
CONTEÚDO

1	Espaços de Sobolev	3
1.1	Preliminares	3
1.2	Motivação	6
1.3	Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	6
1.4	Aproximações	17
1.5	Extensões	28
1.6	Traços	32
1.7	Desigualdades de Sobolev	37
1.7.1	Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev	37
1.7.2	Desigualdade de Morrey	42
1.7.3	Desigualdades gerais de Sobolev	46
1.8	Compacidade	49
2	Algumas aplicações dos Espaços de Sobolev	53
2.1	Preliminares	53
2.1.1	Desigualdades	53
2.1.2	Transformada de Fourier	54
2.1.3	Semigrupo do calor	55
2.1.4	Notação	56
2.2	Propriedades da soluções de Leray	57
2.2.1	Introdução e contexto histórico	57
2.2.2	Resultados	58
2.3	Problema de Dirichlet	71

CAPÍTULO UM

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev e suas principais propriedades.

1.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo.

Definição 1.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Além disso, se $\text{supp } \varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp } \varphi$, então $(\text{supp } \varphi)^c \subseteq \{x \in \Omega; \varphi(x) = 0\}$. Ou seja, se $x \notin \text{supp } \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Além disso, se Ω é um aberto, então φ se anula em $\partial\Omega$.

Definição 1.2. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . O espaço $\mathcal{C}^k(\Omega)$ é composto por todas funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em que suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k também são contínuas. Se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dizemos que f é de classe \mathcal{C}^k .

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega).$$

Definição 1.3. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$.

A definição abaixo será amplamente utilizada nesse capítulo.

Definição 1.4. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua ; supp } f \text{ é compacto}\}$$

Além disso, definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega),$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k com suporte compacto.

Definição 1.5 (Espaços \mathcal{L}^p e \mathcal{L}^∞).

Os resultados abaixo são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

Teorema 1.6. O espaço $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach¹

Demonstração. □

Teorema 1.7 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$, e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados². Então $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Demonstração. □

Uma generalização desse resultado será apresentada abaixo

Teorema 1.8 (Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam $0 < p_1, \dots, p_N \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \dots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}(\Omega)$ para todo $j = 1, \dots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\Omega)} \dots \|f_N\|_{\mathcal{L}^{p_N}(\Omega)}.$$

Demonstração. □

Teorema 1.9. Se Ω é limitado e, $1 \leq p < q < \infty$. Então $\mathcal{L}^q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}$$

para toda $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ e, $c > 0$ é uma constante que depende de p , q e Ω

Demonstração. □

Observação: Por convenção 1 e ∞ são expoentes conjugados.

¹Espaço vetorial normado completo, i.e., toda sequência de Cauchy é convergente.

² p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.10 (Integração por partes em \mathbb{R}^n). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular e $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Então,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta pra fora em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 628

□

Teorema 1.11 (Coordenadas Polares em \mathbb{R}^n). Seja $f : B(y, s) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, então

$$\int_{B(y,s)} f dx = \int_0^s \int_{\partial B(y,r)} f dS dr.$$

Demonstração. Ver [7], p.p. 78.

□

Teorema 1.12. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0$ para alguma função $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ e uma função $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que

- (a) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ qtp³em Ω ;
- (b) $|u_{n_k}(x)| \leq v(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, qtp em Ω .

Demonstração. Ver [3], p.p. 94.

□

Teorema 1.13 (Critério de compacidade de Arzelà-Ascoli). Seja (u_k) uma sequência de funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} tal que

$$|u_k(x)| \leq M,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $M > 0$ é uma constante e (u_k) é uniformemente equicontínua. Então, existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty} \subseteq (u_k)_{k=1}^{\infty}$ e uma função contínua u tal que $u_{k_j} \rightarrow u$ uniformemente em conjuntos compactos de \mathbb{R}^n .

Demonstração. Ver [12], p.p. 240.

□

Teorema 1.14 (Teorema de Fubini). Sejam $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f dX = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f dy dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f dx dy.$$

Demonstração. Ver [14] p.p. ??

□

³Duas funções u e v são ditas iguais em quase toda parte (qtp) se $u(x) = v(x)$ para todo $x \in X$ onde X^c tem medida nula

Teorema 1.15 (Mudança de variáveis). Seja $\Psi : A \rightarrow B$ um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n . Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável sobre B se, e somente se, $(f \circ \Psi)|\det D\Psi|$ é integrável sobre A . Neste caso,

$$\int_B f \, dx = \int_A (f \circ \Psi)|\det D\Psi| \, dy.$$

Demonstração. O capítulo 4 de [14] é destinado a demonstração desse teorema. \square

1.2 Motivação

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfazendo (1.1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (1.1) por uma função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx + \int_\Omega u \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx.$$

Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.10), a primeira integral pode ser reescrita como

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \, dx = - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, dS - \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \right).$$

Mas como ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, inferimos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega u \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx, \quad (1.2)$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ⁴. Observe agora, que não precisamos mais que u seja de classe \mathcal{C}^2 já que a segunda derivada de u não é utilizada em (1.2). Na verdade, não precisamos nem que u seja contínua, apenas integrável em Ω . Na Seção 2.3, voltaremos a essa motivação para mostrar que para qualquer função $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca para (1.1). Essa solução é uma função que pertence ao espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, esse e outros espaços e suas propriedades serão estudadas ao longo desse trabalho.

1.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é generalizar a noção de derivada para funções que não são diferenciáveis em um aberto Ω do \mathbb{R}^n e explorar algumas propriedades elementares.

⁴Nomenclatura: ϕ é chamada função teste.



Figura 1.1: Sergei Lvovich Sobolev (1908 – 1989)

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.10), temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial \Omega} u \phi \nu_i dS - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula sobre $\partial \Omega$, como foi mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad (1.3)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Ademais, se agora u for de classe \mathcal{C}^k em Ω com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u dx. \quad (1.4)$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (1.3) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (1.4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe \mathcal{C}^k . Note que o lado esquerdo de (1.3) está bem definido se $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$. O problema é que se u não é necessariamente uma função de classe \mathcal{C}^k então o lado direito de (1.3) não está bem definido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tal que (1.3) é válida quando substituímos $D^\alpha u$ por v .

Essa pergunta motiva a definição abaixo.

Definição 1.16 (Derivada fraca em Ω). Sejam $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , denotada por

$$D^\alpha u = v,$$

dado que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u dx, \quad (1.5)$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (1.5) para toda ϕ função teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (1.5), então u não possui a α -ésima derivada parcial fraca.

Observação: Aqui, utilizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue (utilizando a medida de Lebesgue), suas integrais coincidem.

Exemplo 1.17. A função $u : \Omega = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é diferenciável no sentido usual, já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h} = 1,$$

mas

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{h} = 0.$$

Porém, u possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi \Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim,

$$\int_0^2 u\phi' dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) = - \int_0^1 \phi dx.$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral para obter

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \left(\int_0^1 1\phi dx - \int_1^2 0\phi dx \right) = - \int_0^2 v\phi dx.$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 1.18. A função $u : \Omega = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 2, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possui derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto significa que não existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = - \int_{\Omega} v\phi dx,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com efeito, suponha, por absurdo que existe tal v . Deste modo

$$- \int_0^2 v\phi dx = \int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + 2 \int_1^2 \phi' dx = - \int_0^1 \phi dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leq \phi_n \leq 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \rightarrow 0 \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v \phi_n dx - \int_0^1 \phi_n dx \right] = 0$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, pois $\phi_n \rightarrow 0$ qtp em Ω . Portanto, u não possui derivada fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é sobre sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 1.19. Sejam $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Então,

$$\int_{\Omega} u \phi = 0$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω .

Demonstração. Ver [3], p.p. ??.

□

Com o lema acima em mente, temos todas as ferramentas para mostrar a unicidade da derivada fraca.

Proposição 1.20. Seja α um multi-índice. Se v e \tilde{v} são ambas α -ésimas derivadas parciais fracas de uma função u . Então,

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx \text{ e } \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com isso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi dx = 0.$$

Logo, pelo Lema anterior, chegamos a

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto, $v = \tilde{v}$ qtp em Ω .

□

Exemplo 1.21. Considere a função u do Exemplo 1.17, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

é a derivada de u no sentido fraco. Porém, a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca de u . A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porém v e \tilde{v} são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato,

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto, é verdade que

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.⁵

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 1.22. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega); \text{ existem } v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu = - \int_{\Omega} v_i \phi d\mu \right\},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $k \in \mathbb{N}$, indutivamente, e pela derivada fraca.

Definição 1.23. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq n$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k \},$$

com $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Ou, de outra forma,

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1 \},$$

onde $D^\alpha u$ é a α -ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert⁶, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)},$$

onde

$$\langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

No próximo capítulo, estudaremos algumas aplicações dos espaços de Sobolev, e os espaços H^k serão utilizados.

Definição 1.24. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

⁵Todo conjunto enumerável (em particular finito) tem medida (de Lebesgue) nula.

⁶Espaço vetorial com produto interno completo.

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Além disso, dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω , isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \Subset \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Isso será feito após o Teorema 1.26 sobre as propriedades da derivada fraca, que são necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Um outro espaço importante é o espaço $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ ($H_0^k(\Omega)$ se $p = 2$) que é definido como o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Ou seja, dada uma função em $u \in \mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ existe uma sequência (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. O teorema 1.37 mostra uma equivalência para as funções nesse espaço.

Observação: Essa não é a única forma de definir uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo a norma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

com $1 \leq p \leq \infty$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é equivalente a

$$\max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

O próximo exemplo ilustra um caso em que uma função pode ou não possuir derivada fraca dependendo da dimensão n do espaço Euclidiano e do expoente de integração p .

Exemplo 1.25. Seja $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \|x\|^{-\alpha}, \quad (1.6)$$

onde $\alpha > 0$. Queremos verificar para quais valores de $\alpha > 0$, n e p a função u pertence ao espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de $\mathbf{0}$ com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{\|x\|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{\|x\|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{\|x\|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$\|Du(x)\| = \frac{|\alpha|}{\|x\|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes (ver Teorema ??), temos que

$$\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \quad (1.7)$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ denota o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial B[0, \varepsilon]$. Agora se $\alpha + 1 < n$, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando $\|Du\|$ sobre Ω , concluímos que

$$\int_{\Omega} \|Du\| dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dx.$$

Transformando em coordenadas polares (ver Teorema 1.11), conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma:

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dx = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr,$$

onde a integral de superfície acima, é igual a área da esfera n -dimensional de raio r dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1},$$

que por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n)r^{n-1}$. Dessa forma, chegamos a

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2} dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim

$$\int_{\Omega} \|Du\| dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso, inferimos por (1.6) que

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| |\phi| |\nu_i| dS \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha} dS,$$

pois $|\nu_i| \leq |\nu| = 1$. Essa última integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq c \varepsilon^{n-1-\alpha} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, por (1.7) deduzimos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n - 1$. Além disso, $\|Du\| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha + 1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular, $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geq n$.

Teorema 1.26 (Propriedades da derivada fraca). Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leq |\alpha| \leq k$. Então,

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$;

(b) $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) **(Linearidade)** para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v;$$

(d) se Ω' é um aberto de Ω , então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$;

(e) **(Regra de Leibniz)** se $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u, \quad (1.8)$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leq \alpha$ significa $\sigma_j \leq \alpha_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$. A demonstração para $D^\alpha D^\beta u$ é análoga. Com efeito, é verdade que

$$\int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx.$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável, então o operador D^α é a α -ésima derivada parcial no sentido usual. Dessa forma $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^\alpha u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β com $|\beta| \leq k - |\alpha|$ tal que $D^\beta(D^\alpha u) \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta} u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^\gamma u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leq k$. Em particular como $|\beta| \leq k - |\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leq k$. Portanto $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_{\Omega} (\lambda u + v) D^\alpha \phi \, dx = \int_{\Omega} \lambda u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \lambda \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas ultimas integrais acima, obtemos

$$\lambda \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \lambda (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha v \, dx = \int_{\Omega} (\lambda D^\alpha u + D^\alpha v) \phi \, dx.$$

Portanto, $D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega' \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega'} |u|^p dx \text{ e } \int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p dx \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k)$$

são finitas. De fato, é verdade que

$$\int_{\Omega'} |u|^p dx \leq \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx < \infty \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k),$$

ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$.

(e) Para mostrar que (1.8) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$.

Com efeito, para $|\alpha| = 1$, como $\eta, \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$D^\alpha(\eta\phi) = \phi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \phi.$$

Dessa forma,

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} u D^\alpha(\eta\phi) - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx.$$

Como η e ϕ têm suporte compacto, então $D^\alpha(\eta\phi)$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral do lado direito, chegamos a

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = - \int_{\Omega} \eta \phi D^\alpha u dx - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx = - \int_{\Omega} (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta) \phi dx.$$

Portanto, $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$ como queríamos mostrar.

Agora seja $m < k$ e suponha que (1.8) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$ e toda função teste η . Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m + 1$. Então α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Deste modo, podemos escrever por **(a)** que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^{\beta+\gamma} \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^\beta (D^\gamma \phi) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^\beta(\eta u) D^\gamma \phi dx.$$

Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^\beta(\eta u)$ e a γ -ésima derivada fraca. Assim, por **(c)**, deduzimos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \right] \phi dx.$$

Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} (D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u) \right] \phi dx \quad (1.9)$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{\gamma \leq \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u,$$

que ainda pode ser expandido em quatro somatórios como abaixo:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\beta < \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ & + \sum_{0 \leq \sigma < \gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Porém, note que $0 \leq \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leq \sigma$ significa que $0 \leq \sigma_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $j = 1, \dots, n$ tal que $\sigma_j < \gamma_j$. Como $|\gamma| = 1$, suponha sem perda de generalidade que $\gamma = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dessa forma, para $j = 1$, concluímos que $0 \leq \sigma_1 < 1$. Como $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \dots, n$, vale $0 \leq \sigma_i < 0$, que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma, $\beta < \rho \leq \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (1.10) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^\alpha \eta. \quad (1.11)$$

Por fim, a menos de uma mudança de variáveis, escrevemos (1.11) como

$$\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (1.9), temos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u$$

como queríamos mostrar. □

Com os resultados obtidos, agora é possível verificar que os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach.

Teorema 1.27. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Observe que

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Com isso, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = 0 \iff \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = 0 \iff D^\alpha u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α . Sendo assim $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Sendo assim, pelo Teorema 1.26, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(\lambda u)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\lambda D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = |\lambda|^p \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 1.26, segue que

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski em ℓ^p

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ou seja,

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. \square

Teorema 1.28. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$, é completo

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Note que

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p < \varepsilon^p,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Ou seja, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, para cada α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Lembrando que $\mathcal{L}^p(\Omega)$ é um espaço completo (Teorema 1.6). Dito isso, podemos escrever

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$ denotamos $D^\alpha u_n$ por u_n e u_α por u . Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema 1.12, utilizando a definição de derivada fraca e passando a uma subsequência (se necessário), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx &= \int_{\Omega} (\lim u_n) D^\alpha \phi \, dx = \lim \int_{\Omega} u_n D^\alpha \phi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \lim D^\alpha u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi \, dx. \end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha u = u_\alpha$, e consequentemente, $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.

