

Dois Problemas em Equações Diferenciais Parciais

PAULO R. ZINGANO

Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, RS 91509-900, Brazil

*Trabalho inédito submetido para avaliação
para fins de progressão funcional à Classe E*

Abstract

In this work, we examine two important problems in the theory of nonlinear partial differential equations. In PART I, we propose and solve a more general and complete version of the celebrated Leray’s problem for the incompressible Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 , which in its simplest form was suggested by J. Leray in 1934 (and solved only in the 1980s by T. Kato, K. Masuda and other authors). A number of related new results of clear interest to the theory of Leray’s solutions are also given here.

In PART II, which is independent of PART I and can be read separately, we introduce an important new collection of problems concerning global existence results and blow-up phenomena for solutions of conservative advection-diffusion equations in \mathbb{R}^n where heterogeneities in the lower order terms tend to destabilize the solution (everywhere or in certain regions), strongly competing with the viscous dissipation effects to determine the overall solution behavior. This work extends some recent contributions led by the author [53, 54] (see also [3, 6]) where the analysis was confined to one-dimensional problems, primarily in the case of linear advection, for which solutions are automatically global and can only misbehave by increasing unboundedly as $t \rightarrow \infty$. Here, we consider the much more challenging case of superlinear advection (and arbitrary dimension), which may cause finite-time blow-up in several important spaces. We then point out a new kind of phenomena — one that may be properly named “anti-Fujita” for its vivid contrast to the type of blow-up behavior discovered by Fujita in the 1960s, and which has been investigated ever since — that has apparently been completely overlooked in the literature. For better clarity, we restrict ourselves here to the case of linear nondegenerate diffusion, but similar properties and behavior are also to be found in much more general diffusion phenomena, as will be reported shortly.

Índice

PARTE I: PROBLEMA DE LERAY

| | |
|---------------------------|----|
| 1. Introdução | 1 |
| 2. Preliminares, I | 7 |
| 3. Preliminares, II | 12 |
| 4. Prova de (1.12a) | 16 |
| 5. Prova de (1.12b) | 23 |
| Apêndice A | 28 |

PARTE II: PROBLEMA DE EXISTÊNCIA GLOBAL PARA EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO CONSERVATIVAS

| | |
|---|----|
| 1. Introdução | 31 |
| 2. Preliminares | 35 |
| 3. Prova de (1.10) | 40 |
| 4. Condições de existência global | 48 |
| REFERÊNCIAS | 51 |

Contribuições Principais

PARTE I

| | |
|-------------------|----|
| Teorema 3.1 | 12 |
| Teorema 4.1 | 16 |
| Teorema 5.1 | 23 |
| Teorema A.1 | 30 |

PARTE II

| | |
|-------------------|----|
| Teorema A | 33 |
| Teorema B | 34 |
| Teorema 3.1 | 40 |
| Teorema 4.1 | 48 |

PARTE I

Problema de Leray

1. Introdução

Em seu trabalho seminal [33], Leray construiu soluções (fracas) globais de energia finita $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap C_w([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ para as equações de Navier-Stokes em \mathbb{R}^3 ,

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(\cdot, t) = 0, \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3), \quad (1.1b)$$

onde $\nu > 0$ é constante, e $L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço de funções $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ com $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Ademais, estas soluções reproduzem o estado inicial \mathbf{u}_0 em L^2 (i.e., $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ ao $t \searrow 0$) e satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (1.2)$$

para todo $t > 0$ [21, 29, 33, 48]. Enquanto a *unicidade* das soluções de Leray correspondentes a um estado inicial $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ qualquer permanece fundamentalmente em aberto até hoje, Leray mostrou que existe um instante de tempo $0 < T_{**} < \infty$ (dependendo dos dados ν, \mathbf{u}_0 fornecidos) tal que $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty))^1$ e

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L_{\text{loc}}^\infty([T_{**}, \infty), H^m(\mathbb{R}^3)) \quad (1.3)$$

para cada $m \geq 0$, onde $H^m(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço de Sobolev das funções (neste caso, com valores em \mathbb{R}^3) em $L^2(\mathbb{R}^3)$ com derivadas (espaciais) fracas de ordem até m em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Um problema básico importante deixado aberto por Leray em 1934 foi (denotando $W(t) := \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$, como em [33]):

J'ignore si $W(t)$ tend nécessairement vers 0 quand t augmente indéfiniment,
J. Leray ([33], p. 248)

