é mostrar que $\mathcal{L}^p$ é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que $\| \cdot \|_p$ é uma norma em $\mathcal{L}^p$.

Teorema 1.52 (Desigualdade de Young)**.** Sejm $A, B \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjuntados[a]. Então

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

[a] p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração. Seja $\alpha \in (0, 1)$ e defina $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^{\alpha}.$$

Note que $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha - 1} = \alpha(1 - t^{\alpha - 1})$. Dessa forma

- $t \in (0,1)$ então $\varphi'(t) < 0$ pois $t^{\alpha-1} > 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} < 0$
- $t \in (1,\infty)$ então $\varphi'(t) > 0$ pois $t^{\alpha-1} < 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que φ é decrescente em $(0,1)$ e crescente em $(1,\infty)$. Ou seja, como φ é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso $\varphi(t) \geqslant \varphi(1)$ para todo $t \geqslant 0$ e $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Assim

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(t) \implies \alpha t - t^{\alpha} \geqslant \alpha - 1 \implies t^{\alpha} \leqslant \alpha t + (1-\alpha).$$

Sejam $a, b > 0$, então para $t = \frac{a}{b}$ temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \leqslant \alpha\frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^{\alpha}b^{-\alpha} \leqslant \alpha\frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por b, encontramos

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se $t = 1$, isto é $a = b$. Agora considere que $\alpha = \frac{1}{p} \in (0,1)$, ou seja, $1 < p < \infty$. Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b,$$

e por hipótese $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo $a = A^p$ e $b = B^q$, temos o resultado desejado

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando $A^p = B^q$. □

Teorema 1.53 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_q$$

Demonstração. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ então $f \equiv 0$ qtp em X ou $g \equiv 0$ qtp em X. Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\, d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqslant \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}. \tag{1.6}$$

Como $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, então $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.42

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto $|fg|$ é integrável, isto é, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Por fim, integrando (1.6) com respeito a μ, chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q}\, d\mu \leqslant \int \left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}.\right) d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |fg|\, d\mu \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g|^p\, d\mu.$$

Pela definição da norma em $\mathcal{L}^p$ segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\|q\|_p^p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queriamos demonstrar. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando $p = q$, o que acontece apenas quando $p = q = 2$.

Corolário 1.54 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^2$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \leqslant \int |fg|\, d\mu \leqslant \int |f|^2\, d\mu \int |g|^2\, d\mu$$

Demonstração. A primeira desigualdade é o Teorema 1.41 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

Teorema 1.55 (Desigualdade de Minkowski)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. Na Proposição 1.48 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para $p = 1$. Dito isso, seja $1 < p < \infty$. Como $f, g \in \mathcal{L}^p$, então f e g são mensuráveis. Dessa forma, $f + g$ também é mensurável. Mostremos agora que $f + g \in \mathcal{L}^p$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leqslant (|f| + |g|)^p \\ &\leqslant (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\ &\leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p). \end{aligned}$$

Daí

$$\int |f+g|^p\, d\mu \leqslant 2^p \int (|f|^p + |g|^p)\, d\mu \leqslant 2^p \left(\int |f|^p\, d\mu + \int |g|^p\, d\mu\right)$$

que é uma integral finita. Portanto $f+g \in \mathcal{L}^p$.

Também é fácil ver que

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leqslant |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Agora, seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Daí $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$. De fato,

$$\||f+g|^{p-1}\|_q^q = \int |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu = \int |f+g|^p < \infty \tag{1.7}$$

pois $f+g \in \mathcal{L}^p$. Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu = \||f| + |f+g|^{p-1}\|_1 \leqslant \||f|\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q = \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.8}$$

Análogamente

$$\int |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \leqslant \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.9}$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p\, d\mu \\
&\leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&= \int |f||f+g|^{p-1}\, d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leqslant \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Se $\|f+g\|_p = 0$, então

$$\|f+g\|_p = 0 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que $\|f+g\|_p \neq 0$ para obter

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como peq são expoentes conjugados, segue que $p - \frac{p}{q} = 1$. Portanto

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para $1 \leqslant p < \infty$. □

Agora, vamos provar que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leqslant p < \infty$.

Proposição 1.56. A aplicação $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0$ pois $|f| \geqslant 0$.

