# Uma introdução à teoria da medida e à integral de Lebesgue

Bruno Sant’Anna Donato de Moura

17 de fevereiro de 2025

Universidade Federal de Sergipe

V JORNADA ACADÊMICA

# Motivação

Um exemplo clássico nos cursos de análise na reta é o fato da função caracteristica dos racionais, $\chi_{\mathbb{Q}}$ não ser integrável.

# Motivação

Um exemplo clássico nos cursos de análise na reta é o fato da função caracteristica dos racionais, $\chi_{\mathbb{Q}}$ não ser integrável.

Será que existe alguma forma de definir a integral de forma que essa função passe a ser integrável?

# Conjuntos mensuráveis

**Definição**

Seja $X$ um conjunto qualquer e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de $X$. Dizemos que $X$ é uma $\sigma$-álgebra se

- $X, \emptyset \in \mathcal{A}$
- se $A \in \mathcal{A}$ então $A^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$
- se $(A_n)$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ então

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$

Os conjuntos de $\mathcal{A}$ são chamados de **conjuntos mensuráveis** e o par $(X, \mathcal{A})$ é chamado **espaço mensurável**

# Propiedades adicionais

Das propiedades que definem uma $\sigma$-álgebra podemos derivar algumas propiedades adicionais

- Se $(A_n)$ é uma sequência de elementos em $\mathcal{A}$ então

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$

- Se $(A_n)$ é uma sequência finita de elementos em $\mathcal{A}$ então

$$\bigcup_{j=1}^{k} A_j \,,\ \bigcap_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{A}$$

# Medida

Uma medida em uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisfaz

# Medida

Uma medida em uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisfaz

- $\mu(\emptyset) = 0$
- se $(A_n)$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{A}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

A tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é chamada de **espaço de medida.**

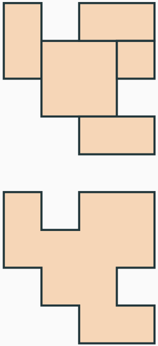
# Medida

Uma medida em uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisfaz

- $\mu(\emptyset) = 0$
- se $(A_n)$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{A}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

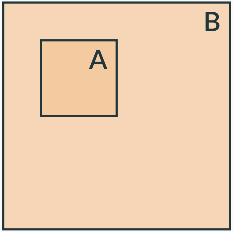
A tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é chamada de **espaço de medida.**



# Propiedades adicionais

Das propiedades de medida conseguimos derivar algumas propiedades importantes

- se $A \subseteq B$ então $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ e $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

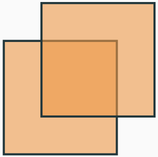


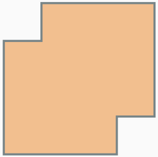
# Propiedades adicionais

Das propiedades de medida conseguimos derivar algumas propiedades importantes

- se $A \subseteq B$ então $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ e $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- se $(A_n)$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$





# Propiedades adicionais

Das propiedades de medida conseguimos derivar algumas propiedades importantes

- se $(A_n)$ é uma sequência crescente em $\mathcal{A}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim \mu(A_n)$$

- se $(A_n)$ é uma sequência decrescente em $\mathcal{A}$ e $\mu(A_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim \mu(A_n)$$

# Funções mensuráveis

**Definição**

Uma funço $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser **mensurável** se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\{x \in X\,; f(x) > \alpha\}$$

pertece a $\sigma$-álgebra.

# Propiedades elementares

Se $f, g$ são funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$, então

- $cf$
- $f^2 := f \cdot f$
- $f + g$
- $fg$
- $|f|$
- $f^+ := \max\{f(x), 0\}$
- $f^- := \max\{-f(x), 0\}$

são mensuráveis

**Definição** (Função simples)

Uma função mensurável $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita ser simples se a sua imagem tem uma quantidade finita de valores.

**Definição** (Função simples)

Uma função mensurável $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita ser simples se a sua imagem tem uma quantidade finita de valores. Toda função simples pode ser escrita da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e $\chi_{A_j}$ é a função caracteristica do conjunto $A_j \in \mathcal{A}$. Os conjuntos $A_j$ são dois-a-dois disjuntos e $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_J$

**Definição**

Seja $\varphi$ uma função não negativa, mensurável e simles. Definimos a integral de $\varphi$ em relação a medida $\mu$ por

