TEORIA DA MEDIDA

do conceito de medida.

reais ou complexas

não vazio

Definição 1.2.4. Sejam X um conjunto qualquer e $\eth$ uma σ-álgebra em X. Dizemos que uma sequência (f_n) de funções ~~em~~ sobre X converge em quase toda parte, em X e denotamos $f = \lim f_n$ $q.t.p.$, em X se existe um conjunto $N \in \eth$, com $\mu(N) = 0$, tal que

$$f(x) = \lim_n f_n(x), \quad x \in \mathcal{C}(N).$$

∩ X-N

Para concluir esta seção, estabelecemos o conceito de carga.

Definição 1.2.5. Sejam X um conjunto qualquer e $\eth$ uma σ-álgebra em X. Uma função $\lambda : \eth \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma carga caso satisfaça as seguintes condições:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$;

ii) Se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Observe que uma carga só não satisfaz a não negatividade apresentada por uma medida.

Alguns exemplos para as definições dadas acima serão apresentados no decorrer deste trabalho.

1.3 A integral de Lebesgue

Nesta seção, estamos interessados em introduzir o conceito de integrais de funções mensuráveis e apresentar alguns resultados envolvendo tal conceito como, por exemplo, os Teoremas da Convergência Monótona e Dominada e o Lema de Fatou. Para isso, precisamos estabelecer algumas notações e a definição de funções simples.

σ-álgebra
medida

Fixe um espaço de medida $(X, \eth, \mu)$. Denotaremos por $M = M(X, \eth)$ a coleção de todas as funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, e por $M^+ = M^+(X, \eth)$ a coleção de todas as funções mensuráveis não negativas $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Sabendo disso, podemos apresentar as seguintes definições:

Definição 1.3.1. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é simples se esta assume apenas um número finito de valores em sua imagem.

$\Updownarrow$

Imf é finito

Imf < ∞

De acordo com [2], uma função φ mensurável e simples pode ser representada da seguinte maneira:

$$\boxed{\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},} \tag{1.8}$$

onde cada $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \eth$. Além disso, o autor afirma que existe uma única representação, denominada representação padrão, caracterizada pelo fato de todos os a_j serem distintos e os E_j serem disjuntos, com $j = 1, \ldots, n$, ~~pois se $a_1, \ldots, a_n$ são valores distintos de φ e os $E_j = \{x \in X; \varphi(x) = a_j\}$, então os E_j são disjuntos~~ e $X = \bigcup_{j=1}^{\cancel{\infty}\, n} E_j$. Sendo assim, podemos estabelecer a seguinte definição:

$E_i = \varphi^{-1}(a_i) \Leftarrow \begin{cases} x \in E_i \Rightarrow \varphi(x) = \sum a_j \chi_{E_j}(x) = a_i \Rightarrow x \in \varphi^{-1}(a_i) \\ x \in \varphi^{-1}(a_i) \Rightarrow \varphi(x) = a_i. \text{ Se } x \in E_j, j \neq i, \text{ então } \varphi(x) = a_j = a_i \to \text{Logo, } x \in E_i. \end{cases}$

Definição 1.3.2. Seja φ uma função mensurável simples em $M^+(X, \eth)$, com a representação padrão (1.8). Definimos a integral de φ com relação a μ por

$$\boxed{\int \varphi \ d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).} \quad \left(\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}\right)$$

Observação 1.3.1. Adotaremos a convenção $0 \cdot (+\infty) = 0$. Desse modo, a integral da função identicamente nula é igual a zero se o espaço tem medida finita ou infinita.

Vejamos, a seguir, as propriedades elementares que a integral definida acima deve satisfazer.

Lema 1.3.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) *Se φ ~~e ψ são duas funções~~* é uma função *simples em $M^+(X, \eth)$ e $c \geq 0$, então*

$$\int c\varphi \ d\mu = c \int \varphi \ d\mu; \tag{1.9}$$

b) *Se φ e ψ são duas funções simples em $M^+(X, \eth)$ ~~e $c \geq 0$~~, então*

$$\int (\varphi + \psi) \ d\mu = \int \varphi \ d\mu + \int \psi \ d\mu; \tag{1.10}$$

c) *A aplicação λ definida por*

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E \ d\mu, \quad \forall E \in \eth,$$

é uma medida em $\eth$.