¹É conhecido também que se tem $T_{**} < K\nu^{-5} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4$ para certa constante absoluta $K > 0$, ver e.g. [28, 32, 33]. (No APÊNDICE A a seguir, melhoraremos o valor dado para K , mostrando que $K < 0.000\,753\,026$.) Condições adicionais sobre o estado inicial $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ — por exemplo, $\mathbf{u}_0 \in H_\sigma^s(\mathbb{R}^3)$, $s > 3/2$ — garantem além disso $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T_*])$ para certo $0 < T_* \leq T_{**}$ [51].

ou seja, se vale (ou não) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (1.4)$$

Esta questão somente foi resolvida (positivamente) 50 anos mais tarde por Kato [26] e subsequentemente também por outros autores [25, 34, 52]. Vários desenvolvimentos e extensões importantes de (1.4) vem sendo estabelecidos (ver e.g. [5, 7, 28, 38, 43, 45] e a discussão abaixo). Em particular, uma prova extremamente simples para (1.4) foi obtida em [45], com base no método em [28], utilizando somente técnicas já conhecidas em 1934!² (Para uma descrição detalhada do método em [45], ver [39].)

Dado $t_0 \geq 0$, é natural que se tente aproximar as soluções $\mathbf{u}(\cdot, t)$ de (1.1) para $t > t_0$ pelas soluções $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)$ dos problemas lineares associados

$$\mathbf{v}_t = \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(\cdot, t_0) = \mathbf{u}(\cdot, t_0). \quad (1.5)$$

Para estas soluções, é fácil obter várias estimativas de decaimento, como e.g.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.6a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{4}} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.6b)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{s}{2}} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad s \geq 0, \quad (1.6c)$$

válidas para todo n . (Em (1.6c) acima, $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de Sobolev homogêneo formado pelas funções $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tais que $|\cdot|_2^s |\hat{\mathbf{v}}(\cdot)|_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, onde $\hat{\mathbf{v}}(\cdot)$ denota a transformada de Fourier de $\mathbf{v}(\cdot)$, com norma $\|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}$ dada por

$$\|\mathbf{v}\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|_2^{2s} |\hat{\mathbf{v}}(\xi)|_2^2 d\xi \right\}^{1/2}. \quad (1.7)$$

Podemos assim esperar que estimativas similares a (1.6) sejam também válidas para as soluções de Leray $\mathbf{u}(\cdot, t)$ de (1.1), ao menos para $n = 3$, dado $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^n)$ qualquer. Este é essencialmente o PROBLEMA DE LERAY para as equações de Navier-Stokes, com sua versão mais básica dada em (1.4) acima. Outras questões se põem

²Como em [28], esta prova faz uso tradicional de técnicas clássicas como estimativas de energia e transformadas de Fourier, mas é válida apenas em dimensão $n = 2, 3$. Em contraste, a prova de (1.4) em [26] pode ser estendida a $n = 4$, e o argumento (muito envolvente) desenvolvido em [52] consegue estabelecer (1.4) para $n \geq 2$ qualquer.

aqui naturalmente; por exemplo, a respeito do comportamento da diferença (ou erro) $\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)$ para $t \gg 1$. Na norma L^2 , esta questão sobre o erro foi respondida por Wiegner [52], tendo-se, para $t_0 \geq 0$ qualquer,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n-2}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \quad (1.8)$$

Como com (1.4), uma prova mais simples para (1.8) foi recentemente dada em [45], supondo $n \leq 3$, tendo-se também mostrado os resultados correspondentes a (1.6b):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.9a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n-1}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.9b)$$

em dimensão $n = 2, 3$ (cf. [45], Section 4). No presente trabalho, vamos estabelecer as estimativas (mais difíceis) correspondentes a (1.6c) no caso das soluções de Leray do problema (1.1), além de estimativas similares sobre o erro (ver (1.10b) abaixo). Os resultados são simples de descrever: dados $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \geq 0$ quaisquer, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{s}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.10a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n-2}{4} + \frac{s}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.10b)$$

para todo $s \geq 0$ (s real), e $n = 2, 3$. Note-se que (1.4), (1.8) e (1.9) tornam-se agora consequências simples de (1.10), que pode assim ser considerada como a forma geral completa do problema de Leray, resolvida neste trabalho (exceto que, no caso especial $n = 2$, tem-se (1.10a) derivada previamente em [5], usando um procedimento diferente). A obtenção de (1.10b) é particularmente delicada, e utiliza a estimativa

