CONTEÚDO

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{B}$	Álgebra de Borel
$\widehat{\mathfrak{B}}$	Álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$
χ_E	Função caracteristica do conjunto E
$\eth$	σ-álgebra
f^+	Parte positiva da função f
f^-	Parte negativa da função f
$f \sim_\mu g$	f e g são μ-equivalentes i.e., $f = g$ em quase toda parte em X.
$\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$	Espaço das funções integraveis em relação a medida μ.
$\mathcal{L}^p(X, \eth, \mu)$	Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$.
$\mathcal{M}(X, \eth)$	Espaço das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis
$\mathcal{M}^+(X, \eth)$	Espaço das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas
$\mu(E)$	Medida do conjunto E
$N_\mu(\,\cdot\,)$	Semi-norma em relação a medida μ.
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta extendida i.e., $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de σ-álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\eth$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra se satisfaz as seguintes condições

1. $\emptyset, X \in \eth$
2. Se $S \in \eth$ então $S^{\mathcal{C}} = X \setminus S \in \eth$
3. Se (S_n) é uma sequência de elementos de $\eth$ então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

O par $(X, \eth)$ é dito espaço mensurável e os subconjuntos de $\eth$ são chamados de conjuntos mensuráveis (ou $\eth$-mensuráveis)

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não vazio e considere $\eth = \{\emptyset, X\}$. Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. Com efeito,

1. $\emptyset, X \in \eth$ pela definição.
2. $\emptyset^{\mathcal{C}} = X \in \eth$ e $X^{\mathcal{C}} = \emptyset \in \eth$
3. $\bigcup\emptyset = \emptyset \in \eth$ ou $\bigcup X = X \in \eth$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. $\eth = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ não é uma σ-álgebra de X pois $\{a, b\}^{\mathcal{C}} = \{c, d\} \notin \eth$

Observação: Seja (S_α) uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_\alpha S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_\alpha S_\alpha^{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_\alpha S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcup_\alpha S_\alpha^{\mathcal{C}}$$

Dessa forma, se (S_n) é uma sequência de elementos de uma σ-álgebra, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

Observação: (união finita)

Observação: (interseção finita)

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto não enumerável e considere

$$\eth = \{S \subseteq X\,;\, S \text{ é enumerável ou } S^{\mathcal{C}} \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. De fato

1. $\emptyset \in \eth$ pois é enumerável e $X \in \eth$ pois $X^{\mathcal{C}} = \emptyset$ que é enumerável
2. se $S \in \eth$ temos as seguintes possibilidades

   S é enumerável, então $S^{\mathcal{C}} \in \eth$ pois $(S^{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}} = S$ é enumerável

   $S^{\mathcal{C}}$ é enumerável, então pela definição da σ-álgebra, $S^{\mathcal{C}} \in \eth$
3. Seja (S_n) uma sequência de subconjuntos em $\eth$, isto é, $S_n \in \eth$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aqui temos três possibilidades a serem consideradas

   S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável, portanto está em $\eth$

   $S_n^{\mathcal{C}}$ é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_{n_0}^{\mathcal{C}}$$

   é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável $S_{n_0}^{\mathcal{C}}$, portanto está em $\eth$

   Se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

   $$S_i \subseteq X \;\text{ e }\; S_j^{\mathcal{C}} \subseteq X \;\text{ são enumeráveis}$$

   podemos afirmar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ não é enumerável, pois $S_j^{\mathcal{C}}$ é enumerável, e como X não é enumerável, segue que S_j também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}}$ é enumerável. Com efeito, observe que

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_j^{\mathcal{C}}$$

   ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$.

Dessa forma, $\eth$ é uma σ-álgebra

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio. Se $\eth_1$ e $\eth_2$ são σ-álgebras de X então $\eth = \eth_1 \cap \eth_2$ também é uma σ-álgebra de X.

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de X, o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor σ-álgebra contendo este.

Proposição 1.6. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Então a interseção de todas as σ-álgebras de subconjuntos de X que contem A é a menor σ-álgebra que contém A.

Demonstração. □

Observação: (σ-álgebra gerada)

Agora definimos uma σ-álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

Definição 1.7. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathfrak{B}$ gerada por todos os intervalos abertos (x, y) em $\mathbb{R}$, ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha)\,; x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathfrak{B} = \bigcap_\alpha \mathfrak{F}_\alpha,$$

onde cada $\mathfrak{F}_\alpha$ é uma σ-álgebra que contem A.

Equivalentemente, podemos dizer que $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo $\mathfrak{B}$ dessa forma é possível ver que não precisamos que $\mathfrak{B}$ seja uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ mas sim de qualquer espaço topólogico $(X, \mathcal{T})$, nesse caso dizemos que $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada pela topólogia $\mathcal{T}$. Nesse trabalho a notação $\mathfrak{B}$ será utilizada apenas para a álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

Proposição 1.8. $\mathfrak{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos intervalos fechados

Demonstração. □

Exemplo 1.9. Alguns exemplos de conjuntos que estão em $\mathfrak{B}$ são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em $\mathfrak{B}$ pois se $B = \{x_1, x_2, \dots\}$, então $B = \bigcup_{n=1}^\infty \{x_n\}$ que é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois cada $\{x_n\}$ é um conjunto fechado.
- Todo intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é um conjunto em $\mathfrak{B}$ pois $[a, b) = \bigcap_{n=1}^\infty (a - \frac{1}{k}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^\infty (a, b + \frac{1}{n})$.

A sensação é de que a álgebra de Borel contem todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, isto é $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Porem este não é o caso, pois existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são bastante dificeis de definir (vide [??]) que não estão em $\mathfrak{B}$. Mas se esses conjuntos são tão dificeis de definir por que precisamos de uma σ-álgebra que exclui eles?

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propiedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uma propiedade importante não é satisfeita, mas restrigindo para o espaço $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ conseguimos definir a mesma medida de forma que todas propiedades são satisfeitas.

Definição 1.10. O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é dita reta extendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Observação: Operações com ∞ em $\overline{\mathbb{R}}$

1. $\infty + \infty = \infty$
2. $-\infty - \infty = -\infty$
3. $x + \infty = \infty + x = \infty$
4. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
5. $\infty \cdot \infty = \infty$
6. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ se $x > 0$

7. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$ se $x < 0$
8. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$ se $x < 0$
9. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ se $x > 0$
10. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Proposição 1.11. Seja $\bar{\mathbb{R}}$ a reta estendida. Considere $E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$, $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\widehat{\mathfrak{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$ com E variando na álgebra de Borel $\mathfrak{B}$. Então $\widehat{\mathfrak{B}}$ é uma σ-álgebra em $\overline{\mathbb{R}}$ denominada álgebra estendida de Borel.

Demonstração. □

Um conceito bastante importante na teoria da medida, é a ideia de funções mensuráveis

Definição 1.12. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser $\mathfrak{F}$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\}$$

pertence a σ-álgebra.

Lema 1.13. As afirmações a seguir são equivalentes para uma função $f : X \to \mathbb{R}$

(a) $A_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $B_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $C_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $D_\alpha = \{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração. □

Exemplo 1.14. A função constante $x \mapsto c$ é mensurável. Com efeito, se $\alpha \geqslant c$, então

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{F}$$

pois o único valor que a função assume é c. Se $\alpha < c$, então

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{F}$$

Portanto a função constante é mensurável

Exemplo 1.15. A função caracteristica χ_E de um subconjunto $E \in \mathfrak{F}$ é mensurável dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in E \\ 0 \text{ se } x \notin E. \end{cases}$$

é mensurável. Dito isso, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geqslant 1$, então

$$\{x \in X\,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{F},$$

pois a imagem de χ_E contem apenas os valores 0 e 1. Se $0 \leqslant \alpha < 1$ então

$$\{x \in X\,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = E \in \mathfrak{F}.$$

Por fim, se $\alpha < 0$, então

$$\{x \in X\,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{F}.$$

Portanto χ_E é uma função mensurável, desde que E tambem seja.

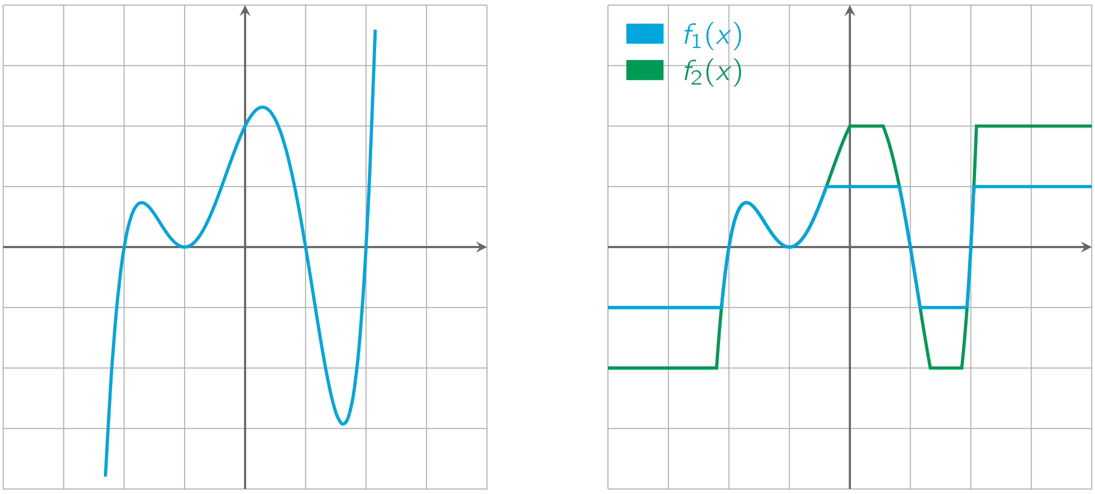


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico de f_1 e f_2
Fonte: Autoral

Exemplo 1.16. Se $f : X \to \mathbb{R}$ com $X \in \mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela contínuidade de f, o conjunto $f^{-1}((\alpha, \infty))$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma $\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{B}$. Portanto f é mensurável.

Exemplo 1.17. Dada uma função f mensurável. A função *truncagem de f* (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leqslant n \text{ e } f(x) \geqslant -n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$

Vamos estudar agora algumas propiedades elementares sobre funções mensuráveis

Proposição 1.18. Sejam X um espaço mensurável, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções

(a) cf

(b) $f^2 := f \cdot f$

(c) $f + g$

(d) fg

(e) $|f|$

são mensuráveis

Demonstração. □

Uma outra definição importante sobre funções mensuráveis e a de parte positiva e negativa de uma função

Definição 1.19. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma qualquer. Definimos as partes positiva e negativa de f respectivamente pelas funções não negativas $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Lema 1.20. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma funçao qualquer. Então

(a) $f = f^+ - f^-$

(b) $|f| = f^+ + f^-$

(c) $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$

(d) $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

O lema acima é importante para demonstrar a proposição abaixo

Proposição 1.21. Seja X um espaço mensurável. Então $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis

Demonstração. Segue direto do lema anterior. □

Agora, vamos passar a estudar funções mensuráveis na reta extendida.

Definição 1.22. Dizemos que uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é ð-mensurável (ou mensurável) se

$$\{x \in X\,; f(x) > \alpha\} \in ð$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, denotamos o conjunto de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por $\mathcal{M}(X, ð)$

Em nenhum momento da definição acima mencionamos os elementos $\pm\infty$. O motivo será mostrado abaixo

...

Lema 1.23. Uma funçao $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se

$$A = \{x \in X\,; f(x) = \infty\} \in ð \text{ e } B = \{x \in X\,; f(x) = -\infty\} \in ð$$

e a função $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável

Demonstração. □

Observação: $(cf \cdots \in \mathcal{M}(X, ð))$

...

Lema 1.24. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{M}(X, \eth)$. Então as funções

$$\begin{array}{ll} f(x) = \inf f_n(x) & F(x) = \sup f_n(x) \\ f^*(x) = \liminf f_n(x) & F^*(x) = \limsup f_n(x) \end{array}$$

pertencem a $\mathcal{M}(X, \eth)$

Demonstração. □

...

Corolário 1.25. Se (f_n) é uma sequência em $\mathcal{M}(X, \eth)$ que converge para f. Então $f \in \mathcal{M}(X, \eth)$

Demonstração. □

O resultado abaixo é ...

