
CONTEÚDO

1	Espaços de Sobolev	3
1.1	Preliminares	3
1.2	Motivação	7
1.3	Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	7
1.4	Aproximações	18
1.5	Extensões	32
1.6	Traços	37
1.7	Desigualdades de Sobolev	42
1.7.1	Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev	42
1.7.2	Desigualdade de Morrey	48
1.7.3	Desigualdades gerais de Sobolev	52
1.8	Compacidade	55
2	Algumas aplicações dos Espaços de Sobolev	61
2.1	Preliminares	61
2.1.1	Desigualdades	61
2.1.2	Transformada de Fourier	62
2.1.3	Semigrupo do calor	63
2.1.4	Notação	65
2.2	Propriedades das soluções de Leray	66
2.2.1	Introdução e contexto histórico	66
2.2.2	Resultados	67
2.3	Problema de Dirichlet	83

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev e suas principais propriedades elementares.

Vale ressaltar que, quando necessário, consideramos que as funções $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas de forma que sejam nulas em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Quando trabalhamos com desigualdades, mesmo se o valor da constante c mudar, ainda continuaremos denotando-a por c , então por exemplo $c^3 + 2^p$, $c(1 + n)$, etc, ainda serão denotados por c .

1.1 Preliminares

Antes de começarmos de fato o estudo dos espaços de Sobolev, precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo.

Definição 1.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Além disso, se $\text{supp } \varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp } \varphi$; então¹, $(\text{supp } \varphi)^c \subseteq \{x \in \Omega; \varphi(x) = 0\}$. Ou seja, se $x \notin \text{supp } \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Por outro lado, $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega$, então, $\Omega^c \subseteq (\text{supp } \varphi)^c$. Se Ω é aberto, então $\partial\Omega \subseteq \Omega^c$. Portanto, se Ω é aberto, φ se anula em $\partial\Omega$, já que

$$\partial\Omega \subseteq \Omega^c \subseteq (\text{supp } \varphi)^c \subseteq \{x \in \Omega; \varphi(x) = 0\}.$$

Definição 1.2. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . O espaço $\mathcal{C}^k(\Omega)$ é composto por todas funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em que suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k também são contínuas. Se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, dizemos que f é de classe \mathcal{C}^k .

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega).$$

A definição abaixo será amplamente utilizada nesse capítulo.

¹Utilizamos a notação X^c para o complementar do conjunto X .

Definição 1.3. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua ; supp } f \text{ é compacto}\}.$$

Além disso, definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega),$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k com suporte compacto.

Nesse texto, quanto não estiver explicito o contrário, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Definição 1.4 (Espaços \mathcal{L}^p e \mathcal{L}^∞). O espaço $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, é composto pelas funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

O espaço $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ é composto pelas funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis e limitadas em quase toda parte em Ω , e definimos sua norma por

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in \Omega\} = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } \Omega\}.$$

Definição 1.5. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$.

Os resultados abaixo são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev e podem ser encontrados, em sua maioria, em um curso introdutório de medida e integração de Lebesgue (ver [3, 4, 9]).

Teorema 1.6 (Teorema da Convergência Dominada). Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [4], p.p. 44. □

Teorema 1.7. O espaço $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach.²

Demonstração. Ver [4], p.p. 59 ($1 \leq p < \infty$) e p.p. 61 ($p = \infty$). □

Teorema 1.8 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$, e $q \in \mathbb{R}$ é tal que p e q são expoentes conjugados³. Então, $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [4], p.p. 56. □

²Espaço vetorial normado completo, i.e., toda sequência de Cauchy é convergente.

³ p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Uma generalização desse resultado será apresentada abaixo.

Teorema 1.9 (Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam $0 < p_1, \dots, p_N \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \dots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}(\Omega)$, para todo $j = 1, \dots, N$. Então, $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_N\|_{\mathcal{L}^{p_N}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1], p.p. 25. □

Teorema 1.10 (Desigualdade de Young). Sejam $A, B \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

Demonstração. Ver [4], p.p. 56 □

Teorema 1.11. Se Ω é limitado e, $1 \leq p < q \leq \infty$. Então, $\mathcal{L}^q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)},$$

para toda $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ e $c > 0$ é uma constante que depende de p , q e Ω . Além disso, se $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, tem-se que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)},$$

quando $p \rightarrow \infty$.

Demonstração. Ver [1], p.p. 28. □

Teorema 1.12 (Desigualdade de Interpolação). Sejam $0 < p < q < r \leq \infty$. Então $\mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^r(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^\theta \|f\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)}^{1-\theta},$$

para toda $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, onde $\theta \in (0, 1)$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r} \quad \left(\text{i.e., } \theta = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \right).$$

Demonstração. Ver [9], p.p. 185. □

Teorema 1.13. O espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(\Omega)$ é denso em $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1], p.p. 31. □

Teorema 1.14 (Integração por partes em \mathbb{R}^n). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Então,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta para fora em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [7], p.p. 628. □

Teorema 1.15 (Coordenadas polares em \mathbb{R}^n). Seja $f : B(y, s) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, então

$$\int_{B(y,s)} f \, dx = \int_0^s \int_{\partial B(y,r)} f \, dS \, dr,$$

onde $B(y, s)$ é a bola aberta de raio $s > 0$ e centrada em y .

Demonstração. Ver [9], p.p. 78. □

Teorema 1.16. Seja $(u_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, para alguma função $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Então, existem uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(u_n)_{n=1}^\infty$ e uma função $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tais que

- (a) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ qtp⁴ em Ω ;
- (b) $|u_{n_k}(x)| \leq v(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, qtp em Ω .

Demonstração. Ver [5], p.p. 94. □

Teorema 1.17 (Critério de compacidade de Arzelà-Ascoli). Seja (u_k) uma sequência de funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} tal que

$$|u_k(x)| \leq M,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $M > 0$ é uma constante e (u_k) é uniformemente equicontínua⁵. Então, existem uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ e uma função contínua u tal que $u_{k_j} \rightarrow u$, quando $j \rightarrow \infty$, uniformemente em conjuntos compactos de \mathbb{R}^n .

Demonstração. Ver [9], p.p. 137. □

Teorema 1.18 (Teorema de Fubini). Sejam $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu)$ e $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \nu)$ espaços de medida. Então, se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, a igualdade abaixo é válida:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu \times d\nu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\nu \right) d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu \right) d\nu.$$

Demonstração. Ver [9], p.p. 68. □

Uma outra forma de enunciar o Teorema de Fubini é a seguinte.

Teorema 1.19. Sejam $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, dX = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f \, dy \, dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f \, dx \, dy.$$

Essa versão do Teorema de Fubini é provada para integrais de Riemann, porém como em alguns casos as integrais de Riemann e Lebesgue coincidem, essas versões são equivalentes.

⁴Duas funções u e v são ditas iguais em quase toda parte (qtp) se $u(x) = v(x)$ para todo $x \in X$, onde X^c tem medida nula.

Teorema 1.20 (Mudança de variáveis). Seja $\Psi : A \rightarrow B$ um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n . Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é integrável sobre B se, e somente se, $(f \circ \Psi)|\det D\Psi|$ é integrável sobre A . Neste caso,

$$\int_B f \, dx = \int_A (f \circ \Psi)|\det D\Psi| \, dy.$$

Demonstração. O capítulo 4 de [19] é destinado a demonstração desse teorema. \square

1.2 Motivação

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema acima é uma função $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo (1.1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (1.1) por uma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx + \int_\Omega u \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx.$$

Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.14), a primeira integral acima pode ser reescrita como

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \, dx = - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, dS - \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \right).$$

Mas, como ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, inferimos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega u \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx, \quad (1.2)$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ ⁶. Observe agora que, não precisamos mais que u seja de classe C^2 já que a segunda derivada de u não é utilizada em (1.2). Na verdade, não precisamos nem que u seja contínua, apenas integrável em Ω . Na Seção 2.3, voltaremos a essa motivação para mostrar que para qualquer função $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca para (1.1). Essa solução é uma função que pertence ao espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (esse e outros espaços e suas propriedades serão estudadas ao longo desse trabalho).

1.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é generalizar a noção de derivada para funções que não são diferenciáveis em um aberto Ω do \mathbb{R}^n e explorar algumas propriedades elementares.

⁶Nomenclatura: ϕ é chamada função teste.



Figura 1.1: Sergei Lvovich Sobolev (1908 – 1989)

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.14), temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu_i dS - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, como foi mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto, a expressão acima se torna

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad (1.3)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Ademais, se agora u for de classe \mathcal{C}^k em Ω , com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u dx. \quad (1.4)$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

e podemos aplicar (1.3) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (1.4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe \mathcal{C}^k . Note que o lado esquerdo de (1.4) está bem definido se $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$. O problema é que se u não é necessariamente uma função de classe \mathcal{C}^k então, o lado direito de (1.4) não está bem definido. Para resolver isso, perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tal que (1.4) é válida quando substituímos $D^\alpha u$ por v .

Essa pergunta motiva a definição abaixo.

Definição 1.21 (Derivada fraca). Sejam $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , denotada por

$$v = D^\alpha u,$$

dado que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u dx, \quad (1.5)$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (1.5) para toda ϕ função teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (1.5), então u não possui a α -ésima derivada parcial fraca.

Observação: Aqui, utilizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue (utilizando a medida de Lebesgue), suas integrais coincidem.

Agora, vejamos alguns exemplos sobre a derivada fraca.

Exemplo 1.22. A função $u : \Omega = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases} \quad (1.6)$$

não é diferenciável no sentido usual, já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h} = 1,$$

mas

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{h} = 0.$$

Porém, u possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi \Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim,

$$\int_0^2 u\phi' dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) = - \int_0^1 \phi dx.$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral para obter

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \left(\int_0^1 1\phi dx + \int_1^2 0\phi dx \right) = - \int_0^2 v\phi dx.$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 1.23. A função $u : \Omega = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 2, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possui derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto significa que não existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = - \int_{\Omega} v\phi dx,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com efeito, suponha, por absurdo, que existe tal v . Deste modo,

$$- \int_0^2 v\phi dx = \int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + 2 \int_1^2 \phi' dx = - \int_0^1 \phi dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leq \phi_n \leq 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v \phi_n dx - \int_0^1 \phi_n dx \right] = 0,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), pois $\phi_n \rightarrow 0$ qtp em Ω , quando $n \rightarrow \infty$ e $|\phi_n(x)| \leq 1$, para todo $x \in \Omega$ e $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Portanto, u não possui derivada fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é sobre sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 1.24. Sejam $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Então,

$$\int_{\Omega} u \phi = 0,$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω .

Demonstração. Ver [5], p.p. 110. □

Com o lema acima em mente, temos todas as ferramentas para mostrar a unicidade da derivada fraca.

Proposição 1.25. Seja α um multi-índice. Se v e \tilde{v} são ambas α -ésimas derivadas parciais fracas de uma função u . Então,

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx \text{ e } \int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com isso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi dx = 0,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Logo, pelo Lema 1.24, chegamos a

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto, $v = \tilde{v}$ qtp em Ω . □

Vejamos um exemplo prático da Proposição 1.25.

Exemplo 1.26. Considere a função u do Exemplo 1.22, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

é a derivada de u (dada em 1.6) no sentido fraco. Porém, a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{se } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca de u . A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, todavia v e \tilde{v} são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato,

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1; \\ 0, & \text{se } x \neq 1, \end{cases}$$

Portanto, é verdade que

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2),$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.⁷

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 1.27. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega); D^{e_i} u \in \mathcal{L}^p(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \dots, n\},$$

onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ é o vetor com 1 na i -ésima cordenada e 0 caso contrário.

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $k \in \mathbb{N}$, indutivamente, e pela derivada fraca.

Definição 1.28. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq n$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Ou, de outra forma,

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1 \right\},$$

onde $D^\alpha u$ é a α -ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Definimos também o espaço $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega); D^\alpha u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert⁸, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)},$$

onde

$$\langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

No próximo capítulo, estudaremos algumas aplicações dos espaços de Sobolev, e os espaços $H^k(\Omega)$ serão utilizados.

⁷Todo conjunto enumerável (em particular finito) tem medida (de Lebesgue) nula.

⁸Espaço vetorial com produto interno completo.

Definição 1.29. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω , isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \Subset \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Isso será feito após o Teorema 1.31 sobre as propriedades da derivada fraca, que são necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Um outro espaço importante é o espaço $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ ($H_0^k(\Omega)$ se $p = 2$) que é definido como o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Ou seja, dada uma função em $u \in \mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$, existe uma sequência (u_n) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$. O Teorema 1.42 mostra uma equivalência para as funções nesse espaço.

Observação: Essa não é a única forma de definir uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo, à norma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

com $1 \leq p < \infty$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é equivalente a

$$\max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

O próximo exemplo ilustra um caso em que uma função pode ou não possuir derivada fraca dependendo da dimensão n do espaço Euclidiano e do expoente de integração p .

Exemplo 1.30. Seja $\Omega = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \|x\|^{-\alpha}, \quad (1.7)$$

onde $\alpha > 0$. Queremos verificar para quais valores de $\alpha > 0$, n e p a função u pertence ao espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de 0 com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{\|x\|^{\alpha+2}} \quad (x \neq 0),$$

logo, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{\|x\|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{\|x\|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq 0),$$

segue que

$$\|Du(x)\| = \frac{|\alpha|}{\|x\|^{\alpha+1}} \quad (x \neq 0).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes (ver Teorema 1.14), temos que

$$\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS, \quad (1.8)$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ denota o vetor normal unitário que aponta para fora em $\partial B[0, \varepsilon]$ (bola fechada de raio $\varepsilon > 0$ centrada na origem). Agora se $\alpha + 1 < n$, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando $\|Du\|$ sobre Ω , concluímos que

$$\int_{\Omega} \|Du\| dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dx.$$

Transformando em coordenadas polares (ver Teorema 1.15), conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma:

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dx = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr,$$

onde a integral de superfície acima, é igual a área da esfera n -dimensional de raio r dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1},$$

onde Γ é a função gama (ver [2] para mais detalhes), a qual, por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n)r^{n-1}$. Dessa forma, chegamos a

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2} dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que, se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim, deduzimos que

$$\int_{\Omega} \|Du\| dx < \infty \iff \alpha + 1 < n.$$

Portanto, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso, inferimos, por (1.7), que

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| |\phi| |\nu_i| dS \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha} dS,$$

pois $|\nu_i| \leq \|\nu\| = 1$. Essa última integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq c \varepsilon^{n-1-\alpha} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, por (1.8), deduzimos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n - 1$.

Além disso, $\|Du\| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha + 1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular, $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geq n$.

Agora, vamos explorar as propriedades elementares das derivadas fracas.

Teorema 1.31 (Propriedades da derivada fraca). Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leq |\alpha| \leq k$. Então,

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$;

(b) $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$;

(c) **(Linearidade)** para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se que $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v;$$

(d) se Ω' é um aberto de Ω , então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$;

(e) **(Regra de Leibniz)** se $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u, \quad (1.9)$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha - \sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leq \alpha$ significa $\sigma_j \leq \alpha_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ (a demonstração para $D^\alpha D^\beta u$ é análoga). Com efeito, é verdade que

$$\int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Note que a última igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável e D^α e D^β serem derivadas parciais usuais. Dessa forma $D^\beta D^\alpha \phi = D^{\alpha+\beta} \phi$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$\int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto, $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^\alpha u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β , com $|\beta| \leq k - |\alpha|$, tal que $D^\beta(D^\alpha u) \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta} u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^\gamma u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leq k$ e, como $|\beta| \leq k - |\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leq k$ (para $\gamma = \alpha + \beta$). Portanto, $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_{\Omega} (\lambda u + v) D^\alpha \phi \, dx = \int_{\Omega} \lambda u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \lambda \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas últimas integrais acima, obtemos

$$\lambda \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \lambda (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha v \, dx = \int_{\Omega} (\lambda D^\alpha u + D^\alpha v) \phi \, dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Portanto, $D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega' \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega'} |u|^p dx \text{ e } \int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p dx$$

são finitas, para todo α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. De fato, é verdade que

$$\int_{\Omega'} |u|^p dx \leq \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty,$$

e

$$\int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx < \infty,$$

para todo α multi-índice com $|\alpha| \leq k$, ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$.

(e) Para mostrar que (1.9) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$.

Com efeito, para $|\alpha| = 1$, como $\eta, \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$D^\alpha(\eta\phi) = \phi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \phi.$$

Dessa forma,

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} u D^\alpha(\eta\phi) - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx.$$

Como η e ϕ têm suporte compacto, então $\eta\phi$ também tem. De fato, é fácil ver que

$$\{x \in \Omega; \eta(x)\phi(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in \Omega; \eta(x) \neq 0\} \cap \{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\},$$

o que implica em

$$\text{supp}(\eta\phi) \subseteq \text{supp} \eta \cap \text{supp} \phi.$$

Portanto $\text{supp}(\eta\phi)$ é compacto, desde que $\text{supp} \eta$ e $\text{supp} \phi$ também sejam. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral do lado direito da igualdade acima, chegamos a

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = - \int_{\Omega} \eta \phi D^\alpha u dx - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx = - \int_{\Omega} (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta) \phi dx.$$

Portanto, $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$ como queríamos mostrar.

Agora seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < k$ e suponha que (1.9) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$ e toda função teste η . Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m + 1$. Então, α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Deste modo, podemos escrever por (a) que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^{\beta+\gamma} \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^\beta (D^\gamma \phi) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^\beta(\eta u) D^\gamma \phi dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^\beta(\eta u)$ e a definição da γ -ésima derivada fraca. Assim, por (c), deduzimos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma (\eta D^{\beta-\sigma} u) \right] \phi dx.$$

Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} (D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u) \right] \phi dx, \quad (1.10)$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{\gamma \leq \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u,$$

o qual ainda pode ser expandido em quatro somatórios como abaixo:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\beta < \rho \leq \alpha} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u \\ + \sum_{0 \leq \sigma < \gamma} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Porém, note que $0 \leq \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leq \sigma$ significa que $0 \leq \sigma_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $j = 1, \dots, n$ tal que $\sigma_j < \gamma_j$. Como $|\gamma| = 1$, suponha, sem perda de generalidade, que $\gamma = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dessa forma, para $j = 1$, concluímos que $0 \leq \sigma_1 < 1$. Como $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \dots, n$, vale $0 \leq \sigma_i < 0$, que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma, $\beta < \rho \leq \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (1.11) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^\alpha \eta. \quad (1.12)$$

Por fim, a menos de uma mudança de variáveis, escrevemos (1.12) como

$$\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a igualdade (1.10), temos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx,$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Portanto, inferimos que

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

como queríamos mostrar. □

Com os resultados obtidos, agora é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach. Começemos verificando que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.32. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Inicialmente, considere que $1 \leq p < \infty$.

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Com isso, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff D^\alpha u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α . Sendo assim, $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Sendo assim, pelo Teorema 1.31, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(\lambda u)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\lambda D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = |\lambda|^p \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ Pelos Teoremas 1.7 e 1.31, segue que

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$.

Para o caso $p = \infty$, a demonstração é análoga.

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Com isso, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = 0 \iff \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = 0 \iff D^\alpha u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α . Sendo assim, $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Sendo assim, pelos Teoremas 1.7, 1.31, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(\lambda u)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\lambda D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \\ &= |\lambda| \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 1.31, segue que

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. □

Agora, mostremos a completude do espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.33. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$, é completo.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$. Note que, se $1 \leq p < \infty$, tem-se

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p < \varepsilon^p,$$

e se $p = \infty$,

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Ou seja, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, para cada α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Lembrando que $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço completo (ver Teorema 1.7), podemos escrever

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega). \quad (1.13)$$

Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$, denotamos $D^\alpha u_n$ por u_n e u_α por u . Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema 1.16, utilizando a definição de derivada fraca e passando a uma subsequência (se necessário), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx &= \int_{\Omega} (\lim u_n) D^\alpha \phi \, dx = \lim \int_{\Omega} u_n D^\alpha \phi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \lim D^\alpha u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi \, dx, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Portanto, $D^\alpha u = u_\alpha$. Por fim, se $1 \leq p < \infty$,

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \rightarrow 0,$$

e se $p = \infty$,

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$ por (1.13). Consequentemente, $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, com $1 \leq p \leq \infty$. \square

1.4 Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos, não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora. Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados e exemplos da teoria de aproximação, que é de extrema importância no estudo de equações diferenciais parciais.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1; \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (1.14)$$

conhecida como molificador de Friedrich, onde $c > 0$ é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1.$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função η de classe \mathcal{C}^∞ com suporte compacto satisfazendo:

- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1;$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon) = \delta(x)$, onde δ é a função delta de Dirac⁹.

Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (1.15)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Essa função η_ε é de classe \mathcal{C}^∞ , $\text{supp } \eta_\varepsilon \subseteq B[0, \varepsilon]$ e, por mudança de variáveis

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1. \quad (1.16)$$

Essa aplicação será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se u é uma função localmente integrável, definimos a molificação de u por $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, isto é,

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy = \int_{B[0, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(y) u(x-y) \, dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propriedades importantes sobre essas aproximações.

Teorema 1.34 (Aproximação local por funções suaves). Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ em } \Omega_\varepsilon,$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então,

- (a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$;
- (b) $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

⁹i.e., $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0. \end{cases}$

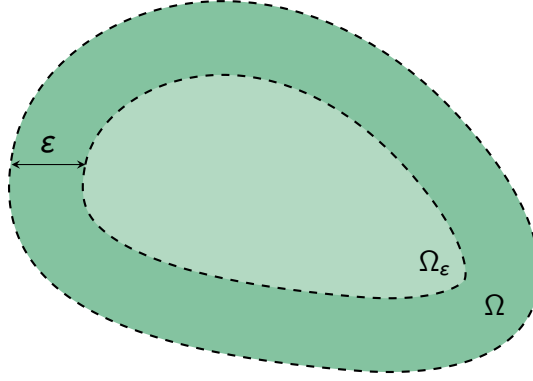


Figura 1.2: Representação visual dos conjuntos Ω_ε .
Fonte: Autoral.

Demonstração.

(a) Seja $g(x) = (x - y)/\varepsilon$. Logo, pela regra da cadeia, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [\eta_\varepsilon(x - y)] &= \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial x_i} [\eta \circ g(x)] = \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Por outro lado, sejam $x \in \Omega_\varepsilon$, $i = 1, \dots, n$ e h de forma que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Deste modo,

$$\frac{u^\varepsilon(x + he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] u(y) dy. \quad (1.18)$$

Novamente utilizando a regra da cadeia e (1.17), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] &= \frac{\varepsilon^n}{h} \left[\eta_\varepsilon(x - y + he_i) - \eta_\varepsilon(x - y) \right] \\ &\rightarrow \varepsilon^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

quando $h \rightarrow 0$. Consequentemente, por (1.17), (1.18), (1.19) e pelo Teorema da convergência dominada (ver Teorema 1.6), temos que

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) u(y) dy = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) u(y) dy = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} * u(x).$$

Sendo assim, indutivamente, podemos mostrar que $D^\alpha u^\varepsilon$ existe e

$$D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u,$$

para todo multi-índice α . O fato de u^ε ser de classe \mathcal{C}^∞ segue do fato de η_ε ser de classe \mathcal{C}^∞ (por definição) e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

(b) Afirmamos que a α -ésima derivada parcial de u^ε no sentido usual é igual a convolução de η_ε com a α -ésima derivada parcial fraca de u para todo α com $|\alpha| \leq k$, isto é,

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Com efeito, no item (a) vimos que $D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u$. Primeiramente, se $g(x) = x - y$, pela regra da cadeia, temos que

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_\varepsilon \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_k}(x - y) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y).$$

Por outro lado, se $h(y) = x - y$, obtemos, pela regra da cadeia novamente, que

$$D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial y_i} (\eta_\varepsilon \circ h)(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_k}(x - y) \frac{\partial h_k}{\partial y_i}(y) = -\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x - y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação, chegamos a

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = -D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y).$$

Repetindo esse cálculo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x - y).$$

Deste modo, podemos escrever

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) u(y) dy.$$

Fixando $x \in \Omega_\varepsilon$, a função $\phi_x(y) = \eta_\varepsilon(x - y)$ é suave e tem suporte compacto em Ω . Aplicando a definição de derivada fraca com função teste $\eta_\varepsilon(x - y)$, segue que

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y) D^\alpha u(y) dy = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y) D^\alpha u(y) dy.$$

Portanto, deduzimos que

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u = [D^\alpha u]^\varepsilon. \quad (1.20)$$

Além disso, afirmamos que dados abertos V, W tais que $V \Subset W \Subset \Omega$, uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, inferimos

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}. \quad (1.21)$$

Com efeito, se $p = 1$, note que

$$|v^\varepsilon(x)| = \left| \int_{B[x, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) v(y) dy \right| \leq \int_{B[x, \varepsilon]} |\eta_\varepsilon(x - y)| |v(y)| dy.$$

Integrando sobre V e utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.18), concluímos que

$$\int_V |v^\varepsilon(x)| dx \leq \int_V \int_{B[x, \varepsilon]} |v(y)| |\eta_\varepsilon(x - y)| dy dx \leq \int_W |v(y)| \int_{B[y, \varepsilon]} |\eta_\varepsilon(x - y)| dx dy.$$

Porém, $\int_{B[y, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) dx = 1$ (ver 1.16); sendo assim, obtemos

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^1(W)}.$$

Se $1 < p < \infty$, observe que

$$|v^\varepsilon(x)| = \left| \int_{B[x, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x - y) v(y) dy \right| \leq \int_{B[x, \varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x - y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x - y) v(y) \right| dy. \quad (1.22)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8) na última integral acima, segue que

$$\int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) v(y) \right| dy \leq \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.23)$$

Lembrando que, $\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dy = 1$ (ver 1.16), integrando as desigualdades (1.22) e (1.23) sobre V e utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.18), obtemos

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|^p dx \leq \int_V \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy dx \leq \int_W |v(y)|^p \int_{B[y,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dx dy.$$

Isto é,

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Isto prova 1.21.

Por fim, seja $V \Subset \Omega$ um aberto. Afirmamos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ em } \mathcal{L}^p(V), \quad (1.24)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. De fato, sejam W um aberto de forma que $V \Subset W \Subset \Omega$ e $\delta > 0$. Utilizando (1.21) com $v^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$ e $v = D^\alpha u$, e escolhendo $w \in \mathcal{C}(W)$ tal que

$$\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} < \delta,$$

(ver Teorema 1.13), temos que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} &\leq \|D^\alpha u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leq \|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(W)} \\ &\leq 2\delta + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)}, \end{aligned}$$

para todo α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Como $w \in \mathcal{C}(W)$, então $w^\varepsilon \rightarrow w$ uniformemente¹⁰ em V quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, $D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$ em $\mathcal{L}^p(V)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo α multi-índice com $|\alpha| \leq k$ (basta utilizar o Teorema da Convergência Dominada). Dessa forma,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}^p \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(V)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo $V \Subset \Omega$. Isto é,

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Agora, apresentaremos dois exemplos em que podemos visualizar essas aproximações graficamente.

Exemplo 1.35. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável no sentido usual. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, dada uma função teste $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega u \phi' dx = \int_{-1}^1 u \phi' dx = \int_{-1}^0 u \phi' dx + \int_0^1 u \phi' dx.$$

¹⁰Uma sequência de funções (w_k) converge uniformemente para w , se, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ (que não pode depender de x) tal que

$$|w_k(x) - w(x)| < \varepsilon,$$

para todo x e $k > K$.

Utilizando integração por partes (ver Teorema 1.14), obtemos

$$\int_{\Omega} u \phi' dx = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx - x \phi \Big|_{-1}^0 + x \phi \Big|_0^1 = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx - \phi(-1) + \phi(1).$$

Porém, ϕ tem suporte compacto, logo; se anula em $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Dito isso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} u \phi' dx = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx = - \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x) \phi dx.$$

Portanto, é verdade que

$$u' = \operatorname{sgn}$$

no sentido fraco, onde

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Além disso, é verdade que

$$\int_{\Omega} |\operatorname{sgn}(x)|^p dx = \int_{-1}^1 1^p dx = \mu((-1, 1)) = 2 < \infty,$$

onde μ é a medida de Lebesgue (ver [3] para mais detalhes). Assim, $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e, portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Vamos utilizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u . Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

(ver Figura 1.4) onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta dx = 1,$$

isto é,

$$c = \left(\int_{[-1,1]} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx \right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor para calcular a constante c . Também, definimos a função molificadora $\eta_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_{\varepsilon} dx = 1 \text{ e } \operatorname{supp} \eta = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u . Com efeito, basta realizar a convolução $\eta_{\varepsilon} * u$, isto é,

$$u^{\varepsilon}(x) = \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x) u(x-y) dy.$$

A Figura 1.3 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ε .

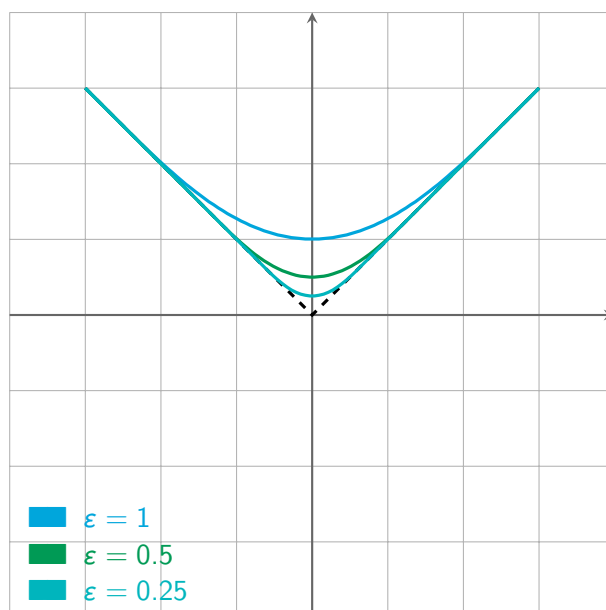


Figura 1.3: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ε com $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$.

Fonte: Autoral.

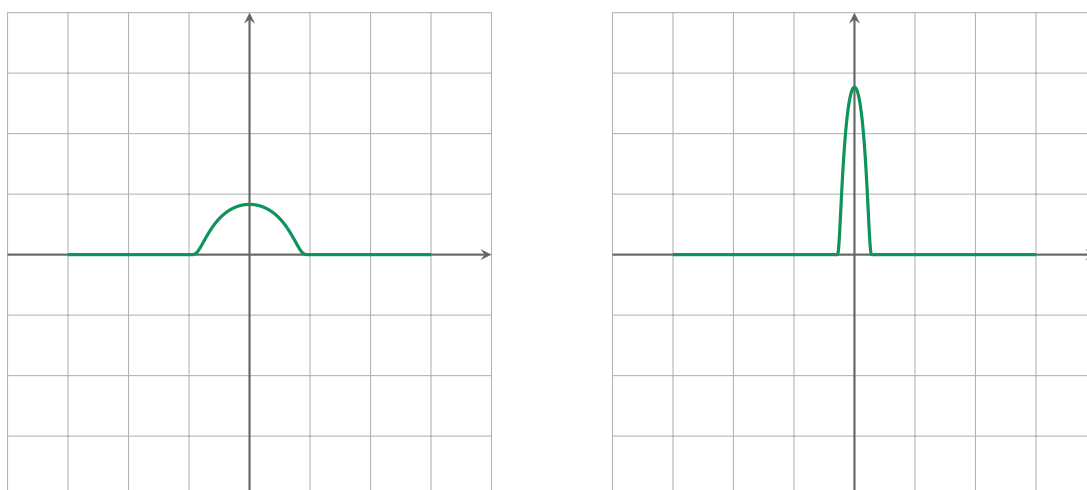


Figura 1.4: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$.

Fonte: Autoral.

Exemplo 1.36. Seja $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}},$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de $|\cdot|$ não ser diferenciável. Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, quando $0 < p < 2$, dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}},$$

para todo $i = 1, 2$. Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a i -ésima coordenada. Utilizando integração por partes (ver Teorema 1.14), obtemos

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i \, ds - \int_{\Omega} \phi D^{e_i} u \, dx, \quad (1.25)$$

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário que aponta para fora em $\partial\Omega$. Para calcular $D^{e_i} u$ precisamos dividir o domínio Ω em Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 e Ω_4 , onde Ω_i é a restrição ao i -ésimo quadrante (ver Figura 1.5).

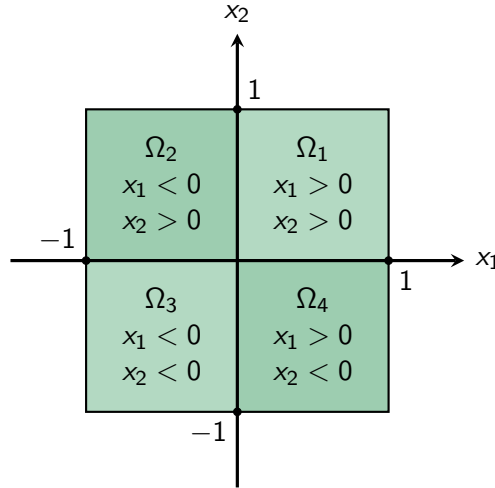


Figura 1.5: Domínio da função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$.
Fonte: Autoral.

Note que, podemos escrever

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_1; \\ (-x_1)^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_2; \\ (-x_1)^{\frac{1}{2}} + (-x_2)^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_3; \\ x_1^{\frac{1}{2}} + (-x_2)^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_4. \end{cases} \quad (1.26)$$

Além disso, em cada Ω_i , a derivada parcial $D^{e_1} u$ existe no sentido usual, e é dada por

$$D^{e_1} u(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_1; \\ -\frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_2; \\ -\frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_3; \\ \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_4. \end{cases} \quad (1.27)$$

Dito isso, concluímos que

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_1} u \, dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_2} \frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_3} \frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx,$$

que podemos escrever como

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_1} u \, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x_1) |x_1|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx.$$

De forma análoga, inferimos que

$$D^{e_2} u(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_1; \\ \frac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_2; \\ -\frac{1}{2} (-x_2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_3; \\ -\frac{1}{2} (-x_2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_4. \end{cases} \quad (1.28)$$

Sendo assim, deduzimos que

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_2} u \, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \frac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \frac{1}{2} (-x_2)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x_2) |x_2|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx.$$

Por fim, como ϕ tem suporte compacto em Ω (e Ω é aberto), ϕ se anula em $\partial\Omega$. Dessa forma, inferimos que

$$\int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i \, ds = 0.$$

Portanto, por (1.25), chegamos a

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi \, dx = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx,$$

para todo $i = 1, 2$. Isto é,

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}},$$

para todo $i = 1, 2$, como queríamos mostrar. Além disso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} |D^{e_i} u(x_1, x_2)|^p \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \right|^p \, dx_i \, dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i \, dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.18), encontramos

$$\int_{\Omega} |D^{e_i} u(x_1, x_2)|^p \, dx = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 dx_j \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i.$$

Dito isso, precisamos ver para quais valores de p essa integral é finita. Sendo assim

$$\int_{\Omega} |D^{e_i} u(x_1, x_2)|^p \, dx = \frac{1}{2^{p-2}} \int_0^1 x_i^{-\frac{p}{2}} \, dx = \frac{1}{2^{p-2}} \left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2} - 1} \right] = \frac{1}{2^{p-2} \left(1 - \frac{p}{2}\right)}.$$

Note que, a igualdade acima está bem definida quando $p < 2$. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \text{se } \|x\| < 1; \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

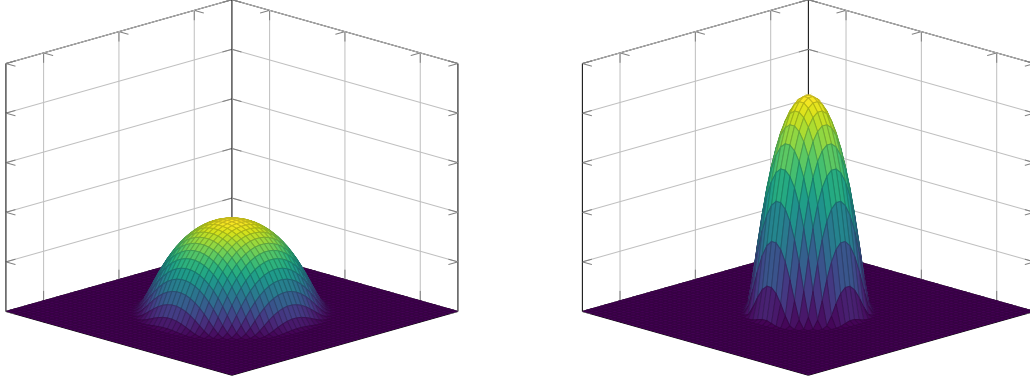


Figura 1.6: η e η_ε com $\varepsilon = 0.5$.
Fonte: Autoral.

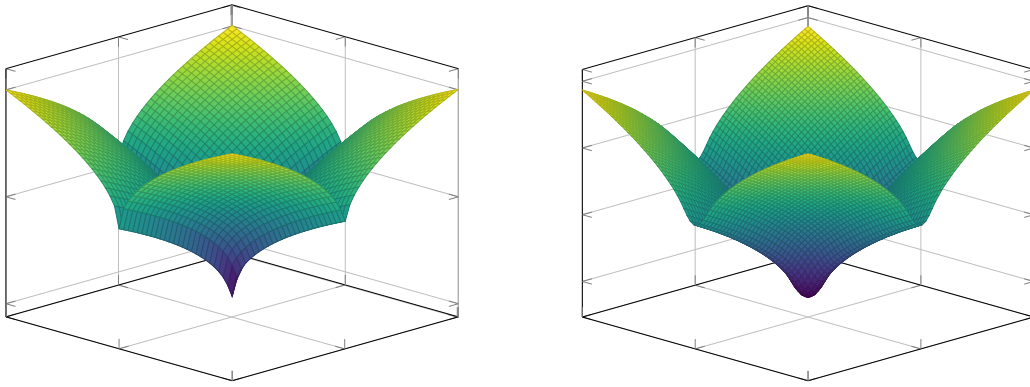


Figura 1.7: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^ε com $\varepsilon = 0.25$.
Fonte: Autoral.

(ver Figura 1.6) e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u , dada por

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2) dy.$$

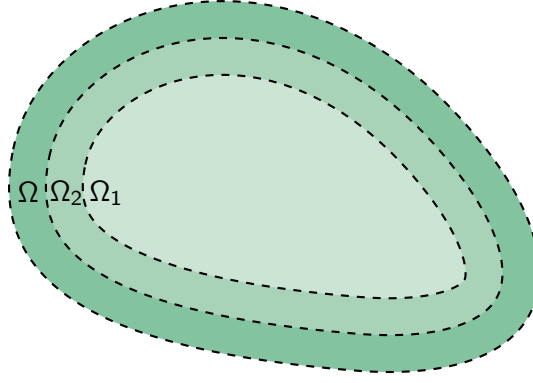
Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε . A Figura 1.7 mostra o gráfico de u , onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε .

Agora, mostraremos que $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ é um conjunto denso em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, sempre que

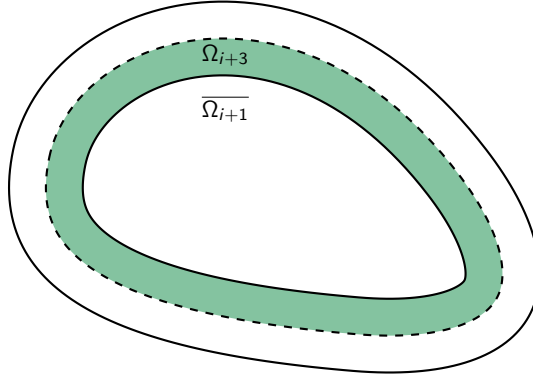
Teorema 1.37 (Meyers-Serrin). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega),$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Figura 1.8: Representação visual dos conjuntos Ω_i .

Fonte: Autoral.

Figura 1.9: Representação visual (em azul) dos conjuntos Ω'_i .

Fonte: Autoral.

