
CONTEÚDO

1	Introdução à Teoria da Medida	3
1.1	Espaços e funções mensuráveis	3
1.2	Medida	9
1.2.1	Construindo uma medida para \mathbb{R}	12
1.3	Integral de Lebesgue	14
1.4	Espaços \mathcal{L}^p	31
2	Introdução à análise funcional	45
2.1	Espaços de Banach	45
3	Espaços de Sobolev	47
3.1	Preliminares	47
3.2	Motivação	49
3.3	Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	49
3.4	Aproximações	60
3.5	Extensões	71
3.6	Traços	75
3.7	Desigualdades de Sobolev	79
3.7.1	Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev	79
3.7.2	Desigualdade de Morrey	83
3.7.3	Desigualdades gerais de Sobolev	87
3.8	Compacidade	89
4	Algumas aplicações dos Espaços de Sobolev	93
4.1	Preliminares	93
4.1.1	Desigualdades	93
4.1.2	Transformada de Fourier	94
4.1.3	Semigrupo do calor	95
4.1.4	Notação	96
4.2	Propriedades da soluções de Leray	97
4.2.1	Introdução e contexto histórico	97
4.2.2	Resultados	98
4.3	Problema de Dirichlet	111

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de σ -álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma família \mathfrak{D} de subconjuntos de X é uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes condições

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$
2. Se $S \in \mathfrak{D}$ então $S^c = X \setminus S \in \mathfrak{D}$
3. Se (S_n) é uma sequência de elementos de \mathfrak{D} então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

O par (X, \mathfrak{D}) é dito espaço mensurável e os subconjuntos de \mathfrak{D} são chamados de conjuntos mensuráveis (ou \mathfrak{D} -mensuráveis)

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não vazio e considere $\mathfrak{D} = \{\emptyset, X\}$. Afirmamos que \mathfrak{D} é uma σ -álgebra. Com efeito,

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$ pela definição.
2. $\emptyset^c = X \in \mathfrak{D}$ e $X^c = \emptyset \in \mathfrak{D}$
3. $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \mathfrak{D}$ ou $\bigcup X = X \in \mathfrak{D}$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. $\mathfrak{D} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ não é uma σ -álgebra de X pois $\{a, b\}^c = \{c, d\} \notin \mathfrak{D}$

Observação: Seja (S_α) uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha} S_{\alpha}^c \text{ e } \left(\bigcap_{\alpha} S_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^c$$

Dessa forma, se (S_n) é uma sequência de elementos de uma σ -álgebra, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$

Observação: (união finita)

Observação: (interseção finita)

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto não enumerável e considere

$$\mathfrak{D} = \{S \subseteq X; S \text{ é enumerável ou } S^c \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que \mathfrak{D} é uma σ -álgebra. De fato

1. $\emptyset \in \mathfrak{D}$ pois é enumerável e $X \in \mathfrak{D}$ pois $X^c = \emptyset$ que é enumerável
2. se $S \in \mathfrak{D}$ temos as seguintes possibilidades
 S é enumerável, então $S^c \in \mathfrak{D}$ pois $(S^c)^c = S$ é enumerável
 S^c é enumerável, então pela definição da σ -álgebra, $S^c \in \mathfrak{D}$
3. Seja (S_n) uma sequência de subconjuntos em \mathfrak{D} , isto é, $S_n \in \mathfrak{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aqui temos três possibilidades a serem consideradas
 S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável, portanto está em \mathfrak{D}
 S_n^c é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_{n_0}^c$$

é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável $S_{n_0}^c$, portanto está em \mathfrak{D}

Se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

$$S_i \subseteq X \text{ e } S_j^c \subseteq X \text{ são enumeráveis}$$

podemos afirmar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ não é enumerável, pois S_j^c é enumerável, e como X não é enumerável, segue que S_j também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c$ é enumerável. Com efeito, observe que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^c \subseteq S_j^c$$

ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathfrak{D}$.

Dessa forma, \mathfrak{D} é uma σ -álgebra

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio. Se \mathfrak{D}_1 e \mathfrak{D}_2 são σ -álgebras de X então $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ também é uma σ -álgebra de X .

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de X , o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor σ -álgebra contendo este.

Proposição 1.6. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X . Então a interseção de todas as σ -álgebras de subconjuntos de X que contem A é a menor σ -álgebra que contém A .

Demonstração.

□

Observação: (σ -álgebra gerada)

Agora definimos uma σ -álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

Definição 1.7. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a σ -álgebra \mathcal{B} gerada por todos os intervalos abertos (x, y) em \mathbb{R} , ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha); x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{D}_{\alpha},$$

onde cada \mathfrak{D}_{α} é uma σ -álgebra que contém A .

Equivalentemente, podemos dizer que \mathcal{B} é a σ -álgebra gerada por todos conjuntos abertos de \mathbb{R} . É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de \mathbb{R} pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo \mathcal{B} dessa forma é possível ver que não precisamos que \mathcal{B} seja uma σ -álgebra de \mathbb{R} mas sim de qualquer espaço topológico (X, \mathcal{T}) , nesse caso dizemos que \mathcal{B} é a σ -álgebra gerada pela topologia \mathcal{T} . Nesse trabalho a notação \mathcal{B} será utilizada apenas para a álgebra de Borel em \mathbb{R} .

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

Proposição 1.8. \mathcal{B} é a σ -álgebra gerada por todos intervalos fechados

Demonstração.

□

Exemplo 1.9. Alguns exemplos de conjuntos que estão em \mathcal{B} são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em \mathcal{B} pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em \mathcal{B} pois se $B = \{x_1, x_2, \dots\}$, então $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ que é um conjunto em \mathcal{B} pois cada $\{x_n\}$ é um conjunto fechado.
- Todo intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é um conjunto em \mathcal{B} pois $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$.

A sensação é de que a álgebra de Borel contém todos os subconjuntos de \mathbb{R} , isto é $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Porem este não é o caso, pois existem subconjuntos de \mathbb{R} que são bastante difíceis de definir (vide [??]) que não estão em \mathcal{B} . Mas se esses conjuntos são tão difíceis de definir por que precisamos de uma σ -álgebra que exclui eles?

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propriedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uma propriedade importante não é satisfeita, mas restringindo para o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ conseguimos definir a mesma medida de forma que todas propriedades são satisfeitas.

Definição 1.10. O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é dita reta estendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Observação: Operações com ∞ em $\overline{\mathbb{R}}$

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $\infty + \infty = \infty$ | 4. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$ |
| 2. $-\infty - \infty = -\infty$ | 5. $\infty \cdot \infty = \infty$ |
| 3. $x + \infty = \infty + x = \infty$ | 6. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ se $x > 0$ |

7. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$ se $x < 0$

9. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ se $x > 0$

8. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$ se $x < 0$

10. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Proposição 1.11. Seja \mathbb{R} a reta estendida. Considere $E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$, $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\widehat{\mathcal{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$ com E variando na álgebra de Borel \mathcal{B} . Então $\widehat{\mathcal{B}}$ é uma σ -álgebra em \mathbb{R} denominada álgebra estendida de Borel.

Demonstração. □

Um conceito bastante importante na teoria da medida, é a ideia de funções mensuráveis

Definição 1.12. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser \mathfrak{d} -mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\}$$

pertence a σ -álgebra.

Lema 1.13. As afirmações a seguir são equivalentes para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

(a) $A_\alpha = \{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $B_\alpha = \{x \in X ; f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $C_\alpha = \{x \in X ; f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $D_\alpha = \{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração. □

Exemplo 1.14. A função constante $x \mapsto c$ é mensurável. Com efeito, se $\alpha \geq c$, então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{d}$$

pois o único valor que a função assume é c . Se $\alpha < c$, então

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{d}$$

Portanto a função constante é mensurável

Exemplo 1.15. A função característica χ_E de um subconjunto $E \in \mathfrak{d}$ é mensurável dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

é mensurável. Dito isso, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geq 1$, então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathfrak{d},$$

pois a imagem de χ_E contém apenas os valores 0 e 1. Se $0 \leq \alpha < 1$ então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = E \in \mathfrak{d}.$$

Por fim, se $\alpha < 0$, então

$$\{x \in X ; \chi_E(x) > \alpha\} = X \in \mathfrak{d}.$$

Portanto χ_E é uma função mensurável, desde que E também seja.

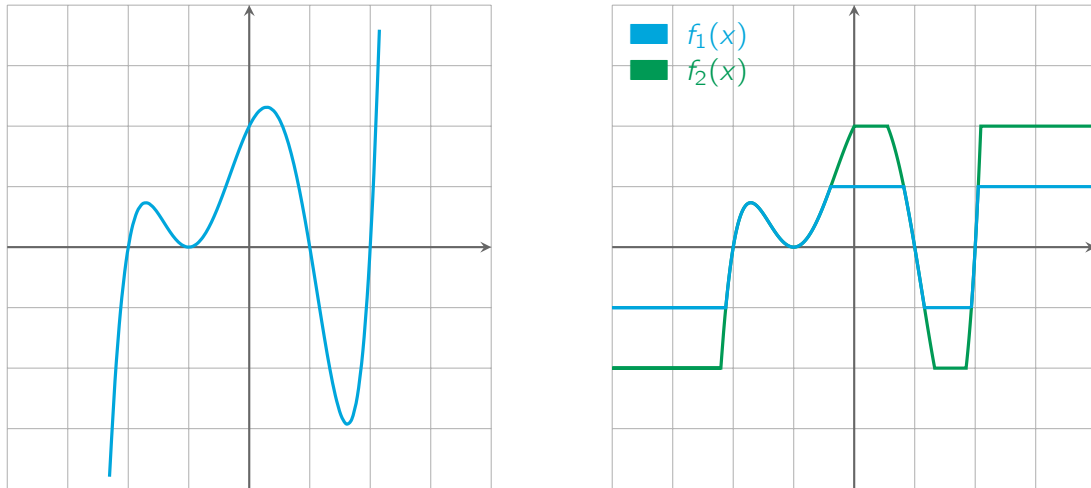


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico de f_1 e f_2

Fonte: Autoral

Exemplo 1.16. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $X \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela continuidade de f , o conjunto $f^{-1}((\alpha, \infty))$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$. Portanto f é mensurável.

Exemplo 1.17. Dada uma função f mensurável. A função *truncagem de f* (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq n \text{ e } f(x) \geq -n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$

Vamos estudar agora algumas propriedades elementares sobre funções mensuráveis

Proposição 1.18. Sejam X um espaço mensurável, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções

- (a) cf
- (b) $f^2 := f \cdot f$
- (c) $f + g$
- (d) fg
- (e) $|f|$

são mensuráveis

Demonstração.

□

Uma outra definição importante sobre funções mensuráveis é a de parte positiva e negativa de uma função

Definição 1.19. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma qualquer. Definimos as partes positiva e negativa de f respectivamente pelas funções não negativas $f^+ : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^- : X \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Lema 1.20. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então

- (a) $f = f^+ - f^-$
- (b) $|f| = f^+ + f^-$
- (c) $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$
- (d) $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

O lema acima é importante para demonstrar a proposição abaixo

Proposição 1.21. Seja X um espaço mensurável. Então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis

Demonstração. Segue direto do lema anterior. □

Agora, vamos passar a estudar funções mensuráveis na reta extendida.

Definição 1.22. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é \mathfrak{d} -mensurável (ou mensurável) se

$$\{x \in X ; f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{d}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, denotamos o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por $\mathcal{M}(X, \mathfrak{d})$

Em nenhum momento da definição acima mencionamos os elementos $\pm\infty$. O motivo será mostrado abaixo

...

Lema 1.23. Uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se

$$A = \{x \in X ; f(x) = \infty\} \in \mathfrak{d} \text{ e } B = \{x \in X ; f(x) = -\infty\} \in \mathfrak{d}$$

e a função $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável

Demonstração. □

Observação: ($cf \dots \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{d})$)

...

Lema 1.24. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$. Então as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf f_n(x) & F(x) &= \sup f_n(x) \\ f^*(x) &= \liminf f_n(x) & F^*(x) &= \limsup f_n(x) \end{aligned}$$

pertencem a $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$

Demonstração.

□

...

Corolário 1.25. Se (f_n) é uma sequência em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ que converge para f . Então $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$

Demonstração.

□

O resultado abaixo é ...

Proposição 1.26. Seja f uma função não negativa em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$. Então existe uma sequência (φ_n) em $\mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ tal que

- (a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.
- (b) cada φ_n possui um número finito de valores reais em sua imagem.
- (c) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ para cada $x \in X$.

Demonstração.

□

Para terminar essa seção, vamos definir e ver um exemplo de funções mensuráveis entre espaços mensuráveis

Definição 1.27. Sejam (X, \mathfrak{D}_X) e (Y, \mathfrak{D}_Y) espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : (X, \mathfrak{D}_X) \rightarrow (Y, \mathfrak{D}_Y)$ é mensurável quando

$$f^{-1}(E) \in \mathfrak{D}_X$$

para todo $E \in \mathfrak{D}_Y$

Exemplo 1.28.

1.2 Medida

Definição 1.29. Uma medida é uma função $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) \geq 0$ para todo $S \in \mathfrak{D}$
3. se (E_n) é uma sequência de subconjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Observação: A tripla (X, \mathfrak{D}, μ) onde X é um conjunto, \mathfrak{D} é uma σ -álgebra em X e μ uma medida em \mathfrak{D} é chamada de espaço de medida.

Observação: (medida finita e σ -finita)

Exemplo 1.30. Seja $(\mathbb{N}, \mathfrak{D})$ um espaço mensurável, onde $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A função $\mu : \mathfrak{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dada por $\mu(E) = \#S$, se S é finito, e $\mu(S) = \infty$ se S é infinito, é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito,

1. $\mu(\emptyset) = 0$ por vacuidade
2. $\mu(S) \geq 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(S_k) = \infty$. Então a união é infinita pois contém pelo menos um conjunto infinito. Logo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por outro lado, se $\mu(S_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que a união pode ser infinita. Nesse caso

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por fim, se a união é finita, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_n = \emptyset$ para todo $n > k$. Assim

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^k S_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

Exemplo 1.31. Sejam (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida e $A \in \mathfrak{D}$ um conjunto fixo. Então a função λ dada por

$$\lambda(S) = \mu(A \cap S)$$

é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito

1. $\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ pois μ é uma medida
2. $\lambda(S) \geq 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathfrak{D} . Então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap S_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(S_n)$$

pois μ é uma medida e a sequência $(A \cap S_n)$ é disjunta.

Portanto λ é uma medida

Exemplo 1.32. Sejam $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ medidas em uma σ -álgebra \mathfrak{D} e $c_1, c_2, \dots, c_j > 0$. Então

$$\mu(S) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S)$$

é uma medida em \mathfrak{D} . De fato

1. $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(\emptyset) = 0$ pois $\mu_j(\emptyset) = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$.
2. $\mu(S) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S) \geq 0$ pois $c_j \mu_j(S) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, k$.
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathfrak{D} . Então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

O próximo passo é estudar algumas propriedades elementares provenientes da definição de medida.

Lema 1.33. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Se $E \subseteq F$ onde E e F são conjuntos mensuráveis. Então $\mu(E) \leq \mu(F)$

Demonstração. Note que

$$F = E \cup (F \setminus E) = E \cup (F \setminus E),$$

onde E e $F \setminus E$ são conjuntos mensuráveis disjuntos. Dessa forma

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E).$$

Portanto, como μ é uma função não-negativa $\mu(F) \geq \mu(E)$. □

Observação: Da demonstração do lema anterior, conseguimos ver que se $E \subseteq F$

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$$

desde que $\mu(E) < \infty$.

Lema 1.34. Seja μ uma medida em \mathfrak{D} . Então

(a) se (E_n) é uma sequência crescente em \mathfrak{D} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

(b) se (E_n) é uma sequência decrescente em \mathfrak{D} e $\mu(E_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

Demonstração. □

Definição 1.35. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Dizemos que duas funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ são iguais em quase toda parte em X e denotamos por $f = g$ qtp em X se existe um conjunto $N \in \mathfrak{D}$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \notin N$.

Um outro conceito importante é o conceito de convergência em quase toda parte

Definição 1.36. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Dizemos que uma sequência de funções (f_n) converge para f em quase toda parte, se existe um conjunto $N \in \mathfrak{D}$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \notin N$.

Por fim, para terminar essa seção, introduzimos o conceito de carga

Definição 1.37. Uma carga é uma função $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geq 0$ para todo $S \in \mathfrak{D}$
3. se $(S_n) \subseteq \mathfrak{D}$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

isto é uma medida que não satisfaz a não-negatividade.

1.2.1 Construindo uma medida para \mathbb{R}

Nosso objetivo agora é construir uma medida para \mathbb{R} e mostrar o motivo de utilizar a algebra de Borel ao invés de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definição 1.38. O comprimento de um intervalo aberto I é uma função ℓ dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. O tamanho de A deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . A definição abaixo formaliza essa ideia

Definição 1.39. A medida exterior $m(\cdot)$ de um conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é definida por

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k); I_1, I_2, \dots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Essa definição envolve uma soma infinita de uma sequência t_1, t_2, \dots , de elementos de $[0, \infty]$, que é ∞ se pelo menos algum $t_k = \infty$, ou se a série definida pelas somas parciais de t_k é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_k.$$

Exemplo 1.40. Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto finito. Dado $\varepsilon > 0$ defina a sequência I_k de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leq n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então I_1, I_2, \dots , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo, $m(A) \leq 2\varepsilon n$. Como ε é arbitrário, temos que $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

Proposição 1.41. Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, \dots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto enumerável. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ defina a sequência

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right).$$

Dessa forma, I_1, I_2, \dots , é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que $m(A) < 2\varepsilon$. Pelo fato de ε ser arbitrário, temos que $m(A) = 0$. □

Uma outra propriedade da medida exterior é sua invariância a translação

Proposição 1.42. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a; a \in A\}$$

Demonstração. Seja I_1, I_2, \dots , uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A . Dito isso $t + I_1, t + I_2, \dots$, é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem $t + A$. Logo

$$m(t + A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que $m(t + A) \leq m(A)$.

Para verificar a desigualdade na outra direção note que $A = -t + (t + A)$, então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t + A)) \leq (t + A).$$

Portanto $m(A) = m(t + A)$

□

(texto motivador)

Proposição 1.43. Seja (A_n) uma sequência de subconjuntos de \mathbb{R} . Então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Demonstração.

□

(medida do intervalo fechado) (explicar teorema de Heine-Borel)

Proposição 1.44. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então $m([a, b]) = b - a$

(o pulo do gato)

Proposição 1.45. Existem subconjuntos disjuntos de \mathbb{R} A e B tais que

$$m(A \cup B) \neq m(A) + m(B)$$

Demonstração.

□

Teorema 1.46. Não é possível definir uma medida μ que generaliza ℓ em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demonstração.

□

(agora mostrar que em \mathcal{B} é uma medida)

1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point" of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida (X, \mathfrak{M}, μ) fixo.



Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Definição 1.47. Uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem ($\#\varphi(X) < \infty$)

Uma função φ simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \quad (1.1)$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \mathfrak{D}$. Essa representação é única pelo fato de todos a_j serem distintos, os conjuntos E_j serem disjuntos para todo $j = 1, \dots, n$, além disso, $X = \bigcup_{j=1}^n E_j$.

Definição 1.48. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de φ em relação a μ por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

Observação: Adotamos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 independente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

Lema 1.49. Dadas funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $c \geq 0$ tem-se

(a) $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$

(b) $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$

(c) A aplicação $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$ para todo $E \in \mathfrak{D}$ é uma medida em \mathfrak{D} .

Demonstração.