$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \Rightarrow c\varphi = c\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$

$\int c\varphi \, d\mu =$

Demonstração. Note que

a) Inicialmente mostraremos que (1.9) é válida. Se $c = 0$, temos que $c\varphi$ é a função identicamente nula. Assim,

$$\int c\varphi d\mu = 0 = c\int \varphi d\mu.$$

Suponha que $c > 0$. Então, $c\varphi \in M^+$, no qual podemos escrever

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi_{E_j}.$$

$\left(\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}\right)$

Desse modo,

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c\int \varphi d\mu.$$

Portanto, (1.9) é válida. OK

b) Agora mostraremos que (1.10) é verdadeira. Como as funções φ e ψ são simples podemos considerar as representações padrões

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \ \text{ e } \ \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k},$$

e dessa forma, obtemos uma representação para a função $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}. \tag{1.11}$$

No entanto, vale ressaltar que (1.11) pode não ser a representação padrão de $\varphi + \psi$, pois os valores de $a_j + b_k$ podem não ser distintos.

Considere c_h, com $h = 1, ..., p$, os números distintos do conjunto

$$\{a_j + b_k; j = 1, ..., n \text{ e } k = 1, ..., m\}$$

e G_h a união de todos os conjunto $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$. Desse modo,

$$\mu(G_h) = \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k).$$

são disjuntos

$G_h = \bigcup_{(h)} E_j \cap F_k$

$(E_j \cap F_k) \cap (E_i \cap F_l) = E_i \cap E_j \cap F_k \cap F_l = \emptyset, \ i \neq j, \ k \neq l$

$$\bigcup_{\substack{j=1\\k=1}}^{n,m} E_j \cap F_k \qquad \boxed{\bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{m} E_j \cap F_k} \; ?$$

(Aqui (h) representa os números j e k, com $j = 1, ..., n$ e $k = 1, ..., m$, tais que $a_j + b_k = c_h$.) Assim, a representação padrão de $\varphi + \psi$ é dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \chi_{G_h}.$$

$p \to$ qtd de $a_j + b_k$ dist

soma em j e k!

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^{p} c_h \boxed{\mu(G_h)} = \sum_{h=1}^{p} \boxed{\sum_{(h)} c_h \mu(E_j \cap F_k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)
\end{aligned}$$

os j e k's q não fazem parte de (h) são nulos!

$X = \bigcup E_j$

$X = F_k$

Como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$X = \bigcup_{k=1}^{m} F_k \Rightarrow E_j = E_j \cap X = \bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)$ disjunta

$X = \bigcup_{j=1} E_j \to F_k = X \cap F_k = \bigcup_{j=1} (E_j \cap F_k)$ disjunt

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \quad \text{e} \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto, chegamos a

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{n} b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

c) Observe que

$\chi_{E_j}\chi_E = \chi_{E_j \cap E}$

$$\varphi \chi_E = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \right) \chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}.$$

simples e mensurável

Assim,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{\mu(E_j \cap E)}_{\lambda_j(E)}. \tag{1.12}$$

Pelo Exemplo 1.2.2, a aplicação $\lambda_j(E) = \mu(E_j \cap E)$ é uma medida. Assim, pelo Exemplo 1.2.3 e (1.12), segue que λ é uma medida. □

A seguir, mostraremos como definir a integral para funções mensuráveis não negativas.

$$\int_a^b f(x)dx \longrightarrow \int_{[a,b]} f \, d\mu.$$

riemann Lebesgue

$$\sup_{\varphi \in M^+} \int \varphi \, d\mu$$

com $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$

Definição 1.3.3. Seja $f \in M^+$. Definimos a integral de f com relação a μ por

$$\int f \ d\mu = \sup \int \varphi \ d\mu,$$

onde o supremo é considerado sobre todas as funções simples mensuráveis $\varphi \in M^+$ tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$. Além disso, se $E \subset X$ é mensurável, então $f\chi_E \in M^+$ e definimos a integral de f sobre E com relação a μ por

$$\int_E f \ d\mu = \int f\chi_E \ d\mu.$$

Vejamos algumas propriedades elementares envolvendo a integral de funções mensuráveis não negativas.