Por outro lado, considere (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$. Além disso, vale o seguinte:

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Isto nos diz que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$, para cada α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Lembrando que $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ é um espaço completo (Teorema 1.6). Sendo assim, obtemos

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^\infty(\Omega),$$

para cada α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. De forma análoga ao caso $1 \leq p < \infty$, mostramos que $D^\alpha u = u_\alpha$ e portanto $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. \square

1.4 Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora. Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados e exemplos da teoria de aproximação, que é de extrema importância no estudo de equações diferenciais parciais.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1; \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (1.12)$$

conhecida como molificador de Friedrich, onde $c > 0$ é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1.$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função η de classe \mathcal{C}^∞ com suporte compacto satisfazendo.

- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon) = \delta(x)$, onde δ é a função delta de Dirac.

Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (1.13)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Essa função η_ε é de classe \mathcal{C}^∞ , $\text{supp } \eta_\varepsilon \subseteq B[0, \varepsilon]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1.$$

Essa aplicação será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se u é uma função localmente integrável, definimos a molificação de u por $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, isto é

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy = \int_{B[0, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(y) u(x-y) \, dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propriedades importantes sobre essas aproximações.

Teorema 1.29 (Aproximação local por funções suaves). Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ em } \Omega_\varepsilon,$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então,

- (a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$;
- (b) $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração.

(a) Seja $g(x) = (x - y)/\varepsilon$. Logo, pela Regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [\eta_\varepsilon(x - y)] &= \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Por outro lado, sejam $x \in \Omega_\varepsilon$, $i = 1, \dots, n$ e h de forma que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Deste modo,

$$\frac{u^\varepsilon(x + he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] u(y) dy. \quad (1.15)$$

Note que, novamente utilizando a regra da cadeia e (1.14)

$$\frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \quad (1.16)$$

quando $h \rightarrow 0$. Consequentemente, por (1.15), (1.16) e o Teorema da convergência dominada, temos que

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) u(y) dy = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) u(y) dy.$$

Indutivamente, mostramos que $D^\alpha u^\varepsilon$ existe e

$$D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u.$$

O fato de u^ε ser de classe \mathcal{C}^∞ segue do fato de η_ε ser de classe \mathcal{C}^∞ (por definição) e u ser integrável.

(b) Afirmamos que a α -ésima derivada parcial de u^ε no sentido usual é igual a convolução de η_ε com a α -ésima derivada parcial fraca de u para todo α com $|\alpha| \leq k$. Consequentemente

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Com efeito, no item (a) vimos que $D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u$. Primeiramente, se $g(x) = x - y$, temos que

$$D_x^{\varepsilon_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_\varepsilon \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_k}(x - y) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y).$$

Por outro lado, se $h(y) = x - y$, obtemos

$$D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial y_i} (\eta_\varepsilon \circ h)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_k}(x - y) \frac{\partial h_k}{\partial y_i}(y) = -\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x - y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação, chegamos a

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = -D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y).$$

Repetindo esse cálculo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x - y).$$

Deste modo, podemos escrever

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) u(y) dy.$$

Fixando $x \in \Omega_\varepsilon$, a função $\phi_x(y) = \eta_\varepsilon(x - y)$ é suave e tem suporte compacto em Ω . Aplicando a definição de derivada fraca com função teste $\eta_\varepsilon(x - y)$, segue que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y) D^\alpha u(y) dy.$$

Portanto, deduzimos que

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u. \quad (1.17)$$

Além disso, afirmamos que dados abertos V, W tais que $V \Subset W \Subset \Omega$, uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, inferimos

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}. \quad (1.18)$$

Com efeito, note que se $1 < p < \infty$ e $x \in V$, é verdade que

$$|v^\varepsilon(x)| = \left| \int_{B[x, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) v(y) dy \right| \leq \int_{B[x, \varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x - y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x - y) v(y) \right| dy.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na última integral, obtemos

$$\int_{B[x, \varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x - y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x - y) v(y) \right| dy \leq \left(\int_{B[x, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B[x, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) |v(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $\int_{B[x, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) dy = 1$, e utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.14), segue que

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|^p dx = \int_V \int_{B[x, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) |v(y)|^p dy dx \leq \int_W |v(y)|^p \int_{B[y, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) dx dy.$$

Isto é,

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}. \quad (1.19)$$

Por fim, seja $V \Subset \Omega$ um aberto. Afirmamos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ em } \mathcal{L}^p(V) \quad (1.20)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo α com $|\alpha| \leq k$. De fato, sejam W um aberto de forma que $V \Subset W \Subset \Omega$ e $\delta > 0$. Utilizando (1.19) com $v^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$ e $v = D^\alpha u$, e escolhendo $w \in \mathcal{C}(W)$ tal que

$$\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} < \delta.$$

Temos

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} &\leq \|D^\alpha u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leq \|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(W)} \leq 2\delta + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)}, \end{aligned}$$

para todo α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Como $w \in \mathcal{C}(W)$, então $w^\varepsilon \rightarrow w$ uniformemente⁷ em V quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, $D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$ em $\mathcal{L}^p(V)$. Dessa forma,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}^p \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto,

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega),$$

como queríamos mostrar □

Exemplo 1.30. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, dada uma função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = \int_{-1}^1 u\phi' dx = \int_{-1}^0 u\phi' dx + \int_0^1 u\phi' dx.$$

Utilizando integração por partes (ver Teorema 1.10), obtemos

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx - x\phi \Big|_{-1}^0 + x\phi \Big|_0^1 = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx - \phi(-1) + \phi(1).$$

Porem, ϕ tem suporte compacto, logo, se anula em $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Dito isso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx = - \int_{\Omega} \text{sgn}(x)\phi dx.$$

Portanto, é verdade que

$$u' = \text{sgn}$$

no sentido fraco, onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Além disso

$$\int_{\Omega} |\text{sgn}(x)|^p dx = \int_{-1}^1 1^p dx = \mu((-1, 1)) = 2 < \infty,$$

onde μ é a medida de Lebesgue. Assim, $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e, portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para para $1 \leq p < \infty$. Vamos utilizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u . Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

(ver Figura 1.3) onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta dx = 1,$$

⁷Uma sequência de funções (w_k) converge uniformemente para w , se, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ (que não pode depender de x) tal que

$$|w_k(x) - w| < \varepsilon$$

para todo x e $k > K$.

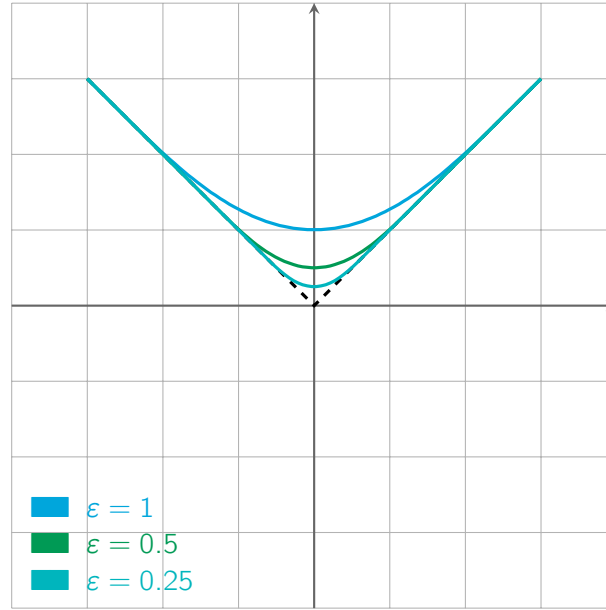


Figura 1.2: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ϵ com $\epsilon = 1, 0.5, 0.25$

Fonte: Autoral

isto é,

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) dx \right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Logo, definimos a função molificadora $\eta_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \eta \left(\frac{x}{\epsilon} \right).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\epsilon dx = 1 \text{ e } \text{supp } \eta = [-\epsilon, \epsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u . Com efeito,

$$u^\epsilon(x) = \int_{[-\epsilon, \epsilon]} \eta_\epsilon(x) u(x - y) dy.$$

A Figura 1.2 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ϵ .

Exemplo 1.31. Seja $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de $|\cdot|$ não ser diferenciável. Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, quando $0 < p < 2$, dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}.$$

Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a i -ésima coordenada. Utilizando integração por partes (ver Teorema 1.10), obtemos

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i ds - \int_{\Omega} \phi D^{e_i} u dx, \quad (1.21)$$

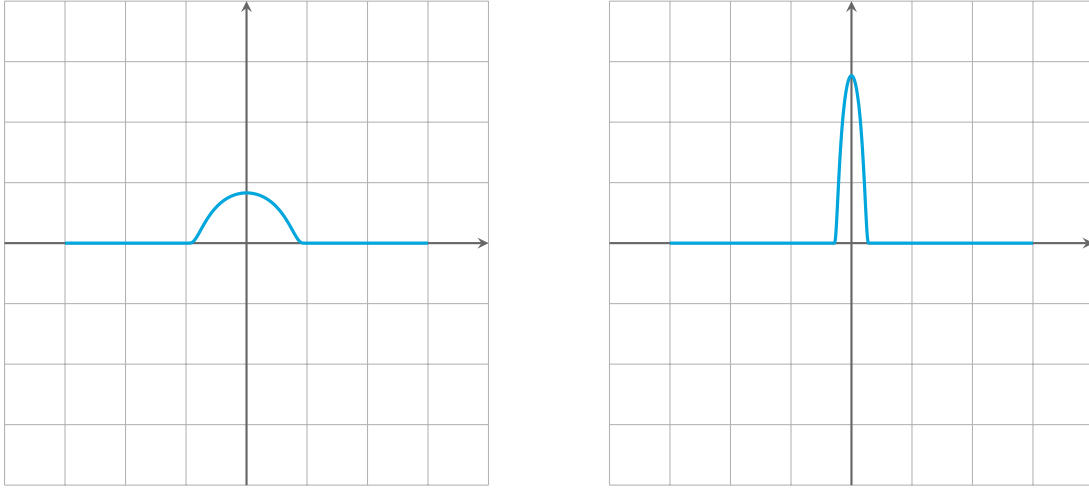


Figura 1.3: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$
Fonte: Autoral

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial\Omega$. Para calcular $D^{e_i}u$ precisamos dividir o domínio Ω em Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 e Ω_4 , onde Ω_i é a restrição ao i -ésimo quadrante (ver Figura 1.4).

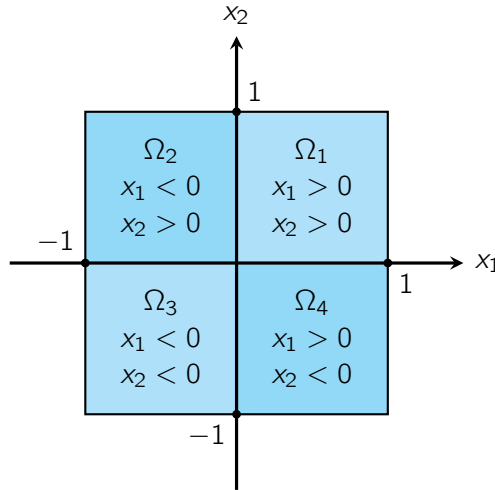


Figura 1.4: Domínio da função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$.
Fonte: Autoral

Note que em $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1)$, $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$. Logo, nesse conjunto $D^{e_i}u$ existe no sentido usual e é dada por

$$D^{e_i}u = \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga, deduzimos que

$$\begin{aligned} D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_2 \text{ e } \Omega_3, \\ D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_4. \end{aligned}$$

Dito isso, concluímos que

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_i}u \, dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi \, dx + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi \, dx + \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi \, dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi \, dx$$

que podemos escrever como

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_i} u \, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \frac{1}{2} (-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx$$

Por fim, como ϕ tem suporte compacto em Ω , ϕ se anula em $\partial\Omega$. Dessa forma

$$\int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i \, ds = 0.$$

Portanto, por (1.21) chegamos a

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi \, dx = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx.$$

Isto é,

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}$$

para $i = 1, 2$, como queríamos mostrar. Além disso,

$$\int_{\Omega} |D^{e_i}(x_1, x_2)|^p \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \right|^p \, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.14), encontramos

$$\frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 dx_j \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i.$$

Dito isso, precisamos ver para quais valores de p essa integral é finita. Sendo assim

$$\frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-2}} \int_0^1 x_i^{-\frac{p}{2}} \, dx = \frac{1}{2^{p-2}} \left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2} - 1} \right]$$

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando $p < 2$. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \text{se } \|x\| < 1; \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

(ver Figura 1.5) e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u , dada por

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \, dy.$$

Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε . A Figura 1.6 mostra o gráfico de u , onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε .

Teorema 1.32 (Meyers-Serrin). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

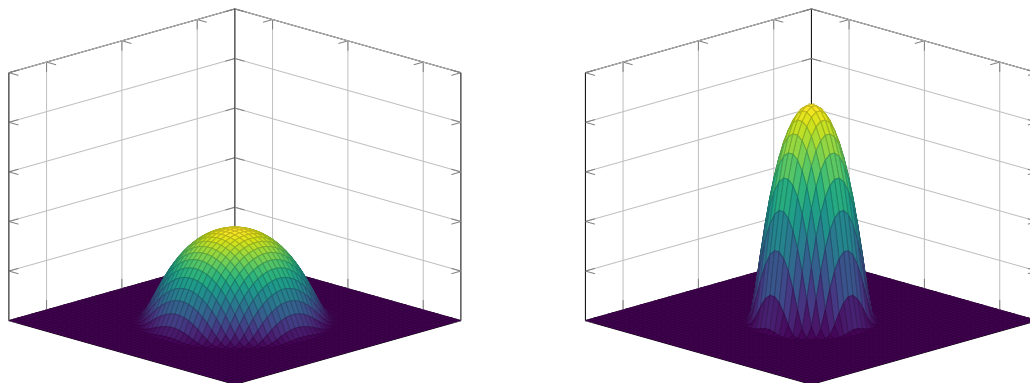


Figura 1.5: η e η_ε com $\varepsilon = 0.5$

Fonte: Autoral

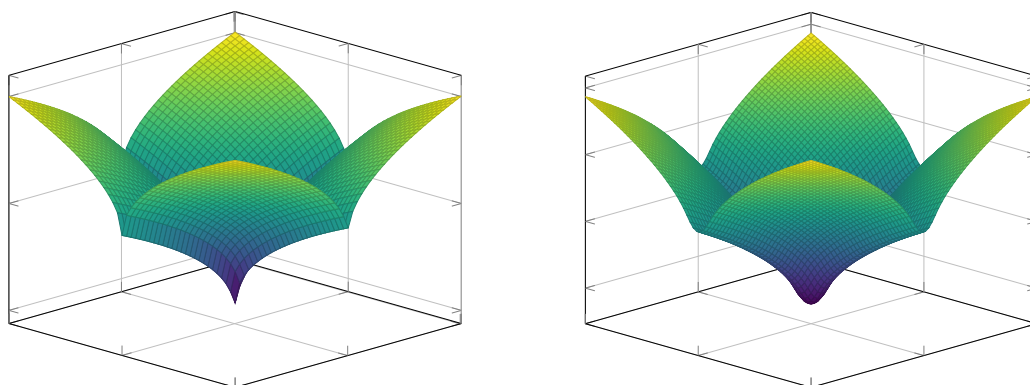


Figura 1.6: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^ε com $\varepsilon = 0.25$

Fonte: Autoral

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \quad (1.22)$$

onde $\Omega_i = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. De fato, se $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, então $x \in \Omega_{i_0}$ para algum $i_0 \in \mathbb{N}$, em particular, $x \in \Omega$ pois $\Omega_i \subseteq \Omega$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $x \in \Omega$, então $d(x, \partial\Omega) > 0$, então existe algum $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i_0}$, logo, $x \in \Omega_{i_0}$, dessa forma, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Portanto, vale (1.22).