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu.$$

Com efeito, para $c = 0$,

$$\int c\varphi d\mu = 0 = c \int \varphi d\mu.$$

por outro lado, para $c > 0$, podemos escrever $c\varphi$ da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n ca_j\chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n ca_j\mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j\mu(E_j) = c \int \varphi d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^m b_k\chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representação para $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j} + \sum_{k=1}^m b_k\chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessariamente é a representação padrão, pois é possível que existam $j_0, j_1 \in \{1, \dots, n\}$ e $k_0, k_1 \in \{1, \dots, m\}$, tais que $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$.

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k; j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por c_h com $h = 1, \dots, \#H$, e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos G_h são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório $\widetilde{\sum}$ está relacionado aos índices $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de $\varphi + \psi$ por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h\chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\ &= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) \end{aligned}$$

como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) \quad e \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

(c) Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida em \mathfrak{D} . Com efeito,

$$1. \lambda(\emptyset) = \int \varphi \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

2. Note que como $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ os elementos a_j na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que $0 \leq \varphi(x)$ para todo $x \in X$, daí

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x),$$

pois, como os conjuntos E_j são disjuntos, existe um único $1 \leq j_0 \leq n$ tal que $x \in E_{j_0}$. Dessa forma, para todo $j \neq j_0$, $\chi_{E_j}(x) = 0$, então

$$0 \leq \varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E \cap E_j) \geq 0$$

pois mostramos que $a_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ e μ é uma medida.

3. Considere $(F_k) \subseteq \mathfrak{F}$ uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned}
 \lambda \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) &= \int \varphi \chi_{\bigcup F_k} \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \mu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) \cap E_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi \chi_{F_k} d\mu \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k)
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.50. A função

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porém essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utilizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido. Com efeito, considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu^*)$ onde \mathcal{B} é a álgebra de Borel e μ^* é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\mu^* = \mu^*(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois \mathbb{Q} é enumerável.

Agora, podemos estender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negativa (não necessariamente simples)

Definição 1.51. A integral de uma função $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ em relação a μ é definida por

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu$$

onde φ são funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Além disso, definimos a integral da função f sobre um conjunto mensurável

Definição 1.52. A integral de $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ sobre um conjunto $E \in \mathfrak{D}$ é dada por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

...

Lema 1.53. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $E, F \in \mathfrak{D}$. Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se $f \leq g$ tem-se

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

(b) se $E \subseteq F$ tem-se

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$$

Demonstração.

(a) Seja φ uma função simples em M^+ , então

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu = \int g d\mu$$

(b) Como $f \chi_E \leq f \chi_F$, segue do item anterior que

$$\int f \chi_E d\mu \leq \int f \chi_F d\mu,$$

dito isso

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 1.54 (Teorema da Convergência Monótona). Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para f , então,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \rightarrow f$ onde $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, pelo corolário ?? temos que $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Pela monotonicidade da sequência $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, pelo item (a) do lema anterior

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dito isso

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, seja $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leq \varphi \leq f$ e considere

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\} = \{x \in X; [f_n - \alpha \varphi](x) \geq 0\}$$

como f_n e φ são funções mensuráveis, temos que $A_n \in \mathfrak{D}$. Além disso, $A_n \subseteq A_{n+1}$ já que $f_n \leq f_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0, 1)$ e $0 \leq \varphi \leq f$. Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha \varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \quad (1.2)$$

Dessa forma, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X , segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi \chi_{A_n} d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

... fazendo $n \rightarrow \infty$ em 1.2

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de φ ser uma função simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$ tem-se que

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

□

O Lema 1.49 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, também é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

Corolário 1.55. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ e $c > 0$, então são válidas as seguintes afirmações

(a) $\int cf d\mu = c \int f d\mu$

(b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c = 0$

$$\int cf \, d\mu = 0 = c \int f \, d\mu.$$

Se $c > 0$, considere (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ convergindo para f (lema ??). Dito isso, $(c\varphi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para cf . Pelo Lema 1.49 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int cf \, d\mu = \lim \int c\varphi_n \, d\mu = c \lim \int \varphi_n \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ que convergem para f e g respectivamente. Dessa forma $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f + g$. Portanto

$$\int (f + g) \, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

Lema 1.56 (Lema de Fatou). Se $(f_n) \subseteq M^+(X, \mathfrak{D})$, então

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$, dessa forma $g_m \leq f_n$ para todo $m \leq n$. Sendo assim,

$$\int g_m \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$$

para todo $m \leq n$. Desse modo

$$\int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para seu supremo, ou seja, $\liminf f_n$. Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int \liminf f_n \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessariamente simples

Corolário 1.57. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\lambda(E) = \int f \chi_E \, d\mu$$

é uma medida.

Demonstração.

1. $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int f \chi_{\emptyset} d\mu = \int 0 d\mu = 0$.
2. Como $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ temos que $\lambda(E) = \int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$.
3. Sejam E_n uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathfrak{D} , $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e considere f_n definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k}$$

Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que

$$\int f_n d\mu = \int \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \int f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k).$$

Além disso, podemos escrever

$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f \chi_{E_k} = f \chi_E$$

desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos.

Por fim, como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ que converge para $f \chi_E$, pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$$

Portanto, λ é uma medida. □

Corolário 1.58. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,

$$\int f d\mu = 0$$

Demonstração. Suponha que $\int f d\mu = 0$ e considere o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X ; f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$. Note que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0.$$

Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso

$$E = \{x \in X ; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pois se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, logo

$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim, $x \in E$.

Por outro lado, se $x \in E$, temos que $f(x) > 0$. Utilizando a propriedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é, $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como queríamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que (E_n) é uma sequência crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$, para todo $x \in E^c$ com $\mu(E) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ em quase toda parte em X .

Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ em quase toda parte em X . Se $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Sendo assim, considerando $f_n = n\chi_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f \leq \liminf f_n$ e pelo Lema de Fatou

$$0 \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f \, d\mu = 0.$$

□

Corolário 1.59. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então a aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua em relação a μ , isto é, se $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é, $f\chi_E = 0$ em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1.60. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ que converge em quase toda parte de X para a função $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, então

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

Demonstração. Seja N um conjunto de medida nula. Suponha que (f_n) converge para f em todo o pontos de $M = N^c$. Dessa forma, a sequência $(f_n \chi_M)$ converge para $f \chi_M$, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f \chi_M d\mu = \lim \int f_n \chi_M d\mu.$$

Além disso, podemos escrever f e f_n da seguinte forma

$$f = f \chi_M + f \chi_N \text{ e } f_n = f_n \chi_M + f_n \chi_N,$$

pois $M = N^c$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f \chi_N$ e $f_n \chi_N$ são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.58, segue que

$$\lim \int f_n d\mu =$$

□

O resultado abaixo ...

Corolário 1.61. Seja (g_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \dots + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g_n \geq 0$, temos que (f_n) é uma sequência crescente que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{n=1}^k g_n \right) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu$$

Portanto

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$

□

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

Definição 1.62. O conjunto $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ das funções integráveis consiste em todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, tais que as integrais

$$\int f^+ d\mu \text{ e } \int f^- d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de f em relação a μ por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

e se E é um conjunto mensurável

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Qualquer representação de f como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja f uma função integrável e escreva f como $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções integráveis não negativas, então

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu.$$

Como $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$, segue que

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Da mesma forma que definimos uma medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exige o lema abaixo

Lema 1.63. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. A aplicação $\lambda : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de f (em relação a μ).

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+(X, \mathfrak{D}, \mu)$, pelo Corolário ?? temos que as funções $\lambda^+, \lambda^- : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu \text{ e } \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

são medidas em \mathfrak{D} e são finitas pelo fato de f ser uma função integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ temos que λ é uma carga. \square

Como a aplicação λ definida acima é uma carga, vemos que se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, então

$$\int_E f d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propriedades elementares das integrais de funções mensuráveis

Teorema 1.64. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. Além disso

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu. \quad (1.3)$$

Demonstração. Seja f uma função integrável, mostremos que $|f|$ também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \text{ e } |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+ d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

é finita pois f é integrável, e

$$\int |f|^- d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

que é finita. Portanto $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que $|f|$ é integrável, dessa forma

$$\begin{aligned} f^+ &\leq f^+ + f^- = |f| \\ f^- &\leq f^+ + f^- = |f| \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} \int f^+ d\mu &\leq \int |f| d\mu \\ \int f^- d\mu &\leq \int |f| d\mu \end{aligned}$$

ambas finitas pois $|f|$ é integrável. Portanto f é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integrável e a desigualdade triangular.

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$$

□

Corolário 1.65. Se $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$, $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e $|f| \leq |g|$, então $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$$

Demonstração. Se g é integrável então pelo Teorema anterior $|g|$ também o é. Além disso, como $|f| \leq |g|$

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu,$$

como $|g|$ é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de $|f|$ também ser finita, ou seja, $|f|$ é integrável e novamente pelo Teorema anterior, f é integrável. \square

Teorema 1.66. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f + g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e

$$(a) \int cf d\mu = c \int f d\mu$$

$$(b) \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Demonstração.

(a) Se $c \geq 0$. Note que $(cf)^+ = cf^+$ e $(cf)^- = cf^-$. Dito isso

$$\int cf d\mu = \int cf^+ - cf^- d\mu$$

como cf^+ e cf^- são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.55

$$\int cf d\mu = c \int f^+ - f^- d\mu = c \int f d\mu$$

Se $c < 0$ a demonstração é análoga, basta perceber que $(cf)^+ = -cf^-$ e $(cf)^- = -cf^+$ ambas funções não negativas pois $-c > 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$, então pelo Teorema 1.64 $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$, como $|f + g| \leq |f| + |g|$ temos que $f + g$ é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f + g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.57 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

\square

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

Teorema 1.67 (Teorema da Convergência Dominada). Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo X . Note que

$$\lim |f_n| \leq g \implies |f| \leq |g|,$$

como por hipótese f é mensurável e g é integrável, segue pelo Corolário 1.65 que f é integrável. Além disso, como $-g \leq f_n \leq g$ temos que $g + f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.64 temos que

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu \\ &= \int (g + \lim f_n) d\mu \\ &= \int \lim (g + f_n) d\mu \\ &= \int \liminf (g + f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu \\ &= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

que implica em

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \quad (1.4)$$

Por outro lado, $g - f_n \geq 0$, de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad (1.5)$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

isto é¹

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ onde a aplicação $x \mapsto f(x, t)$ é mensurável para todo $t \in [a, b]$.

¹ $\limsup x_n \leq x \leq \liminf x_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

Corolário 1.68. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

Demonstração. Seja t_n uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0 e considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = f(x, t_n)$. Então como $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ com g integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \int f(x, t_0) d\mu(x) &= \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) d\mu(x) \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x, t_n) d\mu(x) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

Corolário 1.69. Se a aplicação $t \mapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F dada por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração. Mostremos que $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$. Com efeito

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x) = \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

□

Corolário 1.70. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \rightarrow f(x, t_0)$ seja integrável em X , que $\partial_t f$ existe em $X \times [a, b]$ e que existe uma função integrável g em X tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t , com $t \neq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo $x \in X$. Desde modo a função $x \mapsto \partial f / \partial t(x, t)$ é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_0 , entre t_0 e t tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left| f(x, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right| \leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0) \right|$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0| |\partial f / \partial t(x, s_0)|$ é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.65 temos que f é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| < g(x)$$

para todo $x \in X$. Consequentemente

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| < g(x)$$

para valores de n suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. □

1.4 Espaços \mathcal{L}^p

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue \mathcal{L}^p , que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências p -ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

Proposição 1.71. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. A aplicação $N_\mu : \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$ em quase toda parte em X .

Demonstração. Note que

$$1. N_\mu(f) = \int |f| d\mu \geq \int 0 d\mu = 0.$$

$$2. N_\mu(\lambda f) = \int |\lambda f| d\mu = \int |\lambda| |f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$$

$$3. N_\mu(f + g) = \int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$$

Portanto N_μ é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Observação: Note que $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ é um espaço vetorial com as operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto se deve ao fato que $\mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$ é um subespaço vetorial do espaço de funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Estamos interessados em transformar \mathcal{L} em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 1.72. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu)$. Dizemos que f e g são μ -equivalentes ($f \sim_\mu g$) se $f \equiv g$ em quase toda parte em X .

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{[f] ; f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{D}, \mu) ; g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^1 ou espaço das funções somáveis. Esse espaço, munido das operações

$$\begin{aligned}[f] + [g] &= [f + g] \\ [\lambda f] &= \lambda[f]\end{aligned}$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Proposição 1.73. Seja (X, \mathfrak{F}, μ) um espaço de medida. A aplicação $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$$

para todo $[f] \in \mathcal{L}^1$ é uma norma

Demonstração. Note que apenas precisamos mostrar que $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, pois as outras propriedades são análogas à demonstração da Proposição 1.71. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto $\|\cdot\|_1$ é uma norma e $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado. \square

No restante do texto, adotaremos a notação $[f] = f$, ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com os seus representantes.

Definição 1.74. Seja $1 \leq p < \infty$ um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{F}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável, } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^p .

Nosso intuito agora é mostrar que \mathcal{L}^p é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em \mathcal{L}^p .

Teorema 1.75 (Desigualdade de Young). Sejam $A, B \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados^a. Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

^a p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração. Seja $\alpha \in (0, 1)$ e defina $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Note que $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$. Dessa forma

- $t \in (0, 1)$ então $\varphi'(t) < 0$ pois $t^{\alpha-1} > 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} < 0$
- $t \in (1, \infty)$ então $\varphi'(t) > 0$ pois $t^{\alpha-1} < 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que φ é decrescente em $(0, 1)$ e crescente em $(1, \infty)$. Ou seja, como φ é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ para todo $t \geq 0$ e $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Assim

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) \implies \alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1 \implies t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

Sejam $a, b > 0$, então para $t = \frac{a}{b}$ temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^\alpha b^{-\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por b , encontramos

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se $t = 1$, isto é $a = b$. Agora considere que $\alpha = \frac{1}{p} \in (0, 1)$, ou seja, $1 < p < \infty$. Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b,$$

e por hipótese $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo $a = A^p$ e $b = B^q$, temos o resultado desejado

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando $A^p = B^q$. □

Teorema 1.76 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Demonstração. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ então $f \equiv 0$ qtp em X ou $g \equiv 0$ qtp em X . Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \text{ e } B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q}. \quad (1.6)$$

Como $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, então $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.65

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto $|fg|$ é integrável, isto é, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Por fim, integrando (1.6) com respeito a μ , chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} d\mu \leq \int \left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}\right) d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int |g|^q d\mu.$$

Pela definição da norma em \mathcal{L}^p segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queríamos demonstrar. \square

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando $p = q$, o que acontece apenas quando $p = q = 2$.

Corolário 1.77 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se $f, g \in \mathcal{L}^2$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq \int |f|^2 d\mu \int |g|^2 d\mu$$

Demonstração. A primeira desigualdade é o Teorema 1.64 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. \square

Teorema 1.78 (Desigualdade de Minkowski). Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. Na Proposição 1.71 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para $p = 1$. Dito isso, seja $1 < p < \infty$. Como $f, g \in \mathcal{L}^p$, então f e g são mensuráveis. Dessa forma, $f + g$ também é mensurável. Mostremos agora que $f + g \in \mathcal{L}^p$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |f + g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\ &\leq 2^p(|f|^p + |g|^p). \end{aligned}$$

Daí

$$\int |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int (|f|^p + |g|^p) d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right)$$

que é uma integral finita. Portanto $f + g \in \mathcal{L}^p$.

Também é fácil ver que

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Agora, seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Daí $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$. De fato,

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q^q = \int |f + g|^{q(p-1)} d\mu = \int |f + g|^p < \infty \quad (1.7)$$

pois $f + g \in \mathcal{L}^p$. Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f| |f + g|^{p-1} d\mu = \| |f| + |f + g|^{p-1} \|_1 \leq \| |f| \|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.8)$$

Analogamente

$$\int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (1.9)$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \\ &\leq \int |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Se $\|f + g\|_p = 0$, então

$$\|f + g\|_p = 0 \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que $\|f + g\|_p \neq 0$ para obter

$$\frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f + g\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como p e q são expoentes conjugados, segue que $p - \frac{p}{q} = 1$. Portanto

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para $1 \leq p < \infty$. □

Agora, vamos provar que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.79. A aplicação $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ pois $|f| \geq 0$.
2. $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ (} f \sim_\mu 0 \text{)}$
3. $\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\lambda|^p |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$
4. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto $\|\cdot\|_p$ é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

Definição 1.80. Seja (f_n) uma sequência em \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$. Dizemos que (f_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$

Definição 1.81. Sejam (f_n) uma sequência em \mathcal{L}^p e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$. Dizemos que (f_n) é convergente e converge para f se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

Definição 1.82. Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Teorema 1.83 (Teorema de Riesz-Fischer). \mathcal{L}^p com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em \mathcal{L}^p . Mostremos que (f_n) é convergente. Com efeito, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$. Escolhendo ε de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n} \tag{1.10}$$

Defina $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$, pois $g \geq 0$ e

$$g = |f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n|$$

isto é, g é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis (f_n é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que $g \in \mathcal{L}^p$. De fato

$$\int |g|^p d\mu = \int g^p d\mu,$$

pois $g \geq 0$. Pela definição de g temos

$$\int g^p d\mu = \int \left(|f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left(|f_1| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \left(|f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em \mathcal{L}^p e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^k \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leq \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right)^p < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}^p$. Agora seja, $E = \{x \in X; g(x) < \infty\} \in \mathfrak{D}$. Dito isso, $N = E^c = \{x \in X; g(x) = \infty\} \in \mathfrak{D}$. Mostremos que N tem medida nula. Com efeito, suponha que $\mu(N) > 0$, dessa forma

$$\int_X |g|^p \geq \int_N |g|^p = \infty \mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois $g \in \mathcal{L}^p$. Dessa forma $\mu(N) = 0$, isto é, $g < \infty$ em quase toda parte em X . Sendo assim, defina $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que $f \in \mathcal{L}^p$. Note que

$$f(x) = \left(f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| \chi_E \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente, $|f|^p < g^p$. Logo

$$\int |f|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}^p$. Por outro lado, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= f_1(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$, então $\lim f_n = f$ em quase toda parte em X . É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leq |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \quad (1.11)$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in \mathcal{L}^p$, então $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p d\mu = 0$$

Isto prova que \mathcal{L}^p é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue, \mathcal{L}^∞ explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

Definição 1.84. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{D}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue \mathcal{L}^∞ . Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in X\} = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que f é uma função essencialmente limitada.

Observação: Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

isto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leq M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato, $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X se, e somente se, existe $N \in \mathfrak{D}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in N^c$. Note que $\{x \in X; |f(x)| > M\} \subseteq N$, dessa forma

$$\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) \leq \mu(N) = 0$$

Portanto, $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$.

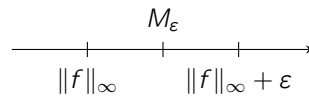
Reciprocamente, se $\mu(\{x \in X; |f(x)| > M\}) = 0$, então $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \{|f(x)| > M\}^c$, isto é, $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X .

Proposição 1.85. Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $f \in \mathcal{L}^\infty$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$, então existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ em quase toda parte em X . Daí, como $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geq 0; |f(x)| \leq M_0 \text{ qtp em } X\}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ conseguimos encontrar $M_\varepsilon \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\varepsilon$ em quase toda parte em X .



Como $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$, então

$$|f(x)| \leq M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ chegamos a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que \mathcal{L}^∞ é um espaço vetorial normado

Proposição 1.86. A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_\infty \geq 0$ pois 0 é cota inferior de $\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ qtp em } X\}$.
2. $\|f\|_\infty = 0$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\varepsilon$ em quase toda parte em X , com $M_\varepsilon < \varepsilon$. Daí, $|f(x)| < \varepsilon$ em quase toda parte em X . Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, encontramos

$$|f(x)| \leq 0 \text{ qtp em } X$$

Dessa forma, $f(x) = 0$ em quase toda parte em X .