Proposição 1.26. Seja f uma função não negativa em $\mathcal{M}(X, \eth)$. Então existe uma sequência (φ_n) em $\mathcal{M}(X, \eth)$ tal que

(a) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

(b) cada φ_n possui um número finito de valores reais em sua imagem.

(c) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ para cada $x \in X$.

Demonstração. □

Para terminar essa seção, vamos definir e ver um exemplo de funções mensuráveis entre espaços mensuráveis

Definição 1.27. Sejam $(X, \eth_X)$ e $(Y, \eth_Y)$ espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : (X, \eth_X) \to (Y, \eth_Y)$ é mensurável quando

$$f^{-1}(E) \in \eth_X$$

para todo $E \in \eth_Y$

Exemplo 1.28.

1.2 Medida

Definição 1.29. Uma medida é uma função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) \geqslant 0$ para todo $S \in \eth$
3. se (E_n) é uma sequência de subconjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Observação: A tripla $(X, \eth, \mu)$ onde X é um conjunto, $\eth$ é uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\eth$ é chamada de espaço de medida.

Observação: (medida finita e σ-finita)

Exemplo 1.30. Seja $(\mathbb{N}, \eth)$ um espaço mensurável, onde $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ dada por $\mu(E) = \#S$, se S é finito, e $\mu(S) = \infty$ se S é infinito, é uma medida em $\eth$. Com efeito,

1. $\mu(\emptyset) = 0$ por vacuidade
2. $\mu(S) \geqslant 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(S_k) = \infty$. Então a união é infinita pois contem pelo menos um conjunto infinito. Logo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por outro lado, se $\mu(S_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que a união pode ser infinita. Nesse caso

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por fim, se a união é finita, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_n = \emptyset$ para todo $n > k$. Assim

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} S_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

Exemplo 1.31. Sejam $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida e $A \in \eth$ um conjunto fixo. Então a função λ dada por

$$\lambda(S) = \mu(A \cap S)$$

é uma medida em $\eth$. Com efeito

1. $\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ pois μ é uma medida
2. $\lambda(S) \geqslant 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em $\eth$. Então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap S_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(S_n)$$

pois μ é uma medida e a sequência $(A \cap S_n)$ é disjunta.

Portanto λ é uma medida

Exemplo 1.32. Sejam $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ medidas em uma σ-álgebra $\eth$ e $c_1, c_2, \ldots, c_j > 0$. Então

$$\mu(S) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(E)$$

é uma medida em $\eth$. De fato

1. $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(\emptyset) = 0$ pois $\mu_j(\emptyset) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.
2. $\mu(S) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(S) \geqslant 0$ pois $c_j \mu_j(S) \geqslant 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em $\eth$. Então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

O próximo passo é estudar algumas propiedade elementares provenientes da definição de medida.

Lema 1.33. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Se $E \subseteq F$ onde E e F são conjuntos mensuráveis. Então $\mu(E) \leqslant \mu(F)$

Demonstração. Note que

$$F = E \cup F = E \cup (F \smallsetminus E),$$

onde E e $F \smallsetminus E$ são conjuntos mensuráveis disjuntos. Dessa forma

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \smallsetminus E).$$

Portanto, como μ é uma função não-negativa $\mu(F) \leqslant \mu(E)$. □

Observação: Da demonstração do lema anterior, conseguimos ver que se $E \subseteq F$

$$\mu(F \smallsetminus E) = \mu(F) - \mu(E)$$

desde que $\mu(E) < \infty$.

Lema 1.34. Seja μ uma medida em $\eth$. Então

(a) se (E_n) é uma sequência crescente em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

(b) se (E_n) é uma sequência decrescente em $\eth$ e $\mu(F_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

Demonstração. □

Definição 1.35. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que duas funções $f : X \to \mathbb{R}$ são iguais em quase toda parte em X e denotamos por $f = g$ qtp em X se existe um conjunto $N \in \eth$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \notin N$.

Um outro conceito importante é o conceito de convergência em quase toda parte

Definição 1.36. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma sequência de funções (f_n) converge para f em quase toda parte, se existe um conjunto $N \in \eth$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \notin N$.

Por fim, para terminar essa seção, introduzimos o conceito de carga

Definição 1.37. Uma carga é uma função $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geqslant 0$ para todo $S \in \eth$
3. se $(S_n) \subseteq \eth$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

isto é uma medida que não satisfaz a não-negatividade.

1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$

Nosso objetivo agora é construir uma medida para $\mathbb{R}$ e mostrar o motivo de utlizar a algebra de Borel ao inves de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definição 1.38. O comprimento de um intervalo aberto I é uma função ℓ dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. O tamanho de A deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. A definição abaixo formaliza essa ideia

Definição 1.39. A medida exterior $m(\cdot)$ de um conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é definida por

$$m(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)\,;\, I_1, I_2, \ldots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

Essa definição envolve uma soma infinita de uma sequência $t_1, t_2, \ldots,$ de elementos de $[0, \infty]$, que é ∞ se pelo menos algum $t_k = \infty$, ou se a série definida pelas somas parciais de t_k é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Exemplo 1.40. Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto finito. Dado $\varepsilon > 0$ defina a sequência I_k de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leqslant n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo, $m(A) \leqslant 2\varepsilon n$. Como ε é arbitrário, temos que $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

Proposição 1.41. Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto enumerável. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ defina a sequência

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

Dessa forma, $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que $m(A) < 2\varepsilon$. Pelo fato de ε ser arbitrário, temos que $m(A) = 0$. □

Uma outra propiedade da medida exterior é sua invariância a translação

Proposição 1.42. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a\,;\, a \in A\}$$

Demonstração. Seja $I_1, I_2, \ldots,$ uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso $t + I_1, t + I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem $t + A$. Logo

$$m(t + A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que $m(t + A) \leqslant m(A)$.

Para verificar a desigualdade na outra direção note que $A = -t + (t + A)$, então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t + A)) \leqslant (t + A).$$

Portanto $m(A) = m(t + A)$ □

(texto motivador)

Proposição 1.43. Seja (A_n) uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Demonstração. □

(medida do intervalo fechado) (explicar teorema de Heine-Borel)

Proposição 1.44. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então $m([a, b]) = b - a$

(o pulo do gato)

Proposição 1.45. Existem subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}$ A e B tais que

$$m(A \cup B) \neq m(A) + m(B)$$

Demonstração. □

Teorema 1.46. Não é possível definir uma medida μ que generaliza ℓ em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demonstração. □

(agora mostrar que em $\mathfrak{B}$ é uma medida)

1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point"of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ fixo.

Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Definição 1.47. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem $(\#\varphi(X) < \infty)$

Uma função φ simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{1.1}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função caracteristica do conjunto $E_j \in \eth$. Essa representação é única pelo fato de todos a_j serem distintos, os conjuntos E_j serem disjuntos para todo $j = 1, \dots, n$, além disso, $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Definição 1.48. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de φ em relação a μ por

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

Observação: Adotamos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 indepdendente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

Lema 1.49. Dadas funções simples $\varphi, \psi \in M^+(X, \eth)$ e $c \geqslant 0$ tem-se

(a) $\displaystyle\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$

(c) A aplicação $\lambda(E) = \displaystyle\int \varphi \chi_E \, d\mu$ para todo $E \in \eth$ é uma medida em $\eth$.

Demonstração.

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu.$$

Com efeito, para $c = 0$,

$$\int c\varphi \, d\mu = 0 = c \int \varphi \, d\mu.$$

por outro lado, para $c > 0$, podemos escrever $c\varphi$ da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representaçao para $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessáriamente é a representação padrão, pois é possível que existam $j_0, j_1 \in \{1, \dots, n\}$ e $k_0, k_1 \in \{1, \dots, m\}$, tais que $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$.

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k \,; j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por c_h com $h = 1, \dots, \#H$, e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos G_h são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório $\widetilde{\Sigma}$ está relacionado aos indices $1 \leqslant j \leqslant n$ e $1 \leqslant k \leqslant m$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de $\varphi + \psi$ por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h \chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) \, d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\
&= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)
\end{aligned}$$

como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \quad e \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

(c) Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E\, d\mu$$

é uma medida em $\eth$. Com efeito,

1. $\lambda(\emptyset) = \int \varphi \chi_\emptyset\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$

2. Note que como $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ os elementos a_j na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que $0 \leqslant \varphi(x)$ para todo $x \in X$, daí

$$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

porem, como os conjuntos E_j são disjuntos, existe um único $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ tal que $x \in E_{j_0}$. Dessa forma, para todo $j \neq j_0$, $\chi_{E_j}(x) = 0$, então

$$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E \cap E_j) \geqslant 0$$

pois mostramos que $a_j > 0$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ e μ é uma medida.

3. Considere $(F_k) \subseteq \eth$ uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi\chi_{\cup F_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_j\mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j\mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi\chi_{F_k}\, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.50. A função

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porem essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utlizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido Com efeito, considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu^*)$ onde $\mathfrak{B}$ é a álgebra de Borel e μ^* é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}}\, d\mu^* = \mu^*(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Agora, podemos extender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negatíva (não necessáriamente simples)

Definição 1.51. A integral de uma função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ em relação a μ é definida por

$$\int f\, d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi\, d\mu$$

onde φ são funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ tais que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$.

Além disso, definimos a integral da função f sobre um conjunto mensurável

Definição 1.52. A integral de $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ sobre um conjunto $E \in \eth$ é dada por

$$\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu$$

...

Lema 1.53. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $E, F \in \eth$. Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se $f \leqslant g$ tem-se

$$\int f \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$$

(b) se $E \subseteq F$ tem-se

$$\int_E f \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu$$

Demonstração.

(a) Seja φ uma função simples em M^+, então

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu = \int g \, d\mu$$

(b) Como $f\chi_E \leqslant f\chi_F$, segue do item anterior que

$$\int f\chi_E \, d\mu \leqslant \int f\chi_F \, d\mu,$$

dito isso

$$\int_E F \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstraado a seguir.

Teorema 1.54 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para f, então,

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ onde $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \eth)$, pelo corolário ?? temos que $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Pela monotonicidade da sequência $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, pelo item **(a)** do lema anterior

$$\int f_n \, d\mu \leqslant \int f_{n+1} \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dito isso

$$\lim \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu.$$

Por outro lado, seja $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ e considere

$$A_n = \{x \in X \, ; f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)\} = \{x \in X \, ; [f_n - \alpha\varphi](x) \geqslant 0\}$$

como f_n e φ são funções mensuráveis, temos que $A_n \in \eth$. Além disso, $A_n \subseteq A_{n+1}$ já que $f_n \leqslant f_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0,1)$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leqslant \int_{A_n} f_n \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu. \tag{1.2}$$

Dessa forma, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X, segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi\chi_E \, d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi\chi_{\cup A_n} \, d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi\chi_{A_n} \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

... fazendo $n \to \infty$ em 1.2

$$\alpha \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de φ ser uma função simples tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ tem-se que

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

□

O Lema 1.49 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, tambem é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

Corolário 1.55. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $c > 0$, então são válidas as seguintes afirmações

(a) $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$

(b) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c = 0$

$$\int cf \, d\mu = 0 = c \int f \, d\mu.$$

Se $c > 0$, considere (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ convergindo para f (lema ??). Dito isso, $(c\varphi_n)$ é um sequência monótona crescente que converge para cf. Pelo Lema 1.49 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf \, d\mu = \lim \int c\varphi_n \, d\mu = c \lim \int \varphi_n \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funçoes simplies em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ que convergem para f e g respectivamente. Dessa forma $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f + g$. Portanto

$$\int (f+g) \, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

Lema 1.56 (Lema de Fatou)**.** Se $(f_n) \subseteq M^+(X, \mathfrak{F})$, então

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$, dessa forma $g_m \leqslant f_n$ para todo $m \leqslant n$. Sendo assim,

$$\int g_m \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu$$

para todo $m \leqslant n$. Desse modo

$$\int g_m \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para seu supremo, ou seja, $\liminf f_n$. Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessáriamente simples

Corolário 1.57. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\lambda(E) = \int f \chi_E \, d\mu$$

é uma medida.

Demonstração.