Defina $\Omega'_i = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$. Além disso, escolha qualquer aberto $\Omega'_0 \Subset \Omega$ de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega'_i$$

e seja $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade suave subordinada à cobertura aberta $\{\Omega'_i\}_{i=0}^{\infty}$, isto é,

$$0 \leq \phi_i \leq 1 \text{ com } \phi_i \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega'_i) \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = 1 \text{ em } \Omega.$$

Como, por hipótese, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, temos pelo Teorema 1.26

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Além disso, $\text{supp}(\phi_i u) \subseteq \Omega'_i$. Fixando $\delta > 0$, escolha um $\varepsilon_i > 0$ de forma que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e } \text{supp } u^i \subseteq \Omega''_i$$

com $\Omega''_i = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} \supseteq \Omega'_i$.

Seja $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Como $u = u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^n \phi_i u$, então, para cada $V \Subset \Omega$, inferimos que

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \frac{\delta}{2}.$$

Passando ao supremo sobre os conjuntos $V \Subset \Omega$ obtemos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Isto mostra que u pertence ao fecho de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Logo é equivalente a existir uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. \square

Definição 1.33. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que sua fronteira $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^k se para cada ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ existe um raio $r > 0$ e uma função de classe \mathcal{C}^k $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r]; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^{∞} se é de classe \mathcal{C}^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

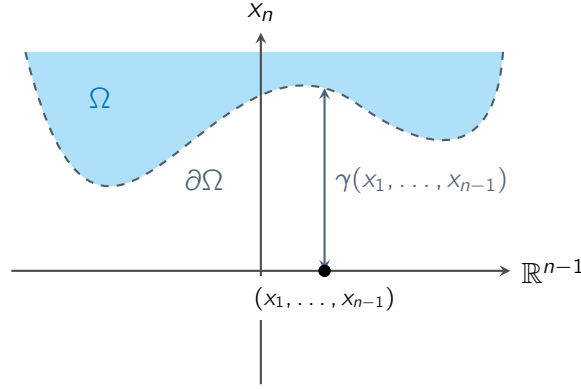


Figura 1.7: Função γ da definição 1.33
 Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 626.

Teorema 1.34. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$, como Ω tem fronteira de classe \mathcal{C}^1 , existe um raio $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 tal que

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r] ; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}. \quad (1.23)$$

Definimos $V = \Omega \cap B[\tilde{x}, r/2]$ (ver Figura 1.8). Além disso, definimos para cada $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $x \in V$

$$x^\varepsilon = x + \lambda \varepsilon e_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda \varepsilon). \quad (1.24)$$

Observe que, para um $\lambda > 0$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a bola $B[x^\varepsilon, \varepsilon]$ está contida em $\Omega \cap B[\tilde{x}, r]$ para todo $x \in V$. De fato, por definição, dado $x \in V$ temos que $x \in \Omega$ e $\|x - \tilde{x}\| \leq r/2$. Note que $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ suficientemente grande. Com efeito, como $x \in V$, em particular $x \in \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$. Como Ω tem fronteira de classe \mathcal{C}^1 , temos que $x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$, daí

$$x_n^\varepsilon = x_n + \lambda \varepsilon > x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

e por (1.24) deduzimos que

$$\|x^\varepsilon - \tilde{x}\| = \|x + \lambda \varepsilon e_n - \tilde{x}\| \leq \|x - \tilde{x}\| + \|\lambda \varepsilon e_n\| \leq \frac{r}{2} + \lambda \varepsilon < r$$

desde que $0 < \varepsilon < r/(2\lambda)$. Logo, $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Por isso, $B[x^\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário.

Agora, definimos $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$ para todo $x \in V$ e $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Assim, pelo Teorema 1.29 $v^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$. Dito isso, afirmamos que

$$\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \rightarrow 0.$$

De fato, seja α um multi-índice com $|\alpha| \leq k$, então

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}.$$

A segunda norma do lado direito da desigualdade acima vai a 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pois a translação é contínua na norma do espaço \mathcal{L}^p e

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} = \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \rightarrow 0,$$

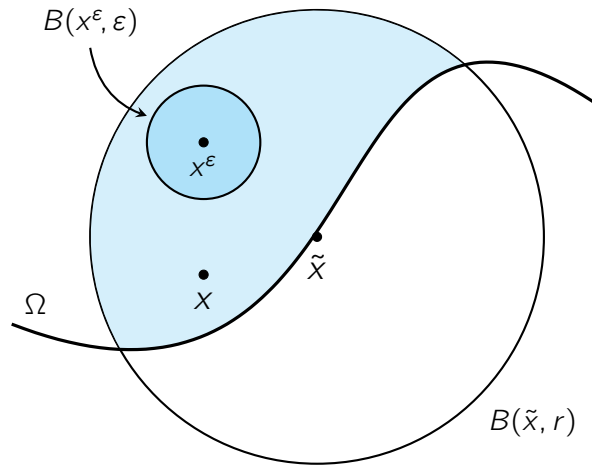


Figura 1.8: Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 253

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver Teorema 1.29). Ou seja, é verdade que

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Note que todos os cálculos foram feitos em uma vizinhança de um ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$. Dito isso, como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado), pelo Teorema de Heine-Borel⁸, podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, raios $r_i > 0$, conjuntos $V_i = \Omega \cap B[\tilde{x}_i, r_i/2]$ e funções v_i^ε , com $i = 1, \dots, N \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tilde{x}_i, r_i/2).$$

Além disso, considere um aberto limitado $V_0 = \Omega \cap B(\tilde{x}_0, r_0/2)$ e uma função $v_0^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(V_0) \cap \mathcal{W}^{k,p}(V_0)$ com $\|v_0^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_0)} \rightarrow 0$ e

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N V_i$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos $\{V_i\}_{i=0}^N$ em Ω . Defina

$$v^\varepsilon = \sum_{i=0}^N \phi_i v_i^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

e observando que $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$, obtemos

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i v_i^\varepsilon) - D^\alpha(\phi_i u)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

⁸Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui subcobertura finita.

Utilizando a Regra de Leibniz, segue que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i [D^{\alpha-\sigma}(v_i^\varepsilon - u)]\|_{\mathcal{L}^p(V_i)} \\ &\leq c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma}(v_i^\varepsilon - u)\|_{\mathcal{L}^p(V_i)}, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de ϕ_i (e por consequência $D^\sigma \phi_i$) ter suporte compacto e ser suave na última desigualdade. Ademais, como $|\alpha - \sigma| \leq k$, temos que

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \leq c \sum_{i=0}^N \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \rightarrow 0$$

Por fim, definindo $u_n := v^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ chegamos a

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, como era desejado. □

1.5 Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto específico. Nessa seção, veremos uma forma de estender funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por meio de um operador linear.

Teorema 1.35. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, tem-se que

- (a) $Eu = u$ qtp em Ω ;
- (b) $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$;
- (c) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p , Ω e Ω' .

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e considere inicialmente que $\partial\Omega$ esteja contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Dessa forma, podemos supor que existe uma bola $B = B(\tilde{x}, r)$ tal que

$$\begin{aligned} B^+ &= B \cap \{x_n \geq 0\} \subseteq \overline{\Omega}; \\ B^- &= B \cap \{x_n \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Além disso, assuma que $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2}), & \text{se } x \in B^- \end{cases}$$

que chamamos de reflexão de ordem superior da função u de B^+ a B^- . Afirmamos que $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$. Com efeito, denotando $u^- = \bar{u}|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}|_{B^+}$, podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \text{ em } \{x_n = 0\}.$$

De fato, pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2})$$

quando $x_n = 0$, obtemos

$$\left. \frac{\partial u^-}{\partial x_n} \right|_{\{x_n=0\}} = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \left. \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \right|_{\{x_n=0\}}$$

Também é verdade que

$$u^+ = u^- \text{ e } \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \text{ em } \{x_n = 0\},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Portanto $D^\alpha u^- = D^\alpha u^+$ em $\{x_n = 0\}$ com $|\alpha| \leq 1$. Sendo assim, $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$, pois fora de $\{x_n = 0\}$, as componentes de \bar{u} já eram de classe \mathcal{C}^∞ , então apenas restava verificar que em $B^+ \cap B^- = B \cap \{x_n = 0\}$ as componentes em B^+ e B^- se igualavam, implicando a continuidade \bar{u} e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}, \quad (1.26)$$

onde c é uma constante⁹ positiva que não depende de u . De fato, sabemos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right].$$

Como $B = B^+ \cup B^-$, e denotando (x_1, \dots, x_{n-1}) por x' podemos reescrever o último somatório acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + \int_{B^-} |4D^\alpha[u(x', -\frac{x_n}{2})] - 3D^\alpha[u(x', -x_n)]|^p dx \right] \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + 3 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx + 4 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx \right] \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que

$$(a + b)^p \leq (2 \max\{a, b\})^p = 2^p \max\{a, b\}^p \leq 2^p (a^p + b^p)$$

para todo $a, b \geq 0$. Porém, $-x_n, -\frac{x_n}{2} \geq 0$, então podemos considerar que as integrais em B^- são integrais sobre B^+ , através de uma mudança de variáveis, para encontrar

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p dx \right] = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}^p.$$

Portanto,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Por outro lado, se $\partial\Omega$ não está necessariamente contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} , temos que existe um homeomorfismo Φ com inversa Ψ que planifica $\partial\Omega$ perto de \tilde{x} (ver Figura ??), basta usar a função γ de classe \mathcal{C}^1 da Definição 1.33 e definir Φ por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})). \quad (1.27)$$

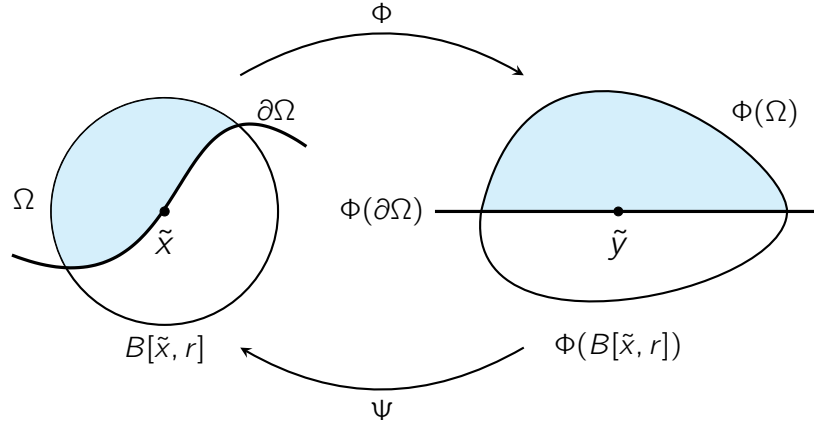


Figura 1.9: Representação gráfica do homomorfismo Φ
 Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 256

De forma análoga definimos Ψ por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})). \quad (1.28)$$

Deste modo, é fácil ver que $\Psi^{-1} = \Phi$ e que Φ e Ψ são de classe \mathcal{C}^1 (por definição). Sendo assim, seja $y = \Phi(x)$ (ou seja $x = \Psi(y)$) e definimos $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo como foi feito anteriormente (u' é de classe \mathcal{C}^1), podemos escolher uma bola $B = B(\tilde{y}, r)$ e definimos \tilde{u}' de forma que $\tilde{u}' \in \mathcal{C}^1(B)$ e

$$\|\tilde{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}. \quad (1.29)$$

Seja $B' = \Psi(B)$, assim conseguimos obter uma extensão \tilde{u} de u para B' com

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para $\tilde{u} \equiv \tilde{u}' \circ \Phi$, obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.15)

$$\|D^\alpha \tilde{u}'\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \int_B |D^\alpha \tilde{u}'(y)|^p dy = \int_B |D^\alpha \tilde{u}(\Psi(y))|^p dy = \int_{B'} |D^\alpha \tilde{u}(x)|^p dx = \|D^\alpha \tilde{u}\|_{\mathcal{L}^p(B')}^p.$$

Dessa forma, passando ao somatório, quando $|\alpha| \leq 1$, chegamos a

$$\|\tilde{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\tilde{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')}. \quad (1.30)$$

Além disso, é verdade

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u'\|_{\mathcal{L}^p(B^+)}^p &= \int_{B^+} |D^\alpha u'(y)|^p dy = \int_{B^+} |D^\alpha u(\Psi(y))|^p dy \\ &= \int_{\Psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx = \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \quad (1.31)$$

Portanto, por (1.29), (1.30) e (1.31), obtemos

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} = \|\tilde{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}, \quad (1.32)$$

⁹Durante essa e outras demonstrações, mesmo se o valor da constante c mudar, ainda continuaremos denotando por c , então por exemplo $c + 2^p$, $c(1 + n)$, etc, ainda serão denotados por c .

como queríamos mostrar.

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x \in \partial\Omega} B'_x$, que é uma cobertura aberta, pois $B'_x = \Psi(B(\tilde{y}, r))$, e imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto. Pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma subcobertura finita de $\partial\Omega$. Sendo assim, existem uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, abertos B'_i e extensões \bar{u}_i de u em B'_i de forma que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B'_i$. Por outro lado, considere um aberto $B'_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N B'_i.$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{B'_i\}_{i=0}^N$ e defina

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N \phi_i \bar{u}_i$$

onde \bar{u}_i está associada a B'_i e $\bar{u}_0 = u$. Deste modo, obtemos a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Com efeito

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha (\phi_i \bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p$$

onde c é uma constante positiva que depende de p . Logo, utilizando a Regra de Leibniz (ver Teorema 1.26), inferimos

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha (\phi_i \bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Como $\text{supp } D^\sigma \phi_i \subseteq \text{supp } \phi_i \subseteq B'_i$, então o suporte de $D^\sigma \phi_i$ também é compacto (pois B'_i é limitado), sendo assim $\max |D^\sigma \phi_i|$ existe em B'_i . Portanto, vale a desigualdade

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(B'_i)}^p$$

onde agora a constante c também depende de B'_i . Além disso,

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(B'_i)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}^p.$$

Por fim, utilizando (1.32), chegamos a

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}^p \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p,$$

onde c depende de B'_i , p e N . Portanto, deduzimos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \quad (1.33)$$

Defina Ω' aberto de forma que $\bigcup_{i=0}^N B'_i \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\text{supp } \bar{u} \subseteq \Omega'$. Defina também $\bar{E} : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $\bar{E}u = \bar{u}$. Temos que \bar{E} é linear,

$$\|\bar{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e $\text{supp } \bar{E}u \subseteq \Omega'$. Sendo assim, definimos $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por

$$Eu = \lim \bar{u}_k$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ que converge para u (sabemos que essa sequência existe pois mostramos no Teorema 1.34 que $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$). Podemos afirmar que o limite converge em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\bar{u}_k - \bar{u}_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Logo (\bar{u}_k) é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.28), deduzimos que $\lim \bar{u}_k$ existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned} \|Eu - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\bar{u}_k - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pois $u_k \rightarrow u$ e $\bar{u}_k = u_k$ em Ω (ver (1.25)). Portanto, $Eu = u$ qtp em Ω , provando o item **(a)**.