Lema 1.3.2. *Sejam $f, g \in M^+(X, \eth)$. Então, são verdadeiros os seguintes itens:*

a) *Se $f \leq g$, temos que*

$$\int f \ d\mu \leq \int g \ d\mu;$$

b) *Se $E, F \cancel{\subset} \eth$, com $E \subset F$, temos que*

$\in$

$$\int_E f \ d\mu \leq \int_F f \ d\mu.$$

Demonstração. Vejamos como proceder em cada um dos intens apresentados.

a) Note que se φ é uma função simples em M^+, então

$$0 \leq \varphi \leq f \Longrightarrow 0 \leq \varphi \leq g.$$

Assim, podemos escrever

$$\int f \ d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \ simples \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \ d\mu \leq \sup_{\substack{0 \leq \psi \leq g \\ \psi \ simples \\ \psi \in M^+}} \int \psi \ d\mu = \int g \ d\mu.$$

b) Como $f\chi_E \leq f\chi_F$ segue do item anterior que

$$\int f\chi_E \ d\mu \leq \int f\chi_F \ d\mu \Longrightarrow \int_E f \ d\mu \leq \int_F f \ d\mu.$$

$\square$

Um dos resultados mais importantes envolvendo convergência e integral está enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 1.3.1 (Teorema da Convergência Monótona). *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \eth)$ que converge para f, então*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

fn → f

sequencia monotona crescente

Demonstração. Como $f_n \to f$, com $(f_n) \subset M^+(X, \eth)$, temos, pelo Corolário 1.1.1, que $f \in M^+(X, \eth)$. Por $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, temos, pelo lema anterior item **a)**, que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desse modo,

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Agora, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ e φ uma função mensurável simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Considere

$$A_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\} = \{x \in X : [f_n - \alpha\varphi](x) \geq 0\} \in \eth,$$

tal que $A_n \in \eth$ (pois, f e φ são mensuráveis), $A_n \subseteq A_{n+1}$ (já que, $f_n \leq f_{n+1}$) e $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (pois, $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0,1)$ e $0 \leq \varphi \leq f$). De acordo com o lema anterior,

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \tag{1.13}$$

Assim, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X, segue dos Lemas 1.3.1 **c)** e 1.2.2 **a)**, que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$

De fato, como a aplicação

$$\lambda(A_n) = \int \varphi\chi_{A_n} d\mu, \quad A_n \in \eth,$$

é uma medida (segue do Lema 1.3.1 **c)**), temos novamente, pelo Lema 1.2.2 **a)**, que

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi\chi_{(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)} d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(An)$$

$$= \lim \int \varphi\chi_{A_n} d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$

Por outro lado, fazendo $n \to \infty$ em (1.13), obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu. \tag{1.14}$$

Como, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha < 1$, (1.14) é válida, obtemos

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu,$$

e por φ ser uma função simples arbitrária em M^+ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$ temos que

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Portanto, chegamos a

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

□

Vejamos agora mais algumas propriedades elementares envolvendo a integral de funções mensuráveis não nagativas. Estas seguem de simples aplicações do teorema da convergência monótona.

Corolário 1.3.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) Se $f \in M^+$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^+$ e

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu;$$

mesma coisa que nas funções simples

b) Se $f, g \in M^+$, então $f + g \in M^+$ e

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração. a) Se $c = 0$ o resultado é imediato. Sejam $c > 0$ e (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em M^+ convergindo para f em X (veja o Lema 1.1.5). Então, $(c\varphi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para cf. Pelo Lema 1.3.1 **a)** e pelo teorema da convergência monótona, temos que

$$\int cf d\mu = \lim \int c\varphi_n d\mu = c \lim \int \varphi_n d\mu = c \int f d\mu.$$

$\left\{\begin{array}{l}\varphi_n \to f \\ \psi_n \to g\end{array}\right. \Rightarrow \varphi_n + \psi_n \to f+g$

$\varphi_n \le \varphi_{n+1}$, $\psi_n \le \psi_{n+1} \Rightarrow \varphi_n + \psi_n \le \varphi_{n+1} + \psi_{n+1}$

b) Sejam (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funções simples convergindo para f e g, respectivamente. Então, $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente convergindo para $f+g$. Pelo Lema 1.3.1 a) e pelo teorema da convergência monótona, obtemos

$$\begin{aligned}\int (f+g)d\mu &= \lim \int (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \lim \int \varphi_n d\mu + \lim \int \psi_n d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

□

Um resultado importante envolvendo limite inferior e integral está enunciado e provado abaixo.