1. $\lambda(\emptyset) = \displaystyle\int_{\emptyset} f\, d\mu = \int f\chi_{\emptyset}\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0.$

2. Como $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ temos que $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu \geqslant \int_E 0\, d\mu = 0.$

3. Sejam E_n uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathfrak{F}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e considere f_n definida por
$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$
Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que
$$\int f_n\, d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$
Além diso, podemos escrever
$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k} = f\chi_E$$
desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos.
Por fim, como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ que converge para $f\chi_E$, pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que
$$\lambda(E) = \int f\chi_E\, d\mu = \int \lim f_n\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k}$$

Portanto, λ é uma medida. □

Corolário 1.58. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,
$$\int f\, d\mu = 0$$

Demonstração. Suponha que $\displaystyle\int f\, d\mu = 0$ e considere o conjunto
$$E_n = \left\{x \in X\,;\, f(x) > \frac{1}{n}\right\}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \geqslant \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Note que
$$0 = \int f\, d\mu \geqslant \tfrac{1}{n}\int \chi_{E_n}\, d\mu = \tfrac{1}{n}\mu(E_n) \geqslant 0.$$
Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso
$$E = \{x \in X\,;\, f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
pois se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, logo
$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim, $x \in E$.

Por outro lado, se $x \in E$, temos que $f(x) > 0$. Utilizando a propiedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é, $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como queriamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que (E_n) é uma sequência crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$, para todo $x \in E^{\mathcal{C}}$ com $\mu(E) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ em quase toda parte em X. Se $E = \{x \in X\,;\, f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Sendo assim, considerando $f_n = n\chi_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temo que $f \leqslant \liminf f_n$ e pelo Lema de Fatou

$$0 \leqslant \int f\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f\, d\mu = 0.$$

□

Corolário 1.59. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então a aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua em relação a μ, isto é, se $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é, $f\chi_E = 0$ em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1.60. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ que converge em quae toda parte de X para a função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$$

Demonstração. Seja N um conjunto de medida nula. Suponha que (f_n) converge para f em todo o pontos de $M = N^{\mathcal{C}}$. Dessa forma, a sequência $(f_n\chi_M)$ converge para $f\chi_M$, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f\chi_M \, d\mu = \lim \int f_n\chi_M \, d\mu.$$

Além disso, podemos escrever f e f_n da seguinte forma

$$f = f\chi_M + f\chi_N \text{ e } f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N,$$

pois $M = N^{\mathcal{C}}$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f\chi_N$ e $f_n\chi_N$ são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.58, segue que

$$\lim \int f_n \, d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

Corolário 1.61. Seja (g_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$. Então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \cdots + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g_n \geqslant 0$, temos que (f_n) é uma sequência crecente que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu$$

Portanto

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

Definição 1.62. O conjunto $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ das funções integráveis consite em todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, tai que as integrais

$$\int f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \int f^- \, d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de f em relação a μ por

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

e se E é um conjunto mensurável

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Qualquer representação de f como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja f uma função integravel e escreva f como $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções integráveis não negativas, então

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ \, d\mu + \int f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f^- \, d\mu.$$

Como $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, segue que

$$\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.$$

Da mesma forma que definimos um medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exibe o lema abaixo

Lema 1.63. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. A aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de f (em relação a μ).

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+(X, \eth, \mu)$, pelo Corolário ?? temos que as funções $\lambda^+, \lambda^- : \eth \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- \, d\mu.$$

são medidas em $\eth$ e são finitas pelo fato de f ser uma função integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ temos que λ é uma carga. $\square$

Como a aplicação λ definida acima é uma carga, vemos que se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, então

$$\int_E f\, d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propiedades elementares das integrais de funções mensuráveis

Teorema 1.64. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Além disso

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d\mu. \tag{1.3}$$

Demonstração. Seja f uma função integrável, mostremos que $|f|$ também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \quad \text{e} \quad |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu$$

é finita pois f é integrável, e

$$\int |f|^-\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$$

que é finita. Portanto $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que $|f|$ é integrável, dessa forma

$$\begin{aligned} f^+ &\leqslant f^+ + f^- = |f| \\ f^- &\leqslant f^+ + f^- = |f| \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} \int f^+\, d\mu &\leqslant \int |f|\, d\mu \\ \int f^-\, d\mu &\leqslant \int |f|\, d\mu \end{aligned}$$

ambas finitas pois $|f|$ é integrável. Portanto f é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integravel e a desigualdade triangular.

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \left|\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\right| \leqslant \left|\int f^+\, d\mu\right| + \left|\int f^-\, d\mu\right| = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu = \int |f|\, d\mu$$

$\square$

Corolário 1.65. Se $f \in \mathcal{M}(X, \eth)$, $g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $|f| \leqslant |g|$, então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu$$

Demonstração. Se g é integrável então pelo Teorema anterior $|g|$ também o é. Além disso, como $|f| \leqslant |g|$

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu,$$

como $|g|$ é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de $|f|$ também ser finita, ou seja, $|f|$ é integrável e novamente pelo Teorema anterior, f é integrável. □

Teorema 1.66. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f+g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

(a) $\displaystyle\int cf\, d\mu = c\int f\, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c \geqslant 0$. Note que $(cf)^+ = cf^+$ e $(cf)^- = cf^-$. Dito isso

$$\int cf\, d\mu = \int cf^+ - cf^-\, d\mu$$

como cf^+ e cf^- são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.55

$$\int cf\, d\mu = c\int f^+ - f^-\, d\mu = c\int f\, d\mu$$

Se $c < 0$ a demonstração é análoga, basta perceber que $(cf)^+ = -cf^-$ e $(cf)^- = -cf^+$ ambas funções não negativas pois $-c > 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, então pelo Teorema 1.64 $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, como $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ temos que $f+g$ é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f+g)\, d\mu = \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.57 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.\end{aligned}$$

□

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

Teorema 1.67 (Teorema da Convergência Dominada)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo X. Note que

$$\lim |f_n| \leqslant g \implies |f| \leqslant |g|,$$

como por hipótese f é mensurável e g é integrável, segue pelo Corolário 1.65 que f é integrável. Além disso, como $-g \leqslant f_n \leqslant g$ temos que $g + f_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.64 temos que

$$\begin{aligned}
\int g \, d\mu + \int f \, d\mu &= \int (g + f) \, d\mu \\
&= \int (g + \lim f_n) \, d\mu \\
&= \int \lim (g + f_n) \, d\mu \\
&= \int \liminf (g + f_n) \, d\mu \\
&\leqslant \liminf \int (g + f_n) \, d\mu \\
&= \liminf \left(\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu \right) \\
&= \int g \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu,
\end{aligned}$$

que implica em

$$\int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu. \tag{1.4}$$

Por outro lado, $g - f_n \geqslant 0$, de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu. \tag{1.5}$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu,$$

isto é[1]

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ onde a aplicação $x \mapsto f(x, t)$ é mensurável para todo $t \in [a, b]$.

[1] $\limsup x_n \leqslant x \leqslant \liminf x_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

Corolário 1.68. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja t_n uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0 e considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = f(x, t_n)$. Então como $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leqslant g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ com g integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\int f(x, t_0)\, d\mu(x) &= \int \lim_{t \to t_0} f(x, t)\, d\mu(x) \\
&= \int \lim f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f(x, t_n)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

Corolário 1.69. Se a aplicação $t \mapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F dada por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração. Mostremos que $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$. Com efeito

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x) = \int f(x, t_0)\, d\mu(x) = F(t_0)$$

□

Corolário 1.70. Suponha que ara algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \to f(x, t_0)$ seja integrável em X, que $\partial_t f$ existe em $X \times [a, b]$ e que existe uma função integrável g em X tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t, com $t \neq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim \frac{f(x, t_n) = f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo $x \in X$. Desde modo a função $x \mapsto \partial f/\partial t\,(x, t)$ é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_0, entre t_0 e t tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left|f(x, t_0) + (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right| \leqslant |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right|$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0|\,|\partial f/\partial t\,(x, s_0)|$ é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.65 temos que f é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim \left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\lim \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$. Consequentemente

$$\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| < g(x)$$

para valores de n suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \lim \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. □

1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências p-ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

Proposição 1.71. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $N_\mu : \mathcal{L}(X, \eth, \mu) \to \mathbb{R}$ dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| \, d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$ em quase toda parte em X.

Demonstração. Note que

1. $N_\mu(f) = \displaystyle\int |f| \, d\mu \geqslant \int 0 \, d\mu = 0.$
2. $N_\mu(\lambda f) = \displaystyle\int |\lambda f| \, d\mu = \int |\lambda||f| \, d\mu = |\lambda| \int |f| \, d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$
3. $N_\mu(f+g) = \displaystyle\int |f+g| \, d\mu \leqslant \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$

Portanto N_μ é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Observação: Note que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um espaço vetorial com a operações usuais

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto se deve ao fato que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um subespaço vetorial do espaço de funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$.

Estamos interessados em transformar $\mathcal{L}$ em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 1.72. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Dizemos que f e g são μ-equivalentes ($f \sim_\mu g$) se $f \equiv g$ em quase toda parte em X.

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \eth, \mu) = \{[f] \,;\, f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu) \,;\, g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^1$ ou espaço das funções somáveis. Esse espaço, munido das operações

$$[f] + [g] = [f + g]$$
$$[\lambda f] = \lambda[f]$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Proposição 1.73. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

para todo $[f] \in \mathcal{L}^1$ é uma norma

Demonstração. Note que apenas precisamos mostrar que $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, pois as outras propiedades são análogas à demonstração da Proposição 1.71. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto $\|\cdot\|_1$ é uma norma e $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado. □

No restante do texto, adotaremos a notação $[f] = f$, ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com o seus representantes.

Definição 1.74. Seja $1 \leqslant p < \infty$ um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \eth, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ é mensurável}, \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$.

Nosso intuito agora é mostrar que $\mathcal{L}^p$ é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathcal{L}^p$.

Teorema 1.75 (Desigualdade de Young)**.** Sejm $A, B \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjuntados[a]. Então

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

[a] p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração. Seja $\alpha \in (0, 1)$ e defina $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Note que $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$. Dessa forma

- $t \in (0,1)$ então $\varphi'(t) < 0$ pois $t^{\alpha-1} > 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} < 0$
- $t \in (1,\infty)$ então $\varphi'(t) > 0$ pois $t^{\alpha-1} < 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que φ é decrescente em $(0,1)$ e crescente em $(1,\infty)$. Ou seja, como φ é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso $\varphi(t) \geqslant \varphi(1)$ para todo $t \geqslant 0$ e $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Assim

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(t) \implies \alpha t - t^\alpha \geqslant \alpha - 1 \implies t^\alpha \leqslant \alpha t + (1-\alpha).$$

Sejam $a, b > 0$, então para $t = \frac{a}{b}$ temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leqslant \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^\alpha b^{-\alpha} \leqslant \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por b, encontramos

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha) b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se $t = 1$, isto é $a = b$. Agora considere que $\alpha = \frac{1}{p} \in (0,1)$, ou seja, $1 < p < \infty$. Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b,$$

e por hipótese $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo $a = A^p$ e $b = B^q$, temos o resultado desejado

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando $A^p = B^q$. □

Teorema 1.76 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_q$$

Demonstração. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ então $f \equiv 0$ qtp em X ou $g \equiv 0$ qtp em X. Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}. \tag{1.6}$$

Como $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, então $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.65

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto $|fg|$ é integrável, isto é, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Por fim, integrando (1.6) com respeito a μ, chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q}\, d\mu \leqslant \int \left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}.\right) d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |fg|\, d\mu \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g|^p\, d\mu.$$

Pela definição da norma em $\mathcal{L}^p$ segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\|q\|_p^p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queriamos demonstrar. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando $p = q$, o que acontece apenas quando $p = q = 2$.