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \quad (1.29)$$

onde $\Omega_i = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$ (ver Figura 1.8). De fato, se $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, então $x \in \Omega_{i_0}$ para algum $i_0 \in \mathbb{N}$, em particular, $x \in \Omega$ pois $\Omega_i \subseteq \Omega$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $x \in \Omega$, então $d(x, \partial\Omega) > 0$ (pois $\partial\Omega$ é fechado e $x \notin \partial\Omega$), então existe algum $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i_0}$; logo, $x \in \Omega_{i_0}$. Dessa forma, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Portanto, vale (1.29).

Defina $\Omega'_i = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$ (ver Figura 1.9). Além disso, escolha qualquer aberto $\Omega'_0 \Subset \Omega$ de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega'_i$$

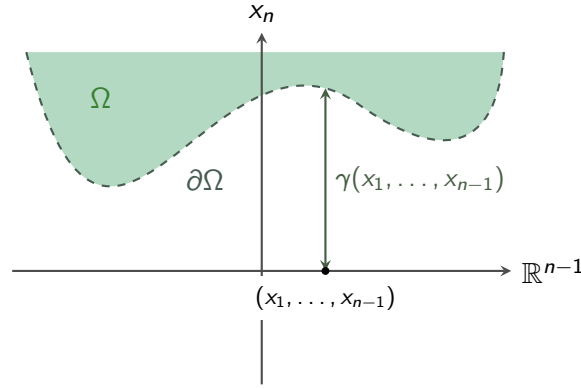
e seja $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade suave subordinada à cobertura aberta¹¹ $\{\Omega'_i\}_{i=0}^{\infty}$, isto é,

$$0 \leq \phi_i \leq 1 \text{ com } \phi_i \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega'_i) \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = 1 \text{ em } \Omega.$$

Como, por hipótese, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, temos, pelo Teorema 1.31, que

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

¹¹i.e., Uma cobertura de um conjunto X é uma família $\{Y_{\lambda}\}_{\lambda \in L}$, tal que $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} Y_{\lambda}$. $\{Y_{\lambda}\}$ é dita uma cobertura aberta se Y_{λ} é aberto para todo $\lambda \in L$.

Figura 1.10: Função γ da Definição 1.38.

Fonte: Autoral. Baseada em [7] p.p. 626.

Além disso, $\text{supp}(\phi_i u) \subseteq \Omega'_i$. Fixando $\delta > 0$, escolha um $\varepsilon_i > 0$ de forma que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e } \text{supp } u^i \subseteq \Omega''_i,$$

(ver Teorema 1.34), com $\Omega''_i = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega}_i \supseteq \Omega'_i$.

Seja $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Como

$$u = u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^n \phi_i u,$$

então, para cada $V \Subset \Omega$, inferimos que

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \frac{\delta}{2}.$$

Passando ao supremo sobre os conjuntos $V \Subset \Omega$, obtemos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Isto mostra que u pertence ao fecho de $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Logo é equivalente a existir uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$. \square

A definição abaixo é necessária para o próximo resultado de densidade.

Definição 1.38. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que sua fronteira $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^k se para cada ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ existe um raio $r > 0$ e uma função de classe \mathcal{C}^k $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r] ; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^∞ se é de classe \mathcal{C}^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Com essa definição, conseguimos mostrar que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

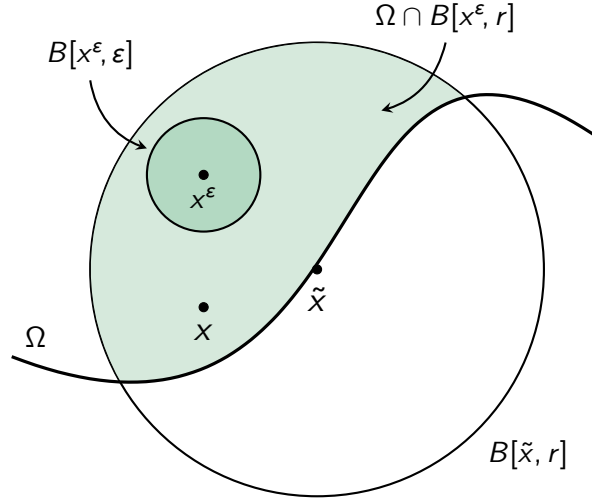


Figura 1.11: Fonte: Autoral. Baseada em [7] p.p. 253

Teorema 1.39. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega),$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$, como Ω tem fronteira de classe \mathcal{C}^1 , existe um raio $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 tal que

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r] ; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}. \quad (1.30)$$

Definimos $V = \Omega \cap B[\tilde{x}, r/2]$ (ver Figura 1.11). Além disso, definimos para cada $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $x \in V$

$$x^\varepsilon = x + \lambda \varepsilon e_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda \varepsilon), \quad (1.31)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Observe que, para um $\lambda > 0$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a bola $B[x^\varepsilon, \varepsilon]$ está contida em $\Omega \cap B[\tilde{x}, r]$ para todo $x \in V$. De fato, por definição, dado $x \in V$ temos que $x \in \Omega$ e $\|x - \tilde{x}\| \leq r/2$. Note que $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ suficientemente grande. Com efeito, como $x \in V$, então, $x \in \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$, por 1.30. Assim,

$$x_n^\varepsilon = x_n + \lambda \varepsilon > x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

e, por (1.31), deduzimos que

$$\|x^\varepsilon - \tilde{x}\| = \|x + \lambda \varepsilon e_n - \tilde{x}\| \leq \|x - \tilde{x}\| + \|\lambda \varepsilon e_n\| \leq \frac{r}{2} + \lambda \varepsilon < r,$$

fornece que $0 < \varepsilon < r/2\lambda$. Logo, $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (pois Ω é aberto e $x \in \Omega$). Por isso, $B[x^\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário (já que $\Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ é aberto).

Agora, definimos $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$, para todo $x \in V$, e $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Assim, pelo Teorema 1.34, $v^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$ (lembre que $\lambda > 0$ é grande e $\varepsilon > 0$ é pequeno). Dito isso, afirmamos que

$$\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, seja α um multi-índice com $|\alpha| \leq k$, então

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}.$$

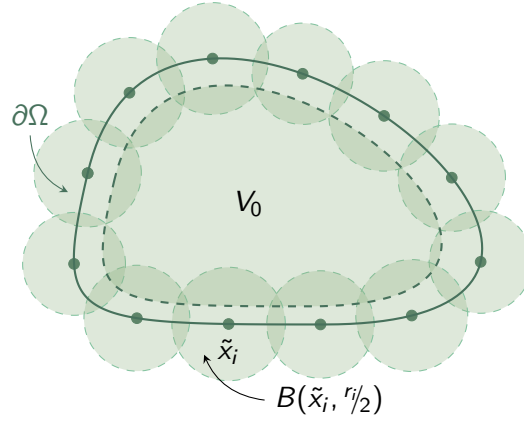


Figura 1.12: Representação visual dos conjuntos em (1.32). Note que $\{V_0\} \cup \{B(\tilde{x}_i, r_i/2)\}_{i=1}^N$ forma uma cobertura para Ω .

Fonte: Autoral.

A segunda norma do lado direito da desigualdade acima vai a 0, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pois a translação é contínua na norma do espaço \mathcal{L}^p e

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} = \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * u_\varepsilon) - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver Teorema 1.34). Ou seja, é verdade que

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Note que todos os cálculos foram feitos em uma vizinhança de um ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$. Dito isso, como $\partial\Omega$ é compacto (pois, Ω é limitado), pelo Teorema de Heine-Borel¹², podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, raios $r_i > 0$, conjuntos $V_i = \Omega \cap B[\tilde{x}_i, r_i/2]$ e funções v_i^ε , com $i = 1, \dots, N \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tilde{x}_i, r_i/2). \quad (1.32)$$

Além disso, considere um aberto $V_0 \Subset \Omega$ tal que $\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N V_i$ (ver Figura 1.12), e pelo Teorema 1.37, encontramos $v_0^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(V_0) \cap \mathcal{W}^{k,p}(V_0)$ com $\|v_0^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_0)} \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos $\{V_i\}_{i=0}^N$ em Ω . Defina

$$v^\varepsilon = \sum_{i=0}^N \phi_i v_i^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),$$

e observando que $u = \sum_{i=0}^N \phi_i u$ (pois $\sum_{i=0}^N \phi_i = 1$), obtemos

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i v_i^\varepsilon) - D^\alpha(\phi_i u)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

¹²Toda cobertura aberta de um conjunto compacto admite uma subcobertura finita.

Utilizando a regra de Leibniz (ver Teorema 1.31), segue que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i [D^{\alpha-\sigma} (v_i^\varepsilon - u)]\|_{\mathcal{L}^p(V_i)} \\ &\leq c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} (v_i^\varepsilon - u)\|_{\mathcal{L}^p(V_i)}, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de ϕ_i (e consequentemente $D^\sigma \phi_i$) ter suporte compacto e ser suave na última desigualdade acima. Ademais, como $|\alpha - \sigma| \leq k$, temos que

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \leq c \sum_{i=0}^N \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por fim, definindo $u_n := v_n^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, chegamos a

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, como era desejado. □

1.5 Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto específico. Nessa seção, veremos uma forma de estender funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para aplicações em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por meio de um operador linear.

Teorema 1.40. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então, existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, tem-se que

- (a) $Eu = u$ qtp em Ω ;
- (b) $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$;
- (c) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p , Ω e Ω' .

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e considere inicialmente que $\partial\Omega$ esteja contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Dessa forma, podemos supor que existe uma bola $B = B(\tilde{x}, r)$ tal que

$$\begin{aligned} B^+ &= B \cap \{x_n > 0\} \subseteq \overline{\Omega}; \\ B^- &= B \cap \{x_n \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned} \tag{1.33}$$

(ver Figura 1.13). Além disso, assuma que $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in B^+; \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}), & \text{se } x \in B^-, \end{cases} \tag{1.34}$$

a qual chamamos de reflexão de ordem superior da função u de B^+ a B^- . Afirmamos que $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$. Com efeito, denotando $u^- = \bar{u}|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}|_{B^+}$, podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \text{ em } \{x_n = 0\}.$$

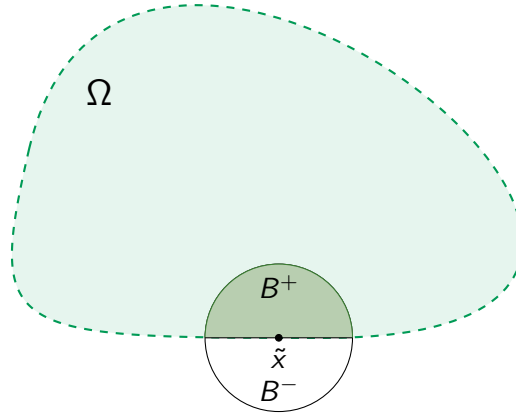


Figura 1.13: Representação visual de (1.33). Note que perto de \tilde{x} , a fronteira de Ω é plana.
Fonte: Autoral.

De fato, pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2}),$$

quando $x_n = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) &= 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &= \frac{\partial u^+}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Também é verdade que

$$u^+ = u^- \text{ e } \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \text{ em } \{x_n = 0\},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$ (ver 1.33). Portanto, $D^\alpha u^- = D^\alpha u^+$ em $\{x_n = 0\}$ com $|\alpha| \leq 1$. Sendo assim, $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$, pois fora de $\{x_n = 0\}$, as componentes de \bar{u} já eram de classe \mathcal{C}^∞ , então apenas restava verificar que em $B^+ \cap B^- = B \cap \{x_n = 0\}$ as componentes em B^+ e B^- se igualavam, implicando a continuidade \bar{u} e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

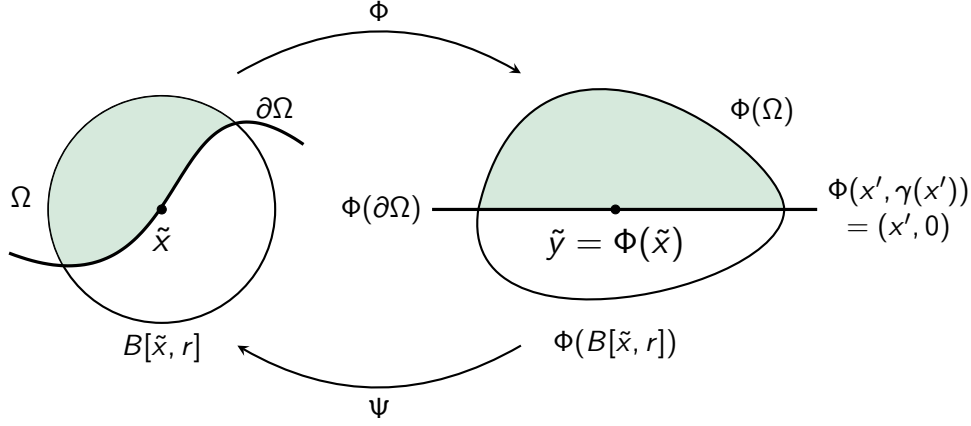
$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}, \quad (1.35)$$

onde c é uma constante positiva que não depende de u . De fato, sabemos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right].$$

Como $B = B^+ \cup B^-$, e denotando (x_1, \dots, x_{n-1}) por x' podemos reescrever o último somatório acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + \int_{B^-} |4D^\alpha[u(x', -\frac{x_n}{2})] - 3D^\alpha[u(x', -x_n)]|^p dx \right] \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + 3 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx + 4 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx \right], \end{aligned}$$

Figura 1.14: Representação gráfica do homomorfismo Φ .

Fonte: Autoral. Baseada em [7] p.p. 256.

onde usamos o fato de que

$$(a + b)^p \leq (2 \max\{a, b\})^p = 2^p \max\{a, b\}^p \leq 2^p (a^p + b^p),$$

para todo $a, b \geq 0$. Porém, $-x_n, -\frac{x_n}{2} \geq 0$ em B^- , então podemos considerar, através de uma mudança de variáveis ($y_i = x_i$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ e $y_n = -x_n$), que as integrais sobre B^- são integrais sobre B^+ , para encontrar

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p dx \right] = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}^p.$$

Portanto,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Por outro lado, se $\partial\Omega$ não está necessariamente contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} , temos que existe um homeomorfismo Φ , com inversa Ψ , que planifica $\partial\Omega$ perto de \tilde{x} (ver Figura 1.14), basta usar a função γ de classe \mathcal{C}^1 da Definição 1.38 e definir Φ por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})). \quad (1.36)$$

De forma análoga, definimos Ψ por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})). \quad (1.37)$$

Deste modo, é fácil ver que $\Psi^{-1} = \Phi$ e que Φ e Ψ são de classe \mathcal{C}^1 (por definição). Sendo assim, seja $y = \Phi(x)$ (ou seja, $x = \Psi(y)$) e definimos $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo, como foi feito anteriormente (u' é de classe \mathcal{C}^1), podemos escolher uma bola $B = B(\tilde{y}, r)$ e definimos \bar{u}' de forma que $\bar{u}' \in \mathcal{C}^1(B)$ e

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}. \quad (1.38)$$

Seja $B' = \Psi(B)$, assim conseguimos obter uma extensão \bar{u} de u para B' com

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para $\bar{u} \equiv \bar{u}' \circ \Phi$ (i.e., $\bar{u}' = \bar{u} \circ \Psi$), obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.20), que

$$\|D^\alpha \bar{u}'\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \int_B |D^\alpha \bar{u}'(y)|^p dy = \int_B |D^\alpha \bar{u}(\Psi(y))|^p dy = \int_{B'} |D^\alpha \bar{u}(x)|^p dx = \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(B')}^p.$$

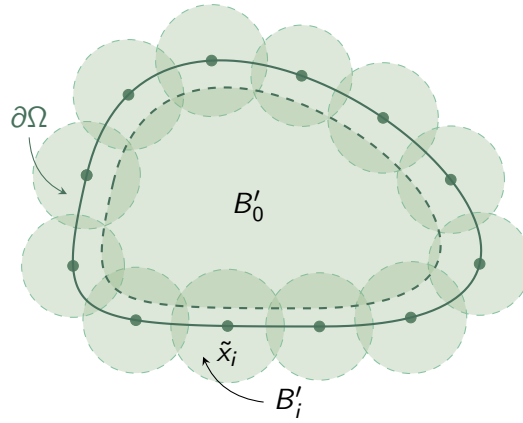


Figura 1.15: Representação visual dos conjuntos em (1.42). Note que $\{B'_i\}_{i=1}^N$ é uma cobertura finita para o conjunto Ω .

Fonte: Autoral.

Dessa forma, passando ao somatório, quando $|\alpha| \leq 1$, chegamos a

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')}. \quad (1.39)$$

Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u'\|_{\mathcal{L}^p(B^+)}^p &= \int_{B^+} |D^\alpha u'(y)|^p dy = \int_{B^+} |D^\alpha u(\Psi(y))|^p dy \\ &= \int_{\Psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx = \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq 1$. Consequentemente, podemos escrever

$$\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \quad (1.40)$$

Portanto, por (1.38), (1.39) e (1.40), obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} = \|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}, \quad (1.41)$$

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x \in \partial\Omega} B'_x$, onde B'_x é aberto para cada $x \in \partial\Omega$, pois $B'_x = \Psi(B(\tilde{y}, r))$, e a imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto. Pelo Teorema de Heine-Borel, existem pontos $x_i \in \partial\Omega$, abertos B'_i e extensões \bar{u}_i de u em B'_i , com $i = 1, \dots, N$, de forma que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B'_i$ (ver Figura 1.15). Por outro lado, considere um aberto $B'_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N B'_i. \quad (1.42)$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{B'_i\}_{i=0}^N$ e defina

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N \phi_i \bar{u}_i, \quad (1.43)$$

onde \bar{u}_i está associada a B'_i e $\bar{u}_0 = u$ (pois $\sum_{i=0}^N \phi_i = 1$). Deste modo, obtemos a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \quad (1.44)$$

Com efeito,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha (\phi_i \bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p,$$

Logo, utilizando a regra de Leibniz (ver Teorema 1.31), inferimos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Como $\text{supp } D^\sigma \phi_i \subseteq \text{supp } \phi_i \subseteq B'_i$, então o suporte de $D^\sigma \phi_i$ também é compacto (pois B'_i é limitado), sendo assim $\max |D^\sigma \phi_i|$ existe em B'_i . Portanto, vale a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(B'_i)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}^p,$$

onde c é uma constante que depende de B'_i . Por fim, utilizando (1.41) e o Teorema de Mudança de Variáveis (ver 1.20), chegamos a

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}^p \leq c \|u_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p,$$

onde c depende de B'_i , p e N . Portanto, deduzimos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \quad (1.45)$$

Isto prova (1.44).

Como, por hipótese, $\Omega \Subset \Omega'$, então $\text{supp } \bar{u} \subseteq \Omega'$, (pois $\text{supp } \phi_i \subseteq B'_i$), diminuindo B'_i se necessário. Defina também $\bar{E} : \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $\bar{E}u = \bar{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Temos que \bar{E} é linear, pois 1.34, se $x \in B^+$, temos que

$$\bar{E}(u + \lambda v)(x) = (\overline{u + \lambda v})(x) = (u + \lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) = \bar{u}(x) + \lambda \bar{v}(x).$$

Por outro lado, se $x \in B^-$

$$\begin{aligned} \bar{E}(u + \lambda v)(x) &= (\overline{u + \lambda v})(x) = -3(u + \lambda v)(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4(u + \lambda v)(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) \\ &= -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) \\ &\quad + \lambda [-3v(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4v(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})] \\ &= \bar{u}(x) + \lambda \bar{v}(x). \end{aligned}$$

Além disso, é válido que

$$\|\bar{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e $\text{supp } \bar{E}u = \text{supp } \bar{u} \subseteq \Omega'$. Sendo assim, definimos $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por

$$Eu = \lim \bar{u}_k,$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ que converge para u em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ (sabemos que essa sequência existe pois mostramos no Teorema 1.39 que $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$) e pela

linearidade do limite, E é linear. Podemos afirmar que o limite existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, já que, por (1.45), vale

$$\|\bar{u}_k - \bar{u}_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $k, \ell \rightarrow \infty$. Logo (\bar{u}_k) é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.33), deduzimos que $\lim \bar{u}_k$ existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned} \|Eu - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\bar{u}_k - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$, pois $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, quando $k \rightarrow \infty$ e $\bar{u}_k = u_k$ em Ω . Portanto, $Eu = u$ qtp em Ω , provando o item (a).