Lema 1.3.3 (Lema de Fatou). *Se* $(f_n) \subset M^+(X, \mathfrak{F})$, *então*

$$\boxed{\int (\liminf f_n) d\mu \le \liminf \int f_n d\mu.}$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$, onde $g_m \le f_n$, para todo $m \le n$. Assim,

$$\int g_m d\mu \le \int f_n d\mu, \quad \forall m \le n.$$

Desse modo,

$$\int g_m d\mu \le \liminf \int f_n d\mu.$$

Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para $\liminf f_n$. Portanto, pelo teorema da convergência monótona, podemos escrever

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \le \liminf \int f_n d\mu.$$

□

Vejamos agora como criar uma medida através da integral de uma função mensurável não negativa.

Corolário 1.3.2. *Se* $f \in M^+$ *e* λ *é uma aplicação, definida por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathfrak{F},$$

função fixa

então λ *é uma medida.*

Demonstração. Observe que:

i) Se $E = \emptyset$, então

$$\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f\chi_{\emptyset} d\mu = 0.$$

ii) Como $f \geq 0$, temos que $\lambda(E) \geq 0$.

iii) Sejam (E_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathfrak{F}$ e $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Considere f_n definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, pelo Corolário 1.3.1 b) e por indução, temos que

$$\int f_n d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim f_n &= \lim \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k} \\ &= f\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} = f\chi_{E}, \end{aligned}$$

desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos dijuntos.

Por fim, sendo (f_n) é uma sequência crescente em M^+ convergindo para $f\chi_E$, o teorema da convergência monótona implica que

$$\lambda(E) = \int f\chi_E d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).$$

Portanto, λ é uma medida. □

Abaixo, mostramos que a integral de uma função mensurável não negativa é zero se, e somente se, a função é identicamente nula, a menos de um conjunto de medida nula.

Corolário 1.3.3. *Suponha que $f \in M^+$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,* $\int f d\mu = 0$.

$f(x) = 0$ qtp de X

$f(x) \neq 0$ $\forall x \in N$ com $\mu(N) = 0$

Demonstração. Suponha que $\int f d\mu = 0$ e considere que

$$E_n = \left\{ x \in X : f(x) > \frac{1}{n} \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$f(x) \geq 0 = \frac{1}{n}\chi_{E_n}(x),\ x \notin E_n$

$f(x) > \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\chi_{E_n}(x),\ x \in E_n$

de modo que $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} = \frac{1}{n}\int \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0.$$

Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note também que

$$E := \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

pois

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : x \in E_{n_0} \implies f(x) > \frac{1}{n_0} > 0 \implies x \in E.$$

Reciprocamente, se $x \in E$, temos $f(x) > 0$. Pela propriedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \implies \frac{1}{n_0} < f(x) \implies x \in E_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Logo, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Desse modo, pelo Lema 1.2.2 a), inferimos que

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0,$$

desde que (E_n) é uma sequência claramente crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$ em quase toda parte (pois, $\mu(\{x \in X; f(x) > 0\}) = 0$).

Agora, assuma que $f(x) = 0$ em quase toda parte. Se $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Assim, considerando $f_n = n\chi_E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f \leq \liminf f_n$, e pelo Lema de Fatou, chegamos a

$$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = \liminf n\mu(E) = 0.$$

Por fim, $\int f d\mu = 0$. □

Vejamos o motivo pelo qual a integral de uma função mensurável não negativa é uma função absolutamente contínua.

Corolário 1.3.4. *Suponha que $f \in M^+$, e defina a aplicação*

fixando

$$\begin{aligned} \lambda : \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto \lambda(E) = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua com relação a μ no sentido de que se $E \in \eth$ e $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$.

$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases} \Rightarrow f\chi_E(x) = 0, \forall x \in E$ com $\mu(E)=0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, para $E \in \eth$, então $f\chi_E$ é nula em quase toda parte. Pelo Corolário 1.3.3, temos que

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = 0.$$

Portanto, $\lambda(E) = 0$.

$f\chi_E = 0$ qtp $\Rightarrow \int f\chi_E = 0$

□

A seguir, apresentamos uma versão mais geral do teorema da convergência monótona.