Corolário 1.77 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^2$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \leqslant \int |fg|\, d\mu \leqslant \int |f|^2\, d\mu \int |g|^2\, d\mu$$

Demonstração. A primeira desigualdade é o Teorema 1.64 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

Teorema 1.78 (Desigualdade de Minkowski)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. Na Proposição 1.71 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para $p = 1$. Dito isso, seja $1 < p < \infty$. Como $f, g \in \mathcal{L}^p$, então f e g são mensuráveis. Dessa forma, $f + g$ também é mensurável. Mostremos agora que $f + g \in \mathcal{L}^p$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leqslant (|f| + |g|)^p \\ &\leqslant (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\ &\leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p). \end{aligned}$$

Daí

$$\int |f+g|^p\, d\mu \leqslant 2^p \int (|f|^p + |g|^p)\, d\mu \leqslant 2^p \left(\int |f|^p\, d\mu + \int |g|^p\, d\mu\right)$$

que é uma integral finita. Portanto $f+g \in \mathcal{L}^p$.

Também é fácil ver que

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leqslant |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Agora, seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Daí $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$. De fato,

$$\||f+g|^{p-1}\|_q^q = \int |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu = \int |f+g|^p < \infty \tag{1.7}$$

pois $f+g \in \mathcal{L}^p$. Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu = \||f| + |f+g|^{p-1}\|_1 \leqslant \||f|\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q = \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.8}$$

Análogamente

$$\int |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \leqslant \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.9}$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p\, d\mu \\
&\leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&= \int |f||f+g|^{p-1}\, d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leqslant \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Se $\|f+g\|_p = 0$, então

$$\|f+g\|_p = 0 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que $\|f+g\|_p \neq 0$ para obter

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como peq são expoentes conjugados, segue que $p - \frac{p}{q} = 1$. Portanto

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para $1 \leqslant p < \infty$. □

Agora, vamos provar que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leqslant p < \infty$.

Proposição 1.79. A aplicação $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0$ pois $|f| \geqslant 0$.

2. $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p \, d\mu = 0 \iff f = 0$ $(f \sim_\mu 0)$

3. $\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\lambda|^p |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$

4. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto $\|\cdot\|_p$ é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

Definição 1.80. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$

Definição 1.81. Sejam (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é convergente e converge para f se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$. Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

Definição 1.82. Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Teorema 1.83 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p$. Mostremos que (f_n) é convergente. Com efeito, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$. Esscolhendo ε de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{=n} \tag{1.10}$$

Defina $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$, pois $g \geqslant 0$ e

$$g = |f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n|$$

isto é, g é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis (f_n é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que $g \in \mathcal{L}^p$. De fato

$$\int |g|^p \, d\mu = \int g^p \, d\mu,$$

pois $g \geqslant 0$. Pela definição de g temos

$$\int g^p \, d\mu = \int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em $\mathcal{L}^p$ e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k\to\infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leqslant \liminf_{k\to\infty} \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{k} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leqslant \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right) < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}^p$. Agora seja, $E = \{x \in X \,;\, g(x) < \infty\} \in \mathfrak{F}$. Dito isso, $N = E^C = \{x \in X \,;\, g(x) = \infty\} \in \mathfrak{F}$. Mostremos que N tem medida nula. Com efeito, suponha que $\mu(N) > 0$, dessa forma

$$\int_X |g|^p \geqslant \int_N |g|^p = \infty\mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois $g \in \mathcal{L}^p$. Dessa forma $\mu(N) = 0$, isto é, $g < \infty$ em quase toda parte em X. Sendo assim, defina $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que $f \in \mathcal{L}^p$. Note que

$$f(x) = \left(f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x))\right)\chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left|f_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)\right||\chi_E| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente, $|f|^p < g^p$. Logo

$$\int |f|^p \, d\mu \leqslant \int g^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}^p$. Por outro lado, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\
&= f_1(x) + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\
&= \lim_{k\to\infty}(f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\
&= \lim_{k\to\infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).
\end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$, então $\lim f_n = f$ em quase toda parte em X. É fácil ver que

$$|f_k| = \left|f_1 + \sum_{n=1}^{k-1}(f_{n+1} - f_n)\right| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1}|f_{n+1} - f_n| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1} - f_n| = g. \tag{1.11}$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in \mathcal{L}^p$, então $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim\left(\int |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

Isto prova que $\mathcal{L}^p$ é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue, $\mathcal{L}^\infty$ explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

Definição 1.84. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \eth, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^\infty$. Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|; x \in X\} = \inf\{M \geqslant 0\,;\, |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que f é uma função essencialmente limitada.

Observação: Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,;\, \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > M\} = 0)\}.$$

sto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X se, e somente se, existe $N \in \eth$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in N^{\mathcal{C}}$. Note que $\{x \in X\,;|f(x)| > M\} \subseteq N$, dessa forma

$$\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) \leqslant \mu(N) = 0$$

Portanto, $\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0$.

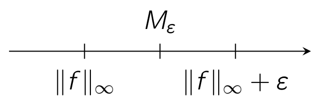
Reciprocamente, se $\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0$, então $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in \{|f(x)| > M\}^{\mathcal{C}}$, isto é, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X.

Proposição 1.85. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $f \in \mathcal{L}^\infty$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$, então existe $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X. Daí, como $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M_0 \text{ qtp em } X\}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ conseguimos encontrar $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X.



Como $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$, então

$$|f(x)| \leqslant M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ chegamos a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço vetorial normado

Proposição 1.86. A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_\infty \geqslant 0$ pois 0 é cota inferior de $\{M \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$.

2. $\|f\|_\infty = 0$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X, com $M_\varepsilon < \varepsilon$. Daí, $|f(x)| < \varepsilon$ em quase toda parte em X. Fazendo $\varepsilon \to 0$, encontramos

$$|f(x)| \leqslant 0 \text{ qtp em } X$$

   Dessa forma, $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

   Reciprocamente, $\|0\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,; 0 \leqslant M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3. $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em $\mathcal{L}^\infty$) Se $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ então as funções são limitadas em quase toda parte em X, dito isso, $f+g$ também é limitada em quase toda parte em X. Logo $f+g \in \mathcal{L}^\infty$.

   Por outro lado, como $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, então existem $M, \hat{M} \in \eth$ tais que $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$ e $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \notin M$ e $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ para todo $x \notin \hat{M}$. Seja $N = M \cup \hat{M} \in \eth$. Daí $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leqslant \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$. Além disso

   $$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

   para todo $x \notin N$, com $\mu(N) = 0$. Dessa forma

   $$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. □

Proposição 1.87 (Desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}^\infty$)**.** Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Demonstração. Note que se $g \in \mathcal{L}^\infty$ então $|g| \leqslant \|g\|_\infty$ em quase toda parte em X. Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu = \int |f| \, |g| \, d\mu \leqslant \int |f| \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \int |f| \, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que $\mathcal{L}^\infty$ também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

Teorema 1.88 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço completo

Demonstração. □

Agora vamos construir os espaços ℓ^p que são um caso particular dos espaços $\mathcal{L}^p$

Exemplo 1.89. Sejam $X = \mathbb{N}$, $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} \,; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

...

Observação: Denomatomos o espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ por ℓ^p

Exemplo 1.90. $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ...

Vejamos mais alguma propiedades importantes dos espaços $\mathcal{L}^p$

Proposição 1.91. Sejam $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p < q < r \leqslant \infty$. Então

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$$

Demonstração. ... $\square$

Teorema 1.92 (Desigualdade de Interpolação)**.** Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p < q < r \leqslant \infty$. Então $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{L}^q$ e

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde $\lambda \in (0,1)$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \qquad \left(\text{i.e., } \lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}\right) \tag{1.12}$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $r = \infty$ Note que

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q} \in (0,1)$$

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$, tem-se que

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \, d\mu = \int |f|^{q-p} |f|^p \, d\mu \leqslant \int \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p = \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p < \infty.$$

Com isso $f \in \mathcal{L}^q$ e ainda mais

$$\|f\|_q^q \leqslant \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e como $\lambda = \frac{p}{q}$, segue que

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

– $r < \infty$ Note que multiplicando (1.12) por q, temos

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1.$$

Com isso, $\frac{p}{\lambda q}$ e $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ são expoentes conjungados. Dito isso, aplicando a Desigualdade de Hölder com $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$ temos que

$$\begin{aligned}
\int |f|^q \, d\mu &= \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q} \, d\mu \\
&= \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \\
&\leqslant \||f|^{\lambda q}\|_{\frac{p}{\lambda q}} \|f^{(1-\lambda)q}\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\
&= \left(\int |f|^{\lambda q \cdot \frac{p}{\lambda q}}\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^{(1-\lambda)q \cdot \frac{r}{(1-\lambda)q}}\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\
&= \left(\int |f|^p\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^q\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\
&= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Daí, $f \in \mathcal{L}^q$. Além disso

$$\|f\|_q^q \leqslant \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|^{(1-\lambda)q} \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim, mostrada a desiguldadde de interpolação. $\square$

Proposição 1.93. Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q \leqslant \infty$. Então $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$$

Demonstração. ... □

Teorema 1.94 (Desigualdade de Chebyshev)**.** Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então

$$\|f\|_p \geqslant \alpha[\,\mu\,(\{x \in X\,;\, |f(x)| > \alpha\})\,]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. ... □

Agora vamos ver um resultado sobre os espaços ℓ^p

Proposição 1.95. Sejam $0 < p < q \leqslant \infty$. Então $\ell^p \subseteq \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $q = \infty$

Seja $x \in \ell^p$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. É fácil ver que

$$|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ é cota superior de $x = (x_n)$. Dito isso

$$\|x\|_q = \|x\|_\infty = \sup |x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo $x \in \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p.$$

– $q < \infty$

Utilizando a Desigualdade de Interpolação com $r = \infty$ e $\lambda = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ para obter que $\ell^p = \ell^p \cap \ell^r \subseteq \ell^q$ (pelo caso $q = \infty$) e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p^{\frac{p}{q}}\|x\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \leqslant \|x\|_p^{\frac{p}{q}}\|x\|_p^{1-\frac{p}{q}} = \|x\|_p.$$

Assim, demonstrada a proposição. □

Os proximos resultados estão relacionados a densidade das funções simples em $\mathcal{L}^p$ e $\mathcal{L}^\infty$

Definição 1.96. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $E \subseteq X$ é dito denso em X se todo ponto de X é aderente a E. Isto é, dado $x \in X$ existe uma sequência (x_n) de elementos de E tal que $x_n \to x$.

Teorema 1.97. Seja $1 \leqslant p < \infty$. O conjunto das funções simples $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ com $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \ldots, n$ é denso em $\mathcal{L}^p$

Demonstração. Considere o conjunto

$$Y = \left\{ f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \, ; \mu(E_j) < \infty \right\}.$$

Note que dada uma função $f \in Y$ temos que

$$\int |f|^p \, d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \right| \, d\mu = \int \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \mu(E_j) < \infty.$$

Isto é, $f \in \mathcal{L}^p$. Consequentemente $Y \subseteq \mathcal{L}^p$.

Por outro lado, seja $f \in \mathcal{L}^p$ sabemos que $f = f^+ - f^-$ onde $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Além disso pelo Lema ?? temos que existem sequências $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$ de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ tais que

$$0 \leqslant \varphi_n^{\pm} \leqslant \varphi_{n+1}^{\pm} \ \text{ e } \ \varphi_n^{\pm} \to f^{\pm}.$$

É fácil ver que $(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \subseteq \mathcal{M}(X, \eth)$ é uma sequência de funções simples tal que

$$\lim(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \lim \varphi_n^+ + \lim \varphi_n^- = f^+ - f^- = f.$$

Seja $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim (φ_n) é uma sequência de funções simples tal que $\varphi_n \to f$. Perceba que

$$|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leqslant f^+ + f^- = |f|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f \in \mathcal{L}^p$, então

$$\int |\varphi_n|^p \, d\mu \leqslant \int |f|^p \, d\mu < \infty,$$

ou seja, $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{L}^p$. Consequentemente, denotando φ_n por

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j \chi_{E_j}$$

segue que

$$|a_j|^p \mu(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \mu(E_j) = \int \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \chi_{E_j} \, d\mu = \int |\varphi_n|^p \, d\mu < \infty.$$

Isto nos diz que $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \ldots, m_n$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(\varphi_n) \subseteq Y$. Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \|\varphi_n - f\|_p^p = \lim \int |\varphi_n - f|^p \, d\mu = \int \lim |\varphi_n - f|^p \, d\mu = 0$$

pois

$$\lim \varphi_n = f \ \text{ e } \ |\varphi_n - f|^p \leqslant 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto Y é denso em $\mathcal{L}^p$, já que dada uma função $f \in \mathcal{L}^p$, encontramos uma sequência em Y que converge para f. $\square$

Teorema 1.98. O conjunto das funções simples é denso em $\mathcal{L}^\infty$.