$$\|e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) - e^{\nu \Delta(t-t_1)} \mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq K \nu^{-\frac{1}{2} - \gamma} (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 (t - t_1)^{-\gamma} \quad (1.11)$$

para $t > t_1 > t_0 \geq 0$ arbitrários, derivada na Seção 3 abaixo, onde $\gamma = n/4 + s/2$, e $K = K(n, s) > 0$ é uma constante (cujo valor depende apenas dos parâmetros n, s considerados). Leitores interessados prioritariamente nas novas contribuições do presente trabalho podem neste ponto consultar diretamente os seguintes resultados: Teorema 3.1, Teorema 4.1 (e Lema 4.1), Teorema 5.1 e Teorema A.1 (Apêndice A). Também pode ser conveniente rever rapidamente os Teoremas 4.2 e 4.3 e os resultados revisados na Seção 2 a seguir.

Observação 1.1. Tomando-se $s = m$ (inteiro) em (1.10), resulta (por (1.7) e do fato de se ter³ $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} = \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, por Parseval):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.12a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n-2}{4} + \frac{|\alpha|}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t) - D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (1.12b)$$

para todo $m \geq 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, sendo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ a ordem de α . Assim, (1.10) descreve o comportamento de $\mathbf{u}(\cdot, t)$, $\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)$ e suas derivadas (espaciais) de qualquer ordem. Na verdade, (1.10) e (1.12) são equivalentes: tendo-se (1.12), obtém-se (1.10) aplicando-se a propriedade de interpolação

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\alpha_1} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^{\alpha_2}, \quad s_1 < s < s_2, \quad (1.13)$$

onde $\alpha_1 = \theta_1 s / s_1$, $\alpha_2 = \theta_2 s / s_2$, sendo $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ dados por $s^{-1} = \theta_1 s_1^{-1} + \theta_2 s_2^{-1}$. A obtenção de (1.10) nas Seções 2, 3 abaixo será feita considerando-se a forma (1.12) destas propriedades. Se desejado, seria também suficiente derivar o resultado no caso particular $\nu = 1$; uma vez obtido, os resultados (1.10), (1.11), (1.12) para $\nu > 0$ geral decorreriam então de argumentos simples de escala (dado que, sendo $\mathbf{u}(x, t)$, $p(x, t)$ uma solução de Leray do sistema (1.1) para dado $\nu > 0$, então $\mathbf{U}(x, t) := \mathbf{u}(\nu x, \nu t)$, $P(x, t) := p(\nu x, \nu t)$ definem uma solução de Leray para (1.1) com $\nu = 1$).

Observação 1.2. A análise e resultados a seguir podem também ser adaptados/estendidos para o problema de Navier-Stokes com forças externas, ou seja,

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\cdot, t), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(\cdot, t) = 0, \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3), \quad (1.14b)$$

onde se supõe, no caso mais simples, $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap L^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ satisfazendo (1.15) abaixo: considerando-se a projeção de Helmholtz $\mathbf{g}(\cdot, t) = \mathbb{P}_H[\mathbf{f}(\cdot, t)]$ de $\mathbf{f}(\cdot, t)$ em $L_\sigma^2(\mathbb{R}^n)$, a suposição

³Para a definição de $\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e outras normas aqui usadas, ver (1.19), (1.20) a seguir. De modo geral, o símbolo D^m refere-se coletivamente a todas as derivadas espaciais de ordem m , enquanto D^α denota uma derivada particular, correspondente ao multi-índice α indicado.

$$\int_0^\infty (1+t)^{m/2} \|D^m \mathbf{g}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt < \infty, \quad \forall m \geq 0 \quad (1.15)$$

permite a validade de (1.6), (1.10), (1.11), (1.12) acima, onde agora $\mathbf{v}(\cdot, t) \equiv \mathbf{v}(\cdot, t; t_0)$ deve ser definida como a solução (única) em $L^\infty([t_0, \infty), L_\sigma^2(\mathbb{R}^n))$ do problema

$$\mathbf{v}_t = \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}(\cdot, t), \quad \mathbf{v}(\cdot, t_0) = \mathbf{u}(\cdot, t_0). \quad (1.16)$$