Reciprocamente, $\|0\|_\infty = \inf\{M \geq 0; 0 \leq M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3. $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em \mathcal{L}^∞) Se $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ então as funções são limitadas em quase toda parte em X , dito isso, $f + g$ também é limitada em quase toda parte em X . Logo $f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

Por outro lado, como $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, então existem $M, \hat{M} \in \mathfrak{D}$ tais que $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$ e $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \notin M$ e $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ para todo $x \notin \hat{M}$. Seja $N = M \cup \hat{M} \in \mathfrak{D}$. Daí $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leq \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$. Além disso

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $x \notin N$, com $\mu(N) = 0$. Dessa forma

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. □

Proposição 1.87 (Desigualdade de Hölder em \mathcal{L}^∞). Seja (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Demonstração. Note que se $g \in \mathcal{L}^\infty$ então $|g| \leq \|g\|_\infty$ em quase toda parte em X . Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu = \int |f| |g| d\mu \leq \int |f| \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que \mathcal{L}^∞ também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

Teorema 1.88 (Teorema de Riesz-Fischer). \mathcal{L}^∞ é um espaço completo

Demonstração. □

Agora vamos construir os espaços ℓ^p que são um caso particular dos espaços \mathcal{L}^p

Exemplo 1.89. Sejam $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

...

Observação: Denotamos o espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ por ℓ^p

Exemplo 1.90. $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \dots$

Vejamos mais algumas propriedades importantes dos espaços \mathcal{L}^p

Proposição 1.91. Sejam (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida e $0 < p < q < r \leq \infty$. Então

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$$

Demonstração. ... □

Teorema 1.92 (Desigualdade de Interpolação). Sejam (X, \mathfrak{D}, μ) um espaço de medida e $0 < p < q < r \leq \infty$. Então $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{L}^q$ e

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde $\lambda \in (0, 1)$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \quad \left(\text{i.e., } \lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \right) \quad (1.12)$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $r = \infty$ Note que

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q} \in (0, 1)$$

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$, tem-se que

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q d\mu = \int |f|^{q-p} |f|^p d\mu \leq \int \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p d\mu = \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p < \infty.$$

Com isso $f \in \mathcal{L}^q$ e ainda mais

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e como $\lambda = \frac{p}{q}$, segue que

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

– $r < \infty$ Note que multiplicando (1.12) por q , temos

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1.$$

Com isso, $\frac{p}{\lambda q}$ e $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ são expoentes conjugados. Dito isso, aplicando a Desigualdade de Hölder com $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$ temos que

$$\begin{aligned} \int |f|^q d\mu &= \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q} d\mu \\ &= \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \\ &\leq \| |f|^{\lambda q} \|_{\frac{p}{\lambda q}} \| |f|^{(1-\lambda)q} \|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\ &= \left(\int |f|^{\lambda q \cdot \frac{p}{\lambda q}} \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^{(1-\lambda)q \cdot \frac{r}{(1-\lambda)q}} \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \left(\int |f|^p \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^q \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Daí, $f \in \mathcal{L}^q$. Além disso

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q} \iff \|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim, mostrada a desigualdade de interpolação. □

Proposição 1.93. Sejam (X, \mathfrak{B}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q \leq \infty$. Então $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Demonstração. ... □

Teorema 1.94 (Desigualdade de Chebyshev). Sejam (X, \mathfrak{B}, μ) um espaço de medida e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leq p < \infty$. Então

$$\|f\|_p \geq \alpha [\mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\})]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. ... □

Agora vamos ver um resultado sobre os espaços ℓ^p

Proposição 1.95. Sejam $0 < p < q \leq \infty$. Então $\ell^p \subseteq \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $q = \infty$

Seja $x \in \ell^p$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. É fácil ver que

$$|x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ é cota superior de $x = (x_n)$. Dito isso

$$\|x\|_q = \|x\|_{\infty} = \sup |x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo $x \in \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

– $q < \infty$

Utilizando a Desigualdade de Interpolação com $r = \infty$ e $\lambda = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ para obter que $\ell^p = \ell^p \cap \ell^r \subseteq \ell^q$ (pelo caso $q = \infty$) e

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\infty}^{1 - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_p^{1 - \frac{p}{q}} = \|x\|_p.$$

Assim, demonstrada a proposição. □

Os proximos resultados estão relacionados a densidade das funções simples em \mathcal{L}^p e \mathcal{L}^{∞}

Definição 1.96. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $E \subseteq X$ é dito denso em X se todo ponto de X é aderente a E . Isto é, dado $x \in X$ existe uma sequência (x_n) de elementos de E tal que $x_n \rightarrow x$.

Teorema 1.97. Seja $1 \leq p < \infty$. O conjunto das funções simples $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ com $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, n$ é denso em \mathcal{L}^p

Demonstração. Considere o conjunto

$$Y = \left\{ f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} ; \mu(E_j) < \infty \right\}.$$

Note que dada uma função $f \in Y$ temos que

$$\int |f|^p d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \right|^p d\mu = \int \sum_{j=1}^n |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(E_j) < \infty.$$

Isto é, $f \in \mathcal{L}^p$. Consequentemente $Y \subseteq \mathcal{L}^p$.

Por outro lado, seja $f \in \mathcal{L}^p$ sabemos que $f = f^+ - f^-$ onde $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$. Além disso pelo Lema ?? temos que existem seqüências $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$ de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{D})$ tais que

$$0 \leq \varphi_n^\pm \leq \varphi_{n+1}^\pm \text{ e } \varphi_n^\pm \rightarrow f^\pm.$$

É fácil ver que $(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathfrak{D})$ é uma seqüência de funções simples tal que

$$\lim(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \lim \varphi_n^+ + \lim \varphi_n^- = f^+ - f^- = f.$$

Seja $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim (φ_n) é uma seqüência de funções simples tal que $\varphi_n \rightarrow f$. Perceba que

$$|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leq f^+ + f^- = |f|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f \in \mathcal{L}^p$, então

$$\int |\varphi_n|^p d\mu \leq \int |f|^p d\mu < \infty,$$

ou seja, $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{L}^p$. Consequentemente, denotando φ_n por

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j \chi_{E_j}$$

segue que

$$|a_j|^p \mu(E_j) \leq \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \mu(E_j) = \int \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \chi_{E_j} d\mu = \int |\varphi_n|^p d\mu < \infty.$$

Isto nos diz que $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, m_n$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(\varphi_n) \subseteq Y$. Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \|\varphi_n - f\|_p^p = \lim \int |\varphi_n - f|^p d\mu = \int \lim |\varphi_n - f|^p d\mu = 0$$

pois

$$\lim \varphi_n = f \text{ e } |\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto Y é denso em \mathcal{L}^p , já que dada uma função $f \in \mathcal{L}^p$, encontramos uma seqüência em Y que converge para f . \square

Teorema 1.98. O conjunto das funções simples é denso em \mathcal{L}^∞ .

Demonstração.

□

O proximos resultados são uma generalização da Desigualdade de Hölder

Lema 1.99. Sejam $0 < p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$. Então $fg \in \mathcal{L}^r$ e

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração. ...

□

Proposição 1.100 (Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam $0 < p_1, \dots, p_N \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \dots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$ para todo $j = 1, \dots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_N\|_{p_N}$$

Demonstração. Segue por indução do lema anterior.

□

CAPÍTULO DOIS

INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

(introdução)

2.1 Espaços de Banach

(introdução)

Definição 2.1. Seja X um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma norma se satisfaz

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$

(definições iniciais)

Exemplo 2.2. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n munido da norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ é um espaço de Banach

Exemplo 2.3. O espaço

$$\ell^p \equiv \ell^p(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

com $1 \leq p < \infty$ munido da norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Exemplo 2.4. O espaço

$$\ell^\infty \equiv \ell^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n); \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

munido da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

é um espaço de Banach.

Exemplo 2.5. O espaço

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é contínua}\}$$

munido da norma

$$\|f\|_{\max} = \max_{t \in [a, b]} \{|f(t)|\}$$

é um espaço de Banach

Exemplo 2.6. O espaço $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ munido da métrica

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

não é um espaço completo

CAPÍTULO TRÊS

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev e suas principais propriedades.

3.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo.

Definição 3.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Além disso, se $\text{supp } \varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp } \varphi$, então $(\text{supp } \varphi)^c \subseteq \{x \in \Omega; \varphi(x) = 0\}$. Ou seja, se $x \notin \text{supp } \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Além disso, se Ω é um aberto, então φ se anula em $\partial\Omega$.

Definição 3.2. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . O espaço $\mathcal{C}^k(\Omega)$ é composto por todas funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em que suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k também são contínuas. Se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dizemos que f é de classe \mathcal{C}^k .

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

Definição 3.3. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$.

A definição abaixo será amplamente utilizada nesse capítulo

Definição 3.4. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua ; supp } f \text{ é compacto}\}$$

Além disso definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k com suporte compacto.

Os resultados abaixo são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

Teorema 3.5 (Integração por partes em \mathbb{R}^n). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular e $u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Então,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta pra fora em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 628

□

Teorema 3.6 (Coordenadas Polares em \mathbb{R}^n). Seja $f : B(y, s) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, então

$$\int_{B(y,s)} f dx = \int_0^s \int_{\partial B(y,r)} f dS dr.$$

Demonstração. Ver [7], p.p. 78.

□

Teorema 3.7. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \rightarrow 0$ para alguma função $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ e uma função $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que

- (a) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ qtp em Ω ;
- (b) $|u_{n_k}(x)| \leq v(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, qtp em Ω .

Demonstração. Ver [3], p.p. 94.

□

Teorema 3.8 (Critério de compacidade de Arzelà-Ascoli). Seja (u_k) uma sequência de funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} tal que

$$|u_k(x)| \leq M,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $M > 0$ é uma constante e (u_k) é uniformemente equicontínua. Então, existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty} \subseteq (u_k)_{k=1}^{\infty}$ e uma função contínua u tal que $u_{k_j} \rightarrow u$ uniformemente em conjuntos compactos de \mathbb{R}^n .

Demonstração. Ver [12], p.p. 240.

□

Teorema 3.9 (Mudança de variáveis). Seja $\Psi : A \rightarrow B$ um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n . Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável sobre B se, e somente se, $(f \circ \Psi)|\det D\Psi|$ é integrável sobre A . Neste caso,

$$\int_B f \, dx = \int_A (f \circ \Psi)|\det D\Psi| \, dy.$$

Demonstração. O capítulo 4 de [14] é destinado a demonstração desse teorema. \square

3.2 Motivação

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega; \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfazendo (3.1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (3.1) por uma função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx + \int_\Omega u \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx.$$

Note que, utilizando integração por partes, a primeira integral pode ser reescrita como

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \, dx = - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, dS - \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \right).$$

Mas como ϕ se sobre em $\partial\Omega$, inferimos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega u \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx, \tag{3.2}$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ¹. Observe que agora, não precisamos mais que u seja de classe \mathcal{C}^2 já que a segunda derivada de u não é utilizada em (3.2). Na verdade, não precisamos nem que u seja contínua, apenas integrável em Ω . Na Seção 4.3, voltaremos a essa motivação para mostrar que para qualquer função $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca para (3.1). Essa solução é uma função que pertence ao espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, esse e outros espaços e suas propriedades serão estudadas ao longo desse trabalho.

3.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é generalizar a noção de derivada para funções que não são diferenciáveis em um aberto Ω do \mathbb{R}^n e explorar algumas propriedades elementares.

¹Nomenclatura: ϕ é chamada função teste.



Figura 3.1: Sergei Lvovich Sobolev (1908 – 1989)

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes em \mathbb{R}^n temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial \Omega} u \phi \nu_i dS - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula em $\partial \Omega$, como foi mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad (3.3)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Ademais, se agora u for de classe \mathcal{C}^k em Ω com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u dx. \quad (3.4)$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (3.3) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (3.4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe \mathcal{C}^k . Note que o lado esquerdo de (3.3) está bem definido se $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$. O problema é que se u não é necessariamente uma função de classe \mathcal{C}^k então o lado direito de (3.3) não está bem definido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tal que (3.3) é válida quando substituímos $D^\alpha u$ por v .

Essa pergunta motiva a definição abaixo.

Definição 3.10 (Derivada fraca em Ω). Sejam $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , denotada por

$$D^\alpha u = v,$$

dado que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u dx, \quad (3.5)$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (3.5) para toda ϕ função teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (3.5), então u não possui a α -ésima derivada parcial fraca.

Observação: Aqui, utilizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue (utilizando a medida de Lebesgue), suas integrais coincidem.

Exemplo 3.11. A função $u : \Omega = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é derivável no sentido usual. Já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h} = 1,$$

mas

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{h} = 0.$$

Porém, u possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx = x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi \Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim,

$$\int_0^2 u\phi' dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi dx - \phi(1) = - \int_0^1 \phi dx.$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral.

$$\int_0^2 u\phi' dx = - \left(\int_0^1 1\phi dx - \int_1^2 0\phi dx \right) = - \int_0^2 v\phi dx.$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 3.12. A função $u : \Omega = (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possui derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto significa que não existe uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = - \int_{\Omega} v\phi dx,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com efeito, suponha, por absurdo que existe tal v . Deste modo

$$- \int_0^2 v\phi dx = \int_0^2 u\phi' dx = \int_0^1 x\phi' dx + 2 \int_1^2 \phi' dx = \int_0^1 \phi dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leq \phi_n \leq 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \rightarrow 0 \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v \phi_n dx - \int_0^1 \phi_n dx \right] = 0$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, pois $\phi_n \rightarrow 0$ qtp em Ω . Portanto, u não possui derivada fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é sobre sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 3.13. Sejam $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} u \phi = 0$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω .

Demonstração. Ver [3], p.p. ??.

□

Com o lema acima em mente, temos todas as ferramentas para mostrar a unicidade da derivada fraca.

Proposição 3.14. Seja α um multi-índice. Se v e \tilde{v} são ambas α -ésimas derivadas parciais fracas de uma função u . Então,

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx \text{ e } \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com isso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi dx = 0.$$

Logo, pelo Lema anterior, chegamos a

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto, $v = \tilde{v}$ qtp em Ω .

□

Exemplo 3.15. Considere a função u do Exemplo 3.11, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

é a derivada de u no sentido fraco. Porém, a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca de u . A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porém v e \tilde{v} são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato,

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto, é verdade que

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.²

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 3.16. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) ; \text{ existem } v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu = - \int_{\Omega} v_i \phi d\mu \right\},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $k \in \mathbb{N}$, indutivamente, e pela derivada fraca.

Definição 3.17. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq n$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) ; D^{\alpha} u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k \},$$

com $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Ou, de outra forma,

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega) ; D^{\alpha} u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1 \},$$

onde $D^{\alpha} u$ é a α -ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)},$$

onde

$$\langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx.$$

No próximo capítulo, estudaremos algumas aplicações dos espaços de Sobolev, e os espaços H^k serão utilizados.

Definição 3.18. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)}.$$

²Todo conjunto enumerável (em particular finito) tem medida (de Lebesgue) nula.

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Além disso, dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω , isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \Subset \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Isso será feito após o Teorema 3.20 sobre as propriedades da derivada fraca, que são necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Um outro espaço importante é o espaço $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ ($H_0^k(\Omega)$ se $p = 2$) que é definido como o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Ou seja, dada uma função em $u \in \mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ existe uma sequência (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. O teorema ?? mostra uma equivalência para as funções nesse espaço.

Observação: Essa não é a única forma de definir uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo a norma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

com $1 \leq p \leq \infty$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é equivalente a

$$\max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

O próximo exemplo ilustra um caso em que uma função pode ou não possuir derivada fraca dependendo da dimensão n do espaço Euclidiano e do expoente de integração p .

Exemplo 3.19. Seja $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \|x\|^{-\alpha}, \quad (3.6)$$

onde $\alpha > 0$. Queremos verificar para quais valores de $\alpha > 0$, n e p a função u pertence ao espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de $\mathbf{0}$ com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{\|x\|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{\|x\|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{\|x\|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$\|Du(x)\| = \frac{|\alpha|}{\|x\|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes, temos que

$$\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \quad (3.7)$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ denota o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial B[\mathbf{0}, \varepsilon]$. Agora se $\alpha + 1 < n$, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando $\|Du\|$ sobre Ω , concluímos que

$$\int_{\Omega} \|Du\| dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dx.$$

Transformando em coordenadas polares, conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma:

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dx = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr,$$

onde a integral de superfície acima, é igual a área da esfera n -dimensional de raio r dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1},$$

que por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n)r^{n-1}$. Dessa forma, chegamos a

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2} dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim

$$\int_{\Omega} \|Du\| dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso, inferimos por () que

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| |\phi| |\nu_i| dS \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha} dS,$$

onde essa última integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i dS \right| \leq c \varepsilon^{n-1-\alpha} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, por () deduzimos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n - 1$. Além disso, $\|Du\| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha + 1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular, $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geq n$.

Teorema 3.20 (Propriedades da derivada fraca). Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leq |\alpha| \leq k$. Então

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(b) $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) **(Linearidade)** para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v$$

(d) se Ω' é um aberto de Ω , então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$

(e) **(Regra de Leibniz)** se $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u, \quad (3.8)$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leq \alpha$ significa $\sigma_j \leq \alpha_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$. A demonstração para $D^\alpha D^\beta u$ é análoga. Com efeito, é verdade que

$$\int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx.$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável, então o operador D^α é a α -ésima derivada parcial no sentido usual. Dessa forma $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^\alpha u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β com $|\beta| \leq k - |\alpha|$ tal que $D^\beta(D^\alpha u) \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta} u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^\gamma u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leq k$. Em particular como $|\beta| \leq k - |\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leq k$. Portanto $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_{\Omega} (\lambda u + v) D^\alpha \phi \, dx = \int_{\Omega} \lambda u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \lambda \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas ultimas integrais acima, obtemos

$$\lambda \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^\alpha \phi \, dx = \lambda (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^\alpha v \, dx = \int_{\Omega} (\lambda D^\alpha u + D^\alpha v) \phi \, dx.$$

Portanto, $D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega' \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega'} |u|^p dx \text{ e } \int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p dx \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k)$$

são finitas. De fato, é verdade que

$$\int_{\Omega'} |u|^p dx \leq \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx < \infty \quad (\forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq k),$$

ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$.

(e) Para mostrar que (3.8) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$.

Com efeito, para $|\alpha| = 1$, como $\eta, \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$D^\alpha(\eta\phi) = \phi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \phi.$$

Dessa forma,

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} u D^\alpha(\eta\phi) - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx.$$

Como η e ϕ têm suporte compacto, então $D^\alpha(\eta\phi)$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral do lado direito, chegamos a

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = - \int_{\Omega} \eta \phi D^\alpha u dx - \int_{\Omega} u \phi D^\alpha \eta dx = - \int_{\Omega} (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta) \phi dx.$$

Portanto, $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$ como queríamos mostrar.

Agora seja $m < k$ e suponha que (3.8) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$ e toda função de teste η . Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m + 1$. Então α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Deste modo, podemos escrever por **(a)** que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^{\beta+\gamma} \phi dx = \int_{\Omega} \eta u D^\beta (D^\gamma \phi) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^\beta(\eta u) D^\gamma \phi dx.$$

Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^\beta(\eta u)$ e a γ -ésima derivada fraca. Assim, por **(c)**, deduzimos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \right] \phi dx.$$

Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} (D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u) \right] \phi dx \quad (3.9)$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{\gamma \leq \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u,$$

que ainda pode ser expandido em quatro somatórios como abaixo:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\beta < \rho \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ & + \sum_{0 \leq \sigma < \gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Porém, note que $0 \leq \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leq \sigma$ significa que $0 \leq \sigma_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $j = 1, \dots, n$ tal que $\sigma_j < \gamma_j$. Como $|\gamma| = 1$, suponha sem perda de generalidade que $\gamma = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Dessa forma, para $j = 1$, concluímos que $0 \leq \sigma_1 < 1$. Como $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \dots, n$, vale $0 \leq \sigma_i < 0$, que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma, $\beta < \rho \leq \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (3.10) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leq \rho \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leq \sigma \leq \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^\alpha \eta. \quad (3.11)$$

Por fim, a menos de uma mudança de variáveis, escrevemos (3.11) como

$$\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (3.9), temos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u$$

como queríamos mostrar. \square

Com os resultados obtidos, agora é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach.