Demonstração. □

O proximos resultados são uma generalização da Desigualdade de Hölder

Lema 1.99. Sejam $0 < p, q \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$. Então $fg \in \mathcal{L}^r$ e

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração. ... □

Proposição 1.100 (Desigualdade de Hölder Generalizada)**.** Sejam $0 < p_1, \ldots, p_N \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \cdots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_N\|_{p_N}$$

Demonstração. Segue por indução do lema anterior. □

CAPÍTULO DOIS

INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

2.1 Espaços de Banach

2.1.1 Operadores lineares limitados

2.2 Espaços de Hilbert

CAPÍTULO TRÊS

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev, suas principais propriedades.

3.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo

Definição 3.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega\,; \varphi(x) \neq 0\}}$$

Além disso, se $\operatorname{supp} \varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega\,; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp} \varphi$, então $(\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}} \subseteq \{x \in \Omega\,; \varphi(x) = 0\}$. Ou seja se $x \notin \operatorname{supp} \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Além disso, se Ω é um aberto, então φ se anula em $\partial\Omega$.

Definição 3.2. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos o espaço das funções com a k-ésima derivada contínua por

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\,; f \text{ é contínua, } f^{(k)} \text{ existe e é contínua}\}$$

Observação: O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

Definição 3.3. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$

A definição abaixo será âmplamente utilizada nesse capítulo

Definição 3.4. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\operatorname{supp} f \text{ é compacto}\}$$

Além disso definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ com suporte compacto.

Os resultados abaixos são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

Teorema 3.5 (Integração por partes em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular e $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \, dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta pra dentro em $\partial\Omega$.

Demonstração. [1] □

Teorema 3.6 (Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $u : B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então

$$\int_{B(x_0,s)} f\, dx = \int_0^s \int_{\partial B(x_0,r)} f\, dS dr$$

3.2 Motivação

3.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

Definição 3.7. Sejam I um intervalo aberto, possívelmente ilimitado e $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(I)$. Dizemos que v é a derivada fraca de u, se

$$\int_I u\phi'\, dx = -\int_I v\phi\, dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

Denotamos $u' = v$ e diremos v é a derivada de u no sentido fraco.

Observação: Aqui, utlizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convençao para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue, suas integrais se coincidem.

Observação: (função teste)

Exemplo 3.8. A função $u : I = (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é derivavel no sentido usual. Já que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{u(1+h)}{h} = 1 \neq 0 = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(1+h)}{h}.$$

Porem, possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ temos

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = \int_0^1 x\phi'\,dx + \int_1^2 \phi'\,dx = x\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi\,dx + \phi\Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi\,dx - \phi(1) = -\int_0^1 \phi\,dx$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral.

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = -\left(\int_0^1 1\phi\,dx - \int_1^2 0\phi\,dx\right) = -\int_0^2 v\phi\,dx$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 3.9. A função $u : I = (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possuí derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto é, mostrar que não existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(I)$ que satisfaz

$$\int_I u\phi'\,dx = -\int_I v\phi\,dx.$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Com efeito, suponha o contrário

$$-\int_0^2 v\phi\,dx = \int_0^2 u\phi'\,dx = \int_0^1 x\phi'\,dx + 2\int_1^2 \phi'\,dx = \int_0^1 \phi\,dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leqslant \phi_n \leqslant 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \to 0 \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v\phi_n\,dx - \int_0^1 \phi_n\,dx\right] = 0$$

pois pelo Teorema da Convergência Dominada, $\phi_n \to 0$ qtp em I Portanto u não possui derivada fraca.

Com a noção de derivada fraca, estamos prontos para definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$

Definição 3.10. Seja I um intervalo aberto, possívelmente ilimitado. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(I)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p} = \{u \in \mathcal{L}^p \,;\, u' \in \mathcal{L}^p\}$$

onde u' é a derivada de u no sentido fraco

3.4 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é definir a derivada fraca de ordem superior, generalizar os espaços da seção anterior para funções definidas em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e explorar algumas propiedades elementares.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\phi\nu_i\, dS - \int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula em $\partial\Omega$, como mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx. \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Além disso, se u for de classe $\mathcal{C}^k$ com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi. \tag{3.2}$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (3.1) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (3.2) ainda é válida, mesmo se u não for de classe $\mathcal{C}^k$. Note que o lado esquerdo de (3.1) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. O problema é que se u não é uma função de classe $\mathcal{C}^k$ então o lado direito de (3.1) não faz sentido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que (3.1) é válida quando substituimos $D^\alpha u$ por v.

Definição 3.11 (Derivada fraca em Ω)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, denotada por

$$D^\alpha u = v$$

dado que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi\, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi\, d\mu. \tag{3.3}$$

para toda função de teste $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (3.3) para toda ϕ função de teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (3.3), então u não possui a α-ésima derivada parcial fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é a sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 3.12. Sejam $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega u\phi = 0$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω

Demonstração. □

Proposição 3.13. Seja α um multi-índice. Se v e $\tilde{v}$ são ambas α-ésimas derivadas parciais fracas de uma função u. Então
$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \, dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v}\phi \, dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Daí
$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\phi \, dx = 0$$

isto é
$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto $v = \tilde{v}$ qtp em Ω. □

Exemplo 3.14. Considere a função u do exemplo 3.8, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

é a derivada de u no sentido fraco. Porem a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porem v e $\tilde{v}$ são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto
$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podmos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 3.15. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \,; \text{existem } g_i : \Omega \to \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mu = -\int g_i \phi \, d\mu \right\}$$

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, indutivamente, e pela derivada fraca, veremos as duas e mostraremos que são equivalentes

Definição 3.16. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,;\, D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k\}$$

com $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Ou

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega)\,;\, D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1\right\}$$

onde $D^\alpha u$ é a α-ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

onde

$$\langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Definição 3.17. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leqslant p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$$

para $p = \infty$.

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Além disso dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω, isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \Subset \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Isso será feito após o Teorema 3.19 sobre as propiedades da derivada fraca necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Observação: Essa não é a única forma de definir uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo a norma

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é equivalente a

$$\max_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Exemplo 3.18. Seja $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto |x|^{-\alpha}.$$

Para quais valores de $\alpha > 0$, n e p, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de $\mathbf{0}$ com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{|x|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{|x|^{\alpha+2}}\right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes, temos

$$\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i \, dS$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ denota o vetor normal que aponta para dentro em $\partial B[\mathbf{0}, \varepsilon]$. Agora se $\alpha + 1 < n$, $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando Du, temos

$$\int_\Omega |Du|\, dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\, dx.$$

Transformando em coordenadas polares, conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\, dx = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\, dSdr = \int_0^1 \int_{|x|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}}\, dSdr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dSdr.$$

Onde a integral de superficie, é igual a area da esfera n-dimensional de raio r, dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

que por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n)r^{n-1}$. Dessa forma

$$\int \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{|x|=r} dSdr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2}\, dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1}\right).$$

Note que se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim

$$\int_\Omega |Du|\, dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso

$$\left|\int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i\, dS\right| \leqslant \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u||\phi||\nu_i|\, dS \leqslant \|\phi\|_\infty \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leqslant \|\phi\|_\infty \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha}\, dS,$$

onde essa ultima integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left|\int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i\, dS\right| \leqslant C\varepsilon^{n-1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Portanto

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n - 1$. Além disso, $|Du(x)| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha + 1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $|Du(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geqslant n$.

Teorema 3.19 (Propiedades da derivada fraca)**.** Seja $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Então

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$.

(b) $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\gamma u + v) = \gamma D^\alpha u + D^\alpha v$$

(d) se Ω_0 é um aberto de Ω, então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$

(e) se $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \tag{3.4}$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leqslant \alpha$ significa $\sigma_j \leqslant \alpha_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. A demonstração para $D^\alpha D^\beta u$ é análoga. Com efeito

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx.$$

Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável, então o operador D^α é a α-ésima derivada parcial no sentido usual. Dessa forma $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca obtemos

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_\Omega \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^\alpha u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β com $|\beta| \leqslant k - |\alpha|$ tal que $D^\beta(D^\alpha u) \notin \mathcal{L}^p$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta}u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^\gamma u \in \mathcal{L}^p$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leqslant k$. Em particular como $|\beta| \leqslant k - |\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leqslant k$. Portanto $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_\Omega (\gamma u + v) D^\alpha \phi \, dx = \int_\Omega \gamma u D^\alpha \phi \, dx + \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx = \gamma \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx + \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas integrais obtemos

$$\gamma \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx + \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx = \gamma(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha v \, dx = \int (\gamma D^\alpha u + D^\alpha v)\phi \, dx$$

Portanto $D^\alpha(\gamma u + v) = \gamma D^\alpha u + D^\alpha v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega_0 \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega_0} |u|^p \, dx \ \text{ e } \ \int_{\Omega_0} |D^\alpha u|^p \, dx \ \ (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leqslant k)$$

são finitas. De fato

$$\int_{\Omega_0} |u|^p \, dx \leqslant \int_{\Omega} |u|^p \, dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega_0} |D^\alpha u|^p \, dx \leqslant \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx < \infty \ \ (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leqslant k),$$

ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega_0)$.

(e) Para mostrar que (3.4) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$. Com efeito para $|\alpha| = 1$, como η e φ são funções infinitamente diferenciáveis no sentido usual, temos que $D^\alpha(\eta\varphi) = \phi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \phi$. Dessa forma

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = \int_\Omega u D^\alpha(\eta\phi) - \int_\Omega u\phi D^\alpha \eta \, dx.$$

Como η e ϕ tem suporte compacto, então $D^\alpha(\eta\phi)$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral obtemos

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = -\int_\Omega \eta\phi D^\alpha u \, dx - \int_\Omega u\phi D^\alpha \eta \, dx = -\int_\Omega (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta)\phi \, dx.$$

Portanto $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$ como queriamos mostrar.

Agora seja $m < k$ e suponha que (3.4) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant l$ e toda função de teste η. Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m+1$. Então α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Daí

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = \int_\Omega \eta u D^{\beta+\gamma} \phi \, dx = \int_\Omega \eta u D^\beta (D^\gamma \phi) \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta(\eta u) D^\gamma \phi \, dx.$$

Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^\beta(\eta u)$ e a γ-ésima derivada fraca. Assim

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi \, dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \right] \phi \, dx$$

Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} \left(D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \right) \right] \phi \, dx \tag{3.5}$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório dentro da integral da seguinte forma

$$\sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u$$

que ainda pode ser expandido em quatro somatórios

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u &+ \sum_{\beta < \rho \leqslant \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ &+ \sum_{0 \leqslant \sigma < \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Porem, note que $0 \leqslant \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leqslant \sigma$ significa que $0 \leqslant \sigma_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $i = 1, \ldots, n$ tal que $\sigma_i < \gamma_i$. Como $|\gamma| = 1$, suponha sem perda de generalidade que $\gamma = e_1$. Dessa forma, para $i = 1$

$$0 \leqslant \sigma_1 < 1$$

como $\sigma_i \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \dots, n$

$$0 \leqslant \sigma_i < 0$$

que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma $\beta < \rho \leqslant \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (3.6) pode ser escrito da seguinte forma

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^\alpha \eta. \tag{3.7}$$

Por fim, ao menos de uma mudança de variaveis, escrevemos (3.7) como

$$\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u.$$

Pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (3.5) temos que

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u$$

como queriamos mostrar. □

Com os resultados obtidos, é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ formam um espaço de Banach.

Teorema 3.20. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração.

$(1 \leqslant p < \infty)$

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0 \iff \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0 \iff D^\alpha u = 0$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Em particular se $\alpha = (0, \dots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α. Sendo assim $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha(\lambda u)\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\lambda D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = |\lambda|^p \|u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \lambda|\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski em ℓ^p

$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ou seja,

$$\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$.