Para verificar o ítem (b), lembre que, por (1.45), $\text{supp } \bar{u}_k \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$, já que

$$\{\lim u_k = Eu \neq 0\} \subseteq \{\bar{u}_k \neq 0\} \implies \text{supp } Eu \subseteq \text{supp } \bar{u}_k \subseteq \Omega'$$

Por fim, para mostrar o item (c), note que E é um operador limitado, pois

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\lim \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \lim \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

□

1.6 Traços

Em alguns casos, no estudo de equações diferenciais parciais, é necessário impor condições de contorno na fronteira de um domínio. Para isso, precisamos entender o que significa restringir uma função em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ à fronteira de Ω . Nesta seção, veremos como isso pode ser feito por meio do operador traço.

Teorema 1.41. Seja Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então, existe um operador linear limitado $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que

- (a) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$;
- (b) $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde c depende apenas de p e Ω .

Demonstração. Inicialmente suponha que $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Da mesma forma que foi feito no Teorema 1.40, considere $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e suponhamos que $\partial\Omega$ está contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Sejam $B = B(\tilde{x}, r)$ (e defina B^+ e B^- como em (1.33)) e $\hat{B} = B(\tilde{x}, r/2)$, e considere $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$ de forma que $\xi \geq 0$ em B e $\xi \equiv 1$ em \hat{B} , e denote $\Gamma_{\tilde{x}} = \partial\Omega \cap \hat{B}$ (ver Figura 1.16) e $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.14), obtemos

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx = \int_{\partial B^+} \xi|u|^p \nu_n dx' - \int_{B^+} \xi|u|^p \frac{\partial}{\partial x_n} (1) = \int_{\partial B^+} \xi|u|^p \nu_n dx'$$

onde ν é o vetor normal unitário que aponta para baixo em ∂B^+ (pois, o pontos de ∂B^+ que não estão em $\partial\Omega$ estão em ∂B e, consequentemente, ξ os anula.), isto é $\nu = (0, \dots, 0, -1)$. Sendo assim, $\nu_n = -1$ e

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx = - \int_{\partial B^+} \xi|u|^p dx'.$$

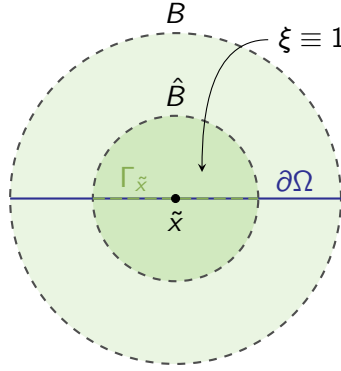


Figura 1.16

pois $\text{supp } \xi|u|^p \subseteq \text{sup } \xi \subseteq B$. Dessa forma, como $\Gamma_{\tilde{x}} \subseteq \hat{B}$ e $\xi(x) = 1$ para todo $x \in \hat{B}$, concluímos que

$$\int_{\Gamma_{\tilde{x}}} |u|^p dx' = \int_{\Gamma_{\tilde{x}}} \xi |u|^p dx' \leq \int_{\partial B^+} \xi |u|^p dx' = - \int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx.$$

Calculando a derivada acima, obtemos

$$\int_{\Gamma_{\tilde{x}}} |u|^p dx' \leq - \int_{B^+} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_n} |u|^p + p |u|^{p-1} \text{sgn } u \frac{\partial u}{\partial x_n} \xi \right] dx \leq c \int_{B^+} \left[|u|^p + |u|^{p-1} \|Du\| \right] dx,$$

onde utilizamos o fato de ξ e suas derivadas parciais terem suporte compacto para a última desigualdade. Por fim utilizando a Desigualdade de Young (ver Teorema 1.10), resulta em

$$\int_{\Gamma_{\tilde{x}}} |u|^p dx' \leq c \int_{B^+} \left[|u|^p + \frac{|u|^{(p-1)p'}}{p'} + \frac{\|Du\|^p}{p} \right] dx \leq c \int_{B^+} |u|^p + \|Du\|^p dx, \quad (1.46)$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Caso $\partial\Omega$ não esteja necessariamente contido em $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} , considere o homeomorfismo Φ com inversa Ψ da demonstração do Teorema 1.40 (ver (1.36) e (1.37)) e defina $u' \equiv u \circ \Psi$ (i.e., $u = u' \circ \Phi$). Logo, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.20), inferimos

$$\int_{\Gamma_{\tilde{x}}} |u'|^p dy' = \int_{\Gamma_{\tilde{x}}} |u \circ \Psi| dy' = \int_{\Psi(\Gamma_{\tilde{x}})} |u|^p dx'$$

e

$$\int_{B^+} [|u'(y)|^p + \|Du'(y)\|^p] dy \leq c \int_{\Psi(B^+)} [|u(x)|^p + \|Du(x)\|^p] dx,$$

onde c é uma constante que depende de γ que surge devido a regra da cadeia. Dessa forma, por (1.46) e pelo Teorema de Mudança de Variáveis (ver 1.20), podemos escrever

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_{\tilde{x}}))}^p &= \int_{\Psi(\Gamma_{\tilde{x}})} |u|^p dx' = \int_{\Gamma_{\tilde{x}}} |u'|^p dy' \leq c \int_{B^+} [|u'|^p + \|Du'\|^p] dy \\ &\leq c \int_{\Psi(B^+)} [|u|^p + \|Du\|^p] dx = \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Psi(B^+))}^p. \end{aligned}$$

Como $\Psi(B^+) \subseteq \Omega$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_{\tilde{x}}))} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{\tilde{x} \in \partial\Omega} \Psi(\Gamma_{\tilde{x}})$ (lembre que $\Gamma_{\tilde{x}}$ é um aberto em $\partial\Omega$ e que Ψ é um homeomorfismo), pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma quantidade finita de

abertos (em $\partial\Omega$) $\Psi(\Gamma_i)$ tal que,

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N \Psi(\Gamma_i)$$

e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_i))} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \quad (1.47)$$

Considere uma partição da unidade $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ subordinada a cobertura $\{\Psi(\Gamma_i)\}_{i=1}^N$, e note que $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$ (pois $\sum_{i=1}^N \phi_i = 1$).

Defina $\tilde{T} : \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por $\tilde{T}u = u|_{\partial\Omega}$. Observe, que por definição, T é linear. Dessa forma, podemos escrever, por (1.47), que

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}u\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}^p &= \int_{\partial\Omega} |\tilde{T}u|^p dx = \int_{\partial\Omega} |u|^p dx \leq c \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \phi_i^p |u|^p dx \\ &= c \sum_{i=1}^N \int_{\Psi(\Gamma_i)} |u|^p dx \\ &= c \sum_{i=1}^N \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_i))}^p \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p, \end{aligned} \quad (1.48)$$

onde c é uma constante que depende de p e Ω . Isto mostra que \tilde{T} é um operador limitado. Por fim, define $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por (1.48)

$$Tu = \lim \tilde{T}u_k \text{ em } \mathcal{L}^p(\partial\Omega),$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ que converge para u em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ (essa sequência existe pelo Teorema 1.39). Primeiramente, veja que T é linear por definição. Observe também que, por (1.48)

$$\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|\lim \tilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \lim \|\tilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Isto prova **(b)**.

Por fim, se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, então, pela demonstração do Teorema 1.39, temos que $u_k \rightarrow u$ uniformemente sobre $\bar{\Omega}$, quando $k \rightarrow \infty$. Por outro lado, como

$$\|u_k|_{\partial\Omega} - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|\tilde{T}u_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$, então passando a uma subsequência (se necessário), temos, pelo Teorema 1.16 que $u_k \rightarrow Tu$ qtp em $\partial\Omega$. Mas como $\partial\Omega \subseteq \bar{\Omega}$, segue que $Tu = u$ qtp em $\partial\Omega$ (por unicidade do limite), isto é, $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, provando o item **(a)**. \square

O teorema a seguir é uma caracterização do espaço de Sobolev $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, por meio do operador traço.

Teorema 1.42 (Funções traço zero em $\mathcal{W}^{1,p}$). Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então,

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por definição, existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Como u_k tem suporte compacto e é suave em Ω , então u_k se anula em $\partial\Omega$ (pois T é linear) para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $Tu_k = 0$ sobre $\partial\Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e como $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado, então

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}.$$

Portanto, $Tu = 0$ qtp sobre $\partial\Omega$.

Reciprocamente, suponha que $Tu = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando partições da unidade e o homeomorfismo Φ que planifica $\partial\Omega$, como foi feito anteriormente (ver (1.36)), podemos supor que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n); \\ u &\text{ tem suporte compacto em } \overline{\mathbb{R}_+^n}; \\ Tu &= 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned} \tag{1.49}$$

onde \mathbb{R}_+^n denota o semiplano superior de \mathbb{R}^n . Como $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ então existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \subseteq \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$, quando $k \rightarrow \infty$ (ver Teorema 1.39). Como $(u_k) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, então $Tu_k = u_k|_{\partial\mathbb{R}_+^n} = u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Assim, por (1.49) e usando que T é limitado, temos que

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\mathbb{R}^n)} = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \lim \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{1.50}$$

Isto é, $Tu_k = u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}} \rightarrow 0$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})$, quando $k \rightarrow \infty$.

Dito isso, seja $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geq 0$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever u_k da seguinte forma:

$$u_k(x', x_n) = u_k(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t) dt$$

e, consequentemente,

$$|u_k(x', x_n)|^p \leq c \left(|u_k(x', 0)|^p + \left(\int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t) \right| dt \right)^p \right),$$

onde a constante c depende de p (aqui, utilizamos a desigualdade $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$). Integrando ambos os lados sobre \mathbb{R}^{n-1} , obtemos

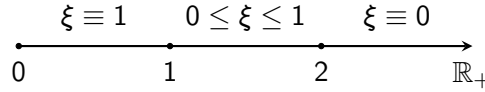
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p dx' &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\| dt \right)^p dx' \right) \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\|^p dt \right) \left(\int_0^{x_n} 1^{p'} dt \right)^{p/p'} dx' \right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Como $p/p' = p - 1$, tem-se, pelo Teorema de Fubini (ver Teorema 1.18), que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p dx' \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du_k(x', t)\|^p dx' dt \right).$$

Por fim, como

$$\|u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} \rightarrow 0,$$

Figura 1.17: ξ definido em (1.52).

quando $k \rightarrow \infty$ (ver 1.41), e utilizando o Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), concluímos. passando ao limite na desigualdade anterior, quando $k \rightarrow \infty$, que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x', t)\|^p dx' dt, \quad (1.51)$$

pois $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$, quando $k \rightarrow \infty$, o que implica em $u_k \rightarrow u$ e $Du_k \rightarrow Du$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)$, quando $k \rightarrow \infty$, isso implica em $u_k(x) \rightarrow u(x)$ e $Du_k(x) \rightarrow Du(x)$ qtp em $\overline{\mathbb{R}_+^n}$, quando $k \rightarrow \infty$ (ver Teorema 1.16 e (1.49)).

Seja $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\begin{aligned} \xi &\equiv 1 \text{ em } [0, 1]; \\ \xi &\equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \setminus [0, 2]; \\ 0 &\leq \xi \leq 1, \end{aligned} \quad (1.52)$$

(ver Figura 1.17) e defina $\xi_k(x) = \xi(kx_n)$ e $v_k(x) = u(x)(1 - \xi_k(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_n}(x) &= (1 - \xi_k(x)) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) - k u \xi'_k(kx_n) \text{ e} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x'}(x) &= (1 - \xi_k(x)) \frac{\partial u}{\partial x'}(x). \end{aligned}$$

Consequentemente, as seguintes desigualdades valem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx &\leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\left\| \frac{\partial v_k}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \right)^p dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\xi_k \left\| \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \xi_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| + k |u| |\xi'_k| \right)^p dx, \end{aligned}$$

onde c é uma constante que depende de p e n . Deste modo, chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi'_k|^p |u|^p dx, \quad (1.53)$$

onde utilizamos o fato de $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$. Observe que $\text{supp } \xi'_k \subseteq \text{supp } \xi \subseteq [0, 2]$. Isto nos diz que $\xi'_k(kx_n) = 0$ quando $kx_n > 2$ ou $x_n > 2/k$. Logo, podemos escrever a última desigualdade como

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dx_n, \quad (1.54)$$

onde estimamos ξ'_k pelo seu máximo em $[0, 2]$. Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi(kx_n)|^p \|Du\|^p dx &= \int_0^{\frac{2}{k}} |\xi(kx_n)|^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \\ &\leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

quando $k \rightarrow \infty$, onde estimamos ξ pelo seu máximo em $[0, 2]$ e usamos que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Além disso, utilizando (1.51), podemos escrever

$$\begin{aligned} ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt &\leq ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x', s)\|^p dx' ds dt \\ &\leq ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x', s)\|^p dx' ds dt \\ &\leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x', s)\|^p dx' ds \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.56)$$

quando $k \rightarrow \infty$, pois $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Portanto, por (1.53) (1.55) e (1.56), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$, isto é, $\|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Por fim, pela definição de v_k , inferimos que

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p = \int_{\mathbb{R}_+^n} |v_k - u|^p dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k^p |u|^p dx.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, chegamos a

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p = \int_0^{\frac{2}{k}} \xi(kx_n)^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p dx' dx_n \leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p dx' dx_n \rightarrow 0, \quad (1.57)$$

quando $k \rightarrow \infty$. Dessa forma,

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}^p \leq \|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p + \|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p \rightarrow 0.$$

Defina $u_k = \eta_{\frac{1}{k}} * v_k$. Assim, $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, para k suficientemente grande (ver Teorema 1.34) e

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|u_k - v_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} + \|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$ (ver 1.57). Portanto, $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$. □

1.7 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços.

Dividiremos o estudo dessas desigualdades em dois casos: $1 \leq p < n$ e $n < p \leq \infty$. O caso $p = n$ não será apresentado nesse texto, aos interessados consultar [7], p.p. 275.

1.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja $1 \leq p < n$. Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo¹³

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.58)$$

¹³Lembrando que $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa o gradiente fraco, quando calculamos a norma do gradiente em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ estamos calculando a norma \mathcal{L}^p da norma Euclidiana do gradiente.

onde c é uma constante positiva, $1 \leq q < \infty$ e $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é não nula, de forma que c e q não dependam de u .

Primeiramente, vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (1.58) é válida, o valor de q não é arbitrário, mas sim admite uma forma específica. Para isso, seja $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não nula e $\lambda > 0$. Sendo assim, definimos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (1.58) a u_λ , obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.59)$$

Note que, pelo Teorema de Mudança de Variáveis (1.20), podemos escrever

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^q$$

e

$$\begin{aligned} \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \|Du_\lambda\|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \|D(u(\lambda x))\|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\lambda Du(\lambda x)\|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} \|Du(y)\|^p dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

Utilizando essas duas igualdades acima em (1.59), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

a qual podemos reescrever como

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.60)$$

Observe que se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$, obtemos uma contradição quando $\lambda \rightarrow 0$, pois isso implicaria em $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, que só acontece se $u = 0$ (o que é uma contradição). De forma análoga se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$ obtemos uma contradição quando $\lambda \rightarrow \infty$. Sendo assim, para que a igualdade (1.58) seja válida, precisamos que

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0,$$

ou seja,

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

Isso motiva a definição abaixo.

Definição 1.43. Se $1 \leq p < n$, o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Os cálculos no início da seção mostram que a desigualdade (1.58) somente é válida quando $q = p^*$. O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é verdadeira.

Teorema 1.44 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Seja $1 \leq p < n$. Então, existe uma constante c , que depende apenas de p e n , tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.61)$$

para toda função $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos dois casos

Caso 1: Considere que $p = 1$ (ou seja, $p^* = \frac{n}{n-1}$).

Como, por hipótese, u tem suporte compacto, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) dy_i,$$

e assim,

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \right| dy_i \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\| dy_i.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de 1 até n , obtemos

$$|u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$ por X_i e integrando ambos os lados da desigualdade acima, em relação a x_1 , de $-\infty$ a ∞ , chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \end{aligned}$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1 , então a sua integral é constante em relação a x_1 . Sendo assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada (ver Teorema 1.9) e o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.18), a desigualdade acima se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞ , obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Por conseguinte, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} I_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\| dy_1 \text{ e } I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dx_1 dy_i \quad (i = 2, \dots, n).$$

Porém, I_2 é constante em relação a x_2 , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq I_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini (ver Teoremas 1.9 e 1.18), inferimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_2)\| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, chegamos a

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \\ &\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \|Du\| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|Du\| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{p^*}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.62)$$

como queríamos mostrar.

Caso 2: Assuma que $1 < p < n$.

Considere a função $|u|^\gamma$, com $\gamma > 1$ a ser escolhido a seguir. Utilizando a desigualdade obtida no caso $p = 1$, podemos escrever

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} [|u|^\gamma]^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|D(|u|^\gamma)\| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} \|Du\| dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8) na última integral, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|Du\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.63)$$

Escolhendo γ de forma que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$, isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

Nesse caso, $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim, por (1.63) podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|Du\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

finalizando a demonstração. \square

Observação: Note que o suporte compacto é necessário, como exemplo tome a função $u(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma $\|Du\| \equiv 0$. Consequentemente,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq 0 \implies u \equiv 0,$$

que é uma contradição.

Agora, mostraremos que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, sobre certas condições de p e Ω .

Teorema 1.45. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Então, $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e, além disso,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde $c > 0$ é uma constante que depende apenas de n , p e Ω .

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.40, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \text{ qtp em } \Omega; \\ \bar{u} &\text{ tem suporte compacto;} \\ \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Como \bar{u} tem suporte compacto, sabemos que existe uma sequência (u_k) , dada por $\eta_{\frac{1}{k}} * \bar{u}$, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0, \tag{1.65}$$

quando $k \rightarrow \infty$, e para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema 1.34). Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.61), concluímos que

$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.66}$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Note que, por (1.65), temos que

$$\|Du_k - D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \tag{1.67}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Isso mostra que (Du_k) é convergente (e portanto, de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, por (1.66), observamos que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, o qual é um espaço completo (ver Teorema 1.7). Logo, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \rightarrow v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema 1.16, a menos de uma subsequência $u_k(x) \rightarrow v(x)$ qtp em \mathbb{R}^n , quando $k \rightarrow \infty$. Analogamente, por (1.65) $u_k(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n , quando $k \rightarrow \infty$, desde que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \tag{1.68}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Com isso, $v(x) = \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n . Dessa forma,

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Passando ao limite, quando $k \rightarrow \infty$, obtemos, por (1.67) e (1.68), que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Essa desigualdade finaliza a demonstração, já que, por (1.64), vale

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

como queríamos mostrar. \square

Agora, vamos provar uma desigualdade de Sobolev que generaliza a famosa desigualdade de Poincaré.

Teorema 1.46. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < n$, então a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \quad (1.69)$$

é válida para $1 \leq q \leq p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n .

Demonstração.

Caso 1: Assuma $q = p^*$.

Como $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, conseguimos uma sequência de funções (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, podemos estender cada u_k para ser 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Sendo assim, aplicamos a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.61) para obter

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \quad (1.70)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, segue que $\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0$ e $\|Du_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Sendo assim, pelo Teorema 1.16, passando a uma subsequência (se necessário), chegamos a

$$u_k(x) \rightarrow u(x) \text{ qtp em } \Omega. \quad (1.71)$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.61), inferimos que

$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $k, \ell \rightarrow \infty$, pois (Du_k) é convergente (em particular, de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, que é um espaço completo (ver Teorema 1.7). Dito isso, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Novamente, utilizando o Teorema 1.16, passando a uma subsequência (se necessário), segue que

$$u_k(x) \rightarrow v(x) \text{ qtp em } \Omega. \quad (1.72)$$

Logo, por (1.71) e (1.72), $v \equiv u$ qtp em Ω . Dessa forma,

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Passando ao limite em (1.70), quando $k \rightarrow \infty$, chegamos a

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Provando o caso em que $q = p^*$.