Teorema 3.21. $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Observe que

1. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0 \iff D^\alpha u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α . Sendo assim $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Sendo assim, pelo Teorema 3.20, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(\lambda u)\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\lambda D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = |\lambda|^p \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 3.20, segue que

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski em ℓ^p

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ou seja,

$$\|u + v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. \square

Teorema 3.22. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$, é completo

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Note que

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p < \varepsilon^p,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Ou seja, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, que é um espaço completo (Teorema 1.83). Dito isso, podemos escrever

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$ denotamos $D^\alpha u_n$ por u_n e u_α por u . Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema 3.7, utilizando a definição de derivada fraca e passando a uma subsequência (se necessário), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx &= \int_{\Omega} (\lim u_n) D^\alpha \phi \, dx = \lim \int_{\Omega} u_n D^\alpha \phi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \lim D^\alpha u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi \, dx. \end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha u = u_\alpha$, e consequentemente, $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.

Por outro lado, considere (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$. Além disso, vale o seguinte:

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Isto nos diz que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ que é um espaço completo (Teorema 1.88). Sendo assim, obtemo

$$D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^\infty(\Omega),$$

De forma análoga ao caso $1 \leq p < \infty$, mostramos que $D^\alpha u = u_\alpha$ e portanto $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. \square

3.4 Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora. Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados e exemplos da teoria de aproximação, que é de extrema importância no estudo de equações diferenciais parciais.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1; \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (3.12)$$

conhecida como molificador de Friedrich, onde $c > 0$ é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1.$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função η de classe \mathcal{C}^∞ com suporte compacto satisfazendo.

- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon) = \delta(x)$, onde δ é a função delta de Dirac.

Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (3.13)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Essa função η_ε é de classe \mathcal{C}^∞ , $\text{supp } \eta_\varepsilon \subseteq B[0, \varepsilon]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1.$$

Essa aplicação será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se u é uma função localmente integrável, definimos a molificação de u por $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, isto é

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy = \int_{B[0, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(y) u(x-y) \, dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propriedades importantes sobre essas aproximações.

Teorema 3.23 (Aproximação local por funções suaves). Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ em } \Omega_\varepsilon,$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então,

- (a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$;
- (b) $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $\mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração.

(a) Seja $g(x) = (x - y)/\varepsilon$. Logo, pela Regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [\eta_\varepsilon(x - y)] &= \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Por outro lado, sejam $x \in \Omega_\varepsilon$, $i = 1, \dots, n$ e h de forma que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Deste modo,

$$\frac{u^\varepsilon(x + he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] u(y) dy. \quad (3.15)$$

Note que, novamente utilizando a regra da cadeia e (3.14)

$$\frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \quad (3.16)$$

quando $h \rightarrow 0$. Consequentemente, por (3.15), (3.16) e o Teorema da convergência dominada, temos que

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) u(y) dy = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) u(y) dy.$$

Indutivamente, mostramos que $D^\alpha u^\varepsilon$ existe e

$$D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u.$$

O fato de u^ε ser de classe \mathcal{C}^∞ segue do fato de η_ε ser de classe \mathcal{C}^∞ por definição e u ser integrável.

(b) Afirmamos que a α -ésima derivada parcial de u^ε no sentido usual é igual a convolução de η_ε com a α -ésima derivada parcial fraca de u para todo α com $|\alpha| \leq k$. Consequentemente

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Com efeito, no item (a) vimos que $D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u$. Primeiramente, se $g(x) = x - y$, temos

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_\varepsilon \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_k}(x - y) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y).$$

Por outro lado, se $h(y) = x - y$, obtemos

$$D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x - y) = \frac{\partial}{\partial y_i} (\eta_\varepsilon \circ h)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_k}(x - y) \frac{\partial h_k}{\partial y_i}(y) = -\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x - y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação, chegamos a

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x-y) = -D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x-y).$$

Repetindo esse cálculo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y).$$

Deste modo, podemos escrever

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy.$$

Fixando $x \in \Omega_\varepsilon$, a função $\phi_x(y) = \eta_\varepsilon(x-y)$ é suave e tem suporte compacto em Ω . Aplicando a definição de derivada fraca com função teste $\eta_\varepsilon(x-y)$, segue que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y) dy.$$

Portanto, deduzimos que

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u. \quad (3.17)$$

Além disso, afirmamos que dados abertos V, W tais que $V \Subset W \Subset \Omega$, uma função $v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, inferimos

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}. \quad (3.18)$$

Com efeito, note que se $1 < p < \infty$ e $x \in V$, é verdade que

$$|v^\varepsilon(x)| = \left| \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) v(y) dy \right| \leq \int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) v(y) \right| dy.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) v(y) \right| dy &\leq \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\quad \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dy = 1$ e utilizando o Teorema de Fubini, segue que

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|^p dx = \int_V \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) |v(y)|^p dy dx \leq \int_W |v(y)|^p \int_{B[y,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y) dx dy.$$

Isto é,

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Por fim, seja $V \Subset \Omega$ um aberto. Afirmamos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ em } \mathcal{L}^p(V) \quad (3.19)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo α com $|\alpha| \leq k$. De fato, seja W um aberto de forma que $V \Subset W \Subset \Omega$, $\delta > 0$. Utilizando a afirmação anterior com $v^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$ e $v = D^\alpha u$ escolhendo $w \in \mathcal{C}(W)$ tal que

$$\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} < \delta.$$

Temos

$$\|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq 2\delta + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)}$$

Como $w \in \mathcal{C}(W)$, então $w^\varepsilon \rightarrow w$ uniformemente em V quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, $D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$ em $\mathcal{L}^p(V)$. Dessa forma,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}^p \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto,

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega),$$

como queríamos mostrar □

Exemplo 3.24. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, dada uma função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = \int_{-1}^1 u\phi' dx = \int_{-1}^0 u\phi' dx + \int_0^1 u\phi' dx.$$

Utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} u\phi' = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx - x\phi \Big|_{-1}^0 + x\phi \Big|_0^1 = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx - \phi(-1) + \phi(1)$$

Porem, ϕ tem suporte compacto, logo, se anula em $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Dito isso

$$\int_{\Omega} u\phi' dx = - \int_{-1}^0 -\phi dx - \int_0^1 \phi dx = - \int_{\Omega} \text{sgn}(x)\phi dx.$$

Portanto

$$u' = \text{sgn}$$

no sentido fraco, onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Além disso

$$\int_{\Omega} |\text{sgn}(x)|^p dx = \int_{-1}^1 1^p dx = \mu((-1, 1)) = 2 < \infty,$$

onde μ é a medida de Lebesgue. Assim, $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e, portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Vamos utilizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u . Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta dx = 1,$$

isto é,

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx \right)^{-1}.$$

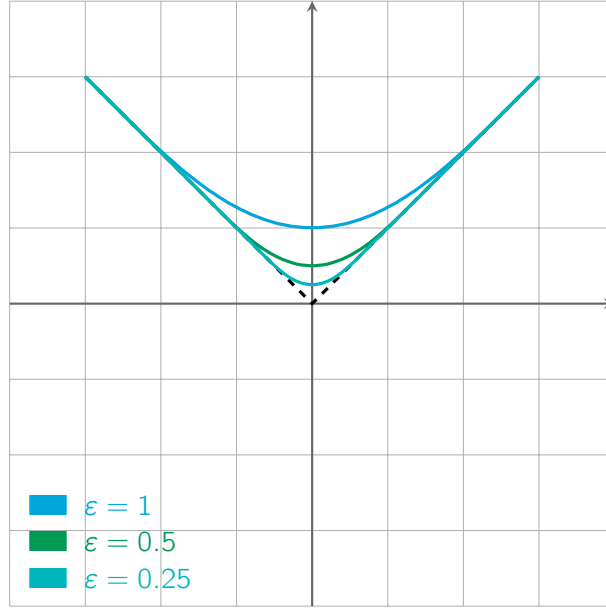


Figura 3.2: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ε com $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$

Fonte: Autoral

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Logo, definimos a função molificadora $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon dx = 1 \text{ e } \text{supp } \eta = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u . Com efeito,

$$u^\varepsilon(x) = \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]} \eta_\varepsilon(x) u(x - y) dy.$$

A Figura 3.2 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ε .

Exemplo 3.25. Seja $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de $|\cdot|$ não ser diferenciável. Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, quando $0 < p < 2$, dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}.$$

Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a i -ésima coordenada. Utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i ds - \int_{\Omega} \phi D^{e_i} u dx, \quad (3.20)$$

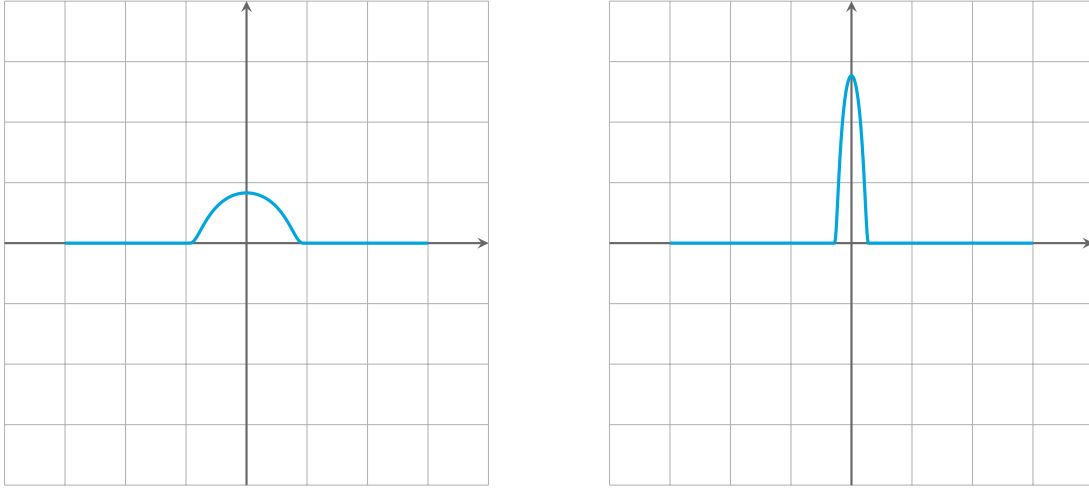


Figura 3.3: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$
Fonte: Autoral

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial\Omega$. Para calcular $D^{e_i}u$ precisamos dividir o domínio Ω em Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 e Ω_4 , onde Ω_i é a restrição ao i -ésimo quadrante (ver Figura 3.4).

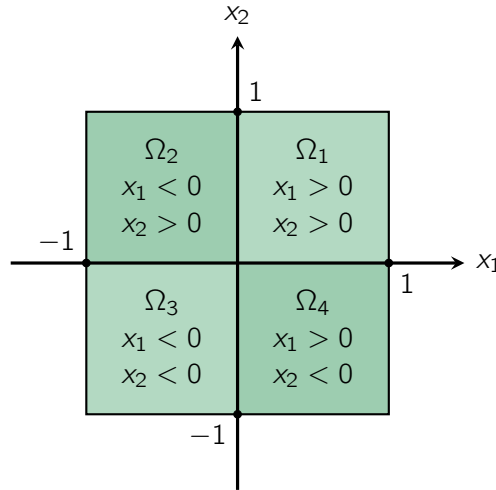


Figura 3.4: Domínio da função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$
Fonte: Autoral

Note que em $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1)$, $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$. Logo, nesse conjunto $D^{e_i}u$ existe no sentido usual e é dada por

$$D^{e_i}u = \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga, deduzimos que

$$\begin{aligned} D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_2 \text{ e } \Omega_3, \\ D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_4. \end{aligned}$$

Dito isso, concluímos que

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_i}u \, dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx$$

que podemos escrever como

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_i} u \, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \frac{1}{2} (-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx$$

Por fim, como ϕ tem suporte compacto em Ω , ϕ se anula em $\partial\Omega$. Dessa forma

$$\int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i \, ds = 0.$$

Portanto, por (3.20) chegamos a

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi \, dx = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx.$$

Isto é,

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}$$

como queríamos mostrar. Além disso,

$$\int_{\Omega} |D^{e_i}(x_1, x_2)|^p \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \right|^p \, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini, encontramos

$$\frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 dx_j \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i.$$

Dito isso, precisamos ver para quais valores de p essa integral é finita. Sendo assim

$$\frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-2}} \int_0^1 x_i^{-\frac{p}{2}} \, dx = \frac{1}{2^{p-2}} \left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2} - 1} \right]$$

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando $p < 2$. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1; \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

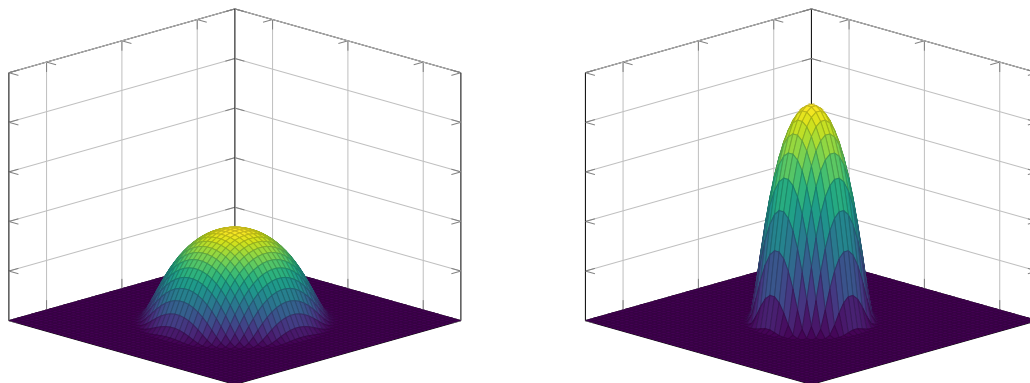
(ver Figura 3.5) e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u , dada por

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_{\Omega} \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \, dy.$$

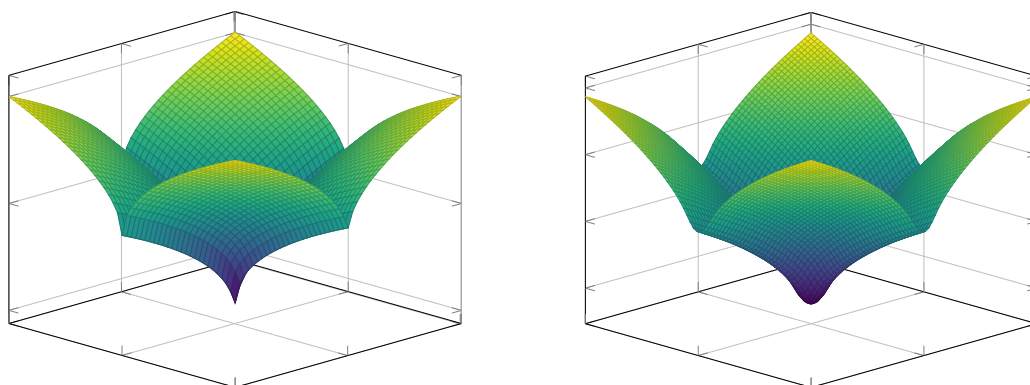
Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε . A Figura 3.6 mostra o gráfico de u , onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε .

Teorema 3.26 (Meyers-Serrin). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Figura 3.5: η e η_ε com $\varepsilon = 0.5$

Fonte: Autoral

Figura 3.6: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^ε com $\varepsilon = 0.25$

Fonte: Autoral

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

onde $\Omega_i = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. Defina $\Omega'_i = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$. Além disso, escolha qualquer aberto $\Omega'_0 \Subset \Omega$ de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega'_i$$

e seja $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{\Omega'_i\}_{i=0}^{\infty}$, isto é,

$$0 \leq \phi_i \leq 1 \text{ com } \phi_i \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega'_i) \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = 1 \text{ em } \Omega.$$

Como, por hipótese, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, temos pelo Teorema 3.20

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Além disso, $\text{supp}(\phi_i u) \subseteq \Omega'_i$. Fixando $\delta > 0$, escolha um $\varepsilon_i > 0$ de forma que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e } \text{supp } u^i \subseteq \Omega''_i$$

com $\Omega''_i = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} \supseteq \Omega'_i$.

Seja $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Como $u = u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^n \phi_i u$, então, para cada $V \Subset \Omega$, inferimos que

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \frac{\delta}{2}.$$

Passando ao supremo sobre os conjuntos $V \Subset \Omega$ obtemos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Isto mostra que u pertence ao fecho de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Logo é equivalente dizer que existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ \square

Definição 3.27. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que sua fronteira $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^k se para cada ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ existe um raio $r > 0$ e uma função de classe \mathcal{C}^k $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r]; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^{∞} se é de classe \mathcal{C}^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.28. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

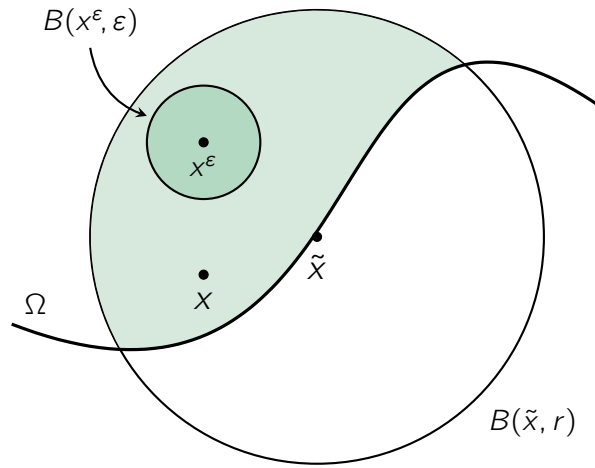


Figura 3.7: Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 253

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$, como Ω tem fronteira de classe \mathcal{C}^1 , existe um raio $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 tal que

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r]; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}. \quad (3.21)$$

Definimos $V = \Omega \cap B[\tilde{x}, r/2]$ (ver Figura ??). Além disso, definimos para cada $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $x \in V$

$$x^\varepsilon = x + \lambda \varepsilon e_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda \varepsilon). \quad (3.22)$$

Observe que, para um $\lambda > 0$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a bola $B[x^\varepsilon, \varepsilon]$ está contida em $\Omega \cap B[\tilde{x}, r]$ para todo $x \in V$. De fato, por definição, dado $x \in V$ temos que $x \in \Omega$ e $\|x - \tilde{x}\| \leq r/2$. Note que $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ suficientemente grande. Com efeito, como $x \in V$, em particular $x \in \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$. Como Ω tem fronteira de classe \mathcal{C}^1 , temos que $x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$, daí

$$x_n^\varepsilon = x_n + \lambda \varepsilon > x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

e por (3.22) deduzimos que

$$\|x^\varepsilon - \tilde{x}\| = \|x + \lambda \varepsilon e_n - \tilde{x}\| \leq \|x - \tilde{x}\| + \|\lambda \varepsilon e_n\| \leq \frac{r}{2} + \lambda \varepsilon < r$$

desde que $0 < \varepsilon < r/2\lambda$. Logo, $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Por isso, $B[x^\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário.