$(p = \infty)$

O caso $p = \infty$ é análogo ao caso $1 \leqslant p < \infty$. □

Teorema 3.21. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ é completo

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Note que

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \|u_n - u_m\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon^p$$

para todo $n, m > n_0$. Ou seja, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, que é um espaço completo (Teorema 1.83). Dito isso

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Em particular, se $\alpha = (0, \ldots, 0)$ denotamos $D^\alpha u_n$ por u_n e u_α por u. Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema da Convergência Dominada (e o teorema no livro do Brezis, ver pág e número) e utlizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = \int_\Omega \lim u_n D^\alpha \phi = \lim \int_\Omega u_n D^\alpha \phi \, dx = \lim\, (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi \, dx \\ = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \lim D^\alpha u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx.\end{aligned}$$

Portanto $D^\alpha u = u_\alpha$ e consequentemente $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$.

Por outro lado, considere (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Além disso

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Isto nos diz que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^\infty$ que é um espaço completo (Teorema 1.88). Sendo assim

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^\infty(\Omega)$$

De forma análoga ao caso $1 \leqslant p < \infty$, mostramos que $D^\alpha u = u_\alpha$ e portanto $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. □

3.5 Aproximações

Não é ideal ficar voltando o tempo todo à definição de derivadas fracas. Para explorar as propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev, precisamos de métodos sistemáticos para aproximar funções nesses espaços por funções mais suaves. A técnica de molificação, que envolve a convolução de uma função com uma molificadora suave e com suporte compacto, oferece essa ferramenta. Esse processo resulta em uma sequência de funções suaves que convergem para a função original nas normas de Sobolev, permitindo a aproximação de funções com regularidade fraca por funções suaves. As molificadoras são essenciais na teoria dos espaços de Sobolev, possibilitando o estudo de soluções fracas para equações diferenciais parciais e estabelecendo resultados importantes de densidade.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

conhecida como molificador de Friedrich, onde $c > 0$ é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função η de classe $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compacto satifazendo.

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$
- $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon) = \delta(x)$ onde δ é a função delta de Dirac.

Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{3.9}$$

essa função η_ε é de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\operatorname{supp}\eta_\varepsilon \subseteq B[0,\varepsilon]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1.$$

Essa função será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se u é uma função locamente integrável, definimos a molificação de u por $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, isto é

$$u^\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y) = \int_{B[0,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(y)u(x-y)\,dy$$

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propiedades importantes sobre essas aproximações.

Teorema 3.22 (Aproximação local por funções suaves)**.** Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \ \text{ em } \Omega_\varepsilon$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\, d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então

(a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$

(b) $u^\varepsilon \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$

Demonstração.

(a) Seja $g(x) = (x-y)/\varepsilon$, daí, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) = \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Por outro lado, sejam $x \in \Omega_\varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$ e h de forma que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Daí

$$\frac{u^\varepsilon(x+he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] u(y)\,dy$$

Note que, novamente utilizando a regra da cadeia

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

quando $h \to 0$. Isto é

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)u(y)\,dy.$$

Indutivamente, mostramos que $D^\alpha u^\varepsilon$ existe e

$$D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u.$$

O fato de u^ε ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ segue do fato de η_ε ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ por definição e u ser integrável.

(b) Afirmamos que a α-ésima derivada parcial de u^ε no sentido usual é igual a convulução de η_ε com a α-ésima derivada parcial fraca de u para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Isto é

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Com efeito, no item **(a)** vimos que $D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u$. Primeiramente, se $g(x) = x - y$, temos

$$D_x^{e_i}\eta_\varepsilon(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\varepsilon \circ g)(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_k}(x-y)\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y).$$

Por outro lado, se $h(y) = x - y$, obtemos

$$D_y^{e_i}\eta_\varepsilon(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\varepsilon \circ h)(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_k}(x-y)\frac{\partial h_k}{\partial y_i}(x) = -\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação

$$D_x^{e_i}\eta_\varepsilon(x-y) = -D_y^{e_i}\eta_\varepsilon(x-y).$$

Repetindo esse cálculo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y).$$

Dessa forma

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy.$$

Fixando $x \in \Omega_\varepsilon$, a função $\phi_x(y) = \eta_\varepsilon(x-y)$ é suave e tem suporte compacto em Ω. Aplicando a definição de derivada fraca com função de teste $\eta_\varepsilon(x-y)$, segue que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy. = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)\,dy$$

Portanto

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Além disso, afirmamos que dados abertos V, W tais que $V \Subset W \Subset \Omega$, uma função $v \in \mathcal{L}^P_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Com efeito, note que se $1 < p < \infty$ e $x \in V$

$$|v^\varepsilon(x)| = \left| \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)\,dy \right| \leqslant \int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y)v(y) \right| dy.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral, obtemos

$$\int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y)v(y) \right| dy \leqslant \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)|v(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Como $\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$ e utilizando o Teorema de Fubini, segue que

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|^p\,dx = \int_V \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)|v(y)|\,dy\,dx \leqslant \int_W |v(y)|^p \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy.$$

Isto é

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Por fim, seja $V \Subset \Omega$ um aberto. Afirmamos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ em } \mathcal{L}^p(V)$$

quando $\varepsilon \to 0$, para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. De fato, seja W um aberto de forma que $V \Subset W \Subset \Omega$, $\delta > 0$, utilizando a afirmação anterior com $v^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$ e $v = D^\alpha u$ escolhendo $w \in \mathcal{C}(W)$ tal que

$$\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} < \delta.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} &\leqslant \|D^\alpha u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\
&\leqslant \|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(W)} \\
&\leqslant 2\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\
&\leqslant 2\delta + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)}
\end{aligned}$$

Como $w \in \mathcal{C}(W)$, então $w^{\varepsilon} \to w$ uniformemente em V. Portanto $D^{\alpha}u^{\varepsilon} \to D^{\alpha}u$ em $\mathcal{L}^p(V)$. Dessa forma

$$\|u^{\varepsilon} - u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^{\alpha}u^{\varepsilon} - D^{\alpha}u\|^p_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto

$$u^{\varepsilon} \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$$

como queriamos mostrar □

Exemplo 3.23. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, dada uma função $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_c(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} u\phi'\,dx = \int_{-1}^{1} u\phi'\,dx = \int_{-1}^{0} u\phi'\,dx + \int_{0}^{1} u\phi'\,dx.$$

Utlizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} u\phi'\,dx = \Big[x\phi\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \phi\,dx + \Big[-x\phi\Big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} -\phi\,dx.$$

Como ϕ tem suporte compacto em Ω, então

$$\Big[x\phi\Big]_{-1}^{0} + \Big[-x\phi\Big]_{0}^{1} = 0$$

Sendo assim

$$\int_{\Omega} u\phi'\,dx = -\int_{-1}^{0} \phi\,dx - \int_{0}^{1} -\phi\,dx = -\int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x)\phi\,dx.$$

Portanto

$$u' = \operatorname{sgn}(x)$$

no sentido fraco, onde

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Além disso

$$\int_{\Omega} |\operatorname{sgn}(x)|^p\,dx = \int_{-1}^{1} 1^p\,dx = \Big[x\Big]_{-1}^{1} = 2 < \infty$$

Assim $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e portanto $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para para $1 \leqslant p < \infty$. Vamos utiizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u. Seja $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$$

isto é

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\,dx\right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Daí definimos a função molificadora $\eta_{\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

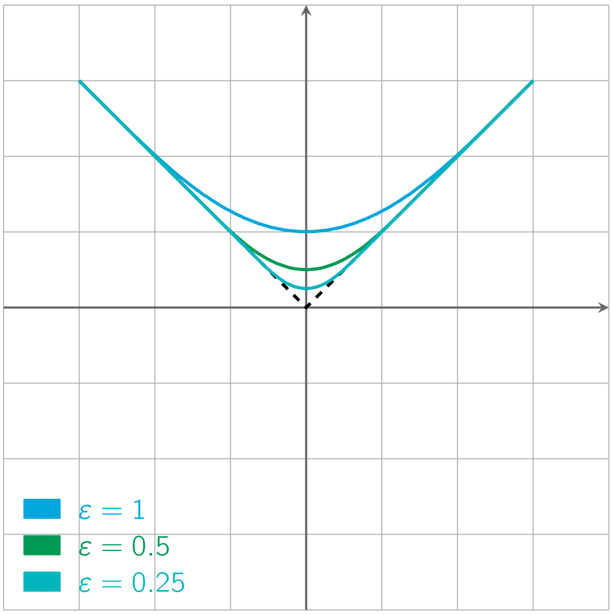


Figura 3.1: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ε com $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$
Fonte: Autoral

Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon \, dx = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} \eta = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u. Com efeito

$$u^\varepsilon(x) = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x) u(x-y) \, dy$$

A Figura 3.1 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ε

Observação: (converge para a função delta de Dirac)

Exemplo 3.24. Seja $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de $|\cdot|$ não ser diferenciável. Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ quando $0 < p < 2$ dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}$$

Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a i-ésima coordenada. Utilizando integração por partes obtemos

$$\int_\Omega u D^{e_i} \phi = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i \, ds - \int_\Omega \phi D^{e_i} u \, dx$$

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Para calcular $D^{e_i} u$ precisamos dividir o domínio Ω em Ω_1, Ω_2, Ω_3 e Ω_4, onde Ω_i é a restrição ao i-ésimo quadrante. Note que em $\Omega_1 = (0,1) \times (0,1)$, $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$. Logo, nesse conjunto $D^{e_i} u$ existe no sentido usual e é dada por

$$D^{e_i} u = \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}}.$$

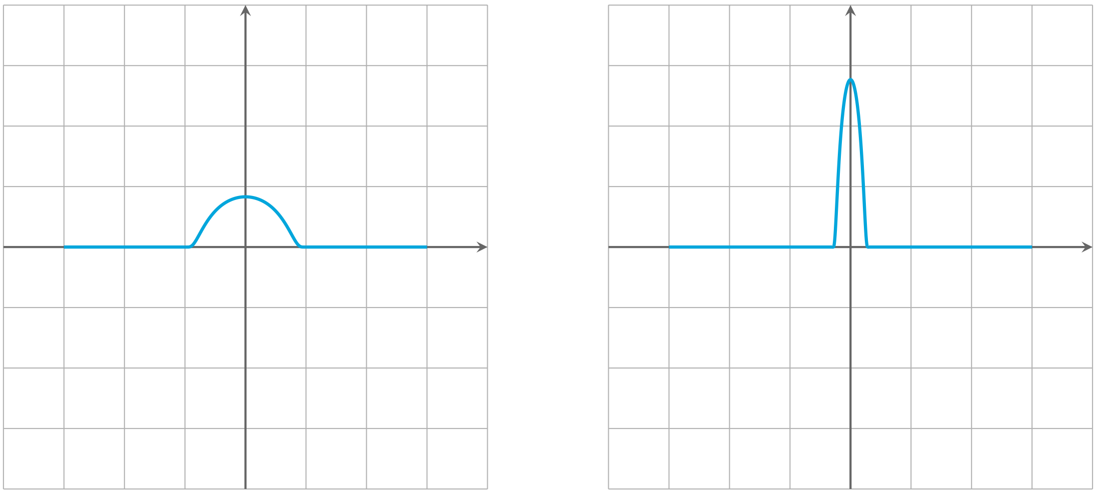


Figura 3.2: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$
Fonte: Autoral

De forma análoga

$$\begin{aligned} D^{e_i}u(x_1,x_2) &= \tfrac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_2 \text{ e } \Omega_3 \\ D^{e_i}u(x_1,x_2) &= \tfrac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_4. \end{aligned}$$

Dito isso

$$\int_\Omega \phi D^{e_i}u\,dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx$$

que podemos escrever como

$$\int_\Omega \phi D^{e_i}u\,dx = \int_{\Omega_1\cup\Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_2\cup\Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx = \int_\Omega \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx$$

Por fim, como ϕ tem suporte compacto em Ω, ϕ se anula em $\partial\Omega$. Dessa forma

$$\int_{\partial\Omega} u\phi\nu^i\,ds = 0.$$

Portanto

$$\int_\Omega uD^{e_i}\phi\,dx = -\int_\Omega \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx.$$

Isto é

$$D^{e_i}u(x_1,x_2) = \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

como queriamos mostrar. Além disso

$$\int_\Omega |D^{e_i}(x_1,x_2)|^p\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\right|^p dx_idx_j = \frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}}\,dx_idx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini

$$\frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}}\,dx_idx_j = \frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1}dx_j\int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}}\,dx_i = \frac{1}{2^{p-1}}\int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}}\,dx_i.$$