Para verificar o item **(b)**, basta ver que, por definição, $\text{supp } \bar{u}_k \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$.

Por fim, para mostrar o item **(c)**, note que E é um operador limitado, pois

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\lim \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \lim \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

□

1.6 Traços

Em alguns casos, no estudo de equações diferenciais parciais, é necessário impor condições de contorno na fronteira de um domínio. Para isso, precisamos entender o que significa restringir uma função em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ à fronteira de Ω . Nesta seção, veremos como isso pode ser feito por meio do operador traço.

Teorema 1.36. Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então, existe um operador linear limitado $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que

(a) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$;

(b) $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde c depende apenas de p e Ω .

Demonstração. Inicialmente suponha que $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Da mesma forma que foi feito no Teorema 1.35 considere $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e suponhamos que $\partial\Omega$ está contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Sejam $B = B(\tilde{x}, r)$ (e defina B^+ e B^- como em (1.25)) e $\hat{B} = B(\tilde{x}, r/2)$, e considere $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$ de forma que $\xi \geq 0$ em B e $\xi \equiv 1$ em \hat{B} , e denote $\Gamma = \partial\Omega \cap \hat{B}$ (ver Figura 1.10) e $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.10)

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx = \int_{\partial B^+} \xi|u|^p \nu_n dx'$$

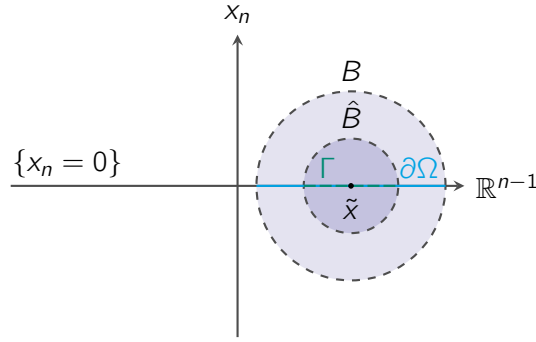


Figura 1.10

onde ν é o vetor normal unitário que aponta para baixo em ∂B^+ , isto é $\nu = (0, \dots, 0, -1)$. Sendo assim, $\nu_n = -1$ e

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx = - \int_{\partial B^+} \xi|u|^p dx',$$

pois $\text{supp } \xi|u|^p \subseteq \text{supp } \xi \subseteq B$. Dessa forma, como $\Gamma \subseteq \hat{B}$ e $\xi(x) = 1$ para todo $x \in \hat{B}$, concluímos que

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' = \int_{\Gamma} \xi|u|^p dx' \leq \int_{\partial B^+} \xi|u|^p dx' = - \int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx.$$

Calculando a derivada acima, obtemos

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq - \int_{B^+} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_n} |u|^p + p|u|^{p-1} \text{sgn } u \frac{\partial u}{\partial x_n} \xi \right] dx \leq c \int_{B^+} \left[|u|^p + |u|^{p-1} \|Du\| \right] dx$$

onde utilizamos o fato de ξ e suas derivadas parciais terem suporte compacto para a ultima desigualdade. Por fim utilizando a Desigualdade de Young

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq c \int_{B^+} \left[|u|^p + \frac{|u|^{(p-1)p'}}{p'} + \frac{\|Du\|^p}{p} \right] dx \leq c \int_{B^+} |u|^p + \|Du\|^p dx. \quad (1.34)$$

Caso $\partial\Omega$ não esteja necessariamente contido em $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} , considere o homeomorfismo Φ com inversa Ψ da demonstração do Teorema 1.35 (ver (1.27) e (1.28)) e defina $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.15), inferimos

$$\int_{\Gamma} |u'|^p dy' = \int_{\Gamma} |u \circ \Psi| dy' = \int_{\Psi(\Gamma)} |u|^p dx'$$

e

$$\int_{B^+} [|u'(y)|^p + \|Du'(y)\|^p] dy \leq c \int_{\Psi(B^+)} [|u(x)|^p + \|Du(x)\|^p] dx,$$

onde c é uma constante que depende de γ que surge devido a regra da cadeia. Dessa forma, por (1.34), podemos escrever

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))}^p &= \int_{\Psi(\Gamma)} |u|^p dx' = \int_{\Gamma} |u'|^p dy' \leq c \int_{B^+} [|u'|^p + \|Du'\|^p] dy \\ &\leq c \int_{\Psi(B^+)} [|u|^p + \|Du\|^p] dx = \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Psi(B^+))}^p. \end{aligned}$$

Como $\Psi(B^+) \subseteq \Omega$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma quantidade finita de abertos (em $\partial\Omega$) $\Psi(\Gamma_i)$ tal que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N \Psi(\Gamma_i)$$

e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_i))} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \quad (1.35)$$

Considere uma partição da unidade $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ subordinada a cobertura $\{\Psi(\Gamma_i)\}_{i=1}^N$, e denote $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$.

Defina $\tilde{T} : \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por $\tilde{T}u = u|_{\partial\Omega}$. Dessa forma, podemos escrever por (1.35), que

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}u\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}^p &= \int_{\partial\Omega} |\tilde{T}u|^p dx = \int_{\partial\Omega} |u|^p dx \leq c \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \phi_i^p |u|^p dx \\ &= c \sum_{i=1}^N \int_{\Psi(\Gamma_i)} |u|^p dx \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p \end{aligned} \quad (1.36)$$

onde c é uma constante que depende de p e Ω . Isto mostra que \tilde{T} é um operador limitado. Por fim, defina $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por

$$Tu = \lim \tilde{T}u_k$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ que converge para $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Observe que

$$\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|\lim \tilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \lim \|\tilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Isto prova **(b)**.

Por fim, se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, então, pelo Teorema ??, temos que $u_k(x) \rightarrow u(x)$ uniformemente sobre $\bar{\Omega}$. Por outro lado, como $\|u_k|_{\partial\Omega} - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então passando a uma subsequência (se necessário), temos, pelo Teorema 1.12 que $u_k(x) \rightarrow Tu(x)$ qtp em $\partial\Omega$. Mas como $\partial\Omega \subseteq \Omega$, segue que $Tu = u$ qtp em $\partial\Omega$, isto é, $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, provando **(a)**. \square

Teorema 1.37 (Funções traço zero em $\mathcal{W}^{1,p}$). Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

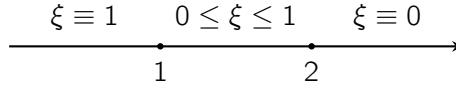
Demonstração. Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por definição existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Como u_k tem suporte compacto em Ω então u_k se anula em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $Tu_k = 0$ sobre $\partial\Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e como $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado, então

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}.$$

Portanto $Tu = 0$ qtp sobre $\partial\Omega$. Reciprocamente, suponha que $Tu = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando partições da unidade e o homeomorfismo Φ que planifica $\partial\Omega$ como foi feito anteriormente, podemos supor

Figura 1.11: ξ definido em (1.39).

que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \\ u &\text{ tem suporte compacto em } \overline{\mathbb{R}_+^n} \\ Tu &= 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde \mathbb{R}_+^n denota o semiplano superior de \mathbb{R}^n . Como $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ então existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \subseteq \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ (ver Teorema 1.34). Como $(u_k) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, então $Tu_k = u_k|_{\partial\mathbb{R}_+^n} = u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Assim por (1.37) e usando que T é limitado, temos que

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\mathbb{R}^n)} = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \lim \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Isto é, $Tu_k \rightarrow 0$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Dito isso, seja $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geq 0$. Pelo teorema fundamental do cálculo, podemos escrever u_k da seguinte forma

$$u_k(x', x_n) = u_k(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t) dt$$

e, consequentemente,

$$|u_k(x', x_n)|^p \leq c \left(|u_k(x', 0)|^p + \left(\int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t) \right| dt \right)^p \right)$$

onde a constante c depende de p (aqui, utilizamos a desigualdade $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$). Integrando ambos os lados sobre \mathbb{R}^{n-1} obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p dx' &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\| dt \right)^p dx' \right) \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\|^p dt \right) \left(\int_0^{x_n} 1^{p'} dt \right)^{p/p'} dx' \right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.7). Como $p/p' = p - 1$ (pois p e p' são expoentes conjugados), tem-se pelo Teorema de Fubini que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p dx' \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du_k(x', t)\|^p dx' dt \right).$$

Por fim, como $\|u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, e utilizando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \|Du(x', t)\|^p dx' dt. \quad (1.38)$$

Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\begin{aligned} \xi &\equiv 1 \text{ em } [0, 1] \\ \xi &\equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \setminus [0, 2] \\ 0 &\leq \xi \leq 1 \end{aligned} \quad (1.39)$$

(ver Figura 1.11) e defina $\xi_k(x) = \xi(kx_n)$ e $v_k(x) = u(x)(1 - \xi_k(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_k}{\partial x_n}(x) &= (1 - \xi_k(x)) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) - k u \xi'_k(x) \\ \frac{\partial v_k}{\partial x'}(x) &= (1 - \xi_k(x)) \frac{\partial u}{\partial x'}(x).\end{aligned}$$

Consequentemente, as seguintes desigualdades valem:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx &\leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\left\| \frac{\partial v_k}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \right)^p dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\xi_k \left\| \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \xi_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| + k |u| |\xi'_k| \right)^p dx,\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, e c é uma constante que depende de p e n . Deste modo, chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi'_k|^p |u|^p dx \quad (1.40)$$

Observe que $\text{supp } \xi'_k \subseteq \text{supp } \xi \subseteq [0, 2]$. Isto nos diz que $\xi'_k(kx_n) = 0$ quando $kx_n > 2$ ou $x_n > 2/k$. Logo podemos escrever a ultima desigualdade como

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dx_n,$$

onde ?? ξ' pelo seu máximo em $[0, 2]$. Note que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi(kx_n)|^p \|Du\|^p dx &= \int_0^{\frac{2}{k}} |\xi(kx_n)|^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \\ &\leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \rightarrow 0\end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$, onde estimamos ξ pelo seu máximo em $[0, 2]$, e usamos que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Além disso, utilizando (1.38), podemos escrever

$$ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt \leq ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds dt \leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, por (1.40), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \rightarrow 0$$

isto é $\|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Por fim, pela definição de v_k inferimos que

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p = \int_{\mathbb{R}_+^n} |v_k - u|^p dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k |u|^p dx.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, chegamos a

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p = \int_0^{\frac{2}{k}} \xi(kx_n)^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p dx' dx_n \leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p dx' dx_n \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Dessa forma

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}^p \leq \|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p + \|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p \rightarrow 0$$

Defina $u_k = \eta_{\frac{1}{k}} * v_k$. Assim, $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ para k suficientemente grande (ver Teorema ??) e

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|u_k - v_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} + \|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$. □

1.7 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços.

Dividiremos o estudo dessas desigualdades em dois casos, $1 \leq p < n$ e $n < p \leq \infty$. O caso $n = p$ não será apresentado nesse texto, aos interessados consultar [5] p.p. 275.

1.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja $1 \leq p < n$. Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo¹⁰

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.41)$$

onde c é uma constante positiva, $1 \leq q < \infty$ e $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, de forma que c e q não dependam de u .

Primeiramente, vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (1.41) é válida, o valor de q não é arbitrário, mas sim admite uma forma específica. Para isso, seja $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não nula e $\lambda > 0$. Sendo assim, definimos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (1.41) a u_λ , obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.42)$$

Note que

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^q$$

e

$$\begin{aligned} \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D(u(\lambda x))|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \end{aligned}$$

Utilizando essas duas igualdades acima em (1.42), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

¹⁰Lembrando que $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa o gradiente fraco, quando calculamos a norma do gradiente em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ estamos calculando a norma \mathcal{L}^p da norma euclidiana do gradiente.

a qual podemos reescrever como

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.43)$$

Observe que se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$, obtemos uma contradição quando $\lambda \rightarrow 0$, pois isso implicaria em $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, que só acontece se $u = 0$ (o que é uma contradição). De forma análoga se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$ obtemos uma contradição quando $\lambda \rightarrow \infty$. Sendo assim, para que a igualdade (1.41) seja válida, precisamos que

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0,$$

ou seja,

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

Isso motiva a definição abaixo.

Definição 1.38. Se $1 \leq p < n$ o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Os cálculos no início da seção mostram que a desigualdade (1.41), somente é válida quando $q = p^*$. O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é verídica.

Teorema 1.39 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Seja $1 \leq p < n$. Então, existe uma constante c , que depende apenas de p e n , tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.44)$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos dois casos

Caso 1: Considere que $p = 1$

Como por hipótese, u tem suporte compacto, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) dy_i$$

e assim

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \right| dy_i \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i.$$

Elevando ambos os lados a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de $i = 1$ até n obtemos

$$|u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$ por X_i e integrando ambos os lados da desigualdade a cima, em relação a x_1 , de $-\infty$ a ∞ , chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \end{aligned}$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1 , então a sua integral é constante em relação a x_1 . Sendo assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada (ver Teorema 1.8) e o Teorema de Fubini, a desigualdade acima se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞ , obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

onde podemos reescrever a ultima integral da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{\frac{1}{n-1}} l_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n l_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

onde

$$l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \text{ e } l_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \quad (i = 2, \dots, n).$$

Porém, l_2 é constante em relação a x_2 então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq l_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n l_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, inferimos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_2)| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, chegamos a

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \\ &\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{p^*}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.45)$$

como queríamos mostrar.

Caso 2: Assuma que $1 < p < n$

Considere a função $|u|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido a seguir. Utilizando a desigualdade obtida no caso $p = 1$, podemos escrever

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} [|u|^\gamma]^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Escolhendo γ de forma que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$, isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

nesse caso, $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim, podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

finalizando a demonstração. \square

Observação: Note que o suporte compacto é necessário, como exemplo tome a função $u(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma $|Du| \equiv 0$. Consequentemente

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq 0 \implies u \equiv 0,$$

que é uma contradição.

Teorema 1.40. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e, além disso

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde $c > 0$ é uma constante que depende apenas de n , p e Ω .

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.35, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \text{ qtp em } \Omega \\ \bar{u} &\text{ tem suporte compacto} \\ \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Como \bar{u} tem suporte compacto, sabemos que existe uma sequência (u_k) , dada por $\eta_{\frac{1}{k}} * \bar{u}$, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \tag{1.47}$$

e para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema ??). Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.44), concluímos que

$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.48}$$

Note que

$$\|Du_k - D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Isso mostra que (Du_k) é convergente (e portanto de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, por (1.48), observamos que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ que é um espaço completo. Logo, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \rightarrow v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema 1.12, a menos de uma subsequência $u_k(x) \rightarrow v(x)$ qtp em \mathbb{R}^n , quando $k \rightarrow \infty$. Análogamente, por (1.47) $u_k(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n , quando $k \rightarrow \infty$ desde que $\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Com isso $v(x) = \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n . Dessa forma

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Passando ao limite, quando $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Essa desigualdade finaliza a demonstração, já que, por (1.46)

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

como queríamos mostrar. \square

Teorema 1.41. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < n$, então a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida para $1 \leq q \leq p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n .