Agora, definimos $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$ para todo $x \in V$ e $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Assim, pelo Teorema 3.23 $v^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\bar{V})$. Dito isso, afirmamos que

$$\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \rightarrow 0.$$

De fato, seja α um multi-índice com $|\alpha| \leq k$, então

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}.$$

A segunda norma do lado direito da desigualdade acima vai a 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pois a translação é contínua na norma do espaço \mathcal{L}^p e

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} = \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver Teorema 3.23). Ou seja, é verdade que

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Note que todos os cálculos foram feitos em uma vizinhança de um ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$. Dito isso, como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado), pelo Teorema de Heine-Borel³, podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, raios $r_i > 0$, conjuntos $V_i = \Omega \cap B[\tilde{x}_i, r_i/2]$ e funções v_i^ε , com $i = 1, \dots, N \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tilde{x}_i, r_i/2).$$

Além disso, considere um aberto limitado V_0 da forma $\Omega \cap B(\tilde{x}_0, r_0/2)$ e uma função v_0^ε com $\|v_0^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_0)} \rightarrow 0$ e

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N V_i$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos $\{V_i\}_{i=0}^N$ em Ω . Defina

$$v^\varepsilon = \sum_{i=0}^N \phi_i v_i^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

e observando que $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$, obtemos

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i v_i^\varepsilon) - D^\alpha(\phi_i u)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Utilizando a Regra de Leibniz, segue que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i [D^{\alpha-\sigma}(v_i^\varepsilon - u)]\|_{\mathcal{L}^p(V_i)} \\ &\leq c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma}(v_i^\varepsilon - u)\|_{\mathcal{L}^p(V_i)}, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de ϕ_i (e por consequência $D^\sigma \phi_i$) ter suporte compacto e ser suave na última desigualdade. Ademais, como $|\alpha - \sigma| \leq k$, temos que

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \leq c \sum_{i=0}^N \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \rightarrow 0$$

Por fim, definindo $u_n := v^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ chegamos a

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, como era desejado. □

³Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui subcobertura finita.

3.5 Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto específico. Nessa seção, veremos uma forma de estender funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por meio de um operador linear.

Teorema 3.29. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, tem-se que

- (a) $Eu = u$ qtp em Ω ;
- (b) $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$;
- (c) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p , Ω e Ω' .

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e considere inicialmente que $\partial\Omega$ esteja contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Dessa forma, podemos supor que existe uma bola $B = B(\tilde{x}, r)$ tal que

$$\begin{aligned} B^+ &= B \cap \{x_n \geq 0\} \subseteq \overline{\Omega}; \\ B^- &= B \cap \{x_n \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Além disso, assumamos que $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2}) & \text{se } x \in B^- \end{cases}$$

que chamamos de reflexão de ordem superior da função u de B^+ a B^- . Afirmamos que $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$. Com efeito, denotando $u^- = \bar{u}|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}|_{B^+}$, podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \quad \text{em } \{x_n = 0\}.$$

De fato, pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2})$$

quando $x_n = 0$, obtemos

$$\left. \frac{\partial u^-}{\partial x_n} \right|_{\{x_n=0\}} = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \left. \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \right|_{\{x_n=0\}}$$

Também é verdade que

$$u^+ = u^- \quad \text{e} \quad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \quad \text{em } \{x_n = 0\},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Portanto $D^\alpha u^- = D^\alpha u^+$ em $\{x_n = 0\}$ com $|\alpha| \leq 1$. Sendo assim, $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$, pois fora de $\{x_n = 0\}$, as componentes de \bar{u} já eram de classe \mathcal{C}^∞ , então apenas restava verificar que em $B^+ \cap B^- = B \cap \{x_n = 0\}$ as componentes em B^+ e B^- se igualavam, implicando a continuidade \bar{u} e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}, \quad (3.24)$$

onde c é uma constante⁴ positiva que não depende de u . De fato, sabemos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right].$$

Como $B = B^+ \cup B^-$, e denotando (x_1, \dots, x_{n-1}) por x' podemos reescrever o último somatório da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + \int_{B^-} |4D^\alpha [u(x', -\frac{x_n}{2})] - 3D^\alpha [u(x', -x_n)]|^p dx \right] \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p dx + 3 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx + 4 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p dx \right] \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que

$$(a + b)^p \leq (2 \max\{a, b\})^p = 2^p \max\{a, b\}^p \leq 2^p (a^p + b^p)$$

para todo $a, b \geq 0$. Porém, $-x_n, -\frac{x_n}{2} \geq 0$, então podemos considerar que as integrais em B^- são integrais sobre B^+ , através de uma mudança de variáveis, para encontrar

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p dx \right] \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p dx \right] = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}^p.$$

Portanto,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Por outro lado, se $\partial\Omega$ não está necessariamente contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} , temos que existe um homeomorfismo Φ com inversa Ψ que planifica $\partial\Omega$ perto de \tilde{x} , basta usar a função γ de classe \mathcal{C}^1 da Definição 3.27 e definir Φ por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})). \quad (3.25)$$

De forma análoga definimos Ψ por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})). \quad (3.26)$$

Deste modo, é fácil ver que $\Psi^{-1} = \Phi$ e que Φ e Ψ são de classe \mathcal{C}^1 (por definição). Sendo assim, seja $y = \Phi(x)$ (ou seja $x = \Psi(y)$) e definimos $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo como foi feito anteriormente (u' é de classe \mathcal{C}^1), podemos escolher uma bola $B = B(\tilde{y}, r)$ e definimos \bar{u}' de forma que $\bar{u}' \in \mathcal{C}^1(B)$ e

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}. \quad (3.27)$$

Seja $B' = \Psi(B)$, assim conseguimos obter uma extensão \bar{u} de u para B' com

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para $\bar{u} \equiv \bar{u}' \circ \Phi$, obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis

$$\|D^\alpha \bar{u}'\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \int_B |D^\alpha \bar{u}'(y)|^p dy = \int_B |D^\alpha \bar{u}(\Psi(y))|^p dy = \int_{B'} |D^\alpha \bar{u}(x)|^p dx = \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(B')}^p.$$

⁴Durante essa e outras demonstrações, mesmo se o valor da constante c mudar, ainda continuaremos denotando por c , então por exemplo $c + 2^p$, $c(1 + n)$, etc, ainda serão denotados por c .

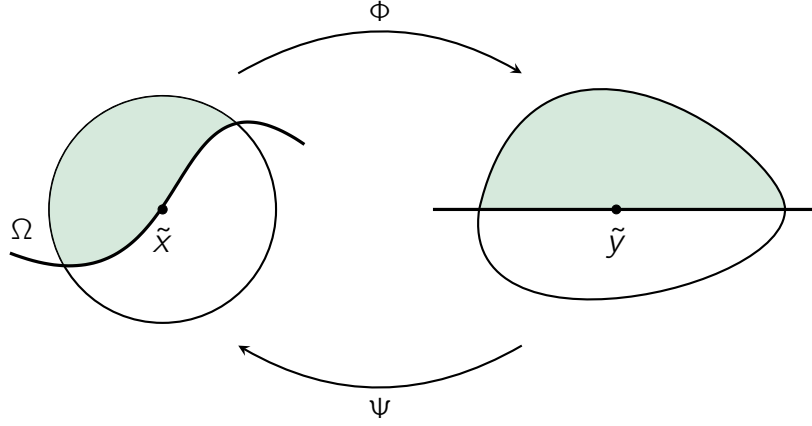


Figura 3.8: Representação gráfica do homeomorfismo Φ
 Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 256

Dessa forma, passando ao somatório, quando $|\alpha| \leq 1$, chegamos a

$$\|\tilde{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\tilde{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')}. \quad (3.28)$$

Além disso, é verdade

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u'\|_{\mathcal{L}^p(B^+)}^p &= \int_{B^+} |D^\alpha u'(y)|^p dy = \int_{B^+} |D^\alpha u(\Psi(y))|^p dy \\ &= \int_{\Psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx = \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \quad (3.29)$$

Portanto, por (3.27), (3.28) e (3.29), obtemos

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} = \|\tilde{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leq c \|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}, \quad (3.30)$$

como queríamos mostrar.

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x \in \partial\Omega} B'_x$, que é uma cobertura aberta, pois $B'_x = \Psi(B(\tilde{y}, r))$, e imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto. Pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma subcobertura finita de $\partial\Omega$. Sendo assim, existem uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, abertos B'_i e extensões \tilde{u}_i de u em B'_i de forma que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B'_i$. Por outro lado, considere um aberto $B'_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N B'_i.$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{B'_i\}_{i=0}^N$ e defina

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^N \phi_i \tilde{u}_i$$

onde \tilde{u}_i está associada a B'_i e $\tilde{u}_0 = u$. Deste modo, obtemos a desigualdade

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Com efeito

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i \bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p$$

onde c é uma constante positiva que depende de p . Logo, utilizando a Regra de Leibniz (ver Teorema 3.20), inferimos

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i \bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Como $\text{supp } D^\sigma \phi_i \subseteq \text{supp } \phi_i \subseteq B'_i$, então o suporte de $D^\sigma \phi_i$ também é compacto (pois B'_i é limitado), sendo assim $\max |D^\sigma \phi_i|$ existe em B'_i . Portanto, vale a desigualdade

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(B'_i)}^p$$

onde agora a constante c também depende de B'_i . Além disso,

$$c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|_{\mathcal{L}^p(B'_i)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}^p.$$

Por fim, utilizando (3.30), chegamos a

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}^p \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p,$$

onde c depende de B'_i , p e N . Portanto, deduzimos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \quad (3.31)$$

Defina Ω' aberto de forma que $\bigcup_{i=0}^N B'_i \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\text{supp } \bar{u} \subseteq \Omega'$. Defina também $\bar{E} : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $\bar{E}u = \bar{u}$. Temos que \bar{E} é linear,

$$\|\bar{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e $\text{supp } \bar{E}u \subseteq \Omega'$. Sendo assim, definimos $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por

$$Eu = \lim \bar{u}_k$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ que converge para u (sabemos que essa sequência existe pois mostramos no Teorema 3.28 que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$). Podemos afirmar que o limite converge em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\bar{u}_k - \bar{u}_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Logo (\bar{u}_n) é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 3.22), deduzimos que $\lim \bar{u}_k$ existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned} \|Eu - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\bar{u}_k - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \|Eu - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pois $u_k \rightarrow u$ e $\bar{u}_k = u_k$ em Ω (ver ()). Portanto, $Eu = u$ qtp em Ω , provando o item **(a)**.

Para verificar o item **(b)**, basta ver que, por definição, $\text{supp } \overline{u_k} \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\text{supp } Eu \subseteq \Omega'$.

Por fim, para mostrar o item **(c)**, note que E é um operador limitado, pois

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\lim \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \lim \|\overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

□

3.6 Traços

(introdução)

Teorema 3.30. Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então, existe um operador linear limitado $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que

- (a) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$;
- (b) $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde c depende apenas de p e Ω .

Demonstração. Inicialmente suponha que $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Da mesma forma que foi feito no Teorema 3.29 considere $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e suponhamos que $\partial\Omega$ está contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Sejam $B = B(\tilde{x}, r)$ (e defina B^+ e B^- como em (3.23)) e $\hat{B} = B(\tilde{x}, r/2)$, e considere $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$ de forma que $\xi \geq 0$ em B e $\xi \equiv 1$ em \hat{B} , e denote $\Gamma = \partial\Omega \cap \hat{B}$ e $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 3.5)

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx = \int_{\partial B^+} \xi|u|^p \nu_n dx'$$

onde ν é o vetor normal unitário que aponta para baixo em ∂B^+ , isto é $\nu = (0, \dots, 0, -1)$. Sendo assim, $\nu_n = -1$ e

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx = - \int_{\partial B^+} \xi(x')|u(x')|^p dx'.$$

Dessa forma, como $\Gamma \subseteq \partial B^+$ e $\xi(x) = 1$ para todo $x \in \hat{B}$, concluímos que

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq \int_{\partial B^+} \xi|u|^p dx' = - \int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n} dx.$$

Calculando a derivada acima, obtemos

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq - \int_{B^+} \frac{\partial \xi}{\partial x_n} |u|^p + p|u|^{p-1} \text{sgn } u \frac{\partial u}{\partial x_n} \xi dx \leq c \int_{B^+} |u|^p + |u|^{p-1} \|Du\| dx$$

onde utilizamos o fato de ξ e suas derivadas parciais terem suporte compacto para a ultima desigualdade. Por fim utilizando a Desigualdade de Young

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq c \int_{B^+} |u|^p + \frac{|u|^{(p-1)p'}}{p'} + \frac{\|Du\|^p}{p} dx \leq c \int_{B^+} |u|^p + \|Du\|^p dx \quad (3.32)$$

Caso \tilde{x} não esteja necessariamente contido em $\{x_n = 0\}$, considere o homeomorfismo Φ com inversa Ψ da demonstração do Teorema 3.29 e defina $u'(y) = u(\Psi(y))$, daí, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis

$$\int_{\Gamma} |u'(y)|^p dy' = \int_{\Psi(\Gamma)} |u(x)|^p dx'$$

e

$$\int_{B^+} |u'(y)|^p + \|Du'(y)\|^p dy \leq c \int_{\Psi(B^+)} |u(x)|^p + \|Du(x)\|^p dx$$

onde c é uma constante que depende de γ que surge devido a regra da cadeia. Dessa forma por (3.32)

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))}^p &= \int_{\Psi(\Gamma)} |u|^p dx' = \int_{\Gamma} |u'|^p dy' \leq c \int_{B^+} |u'|^p + \|Du'\|^p dy \\ &\leq c \int_{\Psi(B^+)} |u|^p + \|Du\|^p dx = \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Psi(B^+))}^p \end{aligned}$$

como $\Psi(B^+) \subseteq \Omega$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma quantidade finita de abertos $\Psi(\Gamma_i)$ tal que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N \Psi(\Gamma_i)$$

e $\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_i))} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Considere uma partição da unidade $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ subordinada a cobertura $\{\Psi(\Gamma_i)\}_{i=1}^N$, e denote $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$.

Defina $\tilde{T} : \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por $\tilde{T}u = u|_{\partial\Omega}$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}u\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}^p &= \int_{\partial\Omega} |\tilde{T}u|^p dx = \int_{\partial\Omega} |u|^p dx \leq c \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \phi_i^p |u|^p dx \\ &= c \sum_{i=1}^N \int_{\Psi(\Gamma_i)} |u|^p dx \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^p \end{aligned}$$

onde c é uma constante que depende de p e Ω . Isto mostra que \tilde{T} é um operador limitado. Por fim, defina $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por

$$Tu = \begin{cases} \tilde{T}u & \text{se } u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \\ \lim \tilde{T}u_k & \text{se } u \notin \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ que converge para $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Sendo assim

$$\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ **esss demonstração tem uma parte final que eu não entendi direito** □

Teorema 3.31 (Funções traço zero em $\mathcal{W}^{1,p}$). Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por definição existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Como u_k tem suporte compacto em Ω então u_k se anula em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim $Tu_k = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado. Portanto

$$Tu = T(\lim u_k) = \lim Tu_k = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Reciprocamente, suponha que $Tu = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando partições da unidade e o homeomorfismo Φ que planifica $\partial\Omega$ como foi feito anteriormente, podemos supor que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \\ u &\text{ tem suporte compacto em } \overline{\mathbb{R}_+^n} \\ Tu &= 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

onde \mathbb{R}_+^n denota o semiplano superior de \mathbb{R}^n . Como $Tu = 0$ em \mathbb{R}^{n-1} então existe uma sequência de funções $(u_k) \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ e $Tu_k = u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}} \rightarrow 0$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Do isso, seja $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geq 0$. Pelo teorema fundamental do cálculo, podemos escrever u_k da seguinte forma

$$u_k(x', x_n) = u_k(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t) dt$$

e daí

$$|u_k(x', x_n)|^p \leq c \left(|u_k(x', 0)|^p + \left(\int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t) \right| dt \right)^p \right)$$

onde aqui a constante c depende de p . Integrando ambos os lados sobre \mathbb{R}^{n-1} obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p dx' \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\| dt \right)^p dx' \right).$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder na última integral, temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a

$$c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\|^p dt \right) \left(\int_0^{x_n} 1^{p'} dt \right)^{p/p'} dx' \right).$$

Porém $p/p' = p - 1$, sendo assim, resolvendo a última integral e utilizando o Teorema de Fubini, obtemos que o lado direito da equação acima é igual a

$$c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du_k(x', t)\|^p dx' dt \right).$$

Por fim, como $\|u_k\|_{\mathbb{R}^{n-1}} \|\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})\| \rightarrow 0$ e utilizando o Teorema da Convergência Dominada quando $k \rightarrow \infty$.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \|Du(x', t)\|^p dx' dt \quad (3.33)$$

Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\begin{aligned} \xi &\equiv 1 \text{ em } [0, 1] \\ \xi &\equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \setminus [0, 2] \\ 0 &\leq \xi \leq 1 \end{aligned}$$

e defina $\xi_k = \xi(kx_n)$ e $v_k = u(x)(1 - \xi_k(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_n} &= (1 - \xi_k) \frac{\partial u}{\partial x_n} - k u \xi' \\ \frac{\partial v_k}{\partial x'} &= (1 - \xi_k) \frac{\partial u}{\partial x'}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx &\leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\left\| \frac{\partial v_k}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \right)^p dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\xi_k \left\| \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \xi_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| + k|u|\xi' \right)^p dx \end{aligned}$$

onde c é uma constante que depende de p e n . Daí utilizando a desigualdade entre a derivada parcial e a norma do gradiente

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi'|^p |u|^p dx$$

Observe que $\text{supp } \xi' \subseteq \text{supp } \xi \subseteq [0, 2]$. Isto nos diz que $\xi'(x) = \xi'(kx_n) = 0$ quando $kx_n > 2$ ou $x_n > 2/k$. Logo podemos escrever a ultima desigualdade como

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi_k|^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi(kx_n)|^p \|Du\|^p dx &= \int_0^{\frac{2}{k}} |\xi(kx_n)|^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \\ &\leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$ pois ξ tem suporte compacto e $2/k \rightarrow 0$. Além disso, utilizando (3.33)

$$ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt \leq ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds dt \leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \|Dv_k - Du\|^p dx \rightarrow 0$$

isto é $\|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Por fim

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p = \int_{\mathbb{R}_+^n} |v_k - u|^p dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_k |u|^p dx.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p = \int_0^{\frac{2}{k}} \xi(kx_n) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p dx' dx_n \leq c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p dx' dx_n \rightarrow 0.$$

Dessa forma

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}^p \leq \|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p + \|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^n)}^p \rightarrow 0$$

Defina $u_k = \eta_{\frac{1}{k}} * v_k$. Assim, para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ e

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|u_k - v_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} + \|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$$

Portanto $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$. □

3.7 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços

Dividiremos o estudo dessas desigualdades em dois casos, $1 \leq p < n$ e $n < p \leq \infty$. O caso $n = p$ não será apresentado nesse texto, aos interessados consultar [5] p.p. 275

3.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja $1 \leq p < n$. Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo⁵

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (3.34)$$

onde c é uma constante positiva, $1 \leq q < \infty$ e $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, de forma que c e q não dependam de u .

Primeiramente vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (3.34) existe, o valor de q não é arbitrário, mas sim admite uma forma específica. Para isso seja $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não-nula e $\lambda > 0$. Sendo assim, definimos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (3.34) a u_λ , obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.35)$$

Note que

$$\|u_\lambda^q\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^q$$

e

$$\begin{aligned} \|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D(u(\lambda x))|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \end{aligned}$$

Utilizando essas igualdades em (3.35), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

que podemos reescrever como

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (3.36)$$

Observe que se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$, obtemos uma contradição quando $\lambda \rightarrow 0$, pois isso implicaria em $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, que só acontece se $u = 0$ que é uma contradição. De forma análoga se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$ obtemos uma contradição quando $\lambda \rightarrow \infty$. Sendo assim, para que a igualdade (3.34) seja válida, precisamos que

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$$

ou seja

$$q = \frac{np}{n-p}$$

Isso motiva a definição abaixo

⁵Lembrando que $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa o gradiente fraco, quando calculamos a norma do gradiente em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ estamos calculando a norma \mathcal{L}^p da norma euclidiana do gradiente.