Daí, precisamos ver para quais valores de p essa integral é finita, sendo assim

$$\frac{1}{2^{p-1}}\int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p|x_i|^{-\frac{p}{2}}\,dx_i = \frac{1}{2^{p-2}}\int_0^1 x_i^{\frac{p}{2}+1}\,dx = \frac{1}{2^{p-2}}\left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}-1}\right]$$

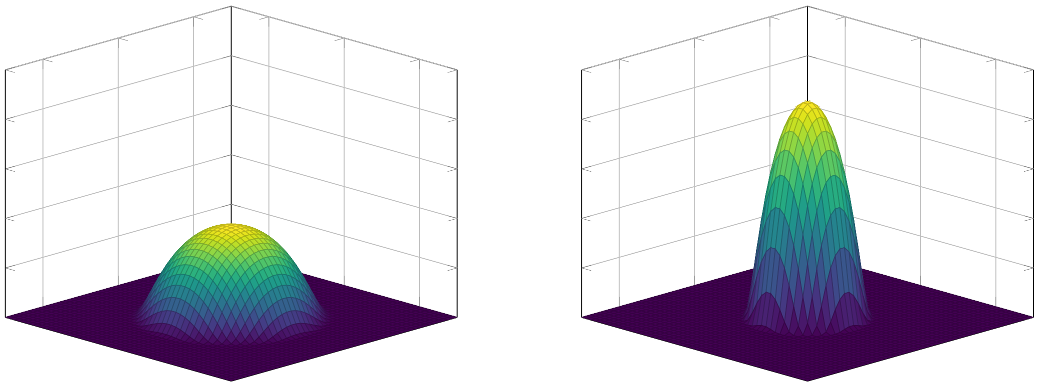


Figura 3.3: η e η_ε com $\varepsilon = 0.5$

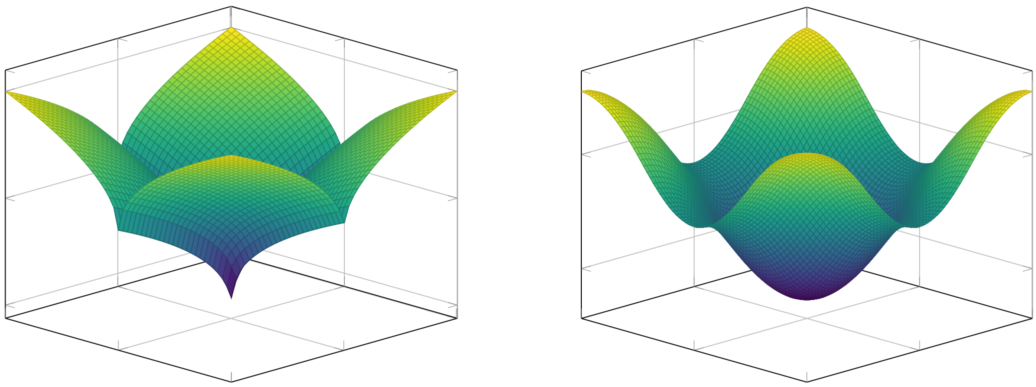


Figura 3.4: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^ε com $\varepsilon = 0.5$
Fonte: Autoral

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando $p < 2$. Portanto $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

(ver Figura 3.3) e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u.

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_\Omega \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\, dy$$

Utilizando um metodo numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε. A figura 3.4 mostra o gráfico de u, onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε.

Teorema 3.25. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então existem funções $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tais que

$$u_n \to u \ \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

onde $\Omega_i = \{x \in \Omega\,;\, d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. Defina $V_i = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$. Além disso, escolha qualquer aberto $V_0 \Subset \Omega$ de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

e seja $(\phi_i)_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $(V_i)_{i=0}^{\infty}$, isto é

$$0 \leqslant \phi_i \leqslant 1 \text{ com } \phi_i \in \mathcal{C}_c^{\infty}(V_i) \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = 1 \text{ em } \Omega.$$

Agora escolha uma função $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, vimos que

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \text{ e } \operatorname{supp} \phi_i u \subseteq V_i.$$

Fixando $\delta > 0$, escolha um $\varepsilon_i > 0$ de forma que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u$ satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e } \operatorname{supp} u^i \subseteq W_i$$

com $W_i = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} \supseteq V_i$.

Seja $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i$ (...ta confuso nas notas...). Como $u = u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \phi_i u$ para cada $V \Subset \Omega$ temos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \delta.$$

Passando o supremo sobre os conjuntos $V \Subset \Omega$ obtemos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \delta.$$

Ou seja, podemos definir para cada $\delta > 0$ ... (usar o δ para definir uma sequência,)

□

Definição 3.26. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Dizemos que $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^k$ se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma função de classe $\mathcal{C}^k$ $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[x_0, r] = \{x \in B[x_0, r]\,;\, x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ se é de classe $\mathcal{C}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.27. Sejam Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então existem funções $u_n \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ tais que

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $x_0 \in \partial\Omega$, como $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^1$, existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Omega \cap B[x_0, r] = \{x \in B[x_0, r]\,;\, x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Definimos $V = \Omega \cap B[x_0, r/2]$. Além dissø, definimos para cada $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $x \in V$

$$x_\varepsilon = x + \lambda\varepsilon e_n = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + \lambda\varepsilon).$$

Para um λ suficientemente grande e ε suficientemente pequeno, a bola $B_\varepsilon[x_\varepsilon]$ está contída em $\Omega \cap B[x, 0, r]$ para todo $x \in V$. De fato, por definição, dado $x \in V$ temos que $x \in \Omega$ e $\|x - x_0\| \leqslant r/2$. Note que $x_\varepsilon \in \Omega \cap B[x_0, r]$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ suficientemente grande. Com efeito, como $x \in V$ em particular $x \in \Omega \cap B[x_0, r]$. Dessa forma, temos que $x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})$, daí

$$x_n^\varepsilon = x_n + \lambda\varepsilon > x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Além disso

$$\|x_\varepsilon - x_0\| = \|x + \lambda\varepsilon e_n - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|\lambda\varepsilon e_n\| \leqslant \frac{r}{2} + \lambda\varepsilon < r$$

desde que $0 < \varepsilon < \frac{r}{2\lambda}$. Logo $x_\varepsilon \in \Omega \cap B[x_0, r]$ para todo ε pequeno. Pelo mesmo motivo $B[x_\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \Omega \cap B[x_0, r]$.

Agora, definimos $u_\varepsilon(x) = u(x_\varepsilon)$ para todo $x \in V$ e $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Assim, $v^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$. Afirmamos que

$$\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \to 0$$

De fato, seja α um multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$, então

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}.$$

O segundo termo do lado direito da equação a cima vaí a 0 quando $\varepsilon \to 0$ pois a translação é contínua na norma $\mathcal{L}^p$ e

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} = \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$. Ou seja

$$\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0$$

Agora seja $\delta > 0$, como $\partial\Omega$ é compacto podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $x_i^0 \in \partial\Omega$, $r_i > 0$, conjuntos $V_i = \Omega \cap B[x_i^0, r_i/2]$ e funções v_i $(i = 1, \ldots, N)$ tal que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i^0, r_i/2) \;\text{ e }\; \|v_i - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)}.$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos $\{V_i\}_{i=0}^N$ em Ω. Defina

$$v = \sum_{i=0}^N \phi_i v_i \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

Daí

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \sum \|D^\alpha(\phi_i v_i) - D^\alpha(\phi_i u)\|_{\mathcal{L}^p} \leqslant \sum \|v_i - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = cN\delta$$

(finalizar) □

3.6 Extensões

(introdução)

Teorema 3.28. Sejam Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e um Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p < \infty$ tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

(a) $Eu = u$ qtp em Ω

(b) $\operatorname{supp} Eu \subseteq \Omega'$

(c) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p, Ω e Ω'

Demonstração. Seja $x^0 \in \partial\Omega$ e suponha que $\partial\Omega$ esteja contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de x^0. Dessa forma, podemos supor que existe uma bola $B = B(x^0, r)$ tal que

$$B^+ = B \cap \{x_n \geqslant 0\} \subseteq \overline{\Omega}$$
$$B^- = B \cap \{x_n \leqslant 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Além disso, suponha inicialmente que $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2}) & \text{se } x \in B^- \end{cases}$$

que chamamos de reflexão de ordem superior da função u de B^+ a B^-. Afirmamos que $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$. Com efeito, denotando $u^- = \bar{u}\big|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}\big|_{B^+}$, podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \quad \text{em} \quad \{x_n = 0\}.$$

De fato, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = 3u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \tfrac{x_n}{2})$$

quando $x_n = 0$, obtemos

$$\left.\frac{\partial u^-}{\partial x_n}\right|_{\{x_n=0\}} = 3u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \left.\frac{\partial u^+}{\partial x_n}\right|_{\{x_n=0\}}$$

Além disso

$$u^+ = u^- \quad \text{e} \quad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i}$$

ambos em $\{x_n = 0\}$. Portanto $D^\alpha u^- = D^\alpha u^+$ em $\{x_n = 0\}$ com $|\alpha| \leqslant 1$. Sendo assim, $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$, pois fora de $\{x_n = 0\}$, as componentes de $\bar{u}$ já eram de classe $\mathcal{C}^\infty$, então apenas restava verificar que em $B^+ \cap B^- = B \cap \{x_n = 0\}$ as componentes em B^+ e B^- se igualavam, implicando a continuidade $\bar{u}$ e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \tag{3.10}$$

onde c é uma constante positiva que não depende de u. De fato

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(B)} = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p \, dx\right].$$

Como $B = B^+ \cup B^-$, e denotando $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ por x' podemos reescrever o ultimo somatório da seguinte forma

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p\, dx\right] = \sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p\, dx + \int_{B^-} |4D^\alpha u(x', -\tfrac{x_n}{2}) - 3D^\alpha u(x', -x_n)|^p\, dx\right]$$

que é menor ou igual a

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p\, dx + 3\cdot 2^p\int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p\, dx + 4\cdot 2^p\int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p\, dx\right]$$

Porem, $-x_n, -\frac{x_n}{2} \geqslant 0$, então podemos considerar que as integrais em B^- são integrais sobre B^+. Dito isso, ao menos de uma mudança de variáveis, obtemos

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p\, dx\right] \leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p\, dx\right] = c\|u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}$$

Portanto

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}$$

Por outro lado, se $\partial\Omega$ está necessáriamente contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de x^0. Neste caso, existe um homeomorfismo Φ com inversa Ψ que planifica $\partial\Omega$ perto de x^0. Utilizando a função γ da Definição 3.26, definimos o homemorfismo Φ por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

De forma análoga definimos Ψ por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_{n-1})).$$

Dessa forma $\Psi^{-1} = \Phi$. Sendo assim, seja $y = \Phi(x)$ (ou seja $x = \Psi(y)$) e definimos $u'(y) = u(\Psi(y))$, daí como foi feito anteriormente, podemos escolher uma bola $B = B(y_0, r)$ e definimos $\bar{u}'$ de forma que $\bar{u}' \in \mathcal{C}^1(B)$ e

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}. \tag{3.11}$$

Seja $W = \Psi(B)$, assim conseguimos obter uma extensão $\bar{u}$ de u para W com

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para $\bar{u}(w) = \bar{u}'(\Phi(w))$, obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis

$$\|D^\alpha \bar{u}'\|_{\mathcal{L}^p(B)} = \int_B |D^\alpha \bar{u}'(y)|^p\, dy = \int_B |D^\alpha \bar{u}(\Psi(y))|^p\, dy = \int_W |D^\alpha \bar{u}(x)|^p\, dx = \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Dessa forma, passando o somatório

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)}. \tag{3.12}$$

Além disso

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u'\|_{\mathcal{L}^p(B^+)} = \int_{B^+} |D^\alpha u'(y)|^p\, dy &= \int_{B^+} |D^\alpha u(\Psi(y))|^p\, dy\\ &= \int_{\Psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p\, dx \leqslant \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\, dx = \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Isto significa que

$$\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \tag{3.13}$$

Portanto, por (3.12) e (3.13) obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \tag{3.14}$$

como queriamos mostrar.