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, conseguimos uma sequência de funções (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, podemos estender cada u_k para ser 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Sendo assim, aplicamos a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.44) para obter

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, segue que $\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \|Du_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Sendo assim, pelo Teorema 1.12, passando a uma subsequência (se necessário), chegamos a

$$u_k(x) \rightarrow u(x) \text{ qtp em } \Omega. \quad (1.49)$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.44), inferimos que

$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

quando $k, \ell \rightarrow \infty$, pois (Du_k) é convergente (em particular, de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, que é um espaço completo (ver Teorema 1.6). Dito isso, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Novamente, utilizando o Teorema 1.12, passando a uma subsequência (se necessário), segue que,

$$u_k(x) \rightarrow v(x) \text{ qtp em } \Omega. \quad (1.50)$$

Logo, por (1.49) e (1.50), $v \equiv u$ qtp em Ω . Dessa forma

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Passando ao limite, chegamos a

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Provando o caso em que $q = p^*$. Agora considere $1 \leq q < p^*$. Como Ω é limitado, temos, pelo Teorema 1.9 e por (1.44), que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $1 \leq p < n$ e $1 \leq q \leq p^*$. \square

Um caso particular da desigualdade acima é a Desigualdade de Poincaré que será apresentada no resultado abaixo.

Corolário 1.42 (Desigualdade de Poincaré). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida onde c é uma constante que depende de p, q e n .

Demonstração. Primeiramente considere $1 \leq p < n$. Por definição, $1 \leq p < p^*$, pelo Teorema 1.40, concluímos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Agora considere que $n \leq p < \infty$ e $1 \leq s < n$ tal que $p < s^*$ (isto é possível pois $s^* \rightarrow \infty$ se $s \rightarrow n^-$). Note que, pelo Teorema ??, podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

já que $1 \leq p < s^*$, $s < p$ e Ω é limitado. Por fim, considere $p = \infty$. Pelo que foi visto acima, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Passando ao limite quando $s \rightarrow n^-$, temos que $s^* \rightarrow \infty$. Dessa forma, $\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$. Portanto,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. □

O resultado acima nos diz que

$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq p^*) \text{ e } \mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{s^*}(\Omega) \quad (1 \leq s \leq \infty)$$

isto é o mesmo que dizer que $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $1 \leq q \leq p^*$, $\mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{s^*}(\Omega)$ com $1 \leq s \leq \infty$ e o operador inclusão ι (em cada um dos casos) é um operador linear limitado.

Além disso, podemos mostrar que a norma $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} := \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$, é equivalente a norma usual dos espaços de Sobolev $\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Com efeito,

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p + \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p + \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Dessa forma, concluímos que

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$, são equivalentes.

1.7.2 Desigualdade de Morrey

Para estudar essa próxima classe de desigualdades, precisamos de algumas definições relacionadas aos espaços de Hölder.

Definição 1.43. Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser Hölder continua com expoente $\gamma \in (0, 1]$, quando

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|x - y\|^\gamma,$$

para todo $x, y \in \Omega$. Além disso, denotamos o espaço dessas funções por $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 1.44. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, escrevemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \quad \text{e} \quad [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \right\},$$

para denotar a norma de u no espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com essas definições, estamos prontos para enunciar e demonstrar a Desigualdade de Morrey.

Teorema 1.45 (Desigualdade de Morrey). Sejam $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $n < p \leq \infty$ e $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Então

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n .

Demonstração. Primeiramente, escolha uma bola $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Afirmamos que existe uma constante $c > 0$ dependendo apenas de n tal que¹¹

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|y - x|^{n-1}} dy. \quad (1.51)$$

Com efeito, fixando $w \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$, e $0 < s < r$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da Regra da cadeia, que

$$|u(x + sw) - u(x)| = \left| \int_0^s \frac{du}{dt}(x + tw) dt \right| = \left| \int_0^s Du(x + tw) \cdot w dt \right| \leq \int_0^s \|Du(x + tw)\| dt,$$

onde utilizamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de $|w| = 1$. Logo, integrando ambos os lados sobre $\partial B(\mathbf{0}, 1)$ e aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS_w &\leq \int_0^s \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \|Du(x + tw)\| dS_w dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \|Du(x + tw)\| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} dS_w dt. \end{aligned}$$

Seja $y = x + tw$, de forma que $t = \|x - y\|$. Assim, por meio de coordenadas polares e mudança de variáveis obtemos

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS_w \leq \int_0^s \int_{B(x,t)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dS_y dt = \int_{B(x,s)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dy$$

e, como $s < r$, tem-se

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS_w \leq \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dy.$$

Multiplicando a equação acima por s^{n-1} e integrando de 0 a r , com respeito a s , chegamos a

$$\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS ds \leq \int_0^r s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dy ds.$$

¹¹A integral

$$\int_{B(x,r)} f dy := \frac{1}{\sigma(n)r^n} \int_{B(x,r)} f dy$$

onde $\sigma(n)r^n$ é o volume da esfera n -dimensional, representa a média da função f sobre $B(x, r)$.

Fazendo a mudança de variáveis $y = x + sw$, obtemos

$$\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} |u(y) - u(x)| dS ds \leq \left(\int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \right) \left(\int_0^r s^{n-1} ds \right).$$

Utilizando coordenadas polares no lado esquerdo e resolvendo a última integral do lado direito, segue que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy.$$

Por fim, dividindo ambos os lados por $\sigma(n)r^n$ (volume da n -esfera de raio r), temos

$$\oint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{1}{n\sigma(n)} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy.$$

como era desejado.

Agora, fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Note que, podemos escrever

$$|u(x)| = \frac{|u(x)|}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} dy = \oint_{B(x,1)} |u(x)| dy.$$

Dito isso, deduzimos que

$$|u(x)| \leq \oint_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| dy + \oint_{B(x,1)} |u(y)| dy. \quad (1.52)$$

Observe que, pela desigualdade de Hölder, inferimos

$$\begin{aligned} \oint_{B(x,1)} |u(y)| dy &= \frac{1}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sigma(n)} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} 1^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (1.53)$$

onde p e p' são expoentes conjugados. Além disso, utilizando a desigualdade de Hölder novamente, chegamos a

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \leq \left(\int_{B(x,1)} \|Du\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x - y\|^{(n-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

onde p e p' são expoentes conjugados e a última integral é finita. De fato, utilizando coordenadas polares, concluímos que

$$\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x - y\|^{(n-1)p'}} = \int_0^1 \int_{\partial B(x,r)} \frac{1}{r^{(n-1)p'}} dS dr = n\sigma(n) \int_0^1 r^{(n-1)(1-p')} dr = n\sigma(n) \frac{p-1}{p-n} < \infty,$$

pois $n < p$. Dito isso, segue que

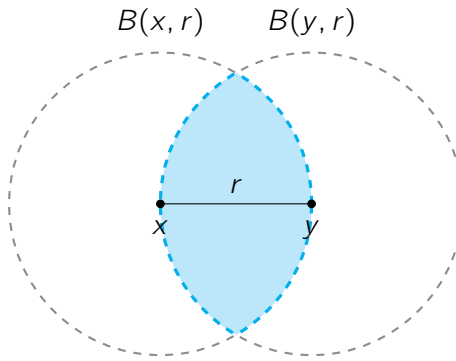
$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.54)$$

Dessa forma, por (1.51), (1.52), (1.53) e (1.54), deduzimos que

$$|u(x)| \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como x é arbitrário, também obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.55)$$

Figura 1.12: $B = B(x, r) \cap B(y, r)$.

Fonte: Autoral

Agora, considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ e denote $r = \|x - y\|$. Portando, seja $B = B(x, r) \cap B(y, r)$ (ver Figura 1.12), sendo assim

$$|u(x) - u(y)| = \int_B |u(x) - u(y)| dz \leq \int_B |u(x) - u(z)| dz + \int_B |u(y) - u(z)| dz. \quad (1.56)$$

Calculando a primeira acima integral obtemos, por (1.52), que

$$\int_B |u(x) - u(z)| dz \leq \int_{B(x, r)} |u(z) - u(x)| dz \leq c \int_{B(x, r)} \frac{\|Du(z)\|}{|z - x|^{n-1}} dz.$$

Analogamente a (1.54), inferimos que

$$\int_B |u(x) - u(z)| dz \leq cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da mesma forma, segue que

$$\int_B |u(y) - u(z)| dz \leq cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Sendo assim, por (1.56), podemos escrever

$$|u(x) - u(y)| \leq c\|x - y\|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Isso mostra que

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \right\} \leq c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.57)$$

Portanto por (1.55) e (1.57)

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Definição 1.46. Dizemos que u^* é uma versão de uma função u se

$$u = u^* \text{ qtp em seu domínio}$$

Para demonstrar a próxima desigualdade de Sobolev, precisamos do seguinte resultado

Teorema 1.47. O espaço de Hölder $(C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})})$ é um espaço de Banach

Demonstração. verificar (ainda não consegui) □

Teorema 1.48. Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 . Considere $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n < p \leq \infty$. Então u tem uma versão contínua $u^* \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, tal que

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c é um constnte que depende de n , p e Ω .

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.35, podemos considerar a extensão de u , $Eu = \bar{u}$, tal que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \text{ qtp em } \Omega \\ \bar{u} &\text{ tem suporte compacto} \\ \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Além disso, como $\text{supp } \bar{u}$ é compcto, temos pelo Teorema 1.29, que existe uma sequência $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para k suficientemente grande, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0. \tag{1.59}$$

quando $k \rightarrow \infty$ Além disso, pelo Teorema 1.45, podemos escrever

$$\|u_k - u_\ell\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ (pois é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$). Como $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.28), existe uma função $u^* \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0. \tag{1.60}$$

Note que $u^* = \bar{u}$ qtp em \mathbb{R}^n (análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 1.40) e $u = \bar{u}$ qtp em Ω (por (1.58)). Logo $u = u^*$ qtp em Ω , ou seja u^* é uma versão contínua de u . O Teorema 1.45 também implica em

$$\|u_k\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Passando ao limite, quando $k \rightarrow \infty$, chegamos por (1.59) e (1.60) a

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim, por (1.58) é verdade que

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, concluímos que

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

como era desejado. □

1.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev

Teorema 1.49. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp < n$, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é válida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω .

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq kp < n$ temos que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Como Ω é limitado e $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^1 , pelo Teorema 1.35 podemos considerar uma extensão $\overline{D^\beta u}$ de $D^\beta u$ com $|\beta| \leq k-1$. Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev obtemos

$$\|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D(\overline{D^\beta u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

Dessa forma, como $\overline{D^\beta u} = D^\beta u$ qtp em Ω , podemos escrever

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D(\overline{D^\beta u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

porém a extensão é um operador linear limitado, sendo assim, temos que $\|\bar{v}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ para todo $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Dito isso, inferimos que

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|D^\beta u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Dessa forma $u \in \mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$. De forma análoga temos que $u \in \mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Indutivamente, chegamos a $u \in \mathcal{W}^{0,q}(\Omega) = \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

como queríamos mostrar. □

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{0,q}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\underbrace{\mathcal{W}^{1,p^*} * \dots *}_{k-1 \text{ vezes}}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\underbrace{\mathcal{W}^{2,p^*} * \dots *}_{k-2 \text{ vezes}}(\Omega)} \leq \dots \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

Definição 1.50. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é formado pelas funções $u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Esse espaço é munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

Teorema 1.51. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 , e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp > n$, então $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0, 1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é válida, onde c depende apenas de k, p, n, γ e Ω .

Demonstração. Suponha que $\frac{n}{p}$ não é um inteiro. Então como visto na demonstração anterior temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ quando

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n} \quad (1.61)$$

desde que $\ell p < n$. Além disso, ℓ é um inteiro tal que

$$\ell < \frac{n}{p} < \ell + 1 \quad (1.62)$$

isto é $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Consequentemente temos por (1.61) e (1.62) que

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} > n$$

pois $n - p\ell > 0$. Além disso, $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{1,r}(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$. Dito isso, pelo Teorema 1.35, seja $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de $D^\alpha u$. Assim pela Desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.45) $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

pois $\overline{D^\alpha u} = D^\alpha u$ qtp em Ω , $\text{supp } \overline{D^\alpha u}$ é compacto e $\gamma = p + 1 - \frac{n}{p} = 1 - \frac{n}{r}$. Isso mostra que $D^\alpha u \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, pois $u \in \mathcal{W}^{k,\ell}(\Omega)$. Portanto, $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \right) \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} + \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} 2 \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

Por fim, suponha que $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Seja $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Como anteriormente, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ desde que (1.61) seja satisfeito. Porém agora

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} = n.$$

Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k - \ell$. Sejam $n < q < \infty$ e $1 \leq s = \frac{nq}{n+q} < n$. Dessa forma $s^* = q$ e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev temos, considerando uma extensão como foi feita na demonstração do Teorema 1.49, que

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|D(D^\alpha u)\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|D(D^\alpha u)\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)}$$

que é finito pois $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$. Como Ω é limitado concluímos que

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$. Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1 = k - \frac{n}{p}$. Como $n < q < \infty$, utilizando a Desigualdade de Morrey

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} \leq c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\Omega)}$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 2$. Assim, tomando $\gamma \in (0, 1)$ obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell-1,q}(\Omega)} \leq \dots \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$$

como era desejado. \square

1.8 Compacidade

Definição 1.52. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$ se para todo $x \in X$

$$\|x\|_Y \leq c \|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y , isto é, existe uma subsequência que converge em Y .

Observação: Se um mergulho satisfaz apenas a primeira propriedade, dizemos que X está continuamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 1.53 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$$

com $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$

Demonstração. Seja $1 \leq q < p^*$ fixo. Como Ω é limitado, segue que $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}$ e pelo Teorema 1.40 temos $\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Logo $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Resta mostrar que se $(u_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ que converge em $\mathcal{L}^q(\Omega)$.

Pelo Teorema de Extensão, podemos supor sem perda de generalidade que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e que para todo $k \in \mathbb{N}$, u_k tem suporte compacto em algum aberto limitado $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Também podemos supor que

$$\sup_k \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} < \infty \quad (1.63)$$

pois a sequência é limitada

Primeiramente vamos estudar as funções suavizadas $u_k^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_k$ onde η_ε é a função molificadora vista na Seção 1.4. Também podemos supor que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ as funções u_k^ε tem suporte em V . Afirmamos que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \rightarrow 0 \quad (1.64)$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com efeito, note que se u_k é suave, então

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\tau) u_k(x - \tau) d\tau - u_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) u_k(x - \tau) d\tau - u_k(x)$$

Fazendo a substituição $\tau = \varepsilon y$ e lembrando que $\int_{B(0,1)} \eta(y) dy = 1$, obtemos

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y) (u_k(x - \varepsilon y) - u_k(x)) dy = \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_k(x - \varepsilon ty) dt dy$$

Para calcular essa derivada, seja $g(t) = x - \varepsilon ty$. Pela Regra da Cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}(u_k \circ g) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(g(t)) g'_j(t) = -\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(g(t)) y_j = -\varepsilon Du_k(x - \varepsilon ty) \cdot y$$

Sendo assim

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_k(x - \varepsilon ty) \cdot y dt dy.$$

Daí, passando o módulo em ambos os lados e Utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) obtemos

$$|u_k^\varepsilon(x) - u_k(x)| \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|Du_k(x - \varepsilon ty)\| dt dy$$

e integrando ambos os lados sobre V

$$\begin{aligned} \int_V |u_k^\varepsilon(x) - u_k(x)| dx &\leq \int_V \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|Du_k(x - \varepsilon ty)\| dt dy dx \\ &\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \|Du_k(x - \varepsilon ty)\| dx dt dy \leq \varepsilon \int_V \|Du_k(z)\| dz. \end{aligned}$$

Isto é

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \varepsilon c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}$$

Além disso, utilizando (1.63) e o Teorema da Convergência Dominada obtemos que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \rightarrow 0 \quad (1.65)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente em k . Como $1 \leq q < p^*$, podemos utilizar a Desigualdade de Interpolação das normas \mathcal{L}^p

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

onde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$ e $0 < \theta < 1$. Ademais, por (1.63) e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, $\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$ é finito. De fato

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta} \leq c \|Du_k^\varepsilon - Du_k\|_{\mathcal{L}^p(V)}^{1-\theta} \leq c \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}^{1-\theta} < \infty.$$

Assim por (1.65)

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq c \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \rightarrow 0$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como era desejado.