Caso 2: Assuma que $1 < q < p^*$.

Como Ω é limitado, temos, pelo Teorema 1.11 e por (1.61), que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Portanto, a desigualdade (1.69) é válida para todo $1 \leq p < n$ e $1 \leq q \leq p^*$. \square

Um caso particular da desigualdade (1.69) é a Desigualdade de Poincaré que será apresentada no resultado abaixo.

Corolário 1.47 (Desigualdade de Poincaré). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida, onde c é uma constante que depende de p, q e n .

Demonstração. Primeiramente considere $1 \leq p < n$. Por definição, $1 \leq p < p^*$. Além disso, pelo Teorema 1.45, concluímos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Agora considere que $n \leq p < \infty$, e $1 \leq s < n$ tal que $p < s^*$ (isto é possível pois $s^* \rightarrow \infty$ se $s \rightarrow n^-$). Note que, pelo Teorema 1.11, podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

já que $1 \leq p < s^*$, $s < p$ e Ω é limitado. Por fim, considere $p = \infty$. Pelo Teorema 1.46, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{q^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)},$$

para todo $1 \leq q < n$. Passando ao limite, quando $q \rightarrow n^-$, temos que $q^* \rightarrow \infty$ e, consequentemente pelo Teorema 1.11, $\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$. Portanto,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. □

Podemos mostrar que $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} := \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma usual dos espaços de Sobolev $\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Com efeito, pelo Corolário 1.47, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p + \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p + \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = c \|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}.$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por outro lado, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$ são equivalentes em $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Além disso, pelo Teorema 1.46 e pelo Corolário 1.47, podemos escrever

$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq p^*) \text{ e } \mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{s^*}(\Omega) \quad (1 \leq s \leq \infty).$$

Isto é o mesmo que dizer que $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $1 \leq q \leq p^*$ e $1 \leq p < n$, $\mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{s^*}(\Omega)$, com $1 \leq s \leq \infty$ e o operador inclusão i (em cada um dos casos) é um operador linear limitado.

1.7.2 Desigualdade de Morrey

A próxima classe de desigualdades realiza uma conexão entre os espaços de Hölder (que veremos a definição a seguir) e os espaços de Sobolev.

Definição 1.48. Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser Hölder contínua, com expoente $\gamma \in (0, 1]$, quando

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|x - y\|^\gamma,$$

para todo $x, y \in \Omega$. Além disso, denotamos o espaço dessas funções por $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 1.49. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, escrevemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \text{ e } [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \right\},$$

para denotar a norma de u no espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com essas definições, estamos prontos para enunciar e demonstrar a Desigualdade de Morrey.

Teorema 1.50 (Desigualdade de Morrey). Sejam $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n < p \leq \infty$ e $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Então,

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n .

Demonstração. Primeiramente, escolha uma bola $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Afirmamos que existe uma constante $c > 0$ dependendo apenas de n tal que¹⁴

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|y - x\|^{n-1}} dy. \quad (1.73)$$

Com efeito, fixando $w \in \partial B(0, 1)$ e $0 < s < r$, segue, do Teorema Fundamental do Cálculo e da Regra da cadeia, que

$$|u(x + sw) - u(x)| = \left| \int_0^s \frac{du}{dt}(x + tw) dt \right| = \left| \int_0^s Du(x + tw) \cdot w dt \right| \leq \int_0^s \|Du(x + tw)\| dt,$$

onde utilizamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de $\|w\| = 1$. Logo, integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre $\partial B(0, 1)$ e aplicando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.18), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)| dS_w &\leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} \|Du(x + tw)\| dS_w dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} \|Du(x + tw)\| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} dS_w dt. \end{aligned}$$

Seja $y = x + tw$, de forma que $t = \|x - y\|$. Assim, por meio de coordenadas polares e mudança de variáveis (ver Teoremas 1.15 e 1.20) obtemos

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)| dS_w \leq \int_0^s \int_{B(x,t)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dS_y dt = \int_{B(x,s)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy$$

e, como $s < r$, tem-se

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)| dS_w \leq \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy.$$

Multiplicando a equação acima por s^{n-1} e integrando de 0 a r , com respeito a s , chegamos a

$$\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)| dS_w ds \leq \int_0^r s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x + sw$, obtemos

$$\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} |u(y) - u(x)| dS_y ds \leq \left(\int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \right) \left(\int_0^r s^{n-1} ds \right).$$

¹⁴A integral

$$\int_{B(x,r)} f dy := \frac{1}{\sigma(n)r^n} \int_{B(x,r)} f dy$$

onde $\sigma(n)r^n$ é o volume da esfera n -dimensional, representa a média da função f sobre $B(x, r)$.

Utilizando coordenadas polares (ver Teorema 1.15) no lado esquerdo e resolvendo a última integral do lado direito da desigualdade acima, segue que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy.$$

Por fim, dividindo ambos os lados por $\sigma(n)r^n$ (volume da n -esfera de raio r), temos

$$\oint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{1}{n\sigma(n)} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy.$$

Isso prova (1.73).

Agora, fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Note que, podemos escrever

$$|u(x)| = \frac{|u(x)|}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} dy = \oint_{B(x,1)} |u(x)| dy.$$

Dito isso, deduzimos que

$$|u(x)| \leq \oint_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| dy + \oint_{B(x,1)} |u(y)| dy. \quad (1.74)$$

Observe que, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), inferimos

$$\begin{aligned} \oint_{B(x,1)} |u(y)| dy &= \frac{1}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sigma(n)} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} 1^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

onde p e p' são expoentes conjugados. Além disso, utilizando a desigualdade de Hölder novamente, chegamos a

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \leq \left(\int_{B(x,1)} \|Du\|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x - y\|^{(n-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (1.76)$$

onde p e p' são expoentes conjugados e a última integral é finita. De fato, utilizando coordenadas polares (ver Teorema 1.15), concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x - y\|^{(n-1)p'}} &= \int_0^1 \int_{\partial B(x,r)} \frac{1}{r^{(n-1)p'}} dS_r dr \\ &= n\sigma(n) \int_0^1 r^{(n-1)(1-p')} dr = n\sigma(n) \frac{p-1}{p-n} < \infty, \end{aligned}$$

pois $n < p$. Dito isso, por (1.76), segue que

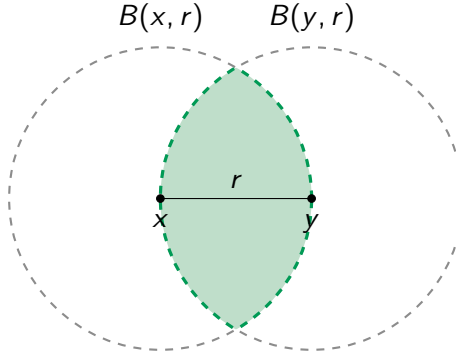
$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.77)$$

Dessa forma, por (1.73), (1.74), (1.75) e (1.77), deduzimos que

$$|u(x)| \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como x é arbitrário, também obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.78)$$

Figura 1.18: $B = B(x, r) \cap B(y, r)$.

Fonte: Autoral.

Agora, considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ e denote $r = \|x - y\|$. Portando, seja $B = B(x, r) \cap B(y, r)$ (ver Figura 1.18), sendo assim

$$|u(x) - u(y)| = \int_B |u(x) - u(y)| dz \leq \int_B |u(x) - u(z)| dz + \int_B |u(y) - u(z)| dz. \quad (1.79)$$

Calculando a primeira integral acima, obtemos, por (1.73), que

$$\int_B |u(x) - u(z)| dz \leq \int_{B(x, r)} |u(z) - u(x)| dz \leq c \int_{B(x, r)} \frac{\|Du(z)\|}{\|z - x\|^{n-1}} dz.$$

Analogamente a (1.77), inferimos que

$$\int_B |u(x) - u(z)| dz \leq cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da mesma forma, segue que

$$\int_B |u(y) - u(z)| dz \leq cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Sendo assim, por (1.79), podemos escrever

$$|u(x) - u(y)| \leq c\|x - y\|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Isso mostra que

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \right\} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.80)$$

Portanto, por (1.78) e (1.80), concluímos que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Para demonstrar a próxima desigualdade de Sobolev, precisamos do seguinte resultado

Teorema 1.51. O espaço de Hölder $(\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [12], p.p. 5.

□

Teorema 1.52. Seja Ω um aberto limitado, com $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 . Considere $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n < p \leq \infty$. Então, u tem uma versão (coincide com u qtp em Ω) contínua $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, tal que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c é um constante que depende de n , p e Ω .

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.40, podemos considerar a extensão de u , $Eu = \bar{u}$, tal que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \text{ qtp em } \Omega; \\ \bar{u} &\text{ tem suporte compacto;} \\ \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Além disso, como $\text{supp } \bar{u}$ é compacto, temos, pelo Teorema 1.34, que existe uma sequência $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para k suficientemente grande, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \tag{1.82}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, pelo Teorema 1.50, podemos escrever

$$\|u_k - u_l\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k - u_l\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ (pois é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$). Como $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.51), existe uma função $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \tag{1.83}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Note que $u^* = \bar{u}$ qtp em \mathbb{R}^n (análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 1.45) (por (1.82) e (1.83)) e $u = \bar{u}$ qtp em Ω (por (1.81)). Logo, $u = u^*$ qtp em Ω , ou seja, u^* é uma versão contínua de u . O Teorema 1.50 também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Passando ao limite, quando $k \rightarrow \infty$, chegamos, por (1.82) e (1.83), a

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim, por (1.81), é verdade que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq \|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, concluímos que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

como era desejado. □

1.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev

Agora, vamos explorar algumas desigualdades em espaços de Sobolev com derivadas (fracas) de ordem superior.

Teorema 1.53. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp < n$, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é válida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω .

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq kp < n$, temos que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Como Ω é limitado e $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^1 , pelo Teorema 1.40, podemos considerar uma extensão $\overline{D^\beta u}$ de $D^\beta u$ com $|\beta| \leq k-1$. Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.61), obtemos

$$\|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D(\overline{D^\beta u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dessa forma, como $\overline{D^\beta u} = D^\beta u$ qtp em Ω , podemos escrever

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D(\overline{D^\beta u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Porém a extensão acima é um operador linear limitado. Mais precisamente, temos que $\|\bar{v}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, para todo $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Dito isso, inferimos que

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|D^\beta u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Dessa forma, $u \in \mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$. De forma análoga, inferimos que $u \in \mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)$, onde

$$\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Indutivamente, chegamos a $u \in \mathcal{W}^{0,q}(\Omega) = \mathcal{L}^q(\Omega)$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \geq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \geq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)} \geq \cdots \geq c \|u\|_{\mathcal{W}^{0,q}(\Omega)} = c \|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

desde que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. □

Vejamos agora uma generalização dos espaços de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 1.54. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é formado pelas funções $u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Esse espaço é munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

O próximo resultado estabelece uma relação entre os espaços de Hölder definidos acima e os espaços de Sobolev.

Teorema 1.55. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 , e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp > n$, então $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0, 1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \quad (1.84)$$

é válida, onde c depende apenas de k, p, n, γ e Ω .

Demonstração. Suponha que $\frac{n}{p}$ não é um inteiro (isto é, $\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$). Então, como visto na demonstração do Teorema 1.53, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ quando

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n}, \quad (1.85)$$

desde que $\ell p < n$ (veja que $r = p^{*\overbrace{* \cdots *}}^{\ell \text{ vezes}}$). Sendo assim, ℓ é um inteiro tal que

$$\ell < \frac{n}{p} < \ell + 1, \quad (1.86)$$

isto é, $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Consequentemente, temos por (1.85) e (1.86), que

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} > n, \quad (1.87)$$

pois $n - p\ell > 0$. Além disso, $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{1,r}(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$. Dito isso, pelo Teorema 1.40, seja $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de $D^\alpha u$. Assim, pela Desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.50), podemos escrever

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

pois $\overline{D^\alpha u} = D^\alpha u$ qtp em Ω , $\text{supp } \overline{D^\alpha u}$ é compacto, $\gamma = p + 1 - \frac{n}{p} = 1 - \frac{n}{r}$ e $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (pelo Teorema 1.39). Portanto, por (1.88), inferimos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} &\leq \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \right) \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} 2 \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

(ver demonstração do Teorema 1.53). Isto prova (1.84.)

Por fim, suponha que $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Seja $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Como anteriormente, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ (pois Ω é limitado), desde que (1.85) seja satisfeito, onde

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} = n \geq p.$$

pois $\frac{n}{p}$ é um inteiro positivo. Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k - \ell$. Sejam $n < q < \infty$ e $1 \leq s = \frac{nq}{n+q} < n$. Dessa forma, $s^* = q$ e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.61)

e por um argumento de densidade, temos, considerando uma extensão $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} &= \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|DD^\alpha u\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|DD^\alpha u\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)} < \infty, \end{aligned}$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$, pois $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$, $s < r$ e Ω é limitado. Por isso,

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$. Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1 = k - \frac{n}{p}$. Como $n < q < \infty$, utilizando a Desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.50), encontramos

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} = \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} \leq \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\Omega)},$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 2$ (por um argumento de densidade). Assim, tomando qualquer $\gamma \in (0, 1)$, $q = \frac{n}{1-\gamma}$ e $s_\gamma = \frac{np}{(1-\gamma)p+n}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell-1,q}(\Omega)} = c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\frac{n}{p},q}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,s_\gamma}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

pois $n < q < \infty$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{s_\gamma} - \frac{n/p}{n}$ (como na demonstração do Teorema 1.53, já que $q = \overbrace{s_\gamma^* \cdots s_\gamma^*}^{n/p \text{ vezes}}$). \square

1.8 Compacidade

Nessa seção, vamos estudar mergulhos compactos dos espaços de Sobolev em espaços de Lebesgue. Para isso, precisamos entender a diferença entre um mergulho contínuo, como os que foram trabalhados na seção anterior, e um mergulho compacto.

Definição 1.56. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos $X \hookrightarrow Y$, se para todo $x \in X$, tem-se

$$\|x\|_Y \leq c \|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y , isto é, existe uma subsequência que converge em Y .

Observação: Se um mergulho satisfaz apenas a primeira propriedade, dizemos que X está continuamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$. Na seção anterior vimos os seguintes mergulhos contínuos.

- $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, com $1 \leq q \leq p^*$ e $1 \leq p < n$, pelo Teorema 1.46;
- $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, com $1 \leq s \leq \infty$, pelo Corolário 1.47;
- $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, com $kp < n$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{k}{n}$, pelo Teorema 1.53;
- $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $kp > n$ e $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, pelo Teorema 1.55.

Teorema 1.57 (Teorema de Rellich-Kondrachov). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então,

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega),$$

com $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$.

Demonstração. Seja $1 \leq q < p^*$ fixo. Como Ω é limitado, temos, pelo Teorema 1.11, que $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}$ e, pelo Teorema 1.45, segue que $\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Logo, $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Resta mostrar que se $(u_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ que converge em $\mathcal{L}^q(\Omega)$.

Como $(u_k)_{k=1}^\infty$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq M$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe que, pelo Teorema 1.40, temos que existe uma sequência $(\bar{u}_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_k = u_k$ qtp em Ω , \bar{u}_k tem suporte compacto e $\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Dessa forma, inferimos

$$\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq cM,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $(\bar{u}_k)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é limitada. Com isso

$$\sup_k \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq cM. \quad (1.89)$$

Primeiramente, vamos estudar as funções suavizadas $\bar{u}_k^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \bar{u}_k$ (para $\varepsilon > 0$), onde η_ε é a função molificadora vista na Seção 1.4. Também podemos supor que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, as funções \bar{u}_k^ε tem suporte em um aberto limitado V . Afiramos que

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \rightarrow 0,$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com efeito, considere $v_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v_k^\varepsilon = \eta_\varepsilon * v_k$ (para $\varepsilon > 0$ pequeno). Dessa forma, podemos escrever

$$v_k^\varepsilon(x) - v_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\tau) v_k(x - \tau) d\tau - v_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) v_k(x - \tau) d\tau - v_k(x).$$

Fazendo a substituição $\tau = \varepsilon y$ e lembrando que $\int_{B(0,1)} \eta(y) dy = 1$, obtemos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$v_k^\varepsilon(x) - v_k(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y) (v_k(x - \varepsilon y) - v_k(x)) dy = \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} v_k(x - \varepsilon ty) dt dy.$$

Para calcular a derivada acima, defina $g(t) = x - \varepsilon ty$. Pela regra da cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}(v_k \circ g)(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(g(t)) g_j'(t) = -\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(g(t)) y_j = -\varepsilon Dv_k(x - \varepsilon ty) \cdot y.$$

Sendo assim, é verdade que

$$v_k^\varepsilon(x) - v_k(x) = -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Dv_k(x - \varepsilon ty) \cdot y dt dy.$$

Logo, passando ao módulo em ambos os lados da igualdade acima e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos que

$$|v_k^\varepsilon(x) - v_k(x)| \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|Dv_k(x - \varepsilon ty)\| dt dy.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre V , e aplicando o Teorema de Fubini e o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teoremas 1.18 e 1.20), chegamos a

$$\begin{aligned} \int_V |v_k^\varepsilon(x) - v_k(x)| dx &\leq \int_V \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|Dv_k(x - \varepsilon ty)\| dt dy dx \\ &\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \|Dv_k(x - \varepsilon ty)\| dx dt dy \leq \varepsilon \int_V \|Dv_k(z)\| dz, \end{aligned}$$

(basta escolher $z = x - \varepsilon ty$). Isto é,

$$\|v_k^\varepsilon - v_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon \|Dv_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \quad (1.90)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\bar{u}_k \in \mathcal{W}^{1,p}(V)$ (pois $\bar{u}_k \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$), então existe uma sequência $(v_\ell^k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(V)$, dada por $v_\ell^k = \eta_\ell^1 * \bar{u}_k$, tal que

$$\|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} \rightarrow 0,$$

quando $\ell \rightarrow \infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, como $p \geq 1$ e V é limitado (ver Teorema 1.11) concluímos que

$$\|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq c \|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq c \|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (1.91)$$

e, de forma análoga,

$$\|Dv_\ell^k - D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq c \|Dv_\ell^k - D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq c \|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (1.92)$$

ambos limites tomados quando $\ell \rightarrow \infty$. Dessa forma, inferimos, por (1.92), que

$$\|v_\ell^{k\varepsilon} - \bar{u}_k^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(V)} = \|\eta_\varepsilon * v_\ell^k - \eta_\varepsilon * \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} = \|\eta_\varepsilon * (v_\ell^k - \bar{u}_k)\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \rightarrow 0, \quad (1.93)$$

quando $\ell \rightarrow \infty$, onde a última desigualdade vem de (1.21). Por (1.90), segue que

$$\|v_\ell^{k\varepsilon} - v_\ell^k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon \|Dv_\ell^k\|_{\mathcal{L}^1(V)},$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Passando ao limite quando $\ell \rightarrow \infty$, obtemos por (1.91), (1.92) e (1.93), que

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon \|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, por (1.89), concluímos que

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon \|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon c \|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \varepsilon c \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} \leq \varepsilon c M,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ (pois $p \geq 1$ e V é limitado (ver Teorema 1.11)). Consequentemente,

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \rightarrow 0, \quad (1.94)$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Como $1 \leq q < p^*$, podemos utilizar a Desigualdade de Interpolação (ver Teorema 1.12) para obter

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta},$$

onde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$ e $0 < \theta < 1$. Ademais, por (1.89), pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.61) e por um argumento de densidade, deduzimos que $\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$ é finito para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, é verdade que

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta} &\leq c \|D\bar{u}_k^\varepsilon - D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)}^{1-\theta} \\ &\leq c \|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}^{1-\theta} \leq c [\|\bar{u}_k^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} + \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}]^{1-\theta} < cM. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Assim por (1.94), deduzimos que

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq c \|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \rightarrow 0,$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Agora, afirmamos que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a sequência $(\bar{u}_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se pela desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8) e por (1.89), que

$$\begin{aligned} |\bar{u}_k^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |\bar{u}_k(y)| dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon^n} \|\eta\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \frac{cM}{\varepsilon^n} < \infty, \end{aligned} \quad (1.96)$$

onde por (1.89) c não depende de k (lembre que $\text{supp } \bar{u}_k \subseteq V$, $p \geq 1$ e V é limitado). De forma análoga, mostramos que

$$\|D\bar{u}_k^\varepsilon(x)\| \leq \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \quad (1.97)$$

Deste modo, $(\bar{u}_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada pois, mostramos que $\|\bar{u}_k^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq M$ onde $M > 0$ não depende de k . Ademais, $(\bar{u}_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é equicontínua, pois, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\delta < \tilde{\varepsilon}/L$ tal que, pela Desigualdade do Valor Médio, encontramos

$$\|x - y\| < \delta \implies |\bar{u}_k^\varepsilon(x) - \bar{u}_k^\varepsilon(y)| \leq L\|x - y\| < L\delta < \tilde{\varepsilon},$$

onde $L = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D\bar{u}_k(x)\|$, o qual existe por (1.89) e (1.97) e não depende de k e x .