Corolário 1.3.5. *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \eth)$ que converge em quase toda parte de X para a função $f \in M^+(X, \eth)$, então*

↳ $f_n \to f$ em $M = N^c$ com $\mu(N) = 0$

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

$f_n \to f$ qtp em X

Demonstração. Seja $N \in \eth$ tal que $\mu(N) = 0$. Suponha que (f_n) converge para f em todos os pontos de $M = \mathcal{C}(N)$. Então, a sequência $(f_n\chi_M)$ converge para $f\chi_M$, e pelo teorema da convergência monótona, temos que

$$\int f\chi_M d\mu = \lim \int f_n\chi_M d\mu.$$

Como $\mu(N) = 0$, as funções $f\chi_N$ e $f_n\chi_N$ são nulas em quase em quase toda parte. Assim, pelo Corolário 1.3.3, segue que

$$\int f\chi_N d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \int f_n\chi_N = 0.$$

Por outro lado, $f = f\chi_M + f\chi_N$ e $f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f\chi_M d\mu = \lim \int f_n\chi_M d\mu = \lim \int f_n\chi_M d\mu + \lim \int f_n\chi_N d\mu \\ &= \lim \left(\int f_n\chi_M d\mu + \int f_n\chi_N d\mu \right) = \lim \int [f_n\chi_M + f_n\chi_N] d\mu = \lim \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

□

Apresentamos quais são as condições para que o sinal de uma série possa "passar"pelo da integral.

Corolário 1.3.6. *Seja (g_n) uma sequência em M^+. Então,*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \dots + g_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (f_n) é uma sequência crescente (pois, $g_n \geq 0$) que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$, temos, pelo teorema da convergência monótona, que

$$\lim \int \left(\sum_{n=1}^{m} g_n \right) d\mu = \lim \int f_m d\mu = \int f d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in M^+$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do Corolário 1.3.1*b*) e da indução, que

$$\lim \int \left(\sum_{n=1}^{m} g_n \right) d\mu = \lim \sum_{n=1}^{m} \int g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

Portanto, chegamos a

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

$f^+ = \max\{f(x), 0\}$

$f^- = -\min\{f(x), 0\} = \max\{-f(x), 0\}$

□

Agora, estamos prontos para definir a integral de uma função mensurável qualquer.

Definição 1.3.4. A coleção de funções integráveis $L = L(X, \eth, \mu)$ consiste de todas as funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que as partes positiva f^+ e negativa f^- de f tem integrais finitas com relação a μ. Neste caso, definimos a integral de f com relação a μ por

$f = f^+ - f^-$

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

f é mensurável mas não necessariamente não negativa

Se $E \in \eth$, definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Qualquer outra representação de f como subtração de funções mensuráveis não negativas integráveis nos leva ao mesmo valor da integral definida através das partes positiva e negativa de f. A verificação desta afirmação é dada na próxima observação.

Observação 1.3.2. Se f é integrável e $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções mensuráveis não negativas com integrais finitas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

De fato, note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \Longrightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

para integrar uma função f qualquer basta decompor como uma subtração de funções em M^+ (não necessariamente f^+ e f^-)

Assim, pelo Corolário 1.3.1*b*), segue que

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Como as integrais das funções f^+, f^-, f_1 e f_2 são finitas, temos que

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Desse modo,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

A seguir, mostramos como é conceituada a integral indefinida neste contexto.

$(X, \eth, \mu)$

Lema 1.3.4. *Seja $f \in L$. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} \lambda : \eth &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longrightarrow \lambda(E) = \int_E f d\mu \end{aligned}$$

é uma carga, sendo esta denominada integral indefinida de f (com relação a μ.)

$f \in L \Rightarrow f \in M^+$ $M^+(X, \eth)$

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+$ temos, pelo Corolário 1.3.2, que as funções λ^+ e λ^- definidas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \text{ e } \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu, \quad \forall E \in \eth,$$

são medidas em $\eth$ e são finitas (pois, $f \in L$). Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, temos que λ é uma carga. □

Observação 1.3.3. Como a aplicação λ, definida no Lema 1.3.4, é uma carga, temos que se (E_n) é uma sequência disjunta em $\eth$ e $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, então

λ é carga

$$\int_E f d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Assim, inferimos que

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Vejamos uma propriedade elementar envolvendo a integral de funções mensuráveis.