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j)$$

**Definição**

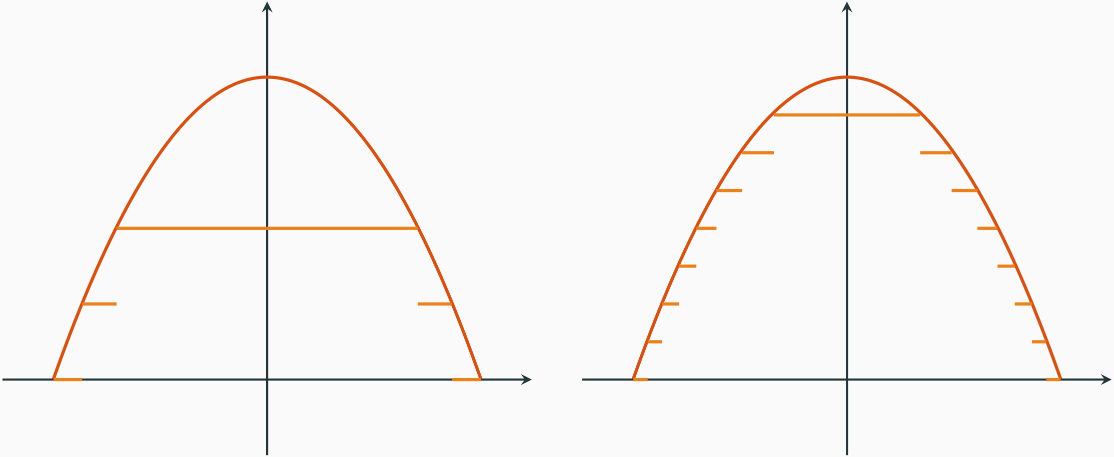
Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável não negativa. Definimos a integral de $f$ em relação a medida $\mu$ por

$$\int f \, d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi \, d\mu$$

onde $\varphi$ são funções simples tais que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$.

A integral de $f$ sobre um conjunto mensurável $Y$ é dada por

$$\int_Y f \, d\mu = \int f \chi_Y \, d\mu$$



# Integral de Lebesgue

**Definição**

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Definimos a integral de $f$ em relação a medida $\mu$ por

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

(qualquer decomposição em funções mensuráveis não negativa é válida)

(integral sobre um conjunto)

# Retornando a integral da motivação

Como a função caracteristica é uma função simples, temos que

$$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}} \, d\mu = \int \chi_{\mathbb{Q}} \chi_{[0,1]} \, d\mu = \int \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \, d\mu = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]).$$

Como a função caracteristica é uma função simples, temos que

$$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}}\, d\mu = \int \chi_{\mathbb{Q}} \chi_{[0,1]}\, d\mu = \int \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}\, d\mu = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]).$$

Mas qual é a medida do conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$?

# Medida de Lebesgue

A $\sigma$-álgebra que iremos considerar é a álgebra de borel $\mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) que é a $\sigma$-álgebra gerada por intervalos abertos

# Medida de Lebesgue

A $\sigma$-álgebra que iremos considerar é a álgebra de borel $\mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) que é a $\sigma$-álgebra gerada por intervalos abertos Alguns exemplos de conjuntos que estão em $\mathcal{B}$ são

- Todo conjunto aberto é um conjunto em $\mathcal{B}$ pois pode ser escrito como união de intervalos abertos.
- Todo conjunto fechado é um conjunto em $\mathcal{B}$ pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável é um conjunto em $\mathcal{B}$ pois pode ser escrito como união enumerável de conjuntos com um único elemento (que é um conjunto fechado).
- Intevalos do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ são conjuntos em $\mathcal{B}$ pois podem ser escritos como interseção enumerável de intervalos abertos.

# Medida de Lebesgue

Definimos o comprimento de um intervalo aberto $I$ por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \varnothing \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

# Medida de Lebesgue

Definimos o comprimento de um intervalo aberto $I$ por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \varnothing \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Agora, dado um conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definimos a medida exterior de Lebesgue por

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j)\,;\, I_j \text{ são intervalos tal que } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

# Medida de Lebesgue

**Propiedades**

- Se $X$ é enumerável (em particular, finito), então $\mu(X) = 0$
- $\mu(t + X) = \mu(X)$ onde $t + X = \{t + x\,; x \in X\}$.
- $\mu([a, b]) = \mu((a, b)) = \mu((a, b]) = \mu([a, b))$

Agora, que sabemos medir subconjuntos de $\mathbb{R}$ podemos calcular a integral de $\chi_{\mathbb{Q}}$. Já sabemos que

$$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}} d\mu = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1])$$

Mas $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ que é um conjunto enumerável, ou seja, tem medida nula. Portanto

$$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}} d\mu = 0$$

# Outros fatos importantes

# Teoremas de convergência

**Teorema** (da convergência monótona)

Seja $(f_n)$ uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para $f$, então,

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu.$$

# Teoremas de convergência

**Teorema** (da convergência monótona)

Seja $(f_n)$ uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para $f$, então,

$$\int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu.$$

**Teorema** (da convergência dominada)

Seja $(f_n)$ uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável $f$. Se existe uma função integrável $g$ tal que $|f_n| \leqslant g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f$ é integrável e

$$\int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu.$$

# Referências


[1] Sheldon Axler. ***Measure, Integration and Real Analysis.*** Springer, 2020.

[2] Robert G. Bartle. ***The Elements of Integration and Lebesgue Measure.*** John Wiley e Sons, 1995.

[3] Gerald B. Folland. ***Real Analysis: Modern Techiniques and Their Applications.*** John Wiley e Sons, 1999.