Por fim, afirmamos que existe uma subsequência $(\bar{u}_{k_j})_{j=1}^\infty$ de $(\bar{u}_k)_{k=1}^\infty$, tal que

$$\|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \rightarrow 0,$$

quando $j, \ell \rightarrow \infty$. Com efeito, sabemos que

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \rightarrow 0,$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver (1.95)). Logo, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon_0} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \frac{\delta}{3}, \quad (1.98)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\text{supp } \bar{u}_k, \text{supp } \bar{u}_k^{\varepsilon_0} \subseteq V$. Além disso, provamos que $(\bar{u}_k^{\varepsilon_0})_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua. Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (ver Teorema 1.17), existe uma subsequência $(\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0})_{j=1}^\infty$ de $(\bar{u}_k^{\varepsilon_0})_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente sobre V (fora de V , \bar{u}_k é nula). Em particular, esta subsequência é de Cauchy sobre V . Portanto,

$$|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}(x)| \rightarrow 0,$$

uniformemente em V , quando $j, \ell \rightarrow \infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), temos que

$$\lim_{j, \ell \rightarrow \infty} \|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)}^q = \lim_{j, \ell \rightarrow \infty} \int_V |\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}(x)|^q dx = 0,$$

pois $|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}(x)|^q \leq 2cM\varepsilon_0^{-n} \|\eta\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{L}^1(V)$ (lembre que V é limitado). Consequentemente, para $j, \ell > 0$ suficientemente grandes, concluímos que

$$\|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \frac{\delta}{3}. \quad (1.99)$$

Dessa forma, por (1.98) e (1.99), podemos escrever

$$\|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \|\bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \delta,$$

para $j, \ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes. Isto nos diz que $(\bar{u}_{k_j})_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ (pois $\text{supp } \bar{u}_{k_j} \subseteq V$). Dito isso, chegamos a

$$\|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} = \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

quando $j, \ell \rightarrow \infty$. Como $\mathcal{L}^q(\Omega)$ é um espaço completo (ver Teorema 1.7), então $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ é uma sequência convergente em $\mathcal{L}^q(\Omega)$, como era desejado. \square

Observação: Vimos no Teorema 1.57 que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < p^*$ (se Ω é limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1). Como $p^* > p$, então, $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leq p < n$ (se Ω é limitada e $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^1). Na verdade, temos que

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. Com efeito, se $n < p \leq \infty$, então, pela desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.50), temos que, dada uma função $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, podemos escrever

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\bar{u} \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é uma extensão de u . Logo,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\bar{u}(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \right\} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

isso implica em

$$|\bar{u}(x)| \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq c \|x - y\|^\gamma \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Assim sendo, seja $(u_k) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada, isto é, $\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq c$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq c,$$

onde $\bar{u}_k \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é uma extensão de u_k , para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|\bar{u}_k(x)| \leq c \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e

$$|\bar{u}_k(x) - \bar{u}_k(y)| \leq c \|x - y\|^\gamma \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|x - y\|^\gamma,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (ver Teorema 1.17), existe $(\bar{u}_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty$ subsequência de $(\bar{u}_k)_{k=1}^\infty$, tal que

$$|\bar{u}_{k_\ell}(x) - v(x)| \rightarrow 0,$$

quando $\ell \rightarrow \infty$, para todo $x \in K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Por outro lado, pelo Teorema da convergência dominada (ver Teorema 1.6), obtemos

$$\|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \int_V |\bar{u}_{k_j}(x) - \bar{u}_{k_\ell}(x)|^p dx \rightarrow 0,$$

quando $j, \ell \rightarrow \infty$. Como $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço completo (ver Teorema 1.7), então existe $v \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$\|\bar{u}_{k_\ell} - v\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

quando $\ell \rightarrow \infty$, para todo $n < p \leq \infty$. Por fim,

$$\|u_{k_\ell} - v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \|\bar{u}_{k_\ell} - v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \|\bar{u}_{k_\ell} - v\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0.$$

Isto é,

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq n$, onde Ω é limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 .

Agora, seja $1 \leq s < n$ tal que $1 \leq n < s^*$ (isto implica em $s^* \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow n^-$). Pelo Teorema 1.57

$$\mathcal{W}^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^n(\Omega).$$

Seja $(u_k) \subseteq \mathcal{W}^{1,n}(\Omega)$ limitada, isto é, $\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,n}(\Omega)} \leq c$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,s}(\Omega)} \leq \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,n}(\Omega)} \leq c,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim sendo, existe uma subsequência $(u_{k_\ell})_{\ell=1}^\infty$ de $(u_k)_{k=1}^\infty$ tal que

$$\|u_{k_\ell} - u\|_{\mathcal{L}^n(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$, para alguma função $u \in \mathcal{L}^n(\Omega)$. Consequentemente, $\mathcal{W}^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^n(\Omega)$ e portanto

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

CAPÍTULO DOIS

ALGUMAS APLICAÇÕES DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

2.1 Preliminares

2.1.1 Desigualdades

O primeiro preliminar para esse capítulo é a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, iremos apresentar o caso geral abaixo, mas utilizaremos apenas alguns casos particulares que serão mencionados após o teorema.

Teorema 2.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). Sejam $1 \leq q \leq \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$, com $\ell < k$, e satisfazendo uma das hipóteses abaixo

$$\begin{cases} r = 1 \\ \frac{\ell}{k} \leq \theta \leq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 < r < \infty \\ k - \ell - \frac{n}{r} \in \mathbb{N} \\ \frac{\ell}{k} \leq \theta < 1. \end{cases}$$

Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n} \right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^\ell u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^k u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}^\theta \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O artigo [8] é destinado a demonstração dessa desigualdade. \square

A desigualdade de Ladyzhenskaya é um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg apresentada acima. Mais precisamente, quando $\ell = 0$, $k = 1$, $p = 4$, $q = r = 2$ e $\theta = \frac{3}{4}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{4}} \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{3}{4}}. \quad (2.1)$$

Outras formas da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg que serão utilizadas são as seguintes:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad (2.2)$$

onde $\ell = 0$, $k = 2$, $p = \infty$, $q = r = 2$ e $\theta = \frac{3}{4}$, e

$$\|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2 u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

onde $\ell = 1$, $k = p = q = r = 2$ e $\theta = \frac{1}{2}$.

2.1.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta indispensável para o estudo de Equações Diferenciais Parciais. Aqui apresentaremos as definições básicas e algumas propriedades elementares que serão utilizadas ao decorrer do texto.

Definição 2.2. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \omega} f(x) dx,$$

e a transformada inversa de f por

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \omega} f(\omega) d\omega.$$

Como $|e^{\pm ix \cdot \omega}| = 1$ e $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ as integrais acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou $\omega \in \mathbb{R}^n$ no caso da transformada inversa).

Teorema 2.3 (Identidade de Planchael). Sejam $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Ver [7] p.p. 183. □

O teorema abaixo explora as propriedades elementares da transformada de Fourier.

Teorema 2.4 (Propriedades da transformada de Fourier). Sejam $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Então, são válidas as seguintes igualdades

- (a) $\widehat{\lambda u + v} = \lambda \hat{u} + \hat{v}$;
- (b) $\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$;
- (c) $\widehat{D^\alpha u} = (i\omega)^\alpha \hat{u}$, para todo multi-índice α tal que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$;¹
- (d) $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v}$.

Demonstração. Ver [7] p.p. 185. □

Os exemplos abaixo serão úteis para definir um operador que será utilizado extensivamente nesse capítulo

Exemplo 2.5 (Transformada da derivada temporal). Considere uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e considere sua derivada temporal. Dessa forma, podemos escrever

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} u(x, t) dx \right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t},$$

onde a penúltima igualdade é válida pois $e^{-i\omega \cdot x}$ não depende de t .

Exemplo 2.6 (Derivada do Laplaciano). Lembrando que dada uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o Laplaciano

¹Se $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice então $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \dots \omega_n^{\alpha_n}$.

de u é dado por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Dito isso, utilizando a transformada da derivada vista no item (c) do Teorema 2.4, podemos escrever

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}} = -\omega_j^2 \hat{u}.$$

Dessa forma

$$\widehat{\Delta u} = -(\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2) \hat{u} = -\|\omega\|^2 \hat{u}.$$

2.1.3 Semigrupo do calor

Agora, introduziremos o conceito de semigrupo, que será utilizado para explorar propriedades das soluções de Leray

Definição 2.7. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados $(T(t))_{t>0}$, onde $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, é um semigrupo se

1. $T(0) = I_X$, onde $I_X : X \rightarrow X$ é o operador identidade;
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s > 0$.

Nesse trabalho, será importante conhecer o semigrupo do calor, que provem da solução da equação do calor

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \quad (2.5)$$

Para encontrar a solução do sistema acima, utilizaremos a transformada de Fourier. Dito isso, aplicando a transformada de Fourier em (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_t - \nu \|\omega\|^2 \hat{\mathbf{u}} &= 0 \quad t > 0 \\ \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{v}} \quad t = 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, temporariamente ignoramos as variáveis espaciais e trabalhamos apenas no domínio do tempo, sendo assim basta resolver a Equação Diferencial Ordinária acima e depois aplicar a transformada de Fourier inversa. Com efeito, esta EDO tem solução dada por

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} e^{-\nu t \|\omega\|^2}.$$

Dessa forma podemos aplicar a transformada de Fourier inversa para obter

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} * F}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad (2.6)$$

onde F é a transformada de Fourier inversa de $e^{-\nu t \|\omega\|^2}$. Ou seja

$$F(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega \cdot x} e^{-\nu t \|\omega\|^2} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k. \quad (2.7)$$

Para resolver essa integral, primeiramente precisamos completar o quadrado no expoente. Dito isso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\nu t \omega_k^2 + i x_k \omega_k + \frac{x_k^2}{4\nu t} - \frac{x_k^2}{4\nu t} \right) d\omega_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x_k^2}{4\nu t} \right) \exp \left(-\left(\sqrt{\nu t} \omega_k - \frac{i x_k}{2\sqrt{\nu t}} \right)^2 \right) d\omega_k. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $s_k = \sqrt{\nu t} \omega_k - \frac{i x_k}{2\sqrt{\nu t}}$ obtemos $ds_k = \sqrt{\nu t} d\omega_k$ e, consequentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k = \frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_k^2} ds_k = \left(\frac{\pi}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}}. \quad (2.8)$$

Sendo assim, por (2.7) e (2.8), chegamos a

$$F(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\pi}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} = \frac{1}{(2\nu t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}.$$

Portanto, por (2.6), concluímos que

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\nu t}} v(y) dy.$$

O semigrupo do calor, denotado por $e^{\nu\Delta\tau}$, com $\tau > 0$, é uma família de operadores dada por

$$e^{\nu\Delta\tau} v = \frac{v * E(\cdot, \tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}},$$

onde $E(x, \tau) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$. O resto dessa subseção será destinado a estudar algumas propriedades que serão utilizadas neste trabalho.

Proposição 2.8 (Propriedades do semigrupo do calor). Considere o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta\tau}$ então são válidas

- (a) $e^{\nu\Delta\tau}(\lambda u + v) = \lambda e^{\nu\Delta\tau} u + e^{\nu\Delta\tau} v$;
- (b) $D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau} u) = e^{\nu\Delta\tau}(D^\alpha u)$;
- (c) $\widehat{e^{\nu\Delta\tau} u} = \hat{u} e^{-\nu\tau\| \omega \|^2}$.

Demonstração. (a) segue do fato da convolução ser um operador linear, e (b) é análogo ao que foi mostrado no Teorema 1.34. O item (c) segue do Teorema 2.4 (d), já que

$$e^{\nu\Delta\tau} u = \frac{u * E(\cdot, \tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}},$$

segue que

$$\widehat{e^{\nu\Delta\tau} u} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{E}(\cdot, \tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}. \quad (2.9)$$

Sendo assim, resta calcular a transformada de Fourier de $E(x, \tau) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$. Com efeito, denotando $\frac{1}{4\nu\tau}$ por c , obtemos

$$\hat{E}(\omega, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - c x_k^2} dx_k. \quad (2.10)$$

De forma análoga ao que foi feito quando resolvemos a equação do calor, podemos completar o quadrado no expoente. Dessa forma, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - c x_k^2} dx_k = e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c \left(x_k + \frac{i\omega_k}{2c}\right)^2} dx_k.$$

Fazendo a substituição $s_k = x_k - \frac{i\omega_k}{2c}$, obtemos $ds_k = dx_k$. Logo, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - c x_k^2} dx_k = e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c s_k^2} ds_k = \left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}}.$$

Sendo assim, por (2.10) e lembrando que $c = \frac{1}{4\nu\tau}$, segue que

$$\hat{E}(\omega, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n (4\pi\nu\tau)^{\frac{1}{2}} e^{-\nu\tau\omega_k^2} = \frac{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\nu\tau\|\omega\|^2},$$

e por (2.9), concluímos que

$$\widehat{e^{\nu\Delta\tau}u} = \hat{u} e^{-\nu\tau\|\omega\|^2}.$$

□

Proposição 2.9. Sejam $1 \leq r \leq 2$ e $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, com $n \in \mathbb{N}$, então

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}u)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq c(n, k)(\nu\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}} \|u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.11)$$

onde $k = |\alpha|$.

Demonstração. Ver [18] p.p. 32.

□

2.1.4 Notação

Introduziremos a notação que será utilizada ao decorrer do texto.

Letras em negrito representam vetores n -dimensionais $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ (na maioria dos casos $n = 3$), A k -ésima derivada parcial é denotada por D_k (ou D^{e_k}), enquanto D^k representa o gradiente k -dimensional. Também vale ressaltar a definição da norma \mathcal{L}^p das funções vetoriais

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|D\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \|D_j u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e mais geralmente,

$$\|D^k \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \sum_{i=1}^n \|D_{j_1} \cdots D_{j_k} u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, a norma em $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

2.2 Propriedades das soluções de Leray

2.2.1 Introdução e contexto histórico

Em 1934, no artigo “*Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplassement l’espace*” (ver [14]) Leray construiu soluções fracas de energia finita²

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^\infty([0, \infty), \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}_w([0, \infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{L}^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))^3 \quad (2.12)$$

para as equações de Navier-Stokes em \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 \in \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $\nu > 0$ é constante. Estas soluções são tais que $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, e satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (2.14)$$

para todo $t > 0$. A unicidade dessas soluções ainda é um problema em aberto, porém, no mesmo artigo Leray mostrou que existe um instante de tempo T_{**} tal que a solução \mathbf{u} se torna suave em $\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty)$ e $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^\infty([T_{**}, \infty), H^k(\mathbb{R}^3))$ ⁴ para cada $k \geq 0$. Um problema importante que foi deixado em aberto por Leray no final de seu artigo diz a respeito do decaimento de energia em L^2 da solução. Matematicamente, isto é entender o que acontece com $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ quando $t \rightarrow \infty$. Leray suspeitava que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$. Uma demonstração para esse fato será apresentada no Teorema 2.15.

Uma outra forma de estudar propriedades das soluções das equações de Navier-Stokes é a partir das soluções $\mathbf{v}(\cdot, t)$ do problema linearizado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \nu \Delta \mathbf{v}; \\ \mathbf{v}(\cdot, t_0) &= \mathbf{u}(\cdot, t_0), \end{aligned}$$

com $t \geq t_0 \geq 0$. Aqui,

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)$$

onde $e^{\nu \Delta(t-t_0)}$ é o semigrupo do calor visto no preliminares. Com essas soluções é possível estudar algumas estimativas de decaimento como

$$\|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

$$t^{\frac{n}{4}} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

²i.e., $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \infty$.

³As definições desses espaços são dadas abaixo:

- $L^\infty([0, \infty), \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot, t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \infty$.
- $\mathcal{C}_w([0, \infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot, t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ fracamente contínuas.
- $L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot, t) : [0, \infty) \rightarrow \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_0^\infty \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^2 dt < \infty.$$

⁴i.e., $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^k(K)} < \infty$, onde $K \subseteq [T_{**}, \infty)$ é compacto.

quando $t \rightarrow \infty$ Uma outra pertunta importante (que não será trabalhada aqui) é sobre o erro ou diferença da solução de Leray e da solução do problema linearizado. Essa pergunta foi respondida por Weigner (em [22]) onde foi provado que

$$t^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \| \mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

2.2.2 Resultados

Tomando uma função molificadora $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ e sua versão escalada η_δ (vista no Capítulo 1, Seção 1.4) definimos $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \eta_\delta * \mathbf{u}_0$, introduzimos $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ como a solução única do problema regularizado

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta &= \nu \Delta \mathbf{u}_\delta; \\ \mathbf{u}_\delta(\cdot, 0) &= \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_\delta = \eta_\delta * \mathbf{u}_\delta$. Em seu artigo, Leray mostrou que existe uma sequência apropriada $\delta' \rightarrow 0$ tal que conseguimos a convergência fraca⁵ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{u}_{\delta'} \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

para todo $t \geq 0$, onde $\mathbf{u}(\cdot, t)$ apresentada em (2.12) é contínua no instante $t = 0$. Além disso, a desigualdade de energia (2.14) é satisfeita para todo $t \geq 0$ e em particular

$$\int_0^\infty \| D\mathbf{u}_\delta(\cdot, t) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} \| \mathbf{u}_0 \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.17)$$

Outros resultados importantes se referem à projeção de Helmholtz⁶ de $-\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)$ em $\mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ isto é, o campo $\mathbf{Q}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot, t) := -\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla p(\cdot, t), \quad (2.18)$$

para todo $t > 0$. A seguir, estudaremos algumas estimativas para $\mathbf{Q}(\cdot, t)$.

Proposição 2.10. Para quase todo $s > 0$ (e para todo $s \geq T_{**}$), tem-se

$$\| e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c \nu^{-\frac{3}{4}} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > s$, onde c é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, dada por

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\omega \cdot x} f(x) dx.$$

Dada $\mathbf{v}(\cdot, s) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, obtemos pelo Teorema 2.3 que

$$\| e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \| \mathcal{F}[e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)] \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu \|\omega\|^2(t-s)} \| \hat{\mathbf{v}}(\omega, s) \|^2 d\omega,$$

⁵Dado um espaço de Banach X , dizemos que uma sequência $(x_n) \subseteq X$ converge fracamente para $x \in X$ ($x_n \rightharpoonup x$) se $f(x_n) \rightarrow f(x)$, para todo $f \in X'$, onde X' é o espaço de todos funcionais lineares limitados de X em \mathbb{R} .

⁶A projeção de Helmholtz é uma forma de escrever um campo vetorial F como $F = G + H$, onde G, H são campos vetoriais tais que $\nabla \cdot G = 0$ e $H = \nabla \Phi$ para alguma função $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

onde utilizamos o resultado sobre a transformada de Fourier do semigrupo do calor (ver Teorema 2.8 (c)). Além disso, $\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|^2 \leq \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_\infty = \sup\{\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|; \omega \in \mathbb{R}^3\}$. Logo

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-s)\|\omega\|^2} d\omega,$$

onde a integral do lado direito é uma Gaussiana, cujo resultado é $c\nu^{-\frac{3}{2}}(t-s)^{-\frac{3}{2}}$. Portanto, podemos escrever

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_\infty. \quad (2.19)$$

O resultado que queremos, é uma aplicação direta de (2.19) com $\mathbf{v}(\cdot, s) = \mathbf{Q}(\cdot, s)$, o restante da demonstração será dedicado a estimativa do valor de $\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_\infty$.