$L(X, \mathfrak{F}, \mu)$ é o conjunto de $f: X \to \mathbb{R}$ mensuráveis que as integrais $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ são finitas

$\to L(X, \mathfrak{F}, \mu)$

Teorema 1.3.2. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, $f \in L$ se, e somente se, $|f| \in L$. Neste caso,*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu.$$

$f \in L \Rightarrow \int f^+ d\mu < \infty$ e $\int f^- d\mu < \infty$

Demonstração. Por definição, se $f \in L$ então $f^+, f^- \in M^+$ e suas integrais são finitas. Observe que

mostremos que $\int |f|^+ d\mu$ e $\int |f|^- d\mu$ são finitas

$|f| = f^+ + f^- \geq 0$

$\Rightarrow |f|^+ = |f|$; $|f|^- = 0$

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0. \tag{1.15}$$

Desse modo, pelo Lema 1.3.2 $b)$ e pelo Corolário 1.3.1 $b)$ temos que as integrais de $|f|^+$ e $|f|^-$ são finitas, ou seja, $|f| \in L$.

$\int |f|^+ d\mu = \int f^+ + f^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty.$

Reciprocamente, se $|f| \in L$, então, aplicando (1.15) e o fato que $f^+, f^- \leq f^+ + f^-$ segue do Lema 1.3.2 $a)$ e do Corolário 1.3.1 $b)$ que $f \in L$. Para finalizar, observe que

$\int |f|^- d\mu = 0 < \infty$

$\underbrace{f^+}_{\geq 0} + \underbrace{f^-}_{\geq 0}$

$\int f^+ d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$

$\int f^- d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu\right| &= \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \left|\underbrace{\int f^+ d\mu}_{\geq 0}\right| + \left|\underbrace{\int f^- d\mu}_{\geq 0}\right| \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int f d\mu.\end{aligned}$$

pode "sair" do modulo

□

Como consequência imediata do Lema 1.3.2 $a)$ e do Teorema 1.3.2, podemos escrever o seguinte resultado.

$g \in L$

$f \in L(X, \mathfrak{F}, \mu)$

Corolário 1.3.7. *Se f é mensurável, g é integrável, e $|f| \leq |g|$, então f é integrável e $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.*

precisa ter int $< \infty$

Demonstração. Como g é integrável, então, pelo Teorema 1.3.2, temos que $|g|$ também é integrável. Sabendo que $|f| \leq |g|$, podemos conlcuir, do Lema 1.3.2 $a)$, que $|f|$ é integrável. Novamente aplicando o Teorema 1.3.2, inferimos que f é integrável. Essa última desigualdade também nos permite deduzir, através do Lema 1.3.2 $a)$, que $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.. □

$|f| \leq |g| \Rightarrow \int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu < \infty$

$\Rightarrow \int f d\mu < \int |f| d\mu < \infty$

Agora, podemos afirmar mais algumas propriedades elementares envolvendo funções integráveis.

Teorema 1.3.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f, g \in L$, então $\alpha f, f + g \in L$. Além disso,*

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu \text{ e } \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

antes estavamos considerando $c > 0$

generalizando os resultados anteriores para funções mensuraveis quaisquer

Demonstração. Se $\alpha = 0$, então $\alpha f = 0$ em toda parte e

$$\int \alpha f d\mu = 0 = \alpha \int f d\mu.$$ OK

Se $\alpha > 0$, então $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Logo, chegamos a

$$\int \alpha f d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) = \alpha \int f d\mu.$$

pois $f^+, f^- \in M^+$

Se $\alpha < 0$ a demonstração é $\boxed{\text{análoga.}}$?

mas nas outras o escalar é >0. já foi provado

$f, g \in L \Leftrightarrow |f|, |g| \in L$

Agora, sejam $f, g \in L$, então, pelo Teorema 1.3.2, $|f|, |g| \in L$. Como $|f + g| \le |f| + |g|$, temos, pelos Corolários 1.3.1 e 1.3.7, que $f + g \in L$. Além disso, por $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, onde as funções $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são integráveis não negativas, segue, da Observação 1.3.2, que

$$\int (f+g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu.$$

$\int |f+g| d\mu \le \int |f| + |g| d\mu < \infty$

Pelo Corolário 1.3.1 *b*) e reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \int (f+g) d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

obs: $f, g \in L \Rightarrow \int (f-g) d\mu = \int (f + (-g)) d\mu = \int f d\mu + \int (-g) d\mu = \int f d\mu - \int g d\mu$