Definição 3.32. Se $1 \leq p < n$ o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Os calculos no início da seção mostram que a desigualdade (3.34) somente é válida quando $q = p^*$. O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é veridica

Teorema 3.33 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Seja $1 \leq p < n$. Então existe uma constante c que depende apenas de p e n , tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (3.37)$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos dois casos

($p = 1$)

Como por hipótese, u tem suporte compacto, temos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) dy_i$$

e daí

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \right| dy_i \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i$$

e elevando ambos os lados a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de $i = 1$ até n obtemos

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$ por X_i e Integrando ambos os lados em relação a x_1 de $-\infty$ a ∞ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \end{aligned}$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1 , então a sua integral é constante em relação a x_1 e pode “sair” da integral, sendo assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, a desigualdade se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞ obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

que podemos reescrever da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{\frac{1}{n-1}} l_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n l_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

onde

$$l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \text{ e } l_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \quad (i = 2, \dots, n).$$

Porem, l_2 é constante em relação a x_2 então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq l_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n l_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_2)| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \\ &\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{p^*} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \quad (3.38)$$

como queríamos mostrar.

($1 < p < n$)

Considere a função $|u|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser decidido. Utilizando a desigualdade no caso $p = 1$ temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx$$

utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Escolhendo γ de forma que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$. Isto é

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

nesse caso, $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalizando a demonstração □

Observação: Note que o suporte compacto é necessário, como exemplo tome a função $u(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma $|Du| = 0$.

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq 0 \implies u \equiv 0$$

que é uma contradição.

Teorema 3.34. Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ então $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

onde c é uma constante que depende apenas de n, p e Ω

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.29, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega$$

$$\bar{u} \text{ tem suporte compacto}$$

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como \bar{u} tem suporte compacto, sabemos que existe uma sequência (u_k) dada por $\eta_{\frac{1}{k}} * \bar{u}$ tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$$

e para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.39)$$

Note que

$$\|Du_k - D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

isso mostra que (Du_k) é convergente (e portanto de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, por (3.39) observamos que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ que é um espaço completo, logo existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \rightarrow v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema 3.7, ao menos de uma subsequência $u_k(x) \rightarrow v(x)$ qtp em \mathbb{R}^n . Análogamente, $u_k(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n , desde que $\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$. Com isso $v(x) = \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n . Dessa forma

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0.$$

A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

Passando ao limite obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

Essa desigualdade finaliza a demonstração, já que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como queríamos mostrar □

Teorema 3.35. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < n$, então a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida para $1 \leq q \leq p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n .

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, conseguimos uma sequência de funções (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Além disso, podemos estender cada u_k para ser 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Sendo assim, aplicamos a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev para obter

$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Passando ao limite

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Provando o caso em que $q = p^*$. Agora considere $1 \leq q < p^*$. Como Ω é limitado, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $1 \leq p < n$ e $1 \leq q \leq p^*$. \square

Um caso particular da desigualdade acima é a Desigualdade de Poincaré que será apresentada no corolário abaixo

Corolário 3.36 (Desigualdade de Poincaré). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

onde c é uma constante que depende de p, q e n .

Demonstração. Primeiramente considere $1 \leq p < n$. Por definição, $1 \leq p < p^*$, pelo teorema anterior

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p}.$$

Agora considere $n \leq p < \infty$. Considere $1 \leq s < n$ tal que $p < s^*$. Note que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Por fim, considere $p = \infty$. Pelo que foi visto acima, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Passando ao limite quando $s \rightarrow n^-$ temos que $s^* \rightarrow \infty$. Dessa forma $\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$. Portanto

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. \square

O resultado acima nos diz que

$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq p^*) \quad \text{e} \quad \mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{s^*}(\Omega) \quad (1 \leq s \leq \infty)$$

isto é o mesmo que dizer que $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $1 \leq q \leq p^*$, $\mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{s^*}(\Omega)$ com $1 \leq s \leq \infty$ e o operador inclusão ι (em cada um dos casos) é um operador linear limitado.

3.7.2 Desigualdade de Morrey

Para estudar essa próxima classe de desigualdades, precisamos de algumas definições relacionadas aos espaços de Hölder.

Definição 3.37. Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser Hölder continua com expoente $\gamma \in (0, 1]$ quando

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|x - y\|^\gamma$$

para todo $x, y \in \Omega$. Além disso, denotamos o espaço dessas funções por $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 3.38. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, escrevemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \quad \text{e} \quad [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \right\}$$

para denotar a norma de u no espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com essas definições, estamos prontos para enunciar e demonstrar a Desigualdade de Morrey

Teorema 3.39. Seja $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e $n < p \leq \infty$. Então

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n e $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

Demonstração. Primeiramente, escolha uma bola $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Afirmamos que existe uma constante $c > 0$ dependendo apenas de n tal que⁶

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|y - x|^{n-1}} dy. \quad (3.40)$$

Com efeito, fixando $w \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$, assim, se $0 < s < r$ segue que

$$|u(x + sw) - u(x)| = \left| \int_0^s u'(x + tw) dt \right| = \left| \int_0^s Du(x + tw) \cdot w dt \right| \leq \int_0^s \|Du(x + tw)\| dt$$

onde utilizamos a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) e o fato de $|w| = 1$. Daí integrando ambos os lados sobre $\partial B(\mathbf{0}, 1)$

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS \leq \int_0^s \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \|Du(x + tw)\| dS dt = \int_0^s \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \|Du(x + tw)\| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} dS dt.$$

Seja $y = x + tw$, de forma que $t = \|x - y\|$. Assim, por meio de coordenadas polares obtemos

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS \leq \int_0^s \int_{B(x,t)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dS dt = \int_{B(x,s)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dy$$

e como $s < r$

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS \leq \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dy.$$

Multiplicando a equação acima por s^{n-1} e integrando de 0 a r com respeito a s

$$\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |u(x + sw) - u(x)| dS ds \leq \int_0^r s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dy ds.$$

Fazendo $y = x + sw$, obtemos

$$\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} |u(y) - u(x)| dS ds \leq \left(\int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x - y|^{n-1}} dy \right) \left(\int_0^r s^{n-1} ds \right)$$

⁶A integral

$$\int_{B(x,r)} f dy := \frac{1}{\sigma(n)r^n} \int_{B(x,r)} f dy$$

onde $\sigma(n)r^n$ é o volume da esfera n -dimensional, representa a média da função f sobre $B(x, r)$.

Utilizando coordenadas polares no lado esquerdo e resolvendo a última integral do lado direito, segue que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy$$

Por fim dividindo ambos os lados por $\sigma(n)r^n$ (volume da n -esfera de raio r), temos

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{1}{n\sigma(n)} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy.$$

como era desejado.

Agora, fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$|u(x)| = \frac{|u(x)|}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} dy = \int_{B(x,1)} |u(x)| dy.$$

Dito isso

$$|u(x)| \leq \int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| dy + \int_{B(x,1)} |u(y)| dy. \quad (3.41)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{B(x,1)} |u(y)| dy &= \frac{1}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sigma(n)} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} 1^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Além disso

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \leq \left(\int_{B(x,1)} \|Du\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x - y\|^{(n-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

onde a última integral é finita. De fato, utilizando coordenadas polares

$$\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x - y\|^{(n-1)p'}} = \int_0^1 \int_{\partial B(x,r)} \frac{1}{r^{(n-1)p'}} dS dr = n\sigma(n) \int_0^1 r^{(n-1)(1-p')} dr = n\sigma(n) \frac{p-1}{p-n}$$

que é finito pois $n < p$. Dito isso

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.43)$$

Dessa forma, por (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43)

$$|u(x)| \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como x é arbitrário, também obtemos

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.44)$$

Agora, considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ e denote $r = \|x - y\|$. Daí, seja $B = B(x, r) \cap B(y, r)$, sendo assim

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_B |u(x) - u(z)| dz + \int_B |u(y) - u(z)| dz.$$

Calculando a primeira integral obtemos

$$\int_B |u(x) - u(z)| dz \leq \int_{B(x,r)} |u(x) - u(z)| dz \leq c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(z)\|}{|z-x|^{n-1}} dz$$

onde utilizando a Desigualdade de Hölder, como foi feito anteriormente obtemos

$$\int_B |u(x) - u(z)| dz \leq cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

De forma análoga

$$\int_B |u(y) - u(z)| dz \leq cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Sendo assim

$$|u(x) - u(y)| \leq c\|x - y\|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Isso mostra que

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \right\} \leq c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (3.45)$$

Portanto por (3.44) e (3.45)

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Assim, demonstrada a Desigualdade de Morrey. \square

Definição 3.40. Dizemos que u^* é uma versão de uma função u se

$$u = u^* \text{ qtp em seu domínio}$$

Para demonstrar a próxima desigualdade, precisamos do seguinte resultado

Teorema 3.41. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach

Demonstração. verificar (ainda não consegui) \square

Teorema 3.42. Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 . Considere $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n < p \leq \infty$. Então u tem uma versão contínua $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ e

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

onde c é um constnte que depende de n , p e Ω

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.29, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega$$

$$\bar{u} \text{ tem suporte compacto}$$

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Além disso, como $\text{supp } \bar{u}$ é compcto, temos pelo Teorema 3.23 que existem funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0.$$

Além disso, pelo Teorema 3.39

$$\|u_k - u_l\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k - u_l\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, já que (u_k) é convergente em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ é completo, existe uma função $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0.$$

Note que $u^* = \bar{u}$ qtp em \mathbb{R}^n e $u = \bar{u}$ qtp em Ω . Logo $u = u^*$ qtp em Ω , ou seja u^* é uma versão de u . O Teorema 3.39 também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Isto nos leva a

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq \|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

como era desejado. □

3.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev

Teorema 3.43. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp < n$, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é válida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω .

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq kp < n$ temos que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev obtemos

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

com $|\beta| \leq k-1$. Dessa forma $u \in \mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$. De forma análoga temos que $u \in \mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Indutivamente, chegamos a $u \in \mathcal{W}^{0,q}(\Omega) = \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

como queríamos mostrar. □

Definição 3.44. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ é formado pelas funções $u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$. Esse espaço é munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| \leq k} [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

Teorema 3.45. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp > n$, então $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0, 1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é válida com c dependendo apenas de k, p, n, γ e Ω .

Demonstração. Suponha que $\frac{n}{p}$ não é um inteiro. Então como visto na demonstração anterior temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ quando

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n} \quad (3.46)$$

desde que $\ell p < n$. Além disso, ℓ é um inteiro tal que

$$\ell < \frac{n}{p} < \ell + 1 \quad (3.47)$$

isto é $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Consequentemente temos por (3.46) e (3.47) que

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} > n$$

Além disso, $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{1,r}(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$. Dito isso, pelo Teorema 3.29, seja $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de $D^\alpha u$. Assim pela Desigualdade de Morrey $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mostrando que $D^\alpha u \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ Observe também que $1 - \frac{n}{r} = \ell + 1 - \frac{n}{p} = \gamma$. Portanto $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \right) \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} + \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} 2 \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \sum_{|\alpha| \leq k-\ell-1} c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

Por fim, suponha que $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Seja $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Como anteriormente, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}$ desde que (3.46) seja satisfeito. Porém agora

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} = n.$$

Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k - \ell$. Sejam $n < q < \infty$ e $1 \leq s = \frac{nq}{n+q} < n$. Dessa forma $s^* = q$ e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev temos que

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|D(D^\alpha u)\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leq c \|D(D^\alpha u)\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)}$$

que é finito pois $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$. Como Ω é limitado concluímos que

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$. Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1 = k - \frac{n}{p}$. Como $n < q < \infty$, utilizando a Desigualdade de Morrey

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} \leq c \|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\Omega)}$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 2$. Assim, tomando $\gamma \in (0, 1)$ obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell-1,q}(\Omega)} \leq \dots \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$$

como era desejado. \square

3.8 Compacidade

Definição 3.46. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$ se para todo $x \in X$

$$\|x\|_Y \leq c \|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y , isto é, existe uma subsequência que converge em Y .

Observação: Se um mergulho satisfaz apenas a primeira propriedade, dizemos que X está continuamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 3.47 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$$

com $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$

Demonstração. Seja $1 \leq q < p^*$ fixo. Como Ω é limitado, segue que $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}$ e pelo Teorema 3.34 temos $\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Logo $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Resta mostrar que se $(u_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ que converge em $\mathcal{L}^q(\Omega)$.

Pelo Teorema de Extensão, podemos supor sem perda de generalidade que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e que para todo $k \in \mathbb{N}$, u_k tem suporte compacto em algum aberto limitado $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Também podemos supor que

$$\sup_k \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} < \infty \quad (3.48)$$

pois a sequência é limitada

Primeiramente vamos estudar as funções suavizadas $u_k^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_k$ onde η_ε é a função molificadora vista na Seção 3.4. Também podemos supor que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ as funções u_k^ε tem suporte em V . Afirmamos que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \rightarrow 0 \quad (3.49)$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com efeito, note que se u_k é suave, então

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\tau) u_k(x - \tau) d\tau - u_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) u_k(x - \tau) d\tau - u_k(x)$$

Fazendo a substituição $\tau = \varepsilon y$ e lembrando que $\int_{B(0,1)} \eta(y) dy = 1$, obtemos

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y) (u_k(x - \varepsilon y) - u_k(x)) dy = \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_k(x - \varepsilon ty) dt dy$$

Para calcular essa derivada, seja $g(t) = x - \varepsilon ty$. Pela Regra da Cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}(u_k \circ g) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(g(t)) g'_j(t) = -\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(g(t)) y_j = -\varepsilon Du_k(x - \varepsilon ty) \cdot y$$

Sendo assim

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_k(x - \varepsilon ty) \cdot y dt dy.$$

Daí, passando o módulo em ambos os lados e Utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) obtemos

$$|u_k^\varepsilon(x) - u_k(x)| \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|Du_k(x - \varepsilon ty)\| dt dy$$

e integrando ambos os lados sobre V

$$\begin{aligned} \int_V |u_k^\varepsilon(x) - u_k(x)| dx &\leq \int_V \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|Du_k(x - \varepsilon ty)\| dt dy dx \\ &\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \|Du_k(x - \varepsilon ty)\| dx dt dy \leq \varepsilon \int_V \|Du_k(z)\| dz. \end{aligned}$$

Isto é

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \varepsilon c \|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leq \varepsilon c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}$$

Além disso, utilizando (3.48) e o Teorema da Convergência Dominada obtemos que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \rightarrow 0 \quad (3.50)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente em k . Como $1 \leq q < p^*$, podemos utilizar a Desigualdade de Interpolação das normas \mathcal{L}^p

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

onde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$ e $0 < \theta < 1$. Ademais, por (3.48) e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, $\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$ é finito. De fato

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta} \leq c \|Du_k^\varepsilon - Du_k\|_{\mathcal{L}^p(V)}^{1-\theta} \leq c \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}^{1-\theta} < \infty.$$

Assim por (3.50)

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq c \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \rightarrow 0$$

uniformemente em k , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como era desejado.

Agora, afirmamos que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a sequência $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_k^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |u_k(y)| dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty \quad (3.51)$$

onde por (3.48) c não depende de k . De forma análoga, mostramos que

$$\|Du_k^\varepsilon(x)\| \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \quad (3.52)$$

Isso prova que $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(V)$ é uniformemente limitada pois mostramos que $\|u_k^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq M$ onde $M > 0$ não depende de k . Ademais, $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é equicontínua pois, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\delta < \tilde{\varepsilon}/L$ tal que, pela Desigualdade do Valor Médio

$$\|x - y\| \leq \delta \implies |u_k^\varepsilon(x) - u_k^\varepsilon(y)| \leq L\|x - y\| < L\delta < \tilde{\varepsilon}.$$

onde $L = \sup_{x \in V} \|Du_k(x)\|$, que existe por (3.48) e (3.52) e não depende de k e x .

Agora seja $\delta > 0$ fixo. Mostremos que existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ tal que

$$\limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \delta. \quad (3.53)$$

De fato, por (3.49), conseguimos um valor de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \frac{\delta}{2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, sabemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ as funções u_k e u_k^ε tem suporte em um aberto limitado fixo $V \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos utilizar o fato da sequência $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ ser equicontínua e uniformemente limitada junto do Critério de Compacidade de Arzelà-Ascoli para obter uma subsequência $(u_{k_j}^\varepsilon)_{j=1}^\infty \subseteq (u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente em V . Em particular

$$\limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_\ell}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} = 0.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} &\leq \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_j}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} \\ &\quad + \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_\ell}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_\ell}^\varepsilon - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leq \delta. \end{aligned}$$

como era desejado. Por fim, escolhendo $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots$ em (3.53), conseguimos extrair uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ que satisfaz

$$\limsup_{j, \ell \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} = 0$$

por que isso é suficiente?

□

CAPÍTULO QUATRO

ALGUMAS APLICAÇÕES DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

4.1 Preliminares

4.1.1 Desigualdades

O primeiro preliminar para esse capítulo é a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, iremos apresentar o caso geral abaixo, mas utilizaremos apenas alguns casos particulares que serão mencionados após o teorema.

Teorema 4.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg — Caso 1). Seja $1 \leq q \leq \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$ com $\ell < k$, $r = 1$ e $\frac{\ell}{k} \leq \theta \leq 1$. Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n} \right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^\ell u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^k u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}^\theta \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.2 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg — Caso 2). Seja $1 \leq q \leq \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$ com $\ell < k$, $1 < r < \infty$, $k - \ell - \frac{n}{r}$ e $\frac{\ell}{k} \leq \theta \leq 1$. Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n} \right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^\ell u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|D^k u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}^\theta \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [6]

□

A desigualdade de Ladyzhenskaya é um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg apresentada acima. Quando $\ell = 0$, $m = 1$, $p = 4$, $q = r = 2$ e $\theta = \frac{3}{4}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{4}} \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{3}{4}} \quad (4.1)$$

Outras formas da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg que serão utilizadas são

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq c \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad (4.2)$$

onde $0 < c < 1$, e

$$\|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2 u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (4.3)$$

4.1.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta indispensável para o estudo de equações diferenciais parciais, aqui apresentaremos as definições básicas e algumas propriedades elementares que serão utilizadas ao decorrer do texto.

Definição 4.3. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \omega} f(x) dx,$$

e a transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \omega} f(\omega) d\omega.$$

Como $|e^{\pm ix \cdot \omega}| = 1$ e $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ as integrais acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou $\omega \in \mathbb{R}^n$ no caso da transformada inversa).

Teorema 4.4. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração. Ver [5] p.p. 183. □

Teorema 4.5 (Propriedades da transformada de Fourier). Seja $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Então

- (a) $\widehat{\lambda u + v} = \lambda \hat{u} + \hat{v}$;
- (b) $\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$;
- (c) $\widehat{D^\alpha u} = (i\omega)^\alpha \hat{u}$ para todo multi-índice α tal que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$;¹
- (d) $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v}$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 185. □

Exemplo 4.6 (Transformada da derivada temporal). Considere uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e considere sua derivada temporal. Dessa forma

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} u(x, t) dx \right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

onde a penultima igualdade é válida pois $e^{-i\omega \cdot x}$ não depende de t .