Agora, afirmamos que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a sequência $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_k^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |u_k(y)| dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty \quad (1.66)$$

onde por (1.63) c não depende de k . De forma análoga, mostramos que

$$\|Du_k^\varepsilon(x)\| \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \quad (1.67)$$

Isso prova que $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(V)$ é uniformemente limitada pois mostramos que $\|u_k^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq M$ onde $M > 0$ não depende de k . Ademais, $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é equicontínua pois, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\delta < \tilde{\varepsilon}/L$ tal que, pela Desigualdade do Valor Médio

$$\|x - y\| \leq \delta \implies |u_k^\varepsilon(x) - u_k^\varepsilon(y)| \leq L\|x - y\| < L\delta < \tilde{\varepsilon}.$$

onde $L = \sup_{x \in V} \|Du_k(x)\|$, que existe por (1.63) e (1.67) e não depende de k e x .

Agora seja $\delta > 0$ fixo. Mostremos que existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ tal que

$$\limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \delta. \quad (1.68)$$

De fato, por (1.64), conseguimos um valor de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \frac{\delta}{2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, sabemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ as funções u_k e u_k^ε tem suporte em um aberto limitado fixo $V \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos utilizar o fato da sequência $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ ser equicontínua e uniformemente limitada junto do Critério de Compacidade de Arzelà-Ascoli para obter uma subsequência $(u_{k_j}^\varepsilon)_{j=1}^\infty \subseteq (u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente em V . Em particular

$$\limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_\ell}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} = 0.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} &\leq \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_j}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} \\ &\quad + \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_\ell}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_\ell}^\varepsilon - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \delta. \end{aligned}$$

como era desejado. Por fim, escolhendo $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots$ em (1.68), conseguimos extrair uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ que satisfaz

$$\limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} = 0$$

por que isso é suficiente?

□

CAPÍTULO DOIS

ALGUMAS APLICAÇÕES DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

2.1 Preliminares

2.1.1 Desigualdades

O primeiro preliminar para esse capítulo é a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, iremos apresentar o caso geral abaixo, mas utilizaremos apenas alguns casos particulares que serão mencionados após o teorema.

Teorema 2.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg — Caso 1). Seja $1 \leq q \leq \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$ com $\ell < k$, $r = 1$ e $\frac{\ell}{k} \leq \theta \leq 1$. Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n} \right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^\ell u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^k u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}^\theta \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg — Caso 2). Seja $1 \leq q \leq \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$ com $\ell < k$, $1 < r < \infty$, $k - \ell - \frac{n}{r}$ e $\frac{\ell}{k} \leq \theta \leq 1$. Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n} \right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^\ell u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^k u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}^\theta \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [6]

□

A desigualdade de Ladyzhenskaya é um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg apresentada acima. Quando $\ell = 0$, $m = 1$, $p = 4$, $q = r = 2$ e $\theta = \frac{3}{4}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{4}} \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{3}{4}} \quad (2.1)$$

Outras formas da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg que serão utilizadas são

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad (2.2)$$

onde $0 < c < 1$, e

$$\|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2 u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.3)$$

2.1.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta indispensável para o estudo de equações diferenciais parciais, aqui apresentaremos as definições básicas e algumas propriedades elementares que serão utilizadas ao decorrer do texto.

Definição 2.3. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \omega} f(x) dx,$$

e a transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \omega} f(\omega) d\omega.$$

Como $|e^{\pm ix \cdot \omega}| = 1$ e $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ as integrais acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou $\omega \in \mathbb{R}^n$ no caso da transformada inversa).

Teorema 2.4. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração. Ver [5] p.p. 183. □

Teorema 2.5 (Propriedades da transformada de Fourier). Seja $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Então

- (a) $\widehat{\lambda u + v} = \lambda \hat{u} + \hat{v}$;
- (b) $\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$;
- (c) $\widehat{D^\alpha u} = (i\omega)^\alpha \hat{u}$ para todo multi-índice α tal que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$;¹
- (d) $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v}$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 185. □

Exemplo 2.6 (Transformada da derivada temporal). Considere uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e considere sua derivada temporal. Dessa forma

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} u(x, t) dx \right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

onde a penultima igualdade é válida pois $e^{-i\omega \cdot x}$ não depende de t .

Exemplo 2.7 (Derivada do Laplaciano). Lembrando que dada uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o Laplaciano de u é dado por

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Dito isso, utilizando a transformada da derivada vista no item (c) do Teorema 2.5

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = -\omega_j^2 \hat{u}.$$

¹Se $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice então $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \dots \omega_n^{\alpha_n}$

Dessa forma

$$\widehat{\Delta u} = -(\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2)\hat{u} = -\|\omega\|^2\hat{u}.$$

2.1.3 Semigrupo do calor

Definição 2.8. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores de lineares limitados $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é um semigrupo se

1. $T(0) = I_X$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$

Nesse trabalho, será importante conhecer o semigrupo do calor, que provem da solução da equação do calor

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \quad (2.5)$$

Para encontrar, essas soluções, utilizaremos a transformada de Fourier. Dito isso, aplicando a transformada em (2.4) e (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_t - \nu \|\omega\|^2 \hat{\mathbf{u}} &= 0 \quad t > 0 \\ \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{v}} \quad t = 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, temporariamente ignoramos as variáveis espaciais e trabalhamos apenas no domínio do tempo, sendo assim basta resolver a equação diferencial ordinária acima e depois aplicar a transformada inversa. Com efeito, a EDO tem solução dada por

$$\hat{\mathbf{u}} = A e^{-\nu \|\omega\|^2 t},$$

onde A é determinado pela condição inicial, nesse caso $A = \hat{\mathbf{v}}$. Sendo assim a solução do problema auxiliar associado

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} e^{-\nu t \|\omega\|^2}.$$

Dessa forma podemos aplicar a transformada inversa para obter

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} * F}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

onde F é a transformada inversa de $e^{-\nu t \|\omega\|^2}$. Ou seja

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega \cdot x} e^{-\nu t \|\omega\|^2} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k.$$

Para resolver essa integral, primeiramente precisamos completar o quadrado no expoente. Dito isso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\nu t \omega_k^2 + i x_k \omega_k + \frac{x_k^2}{2\nu t} - \frac{x_k^2}{2\nu t} \right) d\omega_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x_k^2}{2\nu t} \right) \exp \left(-\left(\sqrt{\nu t} \omega_k - \frac{i x_k}{2\nu t} \right)^2 \right) d\omega_k \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t_k = \sqrt{\nu t} \omega_k - \frac{i x_k}{2\nu t}$ obtemos $dt_k = \sqrt{\nu t} d\omega_k$ e a integral se torna

$$\frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t_k^2} dt_k = \left(\frac{\pi}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}}$$

Sendo assim

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\pi}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} = \frac{1}{(2\nu t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}$$

Portanto

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\nu t}} \mathbf{v}(y) dy$$

O semigrupo do calor, denotado por $e^{\nu\Delta\tau}$ com $\tau > 0$ é uma família de operadores dada por

$$e^{\nu\Delta\tau} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} * E(\cdot, \tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}$$

com $E(x, t) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}$. O resto dessa subseção será destinada a estudar algumas propriedades que serão utilizadas no restante do texto

Proposição 2.9 (Propriedades do semigrupo do calor). Considere o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta\tau}$ então são válidas

- (a) $e^{\nu\Delta\tau}(\lambda u + v) = \lambda e^{\nu\Delta\tau} u + e^{\nu\Delta\tau} v$
- (b) $D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau} u) = e^{\nu\Delta\tau}(D^\alpha u)$

Demonstração. (a) Segue do fato da convolução ser um operador linear

(b) Análogo ao que foi mostrado no Teorema 1.29 □

Proposição 2.10. Seja $1 \leq r \leq 2$ e $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ então

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau} u)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq c(n, k)(\nu\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}} \|u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \quad (2.6)$$

onde $k = |\alpha|$.

Demonstração. Ver [13] p.p. 32 □

2.1.4 Notação

Introduziremos a notação que será utilizada ao decorrer do texto.

Letras em negrito representam vetores n -dimensionais $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ (na maioria dos casos $n = 3$). A k -ésima derivada parcial é denotada por D_k . Também vale ressaltar a definição da norma \mathcal{L}^p das funções vetoriais

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|D\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \|D_j u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e de forma geral

$$\|D^k \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \sum_{i=1}^n \|D_{j_1} \cdots D_{j_k} u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e a norma em \mathcal{L}^∞ é dada por

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

2.2 Propriedades da soluções de Leray

2.2.1 Introdução e contexto histórico

Em 1934 no artigo “*Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplassement l’espace*” [9] Leray construiu soluções fracas de energia finita²

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^\infty([0, \infty), \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}_W([0, \infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{L}^2([0, \infty), \mathcal{H}(\mathbb{R}^3))^3 \quad (2.7)$$

para as equações de Navier-Stokes em \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 \in \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\nu > 0$ é constante. Estas soluções são tais que $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ e satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (2.9)$$

A unicidade desas soluções ainda é um problema em aberto, porem no mesmo artigo Leray mostrou que existe um instante de tempo T_{**} tal que a solução \mathbf{u} se torna suave em $\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty)$ e $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^\infty([T_{**}, \infty), H^k(\mathbb{R}^3))^4$ para cada $k \geq 0$. Um problema importante que foi deixado em aberto por Leray no final de seu artigo diz a respeito do decaimento de energia em L^2 da solução. Matematicamente, isto é entender o que acontece com $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ quando $t \rightarrow \infty$. Leray suspeitava que no limite, essa norma é igual a zero, e de fato foi provado que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$. Uma demonstração para esse fato será apresentada no Teorema 2.16.

Uma outra forma de estudar propriedades das soluções das equações de Navier-Stokes é a partir das soluções $\mathbf{v}(\cdot, t)$ do problema linearizado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \nu \Delta \mathbf{v} \\ \mathbf{v}(\cdot, t_0) &= \mathbf{u}(\cdot, t_0) \end{aligned}$$

com $t \geq t_0 \geq 0$. Aqui $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$ onde $e^{\nu\Delta(t-t_0)}$ é o semigrupo do calor visto no preliminares. Com essas soluções é possível estudar algumas estimativas de decaimento como

$$\|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

²i.e., qual é o significado de energia finita?

³ $\mathcal{L}^\infty([0, \infty), \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ (i.e., $u_i \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ para todo $i = 1, 2, 3$) com $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ tais que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é limitada qtp. $\mathcal{C}_W([0, \infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot, t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ fracamente contínuas e $\mathcal{L}^2([0, \infty), \mathcal{H}(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções tais que

$$\int_0^\infty \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt < \infty$$

⁴i.e., qual é a definição desse espaço

$$t^{\frac{n}{4}} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

Uma outra pergunta importante (que não será trabalhada aqui) é sobre o erro ou diferença da solução de Leray e da solução do problema linearizado. Essa pergunta foi respondida por Weigner em [17] onde foi provado que

$$t^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

2.2.2 Resultados

Tomando uma função molificadora $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ e sua versão escalada η_δ como vista no Capítulo 1, Seção 1.4 definimos $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \eta_\delta * \mathbf{u}_0$, introduzimos $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ como a solução única do problema regularizado

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta &= \nu \Delta \mathbf{u}_\delta \\ \mathbf{u}_\delta(\cdot, 0) &= \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, t) = \eta_\delta * \mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$. Em seu artigo, Leray mostrou que existe uma sequência apropriada $\delta' \rightarrow 0$ tal que conseguimos a convergência fraca em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{u}_{\delta'} \rightharpoonup \mathbf{u}(\cdot, t)$$

para todo $t \geq 0$, com $\mathbf{u}(\cdot, t)$ apresentada em (2.7) contínua no instante $t = 0$. Além disso, a desigualdade de energia (2.9) é satisfeita para todo $t \geq 0$ e em particular

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{u}_0\| \quad (2.11)$$

Outros resultados importantes se referem à projeção de Helmholtz de $-\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)$ em $\mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ isto é, o campo $\mathbf{Q}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot, t) := -\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla p(\cdot, t)$$

para $t > 0$. A seguir, estudaremos algumas estimativas de $\mathbf{Q}(\cdot, t)$

Proposição 2.11. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geq T_{**}$) tem-se

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > s$, onde c é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, dada por

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\omega \cdot x} f(x) dx.$$

Dada $\mathbf{v}(\cdot, s) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, obtemos pelo Teorema 2.4

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu\|\omega\|^2(t-s)} \|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|^2 d\omega,$$

onde utilizamos o resultado sobre a transformada de Fourier do semigrupo do calor visto nos preliminares. Além disso, $\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|^2 \leq \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_\infty = \sup\{\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|; \omega \in \mathbb{R}^3\}$. Daí

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-s)\|\omega\|^2} d\omega,$$

onde a integral do lado direito é uma Gaussiana, cujo resultado é $c\nu^{-\frac{3}{2}}(t-s)^{-\frac{3}{2}}$. Portanto

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_{\infty}. \quad (2.12)$$

O resultado que queremos, é uma aplicação direta de (2.12) com $\mathbf{v}(\cdot, s) = \mathbf{Q}(\cdot, s)$, o restante da demonstração será dedicado a estimativa do valor de $\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_{\infty}$.

Note que utilizando a derivada da transformada, temos que $\mathcal{F}[D^\alpha f] = (i\omega)^\alpha \hat{f}$, sendo assim se $\alpha = e_j$ para algum $j = 1, 2, 3$, $\mathcal{F}[D^{e_j} f] = i\omega_j \hat{f}$. Dito isso $\mathcal{F}[\nabla p(\cdot, s)] = i\hat{p}(\omega, s)\omega$ e $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$ pois $\mathbf{Q} = \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u}$ e $\nabla \cdot \mathbf{Q} = (\nabla \cdot \mathbf{u})_t - \nu\Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ já que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, dessa forma

$$0 = \widehat{\nabla \cdot \mathbf{Q}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \widehat{Q_j}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 i\omega_j \hat{\mathbf{Q}},$$

ou seja, $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$. Além disso, pela definição de $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ temos que $\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + \mathcal{F}[\nabla p(\cdot, s)](\omega) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega)$, sendo assim, fazendo o produto interno por $\hat{\mathbf{Q}}$ em ambos os lados e utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) obtemos

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + i\hat{p}(\omega, s)\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)$$

isto é

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)\| \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega)\|,$$

pois $i\hat{p}(\omega, s)\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) = 0$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Isso nos diz que

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_{\infty} \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_{\infty}. \quad (2.13)$$

Por outro lado, para $i = 1, 2, 3$,

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](k)| \leq \sum_{j=1}^3 |\mathcal{F}[u_j(\cdot, s) D^{e_j} u_i(\cdot, s)](k)| \leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^3 \|u_j(\cdot, s) D^{e_j} u_i(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Por fim, novamente utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) e a definição das normas

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](k)| \leq c \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u_i(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Isto mostra que

$$\|\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_{\infty} \leq c \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.14)$$

Dito isso, por (2.12), (2.13) e (2.14)

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

como queríamos mostrar. \square

Repetindo o argumento utilizado na demonstração para as soluções do problema regularizado (2.10) obtemos

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \quad (2.15)$$

onde c é uma constante positiva e

$$\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) = \bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) - \nabla p_\delta(\cdot, s)$$

Observação: Vale ressaltar que as soluções do problema regularizado também satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (2.16)$$

Proposição 2.12. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geq T_{**}$), tem-se

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t-s)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > s$, onde $k = |\alpha|$ e $c(m)$ depende apenas de m .