□

Agora estamos aptos a enunciar e provar um dos teoremas mais importantes envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

$\boxed{f_n \in L}$

muito importante

Teorema 1.3.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \le g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$\boxed{f_n \to f \text{ qtp em } X}$

em quase toda parte

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

$\int \lim f_n d\mu$

a integral sobre conjunto de medida nula é 0.

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos supor que a convergência ocorre em todo X. Sendo assim,

$$\lim |f_n| \le g \Longrightarrow |f| \le g.$$

$\Rightarrow |f|$ é integrável

Como, por hipótese, f é mensurável e g é integrável segue, do Corolário 1.3.7, que f é integrável.

$f = \lim f_n$

mensurável

$|f| \in L \Rightarrow f \in L$

$g + f_n \geq 0$

$|f_n| \leq g \Rightarrow -g \leq f_n \leq g$

Além disso, como $g + f_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois, $|f_n| \leq g$), temos, pelo Lema 1.3.3 e pelo Teorema 1.3.2, que

provamos $<\infty$

$g + \lim f_n = \lim (g+f_n) = \liminf (g+f_n)$

$$
\begin{aligned}
\cancel{\int g d\mu} + \int f d\mu &= \int (g+f) d\mu \\
&\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu \\
&= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\
&= \cancel{\int g d\mu} + \liminf \int f_n d\mu,
\end{aligned}
$$

$<\infty$ hipótese

lema de Fatou

implicando em

de forma análoga

$$
\boxed{\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.} \tag{1.16}
$$

Por outro lado, como $g - f_n \geq 0$ (pois $|f_n| \leq g$), utilizando novamente o Lema 1.3.3 e o Teorema 1.3.2, obtemos

$g - \lim f_n = \lim (g - f_n) = \liminf (g - f_n)$

$$
\begin{aligned}
\int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g-f) d\mu \\
&\leq \liminf \int (g - f_n) d\mu \\
&= \liminf \left(\int g d\mu - \int f_n d\mu \right) \\
&= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu.
\end{aligned}
$$

Lema de Fatou

Logo,

$$
\liminf \int f_n d\mu \leq \boxed{\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.} \leq \liminf \int f_n d\mu \tag{1.17}
$$

Pelas desigualdades (1.16) e (1.17), concluímos que

$$
\boxed{\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu,}
$$

$\limsup x_n \leq x \leq \liminf x_n$

$\Rightarrow x_n \to x.$

e assim finalizamos a prova desse teorema. □

A partir de agora, trabalharemos com uma função $f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, onde assumiremos que a aplicação $x \longmapsto f(x, t)$ é mensurável, para cada $t \in [a, b]$.

Corolário 1.3.8. *Suponha que, para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos*

$$f(x, t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} f(x, t), \quad (f: X \times [a,b] \to \mathbb{R})$$

para cada $x \in X$, e que existe uma função integrável g em X tal que

→ não depende de t

$$|f(x, t)| \leq g(x), \quad \forall x \in X, t \in [a, b]. \quad (g: X \to \mathbb{R})$$

Então,

$$\left(\int \lim_{t \to t_0} f(x,t) d\mu(x) = \right) \int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x). = \int \lim_{t \to 0} f(x,t) d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0. Considere a sequência (f_n) definida por $f_n(x) = f(x, t_n)$, para $x \in X$. Então, como

→ mensurável pois é

$$|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in X,$$

com g integrável, segue, do teorema da convergência dominada, que

$$\begin{aligned}
\int f(x, t_0) d\mu(x) &= \int \lim_{t \longrightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) = \int \lim f(x, t_n) d\mu(x) \\
&= \int \lim f_n(x) d\mu(x) = \lim \int f_n(x) d\mu(x) \\
&= \lim \int f(x, t_n) d\mu(x) \cancel{= \lim_{t \longrightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x),}
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\lim_{t \to t_0} \int f(x,t) d\mu(x)$ existe e $\lim_{t \to t_0} \int f(x,t) d\mu(x) = \int f(x,t_0) d\mu(x)$.