Note que utilizando a derivada da transformada de Fourier, temos que $\mathcal{F}[D^\alpha f] = (i\omega)^\alpha \hat{f}$, sendo assim se $\alpha = e_j$ para algum $j = 1, 2, 3$, $\mathcal{F}[D^{e_j} f] = i\omega_j \hat{f}$. Dito isso,

$$\mathcal{F}[\nabla p(\cdot, s)] = i\hat{p}(\omega, s)\omega,$$

e $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$ pois, por (2.18) e (2.13), $\mathbf{Q} = \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u}$ e

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = (\nabla \cdot \mathbf{u})_t - \nu\Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

já que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, dessa forma

$$0 = \widehat{\nabla \cdot \mathbf{Q}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \widehat{Q_j}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 i\omega_j \hat{\mathbf{Q}},$$

ou seja, $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$. Além disso, pela definição de $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ temos que

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + \mathcal{F}[\nabla p(\cdot, s)](\omega) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega).$$

Com isso, fazendo o produto interno por $\hat{\mathbf{Q}}$ em ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + i\hat{p}(\omega, s)\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)$$

Deste modo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos escrever,

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)\|^2 \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega)\| \|\hat{\mathbf{Q}}\|.$$

Ou seja,

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)\| \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega)\|.$$

Isso nos diz que

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_\infty \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_\infty. \quad (2.20)$$

Por outro lado, para $i = 1, 2, 3$, é verdade que

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](\omega)| \leq \sum_{j=1}^3 |\mathcal{F}[u_j(\cdot, s) D_j u_i(\cdot, s)](\omega)| \leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^3 \|u_j(\cdot, s) D_j u_i(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}^3$. Por fim, novamente utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) e a definição das normas, chegamos a

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](\omega)| \leq c \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u_j(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Isto mostra que

$$\|\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_\infty \leq c \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{Du}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.21)$$

Dito isso, por (2.19), (2.20) e (2.21), inferimos que

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{Du}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

como queríamos mostrar. \square

Repetindo o argumento utilizado na demonstração acima para as soluções do problema regularizado (2.15), obtemos

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (2.22)$$

onde c é uma constante positiva e

$$\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) = -\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) - \nabla p_\delta(\cdot, s).$$

Observação: Vale ressaltar que as soluções do problema regularizado também satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (2.23)$$

para todo $t > 0$.

Proposição 2.11. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geq T_{**}$), tem-se

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t-s)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > s$, onde $k = |\alpha|$ e $c(k)$ depende apenas de k .

Demonstração. Por (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &= \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)/2}e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}(t-s)^{-\frac{k}{2}}\|e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

e pela Proposição 2.10, podemos escrever

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t-s)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Proposição 2.12. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.13). Então existe $t_{**} > T_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução \mathbf{u}) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma função monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**}, \infty)$. (rever)

Demonstração. Sejam $t_0 \geq T_{**}$ e $t > t_0$. Aplicando a k -ésima derivada parcial D_k à $\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}$, fazendo o produto escalar com $D_k \mathbf{u}$, integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} ds dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} ds dx \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} ds dx = \nu \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \Delta \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} ds dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vamos analisar cada integral separadamente. Note que $D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_k \mathbf{u}\|^2$. Dessa forma

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} ds dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, s)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 - \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 dx.$$

Note que expandindo a segunda integral e utilizando integração por partes⁷ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k u_i (D_i u_j) D_k u_j dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_i (D_k u_i D_k u_j) dx$$

⁷explicar pq não tem termo de fronteira, não lembro da explicação

e utilizando a regra do produto na última integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j \, dx - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx$$

porém a primeira integral do lado direito é igual a zero pois

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j \, dx &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k \left(\sum_{i=1}^3 D_i u_i \right) D_k u_j \, dx \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k (\nabla \cdot \mathbf{u}) D_k u_j \, dx = 0 \end{aligned}$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx.$$

A terceira integral é igual a zero, já que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k D_j p D_k u_j \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j D_k p D_k u_j \, dx$$

utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_j D_k u_j \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_k \left(\sum_{j=1}^3 D_j u_j \right) \, dx = 0$$

pois novamente $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por fim, a última integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k u_i D_k u_i \, dx$$

novamente utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j D_k u_i) (D_j D_k u_i) \, dx \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j D_k u_i)^2 \, dx = - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \|D_j D_k \mathbf{u}\|^2 \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k D \mathbf{u}\|^2 \, dx \end{aligned}$$

Dito isso, voltando para (2.24) e somando em $1 \leq k \leq 3$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 - \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 \, dx + \nu \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k D \mathbf{u}\|^2 \, dx \, ds \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Lembrando da definição das normas vistas nos preliminares, multiplicando ambos os lados por 2 e reorganizando os termos, podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} & \|Du(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ &= \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_i D_k u_j D_j D_k u_i dx ds. \end{aligned}$$

(posso começar a correção daqui) Utilizando a Desigualdade de Hölder e a definição das normas, temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a **aqui precisa detalhar, a gente fez mas não consegui entender pelas fotos**

$$\|Du(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|u(\cdot, s)\|_{\infty} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds$$

que pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.2) em $\|u(\cdot, s)\|_{\infty}$ é menor ou igual a

$$\|Du(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds.$$

Em particular temos

$$\begin{aligned} & \|Du(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t [\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}]^{\frac{1}{2}} \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \end{aligned} \quad (2.25)$$

para todo $t \geq t_0$. Daí, seja $t_0 > t_*$ tal que por (2.14) $\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2$. Dessa forma, segue que

$$\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2 \quad (2.26)$$

para todo $s > t_0$. Com efeito, suponha que (2.26) é falso, dessa forma, existiria $t_1 > t_0$ tal que $\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$ para todo $t_0 \leq s < t_1$ com $\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \nu^2$. Tomando $t = t_1$ em (2.25) temos que $\|Du(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. De fato

$$\begin{aligned} & \|Du(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^{t_1} [\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}]^{\frac{1}{2}} \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \end{aligned}$$

como $s \in [t_0, t_1]$ temos que $\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$ obtemos

$$\|Du(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds$$

que resulta em $\|Du(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ como desejado. Então

$$\|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$$

o que é uma contradição. Dessa forma (2.26) é válido. De (2.25) e (2.26) temos

$$\|Du(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D^2u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|Du(\cdot, t_2)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

para todo $t \geq t_2 \geq t_0$, onde $\gamma = \nu - \|u(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} > 0$ é uma constante. Tomando $t_{**} = t_0$, finalizamos a demonstração. \square

A proposição abaixo utiliza a solução do problema linearizado para estabelecer uma estimativa importante

Proposição 2.13. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray para (2.13). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 > 0$ tem-se

$$\|D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) - D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k) \nu^{-\left(\frac{5}{4} + \frac{k}{2}\right)} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-\left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2}\right)}$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} \mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0)$ e $k = |\alpha|$.

Demonstração. Primeiramente, reescrevemos $\mathbf{v}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0),$$

onde $t > t_0$ e $\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$ é dada em (2.15). Ademais, temos que

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) = e^{\nu\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds. \quad (2.27)$$

Com efeito, considere a equação

$$\partial_s \mathbf{u}_\delta = \mathbf{Q}_\delta + \nu \Delta \mathbf{u}_\delta,$$

onde $\mathbf{Q}_\delta = -\bar{\mathbf{u}}_\delta \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta - \nabla p_\delta$. Aplique o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta(t_0-s)}$ em ambos os lados e integre sobre $[0, t_0]$, para obter

$$\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta ds. \quad (2.28)$$

Além disso, note que

$$\partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] = -\nu e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta + e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta$$

ou seja,

$$e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta = \partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] + \nu e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta.$$

Dessa forma, (2.28) se torna

$$\int_0^{t_0} \partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta ds$$

isto é,

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) - e^{\nu\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta ds,$$

por (2.13). Isto prova (2.27). Dito isso, é verdade que

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds,$$

para todo $t > t_0$. De forma análoga, deduzimos que

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds.$$

para todo $t > \tilde{t}_0$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) &= D^\alpha \left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] \right) \\ &\quad - D^\alpha \left(e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] \right) + D^\alpha \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds. \end{aligned}$$

Agora, considere que $K \subseteq \mathbb{R}^3$ é um compacto qualquer. Portanto, para cada $t > \tilde{t}_0$ e $\delta > 0$, infere-se

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq J_{\alpha, \delta}(t) + \int_{\tilde{t}_0}^t \|D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(K)} ds, \quad (2.29)$$

onde

$$J_{\alpha, \delta}(t) = \|D^\alpha (e^{\nu \Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} \\ + \|D^\alpha (e^{\nu \Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)])\|_{\mathcal{L}^2(K)}.$$

Utilizando a Proposição 2.11 e (2.22), temos que

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq J_{\alpha, \delta}(t) + c(k) \nu^{-\frac{k}{2}} \int_{\tilde{t}_0}^t (t-s)^{-\frac{k}{2}} \|e^{\nu \Delta(t-s)/2} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ \leq J_{\alpha, \delta}(t) + c(k) \nu^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{k}{2}} \int_{\tilde{t}_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds. \quad (2.30)$$

Observe que a integral pode ser simplificada, já que $s \leq \tilde{t}_0$ implica em $(t-s)^{-\frac{3}{4}} \leq (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}}$ e pela desigualdade de energia (2.23) $\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Sendo assim, podemos escrever

$$\int_{\tilde{t}_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{\tilde{t}_0}^t \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds. \quad (2.31)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder e novamente pela desigualdade de energia (2.23), segue que

$$\int_{\tilde{t}_0}^t \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \left(\int_{\tilde{t}_0}^t \|D\mathbf{u}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\tilde{t}_0}^t ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}}{(2\nu)^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.32)$$

Portanto, por (2.31) e (2.32), obtemos

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq J_{\alpha, \delta}(t) + c(k) \nu^{-(\frac{k}{2} + \frac{5}{4})} (t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Tomando $\delta = \delta'$ (ver (2.16)), temos que $J_{\alpha, \delta}(t) \rightarrow 0$, quando $\delta \rightarrow 0$, pois, dados $\sigma, \tau > 0$, é verdade que

$$\|D^\alpha (e^{\nu \Delta \tau} [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} \rightarrow 0,$$

quando $\delta \rightarrow 0$. De fato, denotando $\Phi_\delta(\cdot, \tau) = D^\alpha (e^{\nu \Delta \tau} [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)])$, tem-se

$$\Phi_\delta(\cdot, \tau) = H_\alpha(\cdot, \tau) * [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)],$$

onde $H_\alpha(\cdot, \tau) = D^\alpha E(\cdot, \tau) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$, com $E(x, \tau) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$, não depende de δ . Como $\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma) \rightarrow 0$, segue que $\Phi_\delta(x, \tau) \rightarrow 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$, quando $\delta \rightarrow 0$. Por outro lado, as seguintes estimativas valem pela desigualdade de Hölder e mudança de variáveis

$$|\Phi_\delta(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x-y, \tau) [\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)]| dy \\ \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x-y, \tau)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \|H_\alpha(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

utilizando a desigualdade triangular e (2.23) obtemos

$$|\Phi_\delta(x, \tau)| \leq 2 \|H_\alpha(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (pois $2\|H_\alpha(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante em relação a x e K é limitado, logo pertence a $\mathcal{L}^1(K)$), segue que $\|\Phi_\delta(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \rightarrow 0$, quando $\delta \rightarrow 0$ (pelo fato de K ser compacto). Dito isso, fazendo $\delta \rightarrow 0$ em (2.30) inferimos que

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2} + \frac{5}{4})}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}(t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})},$$

para todo $t_0 > \tilde{t}_0$. Tomando o supremo de todos $K \subseteq \mathbb{R}^3$ compactos, obtemos a desigualdade desejada. \square

O restante dessa seção será destinado a estudar estimativas de decaimento de energia das soluções de Leray

Teorema 2.14. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.13), então,

$$t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} o instante de tempo encontrado na Proposição 2.12. Suponha que a afirmação é falsa, nesse caso existem uma sequência crescente $t_\ell \rightarrow \infty$ (com $t_\ell \geq t_{**}$ e $t_\ell \geq 2t_{\ell-1}$ para todo ℓ) e um $\varepsilon > 0$ fixo tais que,

$$t_\ell\|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \varepsilon$$

para todo ℓ . Em particular, é verdade, pela Proposição 2.12

$$\int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \geq (t_\ell - t_{\ell-1})\|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2}t_\ell\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$, o que contradiz a desigualdade de energia (2.17), pois

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds < \infty,$$

e passando ao limite quando $\ell \rightarrow \infty$, encontramos $\varepsilon \leq 0$. Portanto, a afirmação do teorema é válida. \square

O teorema abaixo foi conjecturado por Leray no final do seu artigo (ver [14]), e foi somente resolvido 50 anos depois por Kato (ver [11]). Uma simples demonstração será apresentada abaixo utilizando conceitos que já eram conhecidos em 1934.

Teorema 2.15 (Solução do problema clássico de Leray). Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.13), então,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} como definido na Proposição 2.12. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $t_0 \geq t_{**}$ suficientemente grande tal que pelo Teorema 2.14, podemos inferir

$$t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon \tag{2.33}$$

para todo $t \geq t_0$. Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$ (ver Seção 2.2.1) obtemos, de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.13, que

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s) ds,$$

para todo $t \geq t_0$. Dito isso, utilizando a Proposição 2.10, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de energia (2.14), concluímos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

para todo $t \geq t_0$. Por (2.33), deduzimos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \varepsilon \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Note que

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \leq c,$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Sendo assim, é verdade que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\varepsilon\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.3, sabemos que

$$\begin{aligned} \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\omega, t_0)]\|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2} \|\hat{\mathbf{u}}(\omega, t_0)\|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Como $e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2} \|\hat{\mathbf{u}}(\omega, t_0)\|^2 \leq \|\hat{\mathbf{u}}(\omega, t_0)\|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, então, pelo Teorema da Convergência Dominada, inferimos

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Dito isso, concluímos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}) \varepsilon,$$

para todo $t > 0$ suficientemente grande. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. □

Note que os Teoremas 2.14 e 2.15 juntos mostram que temos o decaimento de energia na norma do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$, já que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$. Mais precisamente

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + t^{-1} [t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}]^2 \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$.

A demonstração do lema abaixo é bastante extensa, porém é de extrema importância para o último teorema dessa seção.

Lema 2.16. Para cada $k \geq 0$, denotando $U_k(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$, tem-se

$$U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty)).$$

Demonstração. O caso $k = 0$ segue da desigualdade de energia (2.14), que

$$U_0(t) = t^0 \|D^0 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > 0$ (em particular, para todo $t \geq T_{**}$). Logo, $U_0 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$.

O caso $k = 1$ também já foi provado anteriormente. Com efeito pelo Teorema 2.14, temos que $U_1(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Isso é suficiente para mostrar que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ pois $|U_1(t)| \leq 1$ para todo t suficientemente grande.

Dito isso, resta provar a afirmação para $k \geq 2$. De forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.13, dado $t_0 \geq T_{**}$ podemos escrever $\mathbf{u}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) ds,$$

para todo $t \geq t_0$. Dessa forma, para cada multi-índice α , temos que

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (2.34)$$

para todo $t \geq t_0$. Defina $U^\alpha(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|$ com $k = |\alpha|$. De (2.34) segue que

$$U^\alpha(t) \leq I_1(\alpha, t) + I_2(\alpha, t) + J_\alpha(t),$$

onde

$$\begin{aligned} I_1(\alpha, t) &= t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \\ I_2(\alpha, t) &= t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds, \\ J_\alpha(t) &= t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds, \end{aligned}$$

com $t' = \frac{t_0+t}{2}$. Conseguimos estimar $I_1(\alpha, t)$ de forma direta. Com efeito, por (2.11) e pela desigualdade de energia (2.14), inferimos que

$$|I_1(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}}.$$

Porém, note que

$$(t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(1 + \frac{t_0}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} \leq (1 + t_0)^{\frac{k}{2}}. \quad (2.35)$$

pois $\frac{t_0}{t-t_0} \leq t_0$ para todo $t \geq t_0 + 1$. Dessa forma

$$|I_1(\alpha, t)| \leq c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0), \quad (2.36)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Por outro lado utilizando a Proposição 2.11, deduzimos

$$\begin{aligned} |I_2(\alpha, t)| &\leq c(k, \nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq c(k, \nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} s^{-\frac{1}{2}} \left[s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right] ds. \end{aligned}$$

Sabemos que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$, assim, existe uma constante M_1 tal que

$$|U_1(s)| = s^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq M_1 \text{ qtp em } [T_{**}, \infty). \quad (2.37)$$

Dessa forma, também utilizando a desigualdade de energia (2.14) e o fato de $s \leq t'$ (o que implica em $t^{\frac{k}{2}}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)} \leq c(k)(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}$), concluímos que

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) M_1 \|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t-t_0)^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^{t'} s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Sendo assim, por (2.35), chegamos a

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|u_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)} (t+t_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado

$$(t-t_0)^{-\frac{3}{4}} (t+t_0)^{\frac{1}{2}} = (t-t_0)^{-\frac{1}{4}} (t-t_0)^{-\frac{1}{2}} (t+t_0)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{t+t_0}{t-t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \leq (2t_0+1)^{\frac{1}{2}}.$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Por isso, podemos escrever

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu, t_0, M_1, u_0). \quad (2.38)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Assim, obtemos

$$U^\alpha(t) \leq c(k, \nu, t_0, M_1, u_0) + J_\alpha(t), \quad (2.39)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Logo, ainda resta estimar $J_\alpha(t)$, porem não conseguimos estimar $J_\alpha(t)$ de forma geral para todo α , então faremos essa estimativa para o caso em que $|\alpha| = 2$ e depois utilizaremos indução para mostrar uma estimativa de forma geral. Com efeito, considerando $D^\alpha = D_i D_j$ (consequentemente denotando $J_\alpha(t)$ por $J_{ij}(t)$) temos por (2.11) que

$$J_{i\ell}(t) = t \int_{t'}^t \|D_i [e^{\nu\Delta(t-t_0)} D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Para estimar $\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$ Note que $D_\ell \mathbf{Q} = -D_\ell[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - D_\ell \nabla p = -D_\ell[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \nabla q_\ell$ onde $q_\ell = D_\ell p$. Aplicando o divergente nessa equação, temos que

$$-\Delta q_\ell = \operatorname{div}(D_\ell[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]).$$

Aplicando a teoria de Calderon-Zygmund, temos para cada $1 < r < \infty$

$$\|\nabla q_\ell(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|$$

o que implica em

$$\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}.$$

No nosso, caso temos

$$\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \leq c \|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$$

Dito isso, cheamos a

$$\begin{aligned} J_{i\ell}(t) &\leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \right) ds. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) ds,$$

e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1), podemos escrever

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{5}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) ds.$$

Reescrevendo a desigualdade acima, concluímos que

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t s^{-\frac{11}{8}} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left((s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{5}{4}} (s \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{3}{4}} (s \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}) \right) ds.$$

Fazendo as substituições adequadas, por (2.37), segue que

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}} ds + c(\nu) t M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Utilizando a desigualdade de Young ($ab \leq a^p p^{-1} + b^q q^{-1}$ onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$ com $a = 1$, $b = U_2(s)^{\frac{3}{4}}$, $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$), temos que

$$U_2(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_2(s). \quad (2.40)$$

Dessa forma

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu, M_1) t (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds + \left(c(\nu, M_1) t (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) t (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \right) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Para simplificar a expressão acima, note que

$$t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} = t(t+t_0)^{-1} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} = \frac{t}{t+t_0} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \leq (t+t_0)^{-\frac{3}{8}}$$

e também

$$(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} (t-t_0)^{\frac{1}{8}} = (t+t_0)^{-\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{1}{8}} (t-t_0)^{\frac{1}{8}} = (t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{t-t_0}{t+t_0} \right)^{-\frac{1}{4}} \leq (t+t_0)^{-\frac{1}{4}}.$$

Dito isso

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu, M_1) (t+t_0)^{-\frac{1}{4}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds, \quad (2.41)$$

para todo i, ℓ e $t \geq t_0 + 1$. Dessa forma, por (2.36), (2.38) e (2.41), inferimos

$$U_2(t) \leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds, \quad (2.42)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Considere agora, t_2, \mathbf{M}_2 dados por

$$t_2 := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \text{ e } \mathbf{M}_2 := \sup\{U_2(s) : t_0 \leq s \leq t_2\}.$$

Afirmamos que

$$U_2(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{M}_2 \quad (2.43)$$

para todo $t \geq t_2$. De fato, definindo $\mathbf{U}_2(t) := \sup\{U_2(s) : t_2 \leq s \leq t\}$. Se $t' \geq t_2$, então por (2.42) deduzimos que

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{U}_2(t) (t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 8c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) (t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_2(t). \end{aligned}$$

Porém, como $t \geq t_2$, temos, pela definição de t_2 que,

$$t + t_0 > t_2 > 2^{16} c_{**}^4.$$

Isso implica em $2^{16} c_{**}^4 < t + t_0$ e elevando ambos os lados a $1/4$ obtemos $16c_{**} < (t + t_0)^{\frac{1}{4}}$ que podemos reescrever como $8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} < 1/2$. Dito isso, podemos escrever

$$U_2(t) < c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

Por outro lado, se $t' < t_2$, podemos reescrever (2.42) como

$$U_2(t) \leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \left(\int_{t'}^{t_2} (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds + \int_{t_2}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds \right).$$

Observe que em $[t', t_2]$, é verdade que $U_2(s) \leq \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$, por outro lado em $[t_2, t]$, temos que $U_2(s) \leq \mathbf{U}_2(s) \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \mathbf{M}_2 \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c_* + 8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{M}_2 + 8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_2(t). \end{aligned}$$

Como $(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \leq 1$ e $8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} < \frac{1}{2}$, segue que

$$U_2(t) \leq c_* + c_{**} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

para todo $t \geq t_2$. Com isso,

$$U_2(s) \leq c_* + 8c_{**} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(s) \leq c_* + 8c_{**} \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(t)$$

para todo $s \in [t_2, t]$. Pasando ao supremo em $[t_0, t]$, inferimos

$$\mathbf{U}_2(t) \leq c_* + 8c_{**} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t)$$

para todo $t \geq t_2$. Isto prova (2.43). Ou seja, mostramos que $U_2(t)$ é limitado por uma constante que não depende de t em $[t_2, \infty)$. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([t_2, \infty))$. Porém, sabemos que em $[T_{**}, \infty)$. Em particular em $[T_{**}, t_2]$, $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave (ver [14]), o que implica em U_2 ser suave em um compacto, consequentemente limitada. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ como era desejado. Assim, mostrando o caso $k = 2$.