Demonstração. Por (2.6) obtemos

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}(t-s)^{-\frac{k}{2}}\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

e pelo resultado anterior

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t-s)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Proposição 2.13. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.8). Então existe $t_{**} > T_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução \mathbf{u}) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma função monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**}, \infty)$.

Demonstração. Sejam $t_0 \geq T_{**}$ e $t > t_0$. Aplicando a k -ésima derivada parcial D_k à $\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}$, fazendo o produto escalar com $D_k \mathbf{u}$, integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx = \nu \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \Delta \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx \end{aligned} \quad (2.17)$$

Vamos analisar cada integral separadamente. Note que $D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_k \mathbf{u}\|^2$. Dessa forma

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, s)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 - \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 \, dx.$$

Note que expandindo a segunda integral e utilizando integração por partes⁵ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k u_i (D_i u_j) D_k u_j \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_i (D_k u_i D_k u_j) \, dx$$

e utilizando a regra do produto na última integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j \, dx - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx$$

porém a primeira integral do lado direito é igual a zero pois

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j \, dx &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k \left(\sum_{i=1}^3 D_i u_i \right) D_k u_j \, dx \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k (\nabla \cdot \mathbf{u}) D_k u_j \, dx = 0 \end{aligned}$$

⁵explicar pq não tem termo de fronteira, não lembro da explicação

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx.$$

A terceira integral é igual a zero, já que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k D_j p D_k u_j \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j D_k p D_k u_j \, dx$$

utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_j D_k u_j \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_k \left(\sum_{j=1}^3 D_j u_j \right) \, dx = 0$$

pois novamente $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por fim, a ultima integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k u_i D_k u_i \, dx$$

novamente utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j D_k u_i)(D_j D_k u_i) \, dx \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j D_k u_i)^2 \, dx = - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \|D_j D_k \mathbf{u}\|^2 \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k D \mathbf{u}\|^2 \, dx \end{aligned}$$

Dito isso, voltando para (2.17) e somando em $1 \leq k \leq 3$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 - \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 \, dx + \nu \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k D \mathbf{u}\|^2 \, dx \, ds \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Lembrando da definição das normas vistas nos preliminares, multiplicando ambos os lados por 2 e reorganizando os termos, podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} \|D \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \, ds \\ = \|D \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_i D_k u_j D_j D_k u_i \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder e a definição das normas, temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a **aqui precisa detalhar, a gente fez mas não consegui entender pelas fotos**

$$\|D \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\infty} \|D \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

que pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.2) em $\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\infty}$ é menor ou igual a

$$\|D \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \, ds.$$

Em particular temos

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \end{aligned} \quad (2.18)$$

para todo $t \geq t_0$. Daí, seja $t_0 > t_*$ tal que por (2.9) $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2$. Dessa forma, segue que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2 \quad (2.19)$$

para todo $s > t_0$. Com efeito, suponha que (2.19) é falso, dessa forma, existiria $t_1 > t_0$ tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$ para todo $t_0 \leq s < t_1$ com $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \nu^2$. Tomando $t = t_1$ em (2.18) temos que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. De fato

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \end{aligned}$$

como $s \in [t_0, t_1]$ temos que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$ obtemos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds$$

que resulta em $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ como desejado. Então

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$$

o que é uma contradição. Dessa forma (2.19) é válido. De (2.18) e (2.19) temos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

para todo $t \geq t_2 \geq t_0$, onde $\gamma = \nu - \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} > 0$ é uma constante. Tomando $t_{**} = t_0$, finalizamos a demonstração. \square

Proposição 2.14. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray para (2.8). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 > 0$ tem-se

$$\|D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) - D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k) \nu^{-(\frac{5}{4} + \frac{k}{2})} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{3}{4} + \frac{k}{2})}$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0)$ e $k = |\alpha|$.

Demonstração. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{v}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t)] + e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)$$

onde $t > t_0$ e $\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$ dada em (2.10). Ademais, temos que

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) = e^{\nu\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds \quad (2.20)$$

Com efeito, considere a equação

$$\partial_s \mathbf{u}_\delta = \mathbf{Q}_\delta + \nu \Delta \mathbf{u}_\delta$$

aplicando o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta(t_0-s)}$ em ambos os lados e integrando sobre $[0, t_0]$, obtemos

$$\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta \, ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds. \quad (2.21)$$

Note que

$$\partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] = -\nu e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta + e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta$$

ou seja

$$e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta = \partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] + \nu e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta.$$

Dessa forma, (2.21) se torna

$$\int_0^{t_0} \partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds$$

isto é,

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) - e^{\nu\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta \, ds$$

que reorganizando os termos, é exatamente a equação (2.20) que queríamos mostrar. Dito isso

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \, ds$$

para $t > t_0$. De forma análoga para $t > \tilde{t}_0$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \, ds.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) &= D^\alpha \left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] \right) \\ &\quad - D^\alpha \left(e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] \right) + D^\alpha \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \, ds. \end{aligned}$$

Portanto, seja $K \subseteq \mathbb{R}^3$ um compacto qualquer, dito isso, temos para cada $t > \tilde{t}_0$ e $\delta > 0$

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq J_{\alpha,\delta}(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(K)} \, ds$$

utilizando (2.15), temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a

$$J_{\alpha,\delta}(t) + c(k) \nu^{-\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{k}{2}} \|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

que pela Proposição 2.12, é menor ou igual a

$$J_{\alpha,\delta}(t) + c(k) \nu^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds. \quad (2.22)$$

Observe que a integral pode ser simplificada, já que $s \leq \tilde{t}_0$ implica em $(t-s)^{-\frac{3}{4}} \leq (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}}$ e pela desigualdade de energia $\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Sendo assim

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds \leq (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds. \quad (2.23)$$

Pela desigualdade de Hölder e a desigualdade de energia, segue que

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\nu^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \quad (2.24)$$

Portanto, por (2.23) e (2.23), obtemos

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq J_{\alpha, \delta}(t) + c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}-\frac{5}{4})}(t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

onde

$$J_{\alpha, \delta}(t) = \|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}[\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} + \|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-t_0)}[\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)])\|_{\mathcal{L}^2(K)}.$$

Tomando $\delta = \delta' \rightarrow 0$, temos que $J_{\alpha, \delta}(t) \rightarrow 0$. pois, dados $\sigma, \tau > 0$

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} \rightarrow 0$$

quando $\delta' \rightarrow 0$. De fato, denotando $\Phi_\delta(\cdot, \tau) = D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)])$, tem-se

$$\Phi_\delta(\cdot, \tau) = H_\alpha(\cdot, \tau) * [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)]$$

onde $H_\alpha(\cdot, \tau) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ não depende de δ . Como $\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma) \rightarrow 0$, segue que $\Phi_{\delta'}(x, \tau) \rightarrow 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$. Por outro lado

$$\begin{aligned} |\Phi_\delta(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x - y, \tau)[\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)]| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x - y, \tau)|^2 dy \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)|^2 dy \\ &= \|H_\alpha(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

utilizando a desigualdade triangular e (2.16) obtemos

$$|\Phi_\delta(x, t)| \leq 2\|H_\alpha(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (pois $2\|H_\alpha(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante em relação a x e K é limitado, logo pertence a $\mathcal{L}^1(K)$), segue que $\|\Phi_{\delta'}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \rightarrow 0$, quando $\delta' \rightarrow 0$ pelo fato de K ser compacto. Dito isso, fazendo $\delta = \delta' \rightarrow 0$ em (2.22) temos que

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}} - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}-\frac{5}{4})} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{k}{2}-\frac{3}{4})}$$

para todo $t_0 > \tilde{t}_0$. Tomando o supremo de todos $K \subseteq \mathbb{R}^3$ obtemos a desigualdade desejada. \square

Teorema 2.15. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.8), então

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponha que a afirmação é falsa, nesse caso existe uma sequência crescente $t_\ell \rightarrow \infty$ (com $t_\ell \geq t_{**}$ e $t_\ell \geq 2t_{\ell-1}$ para todo ℓ) e um $\varepsilon > 0$ fixo tal que

$$t_\ell \|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \varepsilon$$

para todo ℓ . Em particular

$$\int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^2 dt \geq (t_\ell - t_{\ell-1}) \|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} t_\ell \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} \eta$$

para todo ℓ , o que contradiz com a desigualdade de energia e (2.11). Portanto, a afirmação do teorema é válida. \square

Teorema 2.16 (Solução do problema clássico de Leray). Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.8), então

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} como definido na Proposição 2.13. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $t_0 \geq t_{**}$ suficientemente grande tal que pelo Teorema anterior, temos

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon$$

para todo $t \geq t_0$. Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$ obtemos, de forma análoga ao que foi feito na Proposição 2.14

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s) ds$$

Dito isso, utilizando a Proposição 2.11

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds$$

e pelo Teorema 2.15 é menor ou igual a

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \varepsilon \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Note que

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \leq 6\sqrt[4]{2}$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Sendo assim

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \varepsilon\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Como $\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + \nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}) \varepsilon$$

para todo $t \gg 1$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

como era desejado. □

Note que os Teoremas 2.15 e 2.16 juntos mostram que temos o decaimento de energia na norma do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$. Já que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}$.

A demonstração do lema abaixo é bastante extensa, porem é de extrema importância para o último teorema dessa seção

Lema 2.17. Para cada $k \geq 0$, denotando $U_k(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ tem-se

$$U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$$

Demonstração. O caso $k = 0$ segue da desigualdade de energia pois esta nos diz que

$$U_0(t) = t^0 \|D^0 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > 0$ (em particular $t \geq T_{**}$) e $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante. Logo, U_0 é limitada e $U_0 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$.

O caso $k = 1$ também já foi provado anteriormente. Pelo Teorema 2.15, temos que $U_1(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, isso é suficiente para mostrar que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ pois (??).

Dito isso, resta provar a afirmação para $k \geq 2$. De forma análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema ??, dado $t_0 \geq T_{**}$ podemos escrever $\mathbf{u}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) ds.$$

Dessa forma, para cada multi-índice α temos que

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \quad (2.25)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Defina $U^\alpha(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|$ com $k = |\alpha|$. De (2.25) segue que

$$U^\alpha(t) \leq I_1(\alpha, t) + I_2(\alpha, t) + J_\alpha(t)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1(\alpha, t) &= t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \\ I_2(\alpha, t) &= \int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds, \\ J_\alpha(t) &= \int_{t'}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

com $t' = \frac{t_0+t}{2}$. Conseguimos estimar $I_1(\alpha, t)$ de forma direta. Com efeito, por (2.6) e pela desigualdade de energia

$$|I_1(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}}.$$

Porém note que

$$(t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(1 + \frac{t_0}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} \leq (1 + t_0)^{\frac{k}{2}}.$$

pois $\frac{t_0}{t-t_0} \leq t_0$ para todo $t \geq t_0 + 1$. Dessa forma

$$|I_1(\alpha, t)| \leq c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Por outro lado utilizando a Proposição 2.12, temos

$$\begin{aligned} |I_2(\alpha, t)| &\leq c(k, \nu) \int_{t_0}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq c(k, \nu) \int_{t_0}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \end{aligned}$$

como sabemos que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ temos que existe uma constante M_1 tal que $|U_1(s)| = s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq M_1$ qtp em $[T_{**}, \infty)$. Dessa forma, também utilizando a desigualdade de energia e o fato de $s \geq t_0$ (o que implica em $(t - s_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} \leq (t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})}$)

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} \int_{t_0}^{t'} s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Sendo assim

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t + t_0)^{\frac{1}{2}}$$

e de forma análoga ao que foi feito para $I_1(\alpha, t)$, $(t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t + t_0)^{\frac{1}{2}}$ é menor que uma constante que depende apenas de t_0 e k . Por isso

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Assim, obtemos

$$U^\alpha(t) \leq c(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + J_\alpha(t). \quad (2.26)$$

Logo, ainda resta estimar J_α , porem não conseguimos estimar J_α de forma geral para todo α , então faremos essa estimativa para o caso em que $|\alpha| = 2$ e depois utilizaremos indução para mostrar a estimativa de forma geral. Com efeito, considerando $D^\alpha = D_i D_j$ (consequentemente denotando $J_\alpha(t)$ por $J_{ij}(t)$) temos por (2.6) que

$$J_{i\ell}(t) = t \int_{t'}^t \|D_i [e^{\nu \Delta(t-t_0)} D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Para estimar $\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$ Note que $D_\ell \mathbf{Q} = -D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - D_\ell \nabla p = -D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \nabla q_\ell$ onde $q_\ell = D_\ell p$. Aplicando o divergente nessa equação, temos que

$$-\Delta q_\ell = \operatorname{div}(D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]).$$

Aplicando a teoria de Calderon-Zygmund, temos para cada $1 < r < \infty$

$$\|\nabla q_\ell(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|$$

o que implica em

$$\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}.$$

No nosso, caso temos

$$\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \leq c \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$$

Dito isso

$$\begin{aligned} J_{i\ell}(t) &\leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \right) ds \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) ds$$

e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1)

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{5}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) ds.$$

Reescrevendo a equação acima como

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t s^{-\frac{11}{8}} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\left(s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{5}{4}} \left(s \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \left(s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{3}{4}} \left(s \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) \right) ds.$$

Fazendo as substituições adequadas, temos que o lado direito da equação acima é menor que

$$c(\nu) t M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}} ds + c(\nu) t M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Utilizando a desigualdade de Young ($ab \leq a^p p^{-1} + b^q q^{-1}$ onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$) com $a = 1$, $b = U_2(s)^{\frac{3}{4}}$, $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$, temos que $U_2(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_2(s)$. Dessa forma

$$c(\nu, M_1) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds + \left(c(\nu, M_1) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \right) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Para simplificar a expressão acima, note que **vamos precisar olhar essa passagem**. Dito isso

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu, M_1)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds$$

para todo i, ℓ e $t \geq t_0 + 1$. Dessa forma

$$U_2(t) \leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds \quad (2.27)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Considere agora, t_2, \mathbf{M}_2 dados por

$$t_2 := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \quad \mathbf{M}_2 := \sup\{U_2(s) : t_0 \leq s \leq t_2\}.$$

Afirmamos que

$$U_2(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{M}_2$$

para todo $t \geq t_2$. De fato, definindo $\mathbf{U}_2(t) := \sup\{U_2(s) : t_2 \leq s \leq t\}$. Se $t' \geq t_2$, então por (2.27) temos

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 8c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_2(t) \end{aligned}$$

porém, como $t \geq t_2$ temos que, pela definição de t_2 , $t+t_0 > t_2 > 2^{16} c_{**}^4$, isso implica em $2^{16} c_{**}^4 < t+t_0$ e elevando ambos os lados por $1/4$ obtemos $16c_{**} < (t+t_0)^{\frac{1}{4}}$ que podemos reescrever como $8c_{**}(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} < 1/2$. Dito isso, obtemos

$$U_2(t) < c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

Por outro lado, se $t' < t_2$, podemos reescrever (2.27) como

$$U_2(t) \leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \left(\int_{t'}^{t_2} (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds + \int_{t_2}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds \right).$$

Observe que em $[t', t_2]$ $U_2(s) \leq \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$ e em $[t_2, t]$, $U_2(s) \leq \mathbf{U}_2(s) \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \mathbf{M}_2 \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t) \end{aligned}$$

mas $(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \leq 1$. Sendo assim

$$U_2(t) \leq c_* + c_{**} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

Logo, $\frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t) \leq c_* + 8c_{**}$, que é equivalente à

$$U_2(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{M}_2$$

ou seja, mostramos que $U_2(t)$ é limitado por uma constante que não depende de t em $[t_2, \infty)$. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([t_2, \infty))$. Porém, sabemos que em $[T_{**}, \infty)$ em particular em $[T_{**}, t_2]$ $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave, o que implica em U_2 ser suave em um compacto, consequentemente limitada. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ como era desejado. Assim mostrado o caso $k = 2$.