~~concluindo a prova desse corolário.~~ □

Uma consequência imediata do corolário acima está enunciada logo abaixo.

Corolário 1.3.9. *Se a aplicação $t \longmapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$, para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável g em X tal que*

$$|f(x, t)| \leq g(x), \quad \forall x \in X, t \in [a, b],$$

então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x), \quad \forall t \in [a, b],$$

é contínua.

contínua na 2ª variável

Demonstração. Este resultado é uma simples reformulação do Corolário 1.3.8. □

$|f(x,t)| \leq g(x)$ com $g \in L$; $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \lim_{t \to t_0} \int f(x,t) d\mu(x) = \int f(x,t_0) d\mu(x) = F(t_0), \quad t_0 \in [a,b].$$

$\Updownarrow$

F é contínua em t_0!

Corolário 1.3.10. *Suponha que para algum $t_0 \in [a,b]$, a função $x \longmapsto f(x,t_0)$ seja integrável em X, que $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existe em $X \times [a,b]$, e que existe uma função integrável g em X tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| < g(x), \quad \forall x \in X, t \in [a,b].$$

Então, a função F definida por

$$F(t) = \int f(x,t)d\mu(x), \quad \forall t \in [a,b],$$

é diferenciável em $[a,b]$ e

$= \lim_{s \to t} \frac{F(s)-F(t)}{s-t}$

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x), \quad \forall t \in [a,b].$$

Demonstração. Sejam $t \in [a,b]$ e (t_n) uma sequência em $[a,b]$ que converge para t, onde $t_n \neq t$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\left(\lim_{s \to t} \frac{f(x,s)-f(x,t)}{s-t}\right) \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}, \quad \forall x \in X,$$

↗ f é mensurável na 1ª variável!

e desse modo, a função $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ é mensurável, por ser o limite de funções mensuráveis.

Agora, seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_1 entre t_0 e t tal que

$$f(x,t) - f(x,t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1)(t - t_0), \quad \forall x \in X.$$

Dessa forma, chegamos a

hipótese! $\in \mathcal{L}$ hipótese! $\in \mathcal{L}$ ↗ cont. com relação a x!

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= \left|f(x,t_0) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1)(t-t_0)\right| \\ &\leq |f(x,t_0)| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1)\right| |t - t_0| \leq |f(x,t_0)| + g(x)\,|t-t_0| \end{aligned}$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \longmapsto |f(x,t_0)| + |(t-t_0)| \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1)\right|$ é integrável (pois, $f(x,t_0)$ e $g(x)$ são integráveis), temos, pelo Corolário 1.3.7, que f é integrável, para cada $t \in [a,b]$. Por outro lado,

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\| \qquad \qquad \qquad \|$$

$$\frac{\int f(x,t_n)\,d\mu(x) - \int f(x,t)\,d\mu(x)}{t_n - t}$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$t_n \to t$ existe!

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n - t} \right| = \left| \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \right| \;=\; \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \;<\; g(x),$$

para todo $x \in X$. Consequentemente,

$$\left| \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \right| < g(x), \quad \forall n \text{ grande.}$$

Pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(t) \;&=\; \lim_{t_n \to t} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \;=\; \lim \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x) \\
&=\; \int \lim \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x) \;=\; \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu(x),
\end{aligned}$$

$t_n \to t$

e assim concluímos a prova desse corolário. □

1.4 Espaços L^p

Nesta seção, introduziremos o conceito e algumas propriedades dos espaços $L^p(X)$ (X é um espaço de medida). Em adição, abordaremos temas tais como: as desigualdades de Hölder, Minkowski e Chebyshev; como também, apresentaremos a identidade de Interpolação e como integrar através do uso das coordenadas polares.

Fixaremos um espaço de medida $(X, \eth, \mu)$ em toda esta seção.

Permita-nos começar com a definição dos espaços $L^p(X)$.

Definição 1.4.1. Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço L^p por

$$L^p = L^p(X, \eth, \mu) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável } e \ \|f\|_p < \infty \}.$$

Aqui, para $1 \leq p < \infty$, temos

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, estabelecemos a seguinte igualdade:

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{ a \geq 0; \mu(\{x; |f(x)| > a\}) = 0 \},$$