Suponha que $U_\ell \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ para todo $\ell < k$. Vamos mostrar que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$. Vamos mostrar que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$. Dito isso seja α um multi-índice de ordem k . Denotando D^α por $D_i D^\gamma$ (onde γ é um multi-índice de ordem $k-1$), temos, de forma análoga ao que foi feito no caso $k=2$, que

$$J_\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t \|D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Além disso por Calderon-Zygmund

$$\|D^\gamma \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D^\gamma [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)},$$

para cada $1 < r < \infty$ e qualquer multi-índice γ . Dessa forma, encontramos

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Utilizando a regra de Leibniz (ver Teorema 1.31), obtemos

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \sum_{\sigma \leq \gamma} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\sigma \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D^{\gamma-\sigma} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds,$$

e utilizando a Desigualdade de Hölder, concluímos que

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Destoe modo, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1), segue que

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Escrevendo $J_\alpha(t)$ como a soma $J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)$ onde

$$J_1(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

$$J_2(t) = c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

$$J_3(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{k-1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Como sabemos que $\|D^q \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = s^{-\frac{q}{2}} U_q(s) \leq s^{-\frac{q}{2}} M_q$, para todo $q < k$ (por hipótese de indução) e $\|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = s^{-\frac{k}{2}} U_k(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq c(\nu) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} U_k(s) ds \\ &\leq c(\nu, k) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds, \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde utilizamos o fato de

$$\begin{aligned} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} &\leq c(k)(t+t_0)^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} \leq c(k) t^{\frac{k}{2}} (t+t_0)^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} \\ &= c(k) \left(\frac{t}{t+t_0}\right)^{\frac{k}{2}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \leq c(k)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

para a última desigualdade. Análogamente para $J_2(t)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
 J_2(t) &\leq c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-(\frac{3}{8}+\frac{k}{2})} ds \\
 &\leq c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds \\
 &\leq c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t+t_0)^{-\frac{1}{4}},
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

e para $J_3(t)$

$$\begin{aligned}
 J_3(t) &\leq c(\nu) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-(\frac{3}{8}+\frac{k}{2})} U_k(s)^{\frac{3}{4}} ds \\
 &\leq c(\nu, k) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s)^{\frac{3}{4}} ds.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Lembrando que $U_k(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_k(s)$ (análogo a 2.40), segue, por (2.39), (2.44), (2.45) e (2.46), que

$$U^\alpha(t) \leq c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + c(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds,$$

onde $U^\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Portanto

$$U_k(t) \leq c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds,$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. De forma análoga ao caso $k = 2$, definimos t_k e \mathbf{M}_k por

$$t_k := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_k := \sup\{U_k(s); t_0 \leq s \leq t_k\}.$$

Sendo assim, afirmamos novamente que

$$U_k(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + 16c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)\mathbf{M}_k,$$

para todo $t \geq t_k$. Essa demonstração é exatamente a mesma que foi feita para o caso $k = 2$. Ou seja, temos que U_k é limitada por uma constante que não depende de t em $[t_k, \infty)$, como U_k é limitada em $[T_{**}, \infty)$, segue que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$, como era desejado. \square

O teorema abaixo é uma generalização dos Teoremas 2.14 e 2.15.

Teorema 2.17. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.13), então para todo $k \geq 0$ tem-se

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Os Teoremas 2.15 e 2.14 mostram os casos $k = 0$ e $k = 1$ respectivamente. Sendo assim, considere $k \geq 2$ e $t_0 \geq T_{**}$. Lembrando que

$$\begin{aligned}
 \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|D^k [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\
 &\quad + \int_{t_0}^{t'} \|D^k [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds + \int_{t'}^t \|D^k [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.
 \end{aligned}$$

Na demonstração do Lema 2.16, vimos que dado um multi-índice α com $|\alpha| = k$, podemos escrever

$$|I_1(\alpha, t)| = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \left(1 + \frac{t_0}{t - t_0}\right)^{\frac{k}{2}} \rightarrow 0, \quad (2.47)$$

quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, vimos também que

$$|I_2(\alpha, t)| = \int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t + t_0)^{\frac{1}{2}},$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| = k$. Note que, quando $t \rightarrow \infty$, o termo $(t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})}$ decai na ordem de $t^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})}$, enquanto $(t + t_0)^{\frac{1}{2}}$ cresce na ordem de $t^{\frac{1}{2}}$. Logo inferimos que

$$(t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t + t_0)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$, desde que

$$\frac{k}{2} + \frac{3}{4} > \frac{1}{2}, \quad (2.48)$$

que é verdadeiro pois (2.48) implica em $k > -\frac{1}{2}$ (que é válido pois $k \geq 2$). Dessa forma, concluímos que

$$\int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \rightarrow 0, \quad (2.49)$$

quando $t \rightarrow \infty$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} J_\alpha(t) &= t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq c(k, \nu) \left(\sum_{\ell=1}^k M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} \right) (t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

quando $t \rightarrow \infty$. Logo, por (2.47), (2.49) e (2.50), dado um multi-índice α com $|\alpha| = k$, temos que

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Portanto

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\sum_{\ell_1=1}^3 \cdots \sum_{\ell_k=1}^3 t^{\frac{k}{2}} \|D_{\ell_1} \cdots D_{\ell_k} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$ pois, $D_{\ell_1} \cdots D_{\ell_k} = D^\alpha$ para algum multi-índice α com $|\alpha| = k$. \square

O teorema acima mostra o decaimento de energia das soluções de Leray na norma do espaço $H^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{W}^{k,2}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\ell=0}^k \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Mais precisamente

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\ell=0}^k \left[t^{-\frac{\ell}{2}} t^{\frac{\ell}{2}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \right]^2 = \sum_{\ell=0}^k t^{-\ell} \left[t^{\frac{\ell}{2}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \right]^2 \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$.

2.3 Problema de Dirichlet

Nessa seção, retornamos ao problema visto na motivação do capítulo anterior.

O ponto principal dessa seção é o Teorema de Lax-Milgram, que será utilizado para mostrar a existência de soluções fracas para o problema de Dirichlet. Para demonstrá-lo, será necessário apresentar alguns resultados de análise funcional

Teorema 2.18. Seja f um operador linear limitado, então,

- (a) f é contínuo;
- (b) $\ker f$ é fechado.

Demonstração. Ver [13] p.p. 97, 98. □

Teorema 2.19. Se E é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H , então

$$H = E \oplus E^\perp.$$

Demonstração. Ver [20] p.p. 129. □

O Teorema da representação de Hilbert é o resultado mais importante para a demonstração do Teorema de Lax-Milgram, este será enunciado e demonstrado abaixo.

Teorema 2.20 (Teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert). Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle,$$

para todo $u \in H$. Além disso $\|f\| = \|v\|$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos a existência de $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle,$$

para todo $u \in H$. Seja $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado não nulo (se $f \equiv 0$, basta escolher $v = 0$), então existe $z \in H$ tal que $f(z) \neq 0$. Como f é linear, z deve ser não nulo. Ou seja, $\ker f \neq H$. Como f é limitado segue, pelo Teorema 2.18 (b), que $\ker f$ é fechado, sendo assim pelo Teorema 2.19, $H = \ker f \oplus \ker f^\perp$. Portanto, $\ker f^\perp \neq \{0\}$ (pois caso contrário $\ker f = H$). Dito isso, seja $w \in \ker f^\perp$ não nulo, então, para cada $u \in H$, $f(u)w - f(w)u \in \ker f$ já que,

$$f(f(u)w - f(w)u) = f(u)f(w) - f(w)f(u) = 0.$$

Dessa forma

$$0 = \langle f(u)w - f(w)u, w \rangle = f(u)\langle w, w \rangle - f(w)\langle u, w \rangle,$$

ou seja

$$f(u) = \left\langle u, \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \right\rangle.$$

Escolhendo $v := \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \in H$ (note que v não depende de u), temos que existe $v \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in H$.

Para mostrar que v é único, suponha que exista $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$ para todo $u \in H$. Dito isso

$$\langle u, v \rangle = f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle,$$

para todo $u \in H$. Logo é verdade que

$$\langle u, v - \tilde{v} \rangle = 0,$$

para todo $u \in H$. Em particular se $u = v - \tilde{v} \in H$, temos $\|v - \tilde{v}\|^2 = 0$, ou seja, $v = \tilde{v}$. Portanto v é único.

Por fim, resta mostrar que $\|f\| = \|v\|$. Com efeito, note que $f(v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$. Ou seja

$$\|v\|^2 = f(v) = |f(v)| \leq \|f\| \|v\|.$$

Como v é não nulo, temos $\|v\| \leq \|f\|$. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, inferimos

$$|f(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

o que implica em $\|f\| \leq \|v\|$. Portanto, vale a igualdade:

$$\|f\| = \|v\|.$$

□

Teorema 2.21 (Teorema de Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert, $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear tal que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ para todo $u, v \in H$, i.e., a forma bilinear é limitada;
2. $\beta \|u\|^2 \leq B(u, u)$ para todo $u \in H$, i.e., a forma bilinear é coerciva,

e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então, existe um único $v \in H$ tal que

$$B(u, v) = f(u),$$

para todo $u \in H$.

Demonstração. Essa demonstração sera dividida em seis passos

Passo 1: Mostremos que existe uma aplicação $A : H \rightarrow H$ tal que $B(u, v) = \langle u, Av \rangle$, para todo $u, v \in H$.

Para cada $v \in H$ defina $g_v : H \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_v(u) = B(u, v).$$

para todo $u \in H$. Claramente g_v é linear (pois B é uma forma bilinear). Além disso, g_v é limitada, já que

$$|g_v(u)| = |B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|,$$

para todo $u \in H$, onde utilizamos o fato de B ser limitada (ver item 1). Sendo assim,

$$\|g_v\| \leq \alpha \|v\|.$$

Logo, g_v é limitada. Dessa forma, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema 2.20), existe um único $w_v \in H$ tal que

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle,$$

para todo $u \in H$. Agora, seja $A : H \rightarrow H$ dado por $Av = w_v$. Dessa forma, podemos escrever

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle = \langle u, Av \rangle. \quad (2.51)$$

para todo $u, v \in H$.

Passo 2: Afirmamos que A é um operador linear e limitado.

Sejam $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim, por (2.51), obtemos

$$\langle u, A(\lambda x + y) \rangle = B(u, \lambda x + y) = \lambda B(u, x) + B(u, y) = \lambda \langle u, Ax \rangle + \langle u, Ay \rangle = \langle u, \lambda Ax + Ay \rangle,$$

para tudo $u \in H$, pois B é uma forma bilinear. Com isso $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$, para todo $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, A é linear. Além disso, dado $v \in H$, inferimos por (2.51) que

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = B(Av, v) \leq |B(Av, v)| \leq \alpha \|Av\| \|v\|,$$

onde utilizamos o fato de B ser uma forma bilinear limitada (ver item 1). Deste modo, a seguinte desigualdade é válida:

$$\|Av\| \leq \alpha \|v\|.$$

para todo $v \in H$. Portanto A é limitado.

Passo 3: É verdade que A é injetivo e $\text{Im}A$ é fechado.

Sabemos que existe $\beta > 0$ tal que $\beta \|u\|^2 \leq |B(u, u)|$ para todo $u \in H$ (ver item 2). Dessa forma, por (2.51), concluímos que

$$\beta \|u\|^2 \leq |B(u, u)| = |\langle u, Au \rangle| \leq \|u\| \|Au\|,$$

para todo $u \in H$, ou seja

$$\beta \|u\| \leq \|Au\|, \quad (2.52)$$

para todo $u \in H$. Seja $u \in \ker A$, então $Au = 0$, daí por (2.52)

$$\beta \|u\| \leq \|Au\| = 0,$$

o que implica em $u = 0$. Portanto A é injetiva.

Além disso, seja $(Au_k) \subseteq \text{Im}A$ tal que $Au_k \rightarrow v \in H$, quando $k \rightarrow \infty$. Mostremos que $v \in \text{Im}A$. Com efeito, (Au_k) é de cauchy (porque converge). Dito isso, por (2.52)

$$\beta \|u_k - u_\ell\| \leq \|Au_k - Au_\ell\| \rightarrow 0.$$

Ou seja, $(u_k) \subseteq H$ é de Cauchy. Como H é completo, existe $u_0 \in H$ tal que $u_n \rightarrow u_0$. Como A é limitado, consequentemente, é contínuo (ver Teorema 2.18 (a)), temos que $Au_k \rightarrow Au_0$, quando $k \rightarrow \infty$. Pela unicidade do limite, deduzimos que $v = Au_0 \in \text{Im}A$. Portanto, $\text{Im}A$ é fechado.

Passo 4: Vamos mostrar que A é sobrejetivo.

Sabemos que $H = \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$ (pois $\text{Im}A$ é fechado). Mostremos que $\text{Im}A^\perp = \{0\}$. Com efeito, se $w \in \text{Im}A^\perp$, temos pelo item 2, e por (2.51) que

$$\beta \|w\|^2 \leq B(w, w) \leq |B(w, w)| = |\langle w, Aw \rangle| = 0,$$

pois $Aw \in \text{Im}A$ e $w \in \text{Im}A^\perp$. Logo, $w = 0$, o que implica em $H = \text{Im}A$. Portanto, A é sobrejetiva.

Passo 5: É verdade que existe $v \in H$ tal que $f(u) = B(u, v)$ para todo $u \in H$.

Como f é um funcional linear limitado em H , temos, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema 2.20), que existe $z \in H$, tal que $f(u) = \langle u, z \rangle$, para todo $u \in H$. Como A é uma bijeção, existe um único $v \in H$ tal que $z = Av$. Dessa forma, podemos escrever

$$f(u) = \langle u, z \rangle = \langle u, Av \rangle = B(u, v), \quad (2.53)$$

para todo $u \in H$.

Passo 6: Vamos mostrar que v em (2.53) é único.

Suponha que existe $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = B(u, \tilde{v})$ para todo $u \in H$. Dessa forma, as igualdades abaixo são válidas

$$B(u, v) = f(u) = B(u, \tilde{v}).$$

para todo $u \in H$. Por isso, pela linearidade de B , segue que $B(u, v - \tilde{v}) = 0$ para todo $u \in H$. Dito isso, pelo item 2, chegamos a

$$\beta \|v - \tilde{v}\|^2 \leq |B(v - \tilde{v}, v - \tilde{v})| = 0.$$

Sendo assim, $v = \tilde{v}$. Portanto, v é único. \square

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram (Existência de soluções fracas). Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Na motivação, vimos que u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_{\Omega} Du \cdot D\phi \, dx + \int_{\Omega} u\phi \, dx = \int_{\Omega} f\phi \, dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Porém, pela densidade das funções teste em $H_0^1(\Omega)$ (pois $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$), podemos dizer que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet, se esta satisfaz a igualdade:

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ ⁸.

Defina a forma $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$, e o funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} fv \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Note que B é uma forma bilinear limitada e coerciva. Com efeito, a bilinearidade de B segue do fato do gradiente fraco D e a integral serem operadores lineares. Além disso, é verdade que

$$B(u, u) = \int_{\Omega} Du \cdot Du \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} \|Du\|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Logo, B é coercivo e, utilizando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), segue que

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |Du \cdot Dv| \, dx + \int_{\Omega} |uv| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|Du\| \|Dv\| \, dx + \int_{\Omega} |u| |v| \, dx \leq \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|Dv\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

⁸Vale ressaltar que $H_0^1(\Omega) = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Mais precisamente, pelo Teorema 1.33, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Porém, sabemos que $\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Dito isso, obtemos

$$|B(u, v)| \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Logo, B é limitado.

Por fim, temos que φ é um funcional linear limitado. De fato, a linearidade de φ segue da distributividade do produto e da linearidade da integral. Por outro lado,

$$|\varphi(v)| \leq \int_{\Omega} |f| |v| dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} < \infty$, pois por hipótese, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.21), existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = \varphi(v),$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, u é a única solução fraca para o problema de Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Robert A. Adams e John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. 2ª ed. Pure and Applied Mathematics. Amsterdam: Academic Press, 2003.
- [2] Emil Artin. *The Gamma Function*. New York: Holt, Rinehart e Winston, 1964.
- [3] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.
- [4] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [5] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [6] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.
- [7] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
- [8] Alberto Fiorenza, Maria Rosaria Formica, Tomáš Roskovec e Filip Soudský. *Detailed proof of classical Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality with historical remarks*. 2018.
- [9] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 1999.
- [10] Giovanni P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems*. 2nd. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.
- [11] Tosio Kato. «Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions». Em: *Mathematische Zeitschrift* 187.4 (1984), pp. 471–480.
- [12] Irina A. Kmit. *Hölder Spaces*. 2021.
- [13] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley, 1989.
- [14] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [15] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [16] Elon Lages Lima. *Curso de Análise vol. 2*. 12ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020.
- [17] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.
- [18] Jens Lorenz e Paulo R. Zingano. *The Navier-Stokes equations for Incompressible Flows: solution properties at potential blow-up times*. 2015.
- [19] James R. Munkres. *Analysis on Manifolds*. CRC Press, 1991.
- [20] César R. de Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. 1ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018, p. 257.
- [21] C.W. Oseen. *Hydrodynamik*. Mathematik in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.
- [22] Michael Wiegner. «Decay Results for Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations on \mathbb{R}^n ». Em: *Journal of The London Mathematical Society-second Series* 35 (1987), pp. 303–313.
- [23] Paulo R. Zingano. *Two problems in Partial Differential Equations (in Portuguese)*. 2018.