Como $\partial\Omega$ é compacto, e $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x\in\partial\Omega} W_x$, que é uma cobertura aberta, pois $W_x = \Psi(B(y_0, r))$ (?), e imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto.Pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma subcobertura finita de $\partial\Omega$, sendo assim, existem uma quantidade finita de pontos $x_i^0 \in \partial\Omega$, abertos W_i e extensões $\bar{u}_i$ de u em W_i de forma que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N W_i$ e considere $W_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} W_i.$$

Seja $(\phi_i)_{i=0}^N$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $(W_i)_{i=0}^N$ e defina

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^{N} \phi_i \bar{u}_i$$

onde $\bar{u}_i$ está associada a W_i e $\bar{u}_0 = u$. Daí obtemos a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Com efeito

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{n=1}^{N} \|D^\alpha(\phi_i \bar{u}_i)\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})}$$

onde c é uma constante positiva que depende de p. Daí utuliziando a regra de Leibniz para derivada do produto em $\phi_i\bar{u}_i$ obtemos

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\phi_i \bar{u}_i)\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\operatorname{supp} D^\sigma\phi_i \subseteq \operatorname{supp}\phi_i \subseteq W_i$, então o suporte de $D^\sigma\phi_i$ também é compacto (pois W_i é limitado), sendo assim $\max|D^\sigma\phi_i|$ existe. Portanto

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(W_i)}$$

onde agora a constante c também depende de W_i. Além disso

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(W_i)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(W_i)}.$$

Por fim, utilizando (3.14)

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(W_i)} \leqslant c\|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

onde c depende de W_i, p e N. Portanto

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(W)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

Defina Ω' de forma que $\bigcup_{i=0}^{N} W_i \subseteq \Omega'$. Dessa forma supp $\bar{u} \in \Omega'$.

Defina $\tilde{E} : C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $\bar{E}u = \bar{u}$. Temos que $\bar{E}$ é linear,

$$\|\bar{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e supp $\bar{E}u \subseteq \Omega'$ Sendo assim definimos $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p < \infty$ por

$$Eu = \begin{cases} \bar{u} & \text{se } u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \\ \lim \overline{u_k} & \text{se } u \notin \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ que converge para u, sabemos que essa sequência existe pois mostramos que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Além disso

$$\begin{aligned} \|Eu - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} &\leqslant \|Eu - \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\overline{u_k} - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \\ &\leqslant \|Eu - \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0 \end{aligned}$$

pois $u_k \to u$. Portanto $Eu = u$ qtp em Ω, provando o item **(a)**.

Para verificar o ítem **(b)**, basta ver que por definição supp $\overline{u_k} \subseteq \Omega'$. Dessa forma supp $Eu \subseteq \Omega'$

Por fim, para mostrar o item **(c)**. Note que E é um operador limitado, pois

$$\|E\| = \|\bar{E}\| \leqslant c$$

Portanto

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

o caso $p = \infty$ não foi feito ainda □

3.7 Traços

(introdução)

Teorema 3.29. Seja Ω um aberto limitado e $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então existe um operador linear limitado $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^P(\partial\Omega)$ tal que

(a) $Tu = u\big|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$

(b) $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ onde c depende apenas de p e Ω.

Demonstração. □

Teorema 3.30 (Funções traço zero em $\mathcal{W}^{1,p}$)**.** Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por definição existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

Como u_k tem suporte compacto em Ω então u_k se anula em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim $Tu_k = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado. Portanto

$$Tu = T(\lim u_k) = \lim Tu_k = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Reciprocamente, suponha que $Tu = 0$ em $\partial\Omega$ ... □

3.8 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços ...

3.8.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja $1 \leqslant p < n$. Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.15}$$

onde c é uma constante positiva, $1 \leqslant q < \infty$ e $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, de forma que c e q não dependam de u.

Primeiramente vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (3.15) existe, o valor de q não é arbitrário, mas sim admite uma forma especifica. Para isso seja $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não-nula e $\lambda > 0$. Sendo assim, definimos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (3.15) a u_λ, obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.16}$$

Note que

$$\|u_\lambda^q\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^p \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^n}\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$\begin{aligned}\|Du_\lambda\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D(u(\lambda x))|^p \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p \, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p \, dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Utilizando essas igualdades em (3.16), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}}\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

que podemos reescrever como

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.17}$$

Observe que se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$, obtemos uma contradição quando $\lambda \to 0$, pois isso implicaria em $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, que só acontece se $u = 0$ que é uma contradição. De forma análoga se

$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$ obtemos uma contradição quando $\lambda \to \infty$. Sendo assim, para que a igualdade (3.15) seja válida, precisamos que

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$$

ou seja

$$q = \frac{np}{n-p}$$

Isso motiva a definição abaixo

Definição 3.31. Se $1 \leqslant p < n$ o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Os calculos no início da seção mostram que a desigualdade (3.15) somente é válida quando $q = p^*$. O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é veridica

Teorema 3.32 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** Seja $1 \leqslant p < n$. Então existe uma constante c que depende apenas de p e n, tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.18}$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos dois casos

$(p = 1)$
Como por hipótese, u tem suporte compacto, temos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\, dy_i$$

e daí

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \right| dy_i \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|\, dy_i$$

e elevando ambos os lados a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de $i = 1$ até n obtemos

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$ por X_i e Integrando ambos os lados em relação a x_1 de $-\infty$ a ∞.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.
\end{aligned}$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1, então a sua integral é constante em relação a x_1 e pode "sair" da integral, sendo assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, a desigualdade se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞ obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

que podemos reescrever da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} I_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \text{ e } I_i = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Porem, I_2 é constante em relação a x_2 então

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant I_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_2)|\, dx_1 dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dx_2 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\, dx\right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{p^*} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \tag{3.19}$$

como queriamos mostrar.

$(1 < p < n)$

Considere a função $|u|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser decidido. Utilizando a desigualdade no caso $p = 1$ temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)|\, dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|Du|\, dx$$

utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Escolhendo γ de forma que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1}$. Isto é

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

nesse caso, $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalizando a demonstração □

Observação: Note que o suporte compato é necessário, como exemplo tome a função $u(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma $|Du| = 0$.

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 0 \implies u \equiv 0$$

que é uma contradição.

Teorema 3.33. Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ então $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

onde c é uma constante que depende apenas de n, p e Ω

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.28, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\begin{aligned} &\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega \\ &\bar{u} \text{ tem suporte compacto} \\ &\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $\bar{u}$ tem suporte compacto, sabemos que existe uma sequência (u_k) dada por $\eta_{\varepsilon(k)} * \bar{u}$ $(\varepsilon(k) = 1/k)$ tal que

$$\|u_m - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0$$

e para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema anterior

$$\|u_k - u_l\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_k - Du_l\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.20}$$

Note que

$$\|Du_k - D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

isso mostra que (Du_k) é convergente (e portanto de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, por (3.20) observamos que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ que é um espaço completo, logo $u_k \to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que $v = \bar{u}$.

ver como foi feito nas notas

Dessa forma

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

O teorema anterior também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

Passando ao limite obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

Essa desigualdade finaliza a demonstração, já que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como queriamos mostrar □

Teorema 3.34. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < n$, então a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida para $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, conseguimos uma sequência de funções (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Além disso, podemos extender cada u_k para ser 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Sendo assim, aplicamos o Teorema ?? para obter

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \leqslant c\|Du_k\|_{\mathcal{L}^p}(\Omega)$$

Passando ao limite explicar o desenvolvimento

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}}(\Omega) \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Provando o caso em que $q = p^*$. Agora considere $1 \leqslant q < p^*$. Como Ω é limitado, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q \leqslant p^*$. □

Um caso particular da desigualdade acima é a Desigualdade de Poincaré que será apresentada no corolário abaixo

Corolário 3.35 (Desigualdade de Poincaré)**.** Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

onde c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração. Primeiramente considere $1 \leqslant p < n$ Por definição, $1 \leqslant p < p^*$, pelo teorema anterior

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p}.$$

Agora considere $n \leqslant p < \infty$ Considere $1 \leqslant s < n$ tal que $p < s^*$. Note que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Por fim, considere $p = \infty$. Pelo que foi visto acima, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Passando ao limite quando $s \to n^-$ temos que $s^* \to \infty$. Dessa forma

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Portanto

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. □

O resultado acima nos diz que

$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega) \quad (1 \leqslant q \leqslant p^*) \;\text{ e }\; \mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{s^*}(\Omega) \quad (1 \leqslant s \leqslant \infty)$$

isto é (...)

3.8.2 Desigualdade de Morrey

Para estudar essa próxima classe de desigualdades, precisamos de algumas definições relacionadas aos espaços de Hölder.

Definição 3.36. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita ser Hölder continua com expoente γ quando

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c\|x - y\|^{\gamma}$$

para todo $x, y \in \Omega$. Além disso, denotamos o espaço dessas funções por $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 3.37. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, escrevemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \quad \text{e} \quad [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\gamma}} \right\}$$

para denotar a norma de u no espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com essas definições, estamos prontos para enunciar e demonstrar a Desigualdade de Morrey

Teorema 3.38. Seja $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e $n < p \leqslant \infty$. Então

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n e $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

Demonstração. □

Definição 3.39. Dizemos que u^* é uma versão de uma função u se

$$u = u^* \text{ qtp em seu domínio}$$

Teorema 3.40. Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Considere $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n < p \leqslant \infty$. Então u tem uma versão contínua $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ e

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

onde c é um constnte que depende de n, p e Ω

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.28, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega$$
$$\bar{u} \text{ tem suporte compacto}$$
$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Além disso, como $\operatorname{supp} \bar{u}$ é compcto, temos pelo Teorema (aproximação) que existem funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Além disso, pelo Teorema 3.38

$$\|u_k - u_l\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k - u_l\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, já que (u_k) é convergente em ds $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ é commpleto verificar, existe uma função $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Note que $u^* = \bar{u}$ qtp em $\mathbb{R}^n$ e $u = \bar{u}$ qtp em Ω. Logo $u = u^*$ qtp em Ω, ou seja u^* é uma versão de u. O Teorema 3.38 também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Isto nos leva a

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

como era desejado. □

3.8.3 Desigualdades gerais de Sobolev

Teorema 3.41. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp < n$, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant kp < n$ temos que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev obtemos

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

com $|\beta| = k - 1$. Dessa forma $u \in \mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)$. De forma análoga temos que $u \in \mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Indutivamente, chegamos a $u \in \mathcal{W}^{0,q}(\Omega) = \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

como queriamos mostrar. □

(definir $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$)

Teorema 3.42. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp > n$, então $u \in \mathcal{C}^{k-l-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $l = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0, 1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-l-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida com c dependendo apenas de k, p, n, γ e Ω.

Demonstração. . . . □

3.9 Compacidade

(introdução)

Definição 3.43. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos por $X \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} Y$ se para todo $x \in X$

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y, isto é, existe uma subsequência que converge em Y.

Observação: Se um mergulho satisfaz apenas a primeira propiedade, dizemos que X está continuamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 3.44 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega)$$

com $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q < p^*$

Demonstração. □

CAPÍTULO QUATRO

DERIVANDO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Nesse capítulo visamos derivar as equações de Navier-Stokes partindo do principio de conservação de energia (?) e ressaltar alguns fatos importantes sobre essas equações e suas soluções.

Equação de Navier-Stokes linearizada

$$\mu \Delta u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{\rho}\nabla p(x,t) = X(x,t)$$

$$\nabla u(x,t) = 0$$

CAPÍTULO CINCO

SOLUÇÕES FRACAS DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

5.1 Introdução

5.2 Preliminares

Alguns resultados que vamos utilizar já foram apresentados em outras partes do texto, então aqui vamos apresentar novos preliminares

Proposição 5.1 (Desigualdade de Young para Convoluções)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in \mathcal{L}^r$ com $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}.$$

5.3 Movimento infinitamente lento

$$\tilde{u}_i(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{r}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y, 0)\, dy$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.

[2] C.W. Oseen. *Hydrodynamik*. Mahtematik in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.

[3] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.

[4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[5] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.

[6] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: `1604.02484 [math.HO]`.

[7] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.

[8] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.

[9] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.