Exemplo 4.7 (Derivada do Laplaciano). Lembrando que dada uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o Laplaciano de u é dado por

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Dito isso, utilizando a transformada da derivada vista no item (c) do Teorema 4.5

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = -\omega_j^2 \hat{u}.$$

¹Se $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice então $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \dots \omega_n^{\alpha_n}$

Dessa forma

$$\widehat{\Delta u} = -(\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2)\hat{u} = -\|\omega\|^2\hat{u}.$$

4.1.3 Semigrupo do calor

Definição 4.8. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores de lineares limitados $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é um semigrupo se

1. $T(0) = I_X$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$

Nesse trabalho, será importante conhecer o semigrupo do calor, que provem da solução da equação do calor

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \quad (4.5)$$

Para encontrar, essas soluções, utilizaremos a transformada de Fourier. Dito isso, aplicando a transformada em (4.4) e (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_t - \nu \|\omega\|^2 \hat{\mathbf{u}} &= 0 \quad t > 0 \\ \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{v}} \quad t = 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, temporariamente ignoramos as variáveis espaciais e trabalhamos apenas no domínio do tempo, sendo assim basta resolver a equação diferencial ordinária acima e depois aplicar a transformada inversa. Com efeito, a EDO tem solução dada por

$$\hat{\mathbf{u}} = A e^{-\nu \|\omega\|^2 t},$$

onde A é determinado pela condição inicial, nesse caso $A = \hat{\mathbf{v}}$. Sendo assim a solução do problema auxiliar associado

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} e^{-\nu t \|\omega\|^2}.$$

Dessa forma podemos aplicar a transformada inversa para obter

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} * F}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

onde F é a transformada inversa de $e^{-\nu t \|\omega\|^2}$. Ou seja

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega \cdot x} e^{-\nu t \|\omega\|^2} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k.$$

Para resolver essa integral, primeiramente precisamos completar o quadrado no expoente. Dito isso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\nu t \omega_k^2 + i x_k \omega_k + \frac{x_k^2}{2\nu t} - \frac{x_k^2}{2\nu t} \right) d\omega_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x_k^2}{2\nu t} \right) \exp \left(-\left(\sqrt{\nu t} \omega_k - \frac{i x_k}{2\nu t} \right)^2 \right) d\omega_k \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t_k = \sqrt{\nu t} \omega_k - \frac{i x_k}{2\nu t}$ obtemos $dt_k = \sqrt{\nu t} d\omega_k$ e a integral se torna

$$\frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t_k^2} dt_k = \left(\frac{\pi}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}}$$

Sendo assim

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\pi}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} = \frac{1}{(2\nu t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}$$

Portanto

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\nu t}} \mathbf{v}(y) dy$$

O semigrupo do calor, denotado por $e^{\nu\Delta\tau}$ com $\tau > 0$ é uma família de operadores dada por

$$e^{\nu\Delta\tau} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} * E(\cdot, \tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}$$

com $E(x, t) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}$. O resto dessa subseção será destinada a estudar algumas propriedades que serão utilizadas no restante do texto

Proposição 4.9 (Propriedades do semigrupo do calor). Considere o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta\tau}$ então são válidas

- (a) $e^{\nu\Delta\tau}(\lambda u + v) = \lambda e^{\nu\Delta\tau} u + e^{\nu\Delta\tau} v$
- (b) $D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau} u) = e^{\nu\Delta\tau}(D^\alpha u)$

Demonstração. (a) Segue do fato da convolução ser um operador linear

(b) Análogo ao que foi mostrado no Teorema 3.23 □

Proposição 4.10. Seja $1 \leq r \leq 2$ e $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ então

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau} u)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq c(n, k)(\nu\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}} \|u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \quad (4.6)$$

onde $k = |\alpha|$.

Demonstração. Ver [13] p.p. 32 □

4.1.4 Notação

Introduziremos a notação que será utilizada ao decorrer do texto.

Letras em negrito representam vetores n -dimensionais $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ (na maioria dos casos $n = 3$). A k -ésima derivada parcial é denotada por D_k . Também vale ressaltar a definição da norma \mathcal{L}^p das funções vetoriais

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|D\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \|D_j u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e de forma geral

$$\|D^k \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \sum_{i=1}^n \|D_{j_1} \cdots D_{j_k} u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e a norma em \mathcal{L}^∞ é dada por

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

4.2 Propriedades da soluções de Leray

4.2.1 Introdução e contexto histórico

Em 1934 no artigo “*Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplassement l’espace*” [9] Leray construiu soluções fracas de energia finita²

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^\infty([0, \infty), \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}_W([0, \infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{L}^2([0, \infty), \mathcal{H}(\mathbb{R}^3))^3 \quad (4.7)$$

para as equações de Navier-Stokes em \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 \in \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\nu > 0$ é constante. Estas soluções são tais que $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ e satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (4.9)$$

A unicidade desas soluções ainda é um problema em aberto, porem no mesmo artigo Leray mostrou que existe um instante de tempo T_{**} tal que a solução \mathbf{u} se torna suave em $\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty)$ e $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^\infty([T_{**}, \infty), H^k(\mathbb{R}^3))^4$ para cada $k \geq 0$. Um problema importante que foi deixado em aberto por Leray no final de seu artigo diz a respeito do decaimento de energia em L^2 da solução. Matematicamente, isto é entender o que acontece com $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ quando $t \rightarrow \infty$. Leray suspeitava que no limite, essa norma é igual a zero, e de fato foi provado que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$. Uma demonstração para esse fato será apresentada no Teorema 4.16.

Uma outra forma de estudar propriedades das soluções das equações de Navier-Stokes é a partir das soluções $\mathbf{v}(\cdot, t)$ do problema linearizado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \nu \Delta \mathbf{v} \\ \mathbf{v}(\cdot, t_0) &= \mathbf{u}(\cdot, t_0) \end{aligned}$$

com $t \geq t_0 \geq 0$. Aqui $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$ onde $e^{\nu\Delta(t-t_0)}$ é o semigrupo do calor visto no preliminares. Com essas soluções é possível estudar algumas estimativas de decaimento como

$$\|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

²i.e., qual é o significado de energia finita?

³ $\mathcal{L}^\infty([0, \infty), \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ (i.e., $u_i \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ para todo $i = 1, 2, 3$) com $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ tais que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é limitada qtp. $\mathcal{C}_W([0, \infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot, t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ fracamente contínuas e $\mathcal{L}^2([0, \infty), \mathcal{H}(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções tais que

$$\int_0^\infty \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt < \infty$$

⁴i.e., qual é a definição desse espaço

$$t^{\frac{n}{4}} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

Uma outra pergunta importante (que não será trabalhada aqui) é sobre o erro ou diferença da solução de Leray e da solução do problema linearizado. Essa pergunta foi respondida por Weigner em [17] onde foi provado que

$$t^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

4.2.2 Resultados

Tomando uma função molificadora $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ e sua versão escalada η_δ como vista no Capítulo 3, Seção 3.4 definimos $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \eta_\delta * \mathbf{u}_0$, introduzimos $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ como a solução única do problema regularizado

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta &= \nu \Delta \mathbf{u}_\delta \\ \mathbf{u}_\delta(\cdot, 0) &= \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, t) = \eta_\delta * \mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$. Em seu artigo, Leray mostrou que existe uma sequência apropriada $\delta' \rightarrow 0$ tal que conseguimos a convergência fraca em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{u}_{\delta'} \rightharpoonup \mathbf{u}(\cdot, t)$$

para todo $t \geq 0$, com $\mathbf{u}(\cdot, t)$ apresentada em (4.7) contínua no instante $t = 0$. Além disso, a desigualdade de energia (4.9) é satisfeita para todo $t \geq 0$ e em particular

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{u}_0\| \quad (4.11)$$

Outros resultados importantes se referem à projeção de Helmholtz de $-\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)$ em $\mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ isto é, o campo $\mathbf{Q}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot, t) := -\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla p(\cdot, t)$$

para $t > 0$. A seguir, estudaremos algumas estimativas de $\mathbf{Q}(\cdot, t)$

Proposição 4.11. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geq T_{**}$) tem-se

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > s$, onde c é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, dada por

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\omega \cdot x} f(x) dx.$$

Dada $\mathbf{v}(\cdot, s) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, obtemos pelo Teorema 4.4

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu\|\omega\|^2(t-s)} \|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|^2 d\omega,$$

onde utilizamos o resultado sobre a transformada de Fourier do semigrupo do calor visto nos preliminares. Além disso, $\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|^2 \leq \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_\infty = \sup\{\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|; \omega \in \mathbb{R}^3\}$. Daí

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-s)\|\omega\|^2} d\omega,$$

onde a integral do lado direito é uma Gaussiana, cujo resultado é $c\nu^{-\frac{3}{2}}(t-s)^{-\frac{3}{2}}$. Portanto

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_{\infty}. \quad (4.12)$$

O resultado que queremos, é uma aplicação direta de (4.12) com $\mathbf{v}(\cdot, s) = \mathbf{Q}(\cdot, s)$, o restante da demonstração será dedicado a estimativa do valor de $\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_{\infty}$.

Note que utilizando a derivada da transformada, temos que $\mathcal{F}[D^\alpha f] = (i\omega)^\alpha \hat{f}$, sendo assim se $\alpha = e_j$ para algum $j = 1, 2, 3$, $\mathcal{F}[D^{e_j} f] = i\omega_j \hat{f}$. Dito isso $\mathcal{F}[\nabla p(\cdot, s)] = i\hat{p}(\omega, s)\omega$ e $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$ pois $\mathbf{Q} = \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u}$ e $\nabla \cdot \mathbf{Q} = (\nabla \cdot \mathbf{u})_t - \nu\Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ já que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, dessa forma

$$0 = \widehat{\nabla \cdot \mathbf{Q}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \widehat{Q_j}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 i\omega_j \hat{\mathbf{Q}},$$

ou seja, $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$. Além disso, pela definição de $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ temos que $\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + \mathcal{F}[\nabla p(\cdot, s)](\omega) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega)$, sendo assim, fazendo o produto interno por $\hat{\mathbf{Q}}$ em ambos os lados e utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) obtemos

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + i\hat{p}(\omega, s)\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)$$

isto é

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)\| \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega)\|,$$

pois $i\hat{p}(\omega, s)\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) = 0$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Isso nos diz que

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_{\infty} \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_{\infty}. \quad (4.13)$$

Por outro lado, para $i = 1, 2, 3$,

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](k)| \leq \sum_{j=1}^3 |\mathcal{F}[u_j(\cdot, s) D^{e_j} u_i(\cdot, s)](k)| \leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^3 \|u_j(\cdot, s) D^{e_j} u_i(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Por fim, novamente utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) e a definição das normas

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](k)| \leq c \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u_i(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Isto mostra que

$$\|\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_{\infty} \leq c \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (4.14)$$

Dito isso, por (4.12), (4.13) e (4.14)

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

como queríamos mostrar. \square

Repetindo o argumento utilizado na demonstração para as soluções do problema regularizado (4.10) obtemos

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.15)$$

onde c é uma constante positiva e

$$\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) = \bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) - \nabla p_\delta(\cdot, s)$$

Observação: Vale ressaltar que as soluções do problema regularizado também satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (4.16)$$

Proposição 4.12. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geq T_{**}$), tem-se

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t-s)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > s$, onde $k = |\alpha|$ e $c(m)$ depende apenas de m .

Demonstração. Por (4.6) obtemos

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}(t-s)^{-\frac{k}{2}}\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

e pelo resultado anterior

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t-s)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Proposição 4.13. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (4.8). Então existe $t_{**} > T_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução \mathbf{u}) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma função monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**}, \infty)$.

Demonstração. Sejam $t_0 \geq T_{**}$ e $t > t_0$. Aplicando a k -ésima derivada parcial D_k à $\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}$, fazendo o produto escalar com $D_k \mathbf{u}$, integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx = \nu \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \Delta \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

Vamos analisar cada integral separadamente. Note que $D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_k \mathbf{u}\|^2$. Dessa forma

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} \, ds \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, s)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 - \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 \, dx.$$

Note que expandindo a segunda integral e utilizando integração por partes⁵ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k u_i (D_i u_j) D_k u_j \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_i (D_k u_i D_k u_j) \, dx$$

e utilizando a regra do produto na última integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j \, dx - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx$$

porém a primeira integral do lado direito é igual a zero pois

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j \, dx &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k \left(\sum_{i=1}^3 D_i u_i \right) D_k u_j \, dx \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k (\nabla \cdot \mathbf{u}) D_k u_j \, dx = 0 \end{aligned}$$

⁵explicar pq não tem termo de fronteira, não lembro da explicação

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx.$$

A terceira integral é igual a zero, já que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k D_j p D_k u_j \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j D_k p D_k u_j \, dx$$

utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_j D_k u_j \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_k \left(\sum_{j=1}^3 D_j u_j \right) \, dx = 0$$

pois novamente $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por fim, a ultima integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k u_i D_k u_i \, dx$$

novamente utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j D_k u_i)(D_j D_k u_i) \, dx \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_j D_k u_i)^2 \, dx = - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \|D_j D_k \mathbf{u}\|^2 \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k D \mathbf{u}\|^2 \, dx \end{aligned}$$

Dito isso, voltando para (4.17) e somando em $1 \leq k \leq 3$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 - \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 \, dx + \nu \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k D \mathbf{u}\|^2 \, dx \, ds \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Lembrando da definição das normas vistas nos preliminares, multiplicando ambos os lados por 2 e reorganizando os termos, podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} \|D \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \, ds \\ = \|D \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_i D_k u_j D_j D_k u_i \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder e a definição das normas, temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a **aqui precisa detalhar, a gente fez mas não consegui entender pelas fotos**

$$\|D \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\infty} \|D \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

que pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.2) em $\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\infty}$ é menor ou igual a

$$\|D \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \, ds.$$

Em particular temos

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \end{aligned} \quad (4.18)$$

para todo $t \geq t_0$. Daí, seja $t_0 > t_*$ tal que por (4.9) $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2$. Dessa forma, segue que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2 \quad (4.19)$$

para todo $s > t_0$. Com efeito, suponha que (4.19) é falso, dessa forma, existiria $t_1 > t_0$ tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$ para todo $t_0 \leq s < t_1$ com $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \nu^2$. Tomando $t = t_1$ em (4.18) temos que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. De fato

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \end{aligned}$$

como $s \in [t_0, t_1]$ temos que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$ obtemos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds$$

que resulta em $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ como desejado. Então

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$$

o que é uma contradição. Dessa forma (4.19) é válido. De (4.18) e (4.19) temos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

para todo $t \geq t_2 \geq t_0$, onde $\gamma = \nu - \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} > 0$ é uma constante. Tomando $t_{**} = t_0$, finalizamos a demonstração. \square

Proposição 4.14. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray para (4.8). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 > 0$ tem-se

$$\|D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) - D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(k) \nu^{-(\frac{5}{4} + \frac{k}{2})} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{3}{4} + \frac{k}{2})}$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0)$ e $k = |\alpha|$.

Demonstração. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{v}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t)] + e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)$$

onde $t > t_0$ e $\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$ dada em (4.10). Ademais, temos que

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) = e^{\nu\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds \quad (4.20)$$

Com efeito, considere a equação

$$\partial_s \mathbf{u}_\delta = \mathbf{Q}_\delta + \nu \Delta \mathbf{u}_\delta$$

aplicando o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta(t_0-s)}$ em ambos os lados e integrando sobre $[0, t_0]$, obtemos

$$\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta \, ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds. \quad (4.21)$$

Note que

$$\partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] = -\nu e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta + e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta$$

ou seja

$$e^{\nu\Delta(t_0-s)} \partial_s \mathbf{u}_\delta = \partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] + \nu e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta.$$

Dessa forma, (4.21) se torna

$$\int_0^{t_0} \partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{u}_\delta \right] \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds$$

isto é,

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) - e^{\nu\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta \, ds$$

que reorganizando os termos, é exatamente a equação (4.20) que queríamos mostrar. Dito isso

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \, ds$$

para $t > t_0$. De forma análoga para $t > \tilde{t}_0$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \, ds.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) &= D^\alpha \left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] \right) \\ &\quad - D^\alpha \left(e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] \right) + D^\alpha \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \, ds. \end{aligned}$$

Portanto, seja $K \subseteq \mathbb{R}^3$ um compacto qualquer, dito isso, temos para cada $t > \tilde{t}_0$ e $\delta > 0$

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq J_{\alpha,\delta}(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(K)} \, ds$$

utilizando (4.15), temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a

$$J_{\alpha,\delta}(t) + c(k) \nu^{-\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{k}{2}} \|e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds$$

que pela Proposição 4.12, é menor ou igual a

$$J_{\alpha,\delta}(t) + c(k) \nu^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds. \quad (4.22)$$

Observe que a integral pode ser simplificada, já que $s \leq \tilde{t}_0$ implica em $(t-s)^{-\frac{3}{4}} \leq (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}}$ e pela desigualdade de energia $\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Sendo assim

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds \leq (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \, ds. \quad (4.23)$$

Pela desigualdade de Hölder e a desigualdade de energia, segue que

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\nu^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.24)$$

Portanto, por (4.23) e (4.23), obtemos

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq J_{\alpha, \delta}(t) + c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}-\frac{5}{4})}(t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

onde

$$J_{\alpha, \delta}(t) = \|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}[\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} + \|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-t_0)}[\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)])\|_{\mathcal{L}^2(K)}.$$

Tomando $\delta = \delta' \rightarrow 0$, temos que $J_{\alpha, \delta}(t) \rightarrow 0$. pois, dados $\sigma, \tau > 0$

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} \rightarrow 0$$

quando $\delta' \rightarrow 0$. De fato, denotando $\Phi_\delta(\cdot, \tau) = D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)])$, tem-se

$$\Phi_\delta(\cdot, \tau) = H_\alpha(\cdot, \tau) * [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)]$$

onde $H_\alpha(\cdot, \tau) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ não depende de δ . Como $\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma) \rightarrow 0$, segue que $\Phi_{\delta'}(x, \tau) \rightarrow 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$. Por outro lado

$$\begin{aligned} |\Phi_\delta(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x - y, \tau)[\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)]| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x - y, \tau)|^2 dy \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)|^2 dy \\ &= \|H_\alpha(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

utilizando a desigualdade triangular e (4.16) obtemos

$$|\Phi_\delta(x, t)| \leq 2\|H_\alpha(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (pois $2\|H_\alpha(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante em relação a x e K é limitado, logo pertence a $\mathcal{L}^1(K)$), segue que $\|\Phi_{\delta'}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \rightarrow 0$, quando $\delta' \rightarrow 0$ pelo fato de K ser compacto. Dito isso, fazendo $\delta = \delta' \rightarrow 0$ em (4.22) temos que

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}} - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leq c(k)\nu^{-(\frac{k}{2}-\frac{5}{4})} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-(\frac{k}{2}-\frac{3}{4})}$$

para todo $t_0 > \tilde{t}_0$. Tomando o supremo de todos $K \subseteq \mathbb{R}^3$ obtemos a desigualdade desejada. \square

Teorema 4.15. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (4.8), então

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponha que a afirmação é falsa, nesse caso existe uma sequência crescente $t_\ell \rightarrow \infty$ (com $t_\ell \geq t_{**}$ e $t_\ell \geq 2t_{\ell-1}$ para todo ℓ) e um $\varepsilon > 0$ fixo tal que

$$t_\ell \|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \varepsilon$$

para todo ℓ . Em particular

$$\int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^2 dt \geq (t_\ell - t_{\ell-1}) \|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} t_\ell \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} \eta$$

para todo ℓ , o que contradiz com a desigualdade de energia e (4.11). Portanto, a afirmação do teorema é válida. \square

Teorema 4.16 (Solução do problema clássico de Leray). Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (4.8), então

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} como definido na Proposição 4.13. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $t_0 \geq t_{**}$ suficientemente grande tal que pelo Teorema anterior, temos

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon$$

para todo $t \geq t_0$. Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$ obtemos, de forma análoga ao que foi feito na Proposição 4.14

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s) ds$$

Dito isso, utilizando a Proposição 4.11

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds$$

e pelo Teorema 4.15 é menor ou igual a

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \varepsilon \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Note que

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \leq 6\sqrt[4]{2}$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Sendo assim

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \varepsilon\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Como $\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + \nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}) \varepsilon$$

para todo $t \gg 1$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

como era desejado. □

Note que os Teoremas 4.15 e 4.16 juntos mostram que temos o decaimento de energia na norma do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$. Já que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}$.