2. $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p \, d\mu = 0 \iff f = 0 \ (f \sim_\mu 0)$

3. $\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\lambda|^p |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$

4. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto $\| \cdot \|_p$ é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

Definição 1.57. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$

Definição 1.58. Sejam (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é convergente e converge para f se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$. Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

Definição 1.59. Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Teorema 1.60 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p$. Mostremos que (f_n) é convergente. Com efeito, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$. Esscolhendo ε de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{=n} \tag{1.10}$$

Defina $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$, pois $g \geqslant 0$ e

$$g = |f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n|$$

isto é, g é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis (f_n é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que $g \in \mathcal{L}^p$. De fato

$$\int |g|^p \, d\mu = \int g^p \, d\mu,$$

pois $g \geqslant 0$. Pela definição de g temos

$$\int g^p \, d\mu = \int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em $\mathcal{L}^p$ e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k\to\infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leqslant \liminf_{k\to\infty} \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{k} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leqslant \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right) < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}^p$. Agora seja, $E = \{x \in X\,; g(x) < \infty\} \in \mathfrak{F}$. Dito isso, $N = E^C = \{x \in X\,; g(x) = \infty\} \in \mathfrak{F}$. Mostremos que N tem medida nula. Com efeito, suponha que $\mu(N) > 0$, dessa forma

$$\int_X |g|^p \geqslant \int_N |g|^p = \infty\mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois $g \in \mathcal{L}^p$. Dessa forma $\mu(N) = 0$, isto é, $g < \infty$ em quase toda parte em X. Sendo assim, defina $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que $f \in \mathcal{L}^p$. Note que

$$f(x) = \left(f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| |\chi_E| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente, $|f|^p < g^p$. Logo

$$\int |f|^p \, d\mu \leqslant \int g^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}^p$. Por outro lado, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\
&= f_1(x) + \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\
&= \lim_{k \to \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\
&= \lim_{k \to \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x).
\end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$, então $\lim f_n = f$ em quase toda parte em X. É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \tag{1.11}$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in \mathcal{L}^p$, então $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

Isto prova que $\mathcal{L}^p$ é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue, $\mathcal{L}^\infty$ explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

Definição 1.61. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \eth, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}\,; f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^\infty$. Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,; |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que f é uma função essencialmente limitada.

Observação: Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,; \mu(\{x \in X\,; |f(x)| > M\} = 0)\}.$$

sto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X \,;\, |f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X se, e somente se, existe $N \in \eth$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in N^{\mathcal{C}}$. Note que $\{x \in X \,;\, |f(x)| > M\} \subseteq N$, dessa forma

$$\mu(\{x \in X \,;\, |f(x)| > M\}) \leqslant \mu(N) = 0$$

Portanto, $\mu(\{x \in X \,;\, |f(x)| > M\}) = 0$.

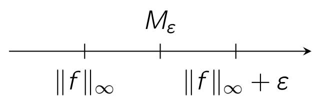
Reciprocamente, se $\mu(\{x \in X \,;\, |f(x)| > M\}) = 0$, então $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in \{|f(x)| > M\}^{\mathcal{C}}$, isto é, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X.

Proposição 1.62. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $f \in \mathcal{L}^\infty$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$, então existe $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X. Daí, como $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geqslant 0 \,;\, |f(x)| \leqslant M_0 \text{ qtp em } X\}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ conseguimos encontrar $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X.



Como $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$, então

$$|f(x)| \leqslant M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ chegamos a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço vetorial normado

Proposição 1.63. A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0 \,;\, |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_\infty \geqslant 0$ pois 0 é cota inferior de $\{M \geqslant 0 \,;\, |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$.

2. $\|f\|_\infty = 0$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X, com $M_\varepsilon < \varepsilon$. Daí, $|f(x)| < \varepsilon$ em quase toda parte em X. Fazendo $\varepsilon \to 0$, encontramos

   $$|f(x)| \leqslant 0 \text{ qtp em } X$$

   Dessa forma, $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

   Reciprocamente, $\|0\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0 \,;\, 0 \leqslant M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3. $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em $\mathcal{L}^\infty$) Se $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ então as funções são limitadas em quase toda parte em X, dito isso, $f + g$ também é limitada em quase toda parte em X. Logo $f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

   Por outro lado, como $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, então existem $M, \hat{M} \in \eth$ tais que $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$ e $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \notin M$ e $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ para todo $x \notin \hat{M}$. Seja $N = M \cup \hat{M} \in \eth$. Daí $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leqslant \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$. Além disso

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

   para todo $x \notin N$, com $\mu(N) = 0$. Dessa forma

$$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. □

Proposição 1.64 (Desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}^\infty$)**.** Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Demonstração. Note que se $g \in \mathcal{L}^\infty$ então $|g| \leqslant \|g\|_\infty$ em quase toda parte em X. Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu = \int |f| \, |g| \, d\mu \leqslant \int |f| \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \int |f| \, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que $\mathcal{L}^\infty$ também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

Teorema 1.65 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço completo

Demonstração. □

Agora vamos construir os espaços ℓ^p que são um caso particular dos espaços $\mathcal{L}^p$

Exemplo 1.66. Sejam $X = \mathbb{N}$, $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} \,;\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[2] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.

[3] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: `1604.02484 [math.HO]`.

[4] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.

[5] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. sexta. IMPA, 2020.

[6] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.