Suponha que $U_\ell \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ para todo $\ell < k$. Dito isso seja α um multi-índice de ordem k . Denotando D^α por $D_i D^\gamma$ (onde γ é um multi-índice de ordem $k - 1$), temos, de forma análoga ao que foi feito no caso $k = 2$

$$J_\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t \|D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Além disso por Calderon-Zygmund

$$\|D^\beta \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D^\beta [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}$$

para cada $1 < r < \infty$ e qualquer multi-índice β . Dessa forma

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds$$

Utilizando a regra de Leibniz, obtemos

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\sigma \leq \gamma} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\sigma \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D^{\gamma-\sigma} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)},$$

e utilizando a Desigualdade de Hölder

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

além disso, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1) segue que

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

Escrevendo $J_\alpha(t)$ como a soma $J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)$ onde

$$J_1(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

$$J_2(t) = c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

$$J_3(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{k-1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

Como sabemos que $\|D^q \mathbf{u}(\cdot, s)\| = s^{-\frac{q}{2}} U_q(s) \leq M_q$ para $q < k$ e $\|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\| = s^{-\frac{k}{2}} U_k(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq c(\nu) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} U_k(s) ds \\ &\leq c(\nu, k) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de $s^{-\frac{3}{8}} < (t+t_0)^{-\frac{3}{8}}$ para a ultima desigualdade. Análogamente para $J_2(t)$ temos

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} ds \\ &\leq c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t-t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t-t_0)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

e para $J_3(t)$

$$\begin{aligned} J_3(t) &\leq c(\nu) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} U_k(s)^{\frac{3}{4}} ds \\ &\leq c(\nu, k) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s)^{\frac{3}{4}} ds. \end{aligned}$$

Lembrando que $U_k(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_k(s)$, segue por (2.26) e pelas estimativas acima que

$$U^\alpha(t) \leq c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_1) + c(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds$$

onde $U^\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Portanto

$$U_k(t) \leq c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_1) + c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. De forma análoga ao caso $k = 2$, definimos t_k, \mathbf{M}_k por

$$t_k := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \quad \mathbf{M}_k := \sup\{U_k(s); t_0 \leq s \leq t_k\}$$

Sendo assim, afirmamos novamente que

$$U_k(t) = 2c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + 16c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1) \mathbf{M}_k$$

para todo $t \geq t_k$. Essa demonstração é exatamente a mesma que foi feita para o caso $k = 2$. Ou seja, temos que U_k é limitada por uma constante que não depende de t em $[t_k, \infty)$, como U_k é limitada em $[T_{**}, \infty)$, segue que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$, como era desejado. \square

Teorema 2.18. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.8), então para todo $k \geq 0$ tem-se

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$

Demonstração. Os Teoremas 2.16 e 2.15 mostram os casos $k = 0$ e $k = 1$. Sendo assim, considere $k \geq 2$ e $t_0 \geq T_{**}$. Lembrando que

$$\begin{aligned} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|D^k [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t'} \|D^k [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\quad + \int_{t'}^t \|D^k [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $t_\varepsilon > t_0$ suficientemente grande de forma que

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{3}\varepsilon$$

e

$$t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} \|D^k [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Pelo Lema anterior, também é possível obter $t_\varepsilon > t_0$ de forma que

$$t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t \|D^k [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

para todo $t \geq t_\varepsilon$. Ou seja, temos $t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_\varepsilon$. Portanto

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

como queríamos mostrar. □

2.3 Problema de Dirichlet

Nessa seção retornamos ao problema visto na motivação do capítulo anterior.

O ponto principal dessa seção é o Teorema de Lax-Milgram que será utilizado para mostrar a existência de soluções fracas para o problema de Dirichlet. Para demonstrá-lo, será necessário o Teorema da Representação de Riesz para espaços de Hilbert, que será apresentado abaixo.

Teorema 2.19 (Teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert). Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle$$

para todo $u \in H$. Além disso $\|f\| = \|v\|$.

Demonstração. Seja $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado não nulo, então existe $z \in H$ tal que $f(z) \neq 0$. Como f é linear z deve ser não nulo. Ou seja, $\ker f \neq H$. Como f é limitado segue que $\ker f$ é fechado, sendo assim (por [15] p.p. 129), $H = \ker f \oplus \ker f^\perp$. Portanto, $\ker f^\perp \neq \{0\}$ (pois caso contrário $\ker f = H$). Dito isso, seja $w \in \ker f^\perp$ não nulo, então, para cada $u \in H$, $f(u)w - f(w)u \in \ker f$ já que

$$f(f(u)w - f(w)u) = f(u)f(w) - f(w)f(u) = 0.$$

Dessa forma

$$0 = \langle f(u)w - f(w)u, w \rangle = f(u) \langle w, w \rangle - f(w) \langle u, w \rangle,$$

ou seja

$$f(u) = \left\langle u, \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \right\rangle.$$

Escolhendo $v := \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \in H$ (note que v não depende de u), temos que existe $v \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in H$.

Para mostrar que v é único, suponha que exista $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$ para todo $u \in H$. Dito isso

$$\langle u, v \rangle = f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$$

para todo $u \in H$. Logo é verdade que

$$\langle u, v - \tilde{v} \rangle = 0$$

para todo $u \in H$. Em particular se $u = v - \tilde{v} \in H$, temos $\|v - \tilde{v}\| = 0$, ou seja, $v = \tilde{v}$. Portanto v é único.

Por fim, resta mostrar que $\|f\| = \|v\|$. De fato, note que $f(v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$. Ou seja

$$\|v\|^2 = f(v) \leq |f(v)| \leq \|f\| \|v\|.$$

Como v é não nulo, temos $\|v\| \leq \|f\|$. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|f(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

o que implica em $\|f\| \leq \|v\|$. Portanto, vale a igualdade:

$$\|f\| = \|v\|$$

□

Teorema 2.20 (Teorema de Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear tal que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ para todo $u, v \in H$, i.e., a forma bilinear é limitada;
2. $\beta \|u\|^2 \leq B(u, u)$ para todo $u \in H$, i.e., a forma bilinear é coerciva,

e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então, existe um único $v \in H$ tal que

$$B(u, v) = f(u)$$

para todo $u \in H$.

Demonstração. Essa demonstração será dividida em seis passos

Passo 1: Mostremos que existe uma aplicação $A : H \rightarrow H$ tal que $B(u, v) = \langle u, Av \rangle$ para todo $u, v \in H$.

Para cada $v \in H$ defina $g_v : H \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_v(u) = B(u, v).$$

para todo $u \in H$ Claramente g_v é linear (pois B é uma forma bilinear). Além disso, g_v é limitada, já que

$$|g_v(u)| = |B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$$

para todo $u \in H$, onde utilizamos o fato de B ser limitada (ver item 1). Sendo assim,

$$\|g_v\| \leq \alpha \|v\|.$$

Logo g_v é limitada. Dito isso, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema ??), existe um único $w_v \in H$ tal que

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle$$

para todo $u \in H$. Agora, seja $A : H \rightarrow H$ dado por $Av = w_v$. Dessa forma, podemos escrever

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle = \langle u, Av \rangle. \quad (2.28)$$

para todo $u, v \in H$

Passo 2: Afirmamos que A é um operador linear e limitado

Sejam $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim, por (2.28), obtemos

$$\langle u, A(\lambda x + y) \rangle = B(u, \lambda x + y) = \lambda B(u, x) + B(u, y) = \lambda \langle u, Ax \rangle + \langle u, Ay \rangle = \langle u, \lambda Ax + Ay \rangle,$$

para tudo $u \in H$, pois B é uma forma bilinear. Com isso $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$, para todo $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ Logo, A é linear. Além disso, dado $v \in H$, inferimos por (2.28) que

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = B(Av, v) \leq |B(Av, v)| \leq \alpha \|Av\| \|v\|$$

pelo item 1. Deste modo, a seguinte desigualdade é válida:

$$\|Av\| \leq \alpha \|v\|.$$

para todo $v \in H$. Portanto A é limitado

Passo 3: É verdade que A é injetivo e $\text{Im}A$ é fechado

Sabemos que existe $\beta > 0$ tal que $\beta \|u\|^2 \leq |B(u, u)|$ para todo $u \in H$. Dessa forma, por (2.28), concluímos que

$$\beta \|u\|^2 \leq |B(u, u)| = |\langle u, Au \rangle| \leq \|u\| \|Au\|$$

para todo $u \in H$, ou seja

$$\beta \|u\| \leq \|Au\| \quad (2.29)$$

para todo $u \in H$. Seja $u \in \ker A$, então $Au = 0$, daí por (2.29)

$$\beta \|u\| \leq \|Au\| = 0$$

o que implica em $u = 0$. Portanto A é injetiva.

Além disso, seja $(Au_k) \subseteq \text{Im}A$ tal que $Au_k \rightarrow v \in H$, quando $k \rightarrow \infty$. Mostremos que $v \in \text{Im}A$. Com efeito, (Au_k) é de cauchy (porque converge). Dito isso, por (2.29)

$$\beta \|u_k - u_\ell\| \leq \|Au_k - Au_\ell\| \rightarrow 0$$

Ou seja, $(u_k) \subseteq H$ é de Cauchy. Como H é completo, existe $u_0 \in H$ tal que $u_n \rightarrow u_0$. Como A é limitado (o que implica em A ser contínuo) temos que $Au_k \rightarrow Au_0$, quando $k \rightarrow \infty$. Pela unicidade do limite, deduzimos que $v = Au_0 \in \text{Im}A$. Portanto Vamos mostrar que $\text{Im}A$ é fechado.

Passo 4: A é sobrejetivo

Sabemos que $H = \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$ (pois $\text{Im}A$ é fechado). Mostremos que $\text{Im}A^\perp = \{0\}$. Com efeito, se $w \in \text{Im}A^\perp$, temos pelo item 2, e por (2.28) que

$$\beta \|w\|^2 \leq B(w, w) = |B(w, w)| = |\langle w, Aw \rangle| = 0$$

pois $Aw \in \text{Im}A$ e $w \in \text{Im}A^\perp$. Logo, $w = 0$, o que implica em $H = \text{Im}A$. Portanto, A é sobrejetiva.

Passo 5: É verdade que existe $v \in H$ tal que $f(u) = B(u, v)$ para todo $u \in H$.

Como f é um funcional linear limitado em H , pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema ??), existe $z \in H$ tal que $f(u) = \langle u, z \rangle$ para todo $u \in H$. Como A é uma bijeção, existe um único $v \in H$ tal que $z = Av$. Dessa forma, podemos escrever

$$f(u) = \langle u, z \rangle = \langle u, Av \rangle = B(u, v) \quad (2.30)$$

para todo $u \in H$.

Passo 6: Vamos mostrar que v em (2.30) é único

Suponha que existe $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = B(u, \tilde{v})$ para todo $u \in H$. Dessa forma, as igualdades abaixo são válidas

$$B(u, v) = f(u) = B(u, \tilde{v}).$$

para todo $u \in H$. Por isso, pela linearidade de B , segue que $B(u, v - \tilde{v}) = 0$ para todo $u \in H$. Dito isso, pelo item 2, chegamos a

$$\beta \|v - \tilde{v}\|^2 \leq |B(v - \tilde{v}, v - \tilde{v})| = 0.$$

Sendo assim, $v = \tilde{v}$. Portanto, v é único. □

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram (Existência de soluções fracas). Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Na motivação vimos que u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_{\Omega} Du \cdot D\phi \, dx + \int_{\Omega} u\phi \, dx = \int_{\Omega} f\phi \, dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Porém, pela densidade das funções teste em $H_0^1(\Omega)$ (ver Teorema ??), podemos dizer que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se esta satisfaz a igualdade

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ ⁶.

Defina a forma $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx$$

⁶Vale ressaltar que $H_0^1(\Omega) = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Mais precisamente, pelo Teorema 1.28, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$, e o funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Note que B é uma forma bilinear limitada e coerciva. Com efeito, a bilinearidade de B segue do fato do gradiente fraco D e a integral serem operadores lineares. Além disso, é verdade que

$$B(u, u) = \int_{\Omega} Du \cdot Du \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} \|Du\|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Logo, B é coercivo e, utilizando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |Du \cdot Dv| \, dx + \int_{\Omega} |uv| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|Du\| \|Dv\| \, dx + \int_{\Omega} |u| |v| \, dx \leq \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|Dv\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

Porém, sabemos que $\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Dito isso, obtemos

$$|B(u, v)| \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Logo, B é limitado.

Por fim, temos que φ é um funcional linear limitado. De fato, a linearidade de φ segue da distributividade do produto e da linearidade da integral. Por outro lado,

$$|\varphi(v)| \leq \int_{\Omega} |f| |v| \, dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} < \infty$ pois, por hipótese, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = \varphi(v)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, existe u é a única solução fraca para o problema de Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.
- [2] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [4] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.
- [5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
- [6] Alberto Fiorenza, Maria Rosaria Formica, Tomáš Roskovec e Filip Soudský. *Detailed proof of classical Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality with historical remarks*. 2018.
- [7] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 1999.
- [8] Giovanni P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems*. 2nd. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.
- [9] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [10] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [11] Elon Lages Lima. *Curso de Análise vol. 2*. 12^a ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020.
- [12] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6^a edição. IMPA, 2020.
- [13] Jens Lorenz e Paulo R. Zingano. *The Navier-Stokes equations for Incompressible Flows: solution properties at potential blow-up times*. 2015.
- [14] James R. Munkres. *Analysis on Manifolds*. CRC Press, 1991.
- [15] César R. de Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. 1^a ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018, p. 257.
- [16] C.W. Oseen. *Hydrodynamik*. Mathematik in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.
- [17] Michael Wiegner. «Decay Results for Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations on \mathbb{R}^n ». Em: *Journal of The London Mathematical Society-second Series* 35 (1987), pp. 303–313.
- [18] Paulo R. Zingano. *Two problems in Partial Differential Equations (in Portuguese)*. 2018.