A demonstração do lema abaixo é bastante extensa, porem é de extrema importância para o último teorema dessa seção

Lema 4.17. Para cada $k \geq 0$, denotando $U_k(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ tem-se

$$U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$$

Demonstração. O caso $k = 0$ segue da desigualdade de energia pois esta nos diz que

$$U_0(t) = t^0 \|D^0 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > 0$ (em particular $t \geq T_{**}$) e $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante. Logo, U_0 é limitada e $U_0 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$.

O caso $k = 1$ também já foi provado anteriormente. Pelo Teorema 4.15, temos que $U_1(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, isso é suficiente para mostrar que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ pois (??).

Dito isso, resta provar a afirmação para $k \geq 2$. De forma análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema ??, dado $t_0 \geq T_{**}$ podemos escrever $\mathbf{u}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) ds.$$

Dessa forma, para cada multi-índice α temos que

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \quad (4.25)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Defina $U^\alpha(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|$ com $k = |\alpha|$. De (4.25) segue que

$$U^\alpha(t) \leq I_1(\alpha, t) + I_2(\alpha, t) + J_\alpha(t)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1(\alpha, t) &= t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \\ I_2(\alpha, t) &= \int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds, \\ J_\alpha(t) &= \int_{t'}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

com $t' = \frac{t_0+t}{2}$. Conseguimos estimar $I_1(\alpha, t)$ de forma direta. Com efeito, por (4.6) e pela desigualdade de energia

$$|I_1(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}}.$$

Porém note que

$$(t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(1 + \frac{t_0}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} \leq (1 + t_0)^{\frac{k}{2}}.$$

pois $\frac{t_0}{t-t_0} \leq t_0$ para todo $t \geq t_0 + 1$. Dessa forma

$$|I_1(\alpha, t)| \leq c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Por outro lado utilizando a Proposição 4.12, temos

$$\begin{aligned} |I_2(\alpha, t)| &\leq c(k, \nu) \int_{t_0}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq c(k, \nu) \int_{t_0}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \end{aligned}$$

como sabemos que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ temos que existe uma constante M_1 tal que $|U_1(s)| = s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq M_1$ qtp em $[T_{**}, \infty)$. Dessa forma, também utilizando a desigualdade de energia e o fato de $s \geq t_0$ (o que implica em $(t - s_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} \leq (t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})}$)

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} \int_{t_0}^t s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Sendo assim

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t + t_0)^{\frac{1}{2}}$$

e de forma análoga ao que foi feito para $I_1(\alpha, t)$, $(t - t_0)^{-(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})} (t + t_0)^{\frac{1}{2}}$ é menor que uma constante que depende apenas de t_0 e k . Por isso

$$|I_2(\alpha, t)| \leq c(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Assim, obtemos

$$U^\alpha(t) \leq c(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + J_\alpha(t). \quad (4.26)$$

Logo, ainda resta estimar J_α , porem não conseguimos estimar J_α de forma geral para todo α , então faremos essa estimativa para o caso em que $|\alpha| = 2$ e depois utilizaremos indução para mostrar a estimativa de forma geral. Com efeito, considerando $D^\alpha = D_i D_j$ (consequentemente denotando $J_\alpha(t)$ por $J_{ij}(t)$) temos por (4.6) que

$$J_{i\ell}(t) = t \int_{t'}^t \|D_i [e^{\nu \Delta(t-t_0)} D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Para estimar $\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$ Note que $D_\ell \mathbf{Q} = -D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - D_\ell \nabla p = -D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \nabla q_\ell$ onde $q_\ell = D_\ell p$. Aplicando o divergente nessa equação, temos que

$$-\Delta q_\ell = \operatorname{div}(D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]).$$

Aplicando a teoria de Calderon-Zygmund, temos para cada $1 < r < \infty$

$$\|\nabla q_\ell(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|$$

o que implica em

$$\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}.$$

No nosso, caso temos

$$\|D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \leq c \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$$

Dito isso

$$\begin{aligned} J_{i\ell}(t) &\leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \right) ds \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) ds$$

e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.1)

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{5}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) ds.$$

Reescrevendo a equação acima como

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t \int_{t'}^t s^{-\frac{11}{8}} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\left(s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{5}{4}} \left(s \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \left(s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{3}{4}} \left(s \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right) \right) ds.$$

Fazendo as substituições adequadas, temos que o lado direito da equação acima é menor que

$$c(\nu) t M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}} ds + c(\nu) t M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Utilizando a desigualdade de Young ($ab \leq a^p p^{-1} + b^q q^{-1}$ onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$) com $a = 1$, $b = U_2(s)^{\frac{3}{4}}$, $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$, temos que $U_2(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_2(s)$. Dessa forma

$$c(\nu, M_1) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds + \left(c(\nu, M_1) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \right) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Para simplificar a expressão acima, note que **vamos precisar olhar essa passagem**. Dito isso

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu, M_1)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds$$

para todo i, ℓ e $t \geq t_0 + 1$. Dessa forma

$$U_2(t) \leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds \quad (4.27)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. Considere agora, t_2, \mathbf{M}_2 dados por

$$t_2 := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \quad \mathbf{M}_2 := \sup\{U_2(s) : t_0 \leq s \leq t_2\}.$$

Afirmamos que

$$U_2(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{M}_2$$

para todo $t \geq t_2$. De fato, definindo $\mathbf{U}_2(t) := \sup\{U_2(s) : t_2 \leq s \leq t\}$. Se $t' \geq t_2$, então por (4.27) temos

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 8c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_2(t) \end{aligned}$$

porém, como $t \geq t_2$ temos que, pela definição de t_2 , $t+t_0 > t_2 > 2^{16} c_{**}^4$, isso implica em $2^{16} c_{**}^4 < t+t_0$ e elevando ambos os lados por $1/4$ obtemos $16c_{**} < (t+t_0)^{\frac{1}{4}}$ que podemos reescrever como $8c_{**}(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} < 1/2$. Dito isso, obtemos

$$U_2(t) < c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

Por outro lado, se $t' < t_2$, podemos reescrever (4.27) como

$$U_2(t) \leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \left(\int_{t'}^{t_2} (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds + \int_{t_2}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds \right).$$

Observe que em $[t', t_2]$ $U_2(s) \leq \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$ e em $[t_2, t]$, $U_2(s) \leq \mathbf{U}_2(s) \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \mathbf{M}_2 \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t) \end{aligned}$$

mas $(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \leq 1$. Sendo assim

$$U_2(t) \leq c_* + c_{**} \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

Logo, $\frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t) \leq c_* + 8c_{**}$, que é equivalente à

$$U_2(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{M}_2$$

ou seja, mostramos que $U_2(t)$ é limitado por uma constante que não depende de t em $[t_2, \infty)$. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([t_2, \infty))$. Porém, sabemos que em $[T_{**}, \infty)$ em particular em $[T_{**}, t_2]$ $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave, o que implica em U_2 ser suave em um compacto, consequentemente limitada. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ como era desejado. Assim mostrado o caso $k = 2$.

Suponha que $U_\ell \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ para todo $\ell < k$. Dito isso seja α um multi-índice de ordem k . Denotando D^α por $D_i D^\gamma$ (onde γ é um multi-índice de ordem $k - 1$), temos, de forma análoga ao que foi feito no caso $k = 2$

$$J_\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t \|D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Além disso por Calderon-Zygmund

$$\|D^\beta \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leq c(r, n) \|D^\beta [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}$$

para cada $1 < r < \infty$ e qualquer multi-índice β . Dessa forma

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds$$

Utilizando a regra de Leibniz, obtemos

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\sigma \leq \gamma} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\sigma \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D^{\gamma-\sigma} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} ds,$$

e utilizando a Desigualdade de Hölder

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

além disso, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.1) segue que

$$J_\alpha(t) \leq c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

Escrevendo $J_\alpha(t)$ como a soma $J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)$ onde

$$J_1(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^u(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

$$J_2(t) = c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

$$J_3(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{k-1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D \mathbf{u}(\cdot, s)\| ds.$$

Como sabemos que $\|D^q \mathbf{u}(\cdot, s)\| = s^{-\frac{q}{2}} U_q(s) \leq M_q$ para $q < k$ e $\|D^k \mathbf{u}(\cdot, s)\| = s^{-\frac{k}{2}} U_k(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq c(\nu) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} U_k(s) ds \\ &\leq c(\nu, k) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de $s^{-\frac{3}{8}} < (t+t_0)^{-\frac{3}{8}}$ para a ultima desigualdade. Análogamente para $J_2(t)$ temos

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} ds \\ &\leq c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t-t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds \\ &\leq c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t-t_0)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

e para $J_3(t)$

$$\begin{aligned} J_3(t) &\leq c(\nu) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} U_k(s)^{\frac{3}{4}} ds \\ &\leq c(\nu, k) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s)^{\frac{3}{4}} ds. \end{aligned}$$

Lembrando que $U_k(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_k(s)$, segue por (4.26) e pelas estimativas acima que

$$U^\alpha(t) \leq c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_1) + c(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds$$

onde $U^\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Portanto

$$U_k(t) \leq c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_1) + c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0) \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds$$

para todo $t \geq t_0 + 1$. De forma análoga ao caso $k = 2$, definimos t_k, \mathbf{M}_k por

$$t_k := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \quad \mathbf{M}_k := \sup\{U_k(s); t_0 \leq s \leq t_k\}$$

Sendo assim, afirmamos novamente que

$$U_k(t) = 2c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + 16c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1) \mathbf{M}_k$$

para todo $t \geq t_k$. Essa demonstração é exatamente a mesma que foi feita para o caso $k = 2$. Ou seja, temos que U_k é limitada por uma constante que não depende de t em $[t_k, \infty)$, como U_k é limitada em $[T_{**}, \infty)$, segue que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$, como era desejado. \square

Teorema 4.18. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (4.8), então para todo $k \geq 0$ tem-se

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$

Demonstração. Os Teoremas 4.16 e 4.15 mostram os casos $k = 0$ e $k = 1$. Sendo assim, considere $k \geq 2$ e $t_0 \geq T_{**}$. Lembrando que

$$\begin{aligned} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|D^k [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t'} \|D^k [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\quad + \int_{t'}^t \|D^k [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $t_\varepsilon > t_0$ suficientemente grande de forma que

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{3} \varepsilon$$

e

$$t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} \|D^k [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Pelo Lema anterior, também é possível obter $t_\varepsilon > t_0$ de forma que

$$t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t \|D^k [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \frac{1}{3} \varepsilon.$$

para todo $t \geq t_\varepsilon$. Ou seja, temos $t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_\varepsilon$. Portanto

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

como queríamos mostrar. □

4.3 Problema de Dirichlet

Nessa seção retornamos ao problema visto na motivação do capítulo anterior.

O ponto principal dessa seção é o Teorema de Lax-Milgram que será utilizado para mostrar a existência de soluções fracas para o problema de Dirichlet. Para demonstrá-lo, será necessário o Teorema da Representação de Riesz para espaços de Hilbert, que será apresentado abaixo

Teorema 4.19 (Teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert). Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $v \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in H$. Além disso $\|f\| = \|v\|$.

Demonstração. Seja $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado não nulo, então existe $z \in H$ tal que $f(z) \neq 0$, como f é linear z deve ser não nulo. Ou seja, $\ker f \neq H$. Como f é limitado segue que $\ker f$ é fechado, sendo assim (por [15] p.p. 129), $H = \ker f \oplus \ker f^\perp$. Portanto $\ker f^\perp \neq \{0\}$ (pois caso contrário $\ker f = H$). Dito isso, seja $w \in \ker f^\perp$ não nulo, para cada $u \in H$, $f(u)w - f(w)u \in \ker f$ já que $f(f(u)w - f(w)u) = f(u)f(w) - f(w)f(u) = 0$. Dessa forma

$$0 = \langle f(u)w - f(w)u, w \rangle = f(u) \langle w, w \rangle - f(w) \langle u, w \rangle$$

o que implica em

$$f(u) = \left\langle u, \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \right\rangle.$$

Denotando $v := \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \in H$ (note que v não depende de u), temos que existe $v \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in H$.

Para mostrar que v é único, suponha que exista $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$ para todo $u \in H$. Dito isso $\langle u, v \rangle = f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$ para todo $u \in H$, reescrevendo, temos $\langle u, v - \tilde{v} \rangle = 0$ para todo $u \in H$, em particular se $u = v - \tilde{v} \in H$, temos $\|v - \tilde{v}\| = 0$, ou seja $v = \tilde{v}$. Portanto v é único.

Por fim, resta mostrar que $\|f\| = \|v\|$. De fato, note que $f(v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$. Ou seja

$$\|v\|^2 = f(v) \leq |f(v)| \leq \|f\| \|v\|,$$

como v é não nulo, temos $\|v\| \leq \|f\|$. Por outro lado, por Cauchy-Schwarz

$$|f(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

o que implica em $\|f\| \leq \|v\|$. Portanto

$$\|f\| = \|v\|$$

finalizando a demonstração. □

Teorema 4.20 (Teorema de Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear tal que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ para todo $u, v \in H$ i.e., a forma bilinear é limitada;
2. $\beta \|u\|^2 \leq B(u, u)$ para todo $u \in H$ i.e., a forma bilinear é coerciva,

e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $v \in H$ tal que $B(u, v) = f(u)$ para todo $u \in H$.

Demonstração. Essa demonstração sera dividida em alguns passos

Passo 1:

Para cada $v \in H$ defina $g_v : H \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_v(u) = B(u, v).$$

Claramente g_v é linear (pois B é uma forma bilinear). Além disso g_v é limitada, já que

$$|g_v(u)| = |B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$$

para todo $u \in H$, onde utilizamos o fato de B ser limitada. Sendo assim

$$|g_v(u)| \leq \alpha \|u\|$$

para todo $u \in H$. Logo g_v é limitada. Dito isso, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $w_v \in H$ tal que

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle$$

para todo $u \in H$. Agora, seja $A : H \rightarrow H$ dado por $Av = w_v$. Dessa forma

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

Passo 2: A é um operador linear e limitado

Sejam $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim

$$\langle u, A(\lambda x + y) \rangle = B(u, \lambda x + y) = \lambda B(u, x) + B(u, y) = \lambda \langle u, Ax \rangle + \langle u, Ay \rangle = \langle u, \lambda Ax + Ay \rangle$$

pois B é uma forma bilinear. Logo A é linear. Além disso, dado $v \in H$

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = B(Av, v) \leq \alpha \|Av\| \|v\|$$

como $Av \neq 0$ obtemos

$$\|Av\| \leq \alpha \|v\|.$$

Portanto A é limitado

Passo 3: A é injetivo e $\text{Im}A$ é fechado

Sabemos que existe $\beta > 0$ tal que $\beta \|u\|^2 \leq |B(u, u)|$. Dessa forma

$$\beta \|u\|^2 \leq |B(u, u)| = |\langle u, Au \rangle| \leq \|u\| \|Au\|$$

ou seja

$$\beta \|u\| \leq \|Au\| \quad (4.28)$$

para todo $u \in H$. Seja $u \in \ker A$, então $Au = 0$, daí por (4.28)

$$\beta \|u\| \leq \|Au\| = 0$$

o que implica em $u = 0$. Portanto A é injetiva. Além disso, seja $(Au_k) \subseteq \text{Im}A$ tal que $Au_k \rightarrow v \in H$. Mostremos que $v \in \text{Im}A$. Com efeito, (Au_k) é de Cauchy (porque converge). Dito isso, por (4.28)

$$\beta \|u_k - u_\ell\| \leq \|Au_k - Au_\ell\| \rightarrow 0$$

Ou seja, $(u_k) \subseteq H$ é de Cauchy. Como H é completo, existe $u_0 \in H$ tal que $u_n \rightarrow u_0$. Como A é limitado (o que implica em A ser contínuo) temos $Au_k \rightarrow Au_0$. Pela unicidade do limite $v = Au_0 \in \text{Im}A$. Portanto $\text{Im}A$ é fechado.

Passo 4: A é sobrejetivo

Sabemos que $H = \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$. Mostremos que $\text{Im}A^\perp = \{0\}$. Com efeito, se $w \in \text{Im}A^\perp$, temos que

$$\beta \|w\|^2 \leq |B(w, w)| = |\langle w, Aw \rangle| = 0$$

Logo, $w = 0$ o que implica em $H = \text{Im}A$. Portanto A é sobrejetiva.

Passo 5: $f(u) = B(u, v)$

Como f é um funcional linear limitado em H , pelo Teorema da Representação de Riesz existe $z \in H$ tal que $f(u) = \langle u, z \rangle$ para todo $u \in H$. Como A é uma bijeção, existe um único $v \in H$ tal que $z = Av$, dessa forma

$$f(u) = \langle u, z \rangle = \langle u, Av \rangle = B(u, v)$$

para todo $u \in H$.

Passo 6: Unicidade

Por fim, para mostrar que v é único, suponha que exista $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = B(u, \tilde{v})$ para todo $u \in H$. Dessa forma

$$B(u, v) = f(u) = B(u, \tilde{v}).$$

Reescrevendo, temos $B(u, v - \tilde{v}) = 0$ para todo $u \in H$. Dito isso por (4.28)

$$\beta \|v - \tilde{v}\| \leq |B(v - \tilde{v}, v - \tilde{v})| = 0$$

Sendo assim, $v = \tilde{v}$. Portanto v é único. □

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram (Existência de soluções fracas). Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde Ω é um aberto limitado. Na motivação vimos que u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_{\Omega} Du \cdot D\phi \, dx + \int_{\Omega} u\phi \, dx = \int_{\Omega} f\phi \, dx$$

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Porem pela densidade das funções teste em $H_0^1(\Omega)$, podemos dizer que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx$$

onde $v \in H_0^1(\Omega)$.

Defina $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B[u, v] = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx$$

e $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Note que B é bilinear limitado e coercivo. Com efeito, a bilinearidade de B segue do fato do gradiente fraco D e a integral serem operadores lineares. Além disso

$$B(u, u) = \int_{\Omega} Du \cdot Du \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} \|Du\|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Logo B é coercivo, e utilizando a Desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |Du \cdot Dv| \, dx + \int_{\Omega} |uv| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|Du\| \|Dv\| \, dx + \int_{\Omega} |u| |v| \, dx \leq \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|Dv\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

Porem, sabemos que $\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Dito isso, obtemos

$$|B(u, v)| \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Logo, B é limitado. Por fim, temos que φ é limitado. De fato

$$|\varphi(v)| \leq \int_{\Omega} |f| |v| \, dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} < \infty$ pois por hipótese $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = \varphi(v)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto existe uma única solução fraca para o problema de Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.
- [2] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [4] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.
- [5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
- [6] Alberto Fiorenza, Maria Rosaria Formica, Tomáš Roskovec e Filip Soudský. *Detailed proof of classical Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality with historical remarks*. 2018.
- [7] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 1999.
- [8] Giovanni P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems*. 2nd. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.
- [9] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [10] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [11] Elon Lages Lima. *Curso de Análise vol. 2*. 12^a ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020.
- [12] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6^a edição. IMPA, 2020.
- [13] Jens Lorenz e Paulo R. Zingano. *The Navier-Stokes equations for Incompressible Flows: solution properties at potential blow-up times*. 2015.
- [14] James R. Munkres. *Analysis on Manifolds*. CRC Press, 1991.
- [15] César R. de Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. 1^a ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018, p. 257.
- [16] C.W. Oseen. *Hydrodynamik*. Mathematik in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.
- [17] Michael Wiegner. «Decay Results for Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations on \mathbb{R}^n ». Em: *Journal of The London Mathematical Society-second Series* 35 (1987), pp. 303–313.
- [18] Paulo R. Zingano. *Two problems in Partial Differential Equations (in Portuguese)*. 2018.