Hipóteses mais fracas sobre $\mathbf{g}(\cdot, t)$ podem também ser adotadas no lugar de (1.15), com resultados correspondentes mais fracos; por exemplo, tendo-se apenas

$$\int_0^\infty (1+t)^{m/2} \|D^m \mathbf{g}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt < \infty, \quad m = 0, 1, \quad (1.17)$$

obtém-se (adaptando-se a prova em [45], como feito em [7]) que as estimativas (1.4), (1.6a), (1.6b), (1.8) e (1.9) acima permanecem válidas. Para mais detalhes, ver [7]. Em [52], obtém-se (1.4) e (1.8) para as soluções de (1.14) supondo-se (1.17) para $m = 0$ apenas, e adicionalmente

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{n/4+1/2} \|\mathbf{g}(\cdot, t)\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} < \infty. \quad (1.18)$$

Descrevendo sucintamente o conteúdo das seções seguintes, apresentamos na Seção 2 vários resultados conhecidos que serão relevantes na derivação das estimativas (1.10), (1.11) e (1.12) a seguir. Esta discussão é baseada em [27, 28, 33]. Na Seção 3, estabelecemos (1.11), que será importante para simplificar a prova de (1.10b), (1.12b) mais adiante. A Seção 4 é inteiramente voltada à obtenção das estimativas (1.10a) e (1.12a), enquanto a Seção 5 é dedicada a (1.10b), (1.12b). Com exceções ocasionais, apresentaremos os detalhes no caso específico $n = 3$ apenas, já que as provas correspondentes em dimensão $n = 2$ podem ser feitas seguindo um procedimento inteiramente análogo (e, em alguns casos, bem mais simples).

Notação. Como já visto acima, usaremos (em geral) letras em negrito para grandezas vetoriais, e.g. $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$, denotando por $|\cdot|_2$ (ou simplesmente $|\cdot|$) a norma Euclideana em \mathbb{R}^n , ver e.g. (1.7). Como é usual, $\nabla p \equiv \nabla p(\cdot, t)$ denota o gradiente (espacial) de $p(\cdot, t)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, e $\nabla \cdot \mathbf{u} = D_1 u_1 + \dots + D_n u_n$ é o divergente (espacial) de $\mathbf{u}(\cdot, t)$; analogamente, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = u_1 D_1 \mathbf{u} + \dots + u_n D_n \mathbf{u}$, etc. $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, $1 \leq q \leq \infty$, denota a norma tradicional do espaço de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$, pondo-se, para $1 \leq q < \infty$:

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |u_i(x, t)|^q dx \right\}^{1/q} \quad (1.19a)$$

$$\| D\mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_j u_i(x, t)|^q dx \right\}^{1/q} \quad (1.19b)$$

$$\| D^2\mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{i,j,\ell=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_j D_\ell u_i(x, t)|^q dx \right\}^{1/q} \quad (1.19c)$$

e, mais geralmente, para $m \geq 1$ qualquer:

$$\| D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_{j_1} \cdots D_{j_m} u_i(x, t)|^q dx \right)^{1/q}, \quad (1.19d)$$

denotando-se por $\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max \{ \| u_i(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} : 1 \leq i \leq n \}$ o supremo (essencial) de $\mathbf{u}(\cdot, t)$, e similarmente para $\| D\mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $\| D^2\mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, etc. (Com estas definições, tem-se $\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \rightarrow \| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ao $q \rightarrow \infty$, assim como, mais geralmente, $\| D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \rightarrow \| D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, para todo m .)⁴ Ocasionalmente, resulta também conveniente usar a seguinte definição alternativa para a norma do sup de $\mathbf{u}(\cdot, t)$,

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_\infty = \text{ess sup} \{ | \mathbf{u}(x, t) |_2 : x \in \mathbb{R}^n \}. \quad (1.20)$$

Podemos também utilizar $\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q}$ no lugar de $\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, etc, por simplicidade. Constantes serão usualmente representadas pelas letras C, c, K ; escrevemos $C(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ para observar que o valor da constante C em questão depende apenas dos parâmetros $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ indicados (a menos que explicitamente mencionado em contrário). Por conveniência e economia, usamos tipicamente o mesmo símbolo para denotar constantes com diferentes valores numéricos (por exemplo, escrevemos C^2 ou $10C + 1$, $\cosh C$, etc, novamente como C , e assim por diante), como usualmente feito na literatura.

Agradecimentos. Parte das contribuições feitas na PARTE I não teria provavelmente sido possível sem várias ideias e métodos introduzidos em [27, 28]. O autor é especialmente grato a Thomas Hagstrom e Jens Lorenz pelas inúmeras discussões ocorridas durante sua visita à Universidade do Novo México em 2001-2002.

⁴Mais seriamente, convém observar que, com as definições (1.19), (1.20), se uma desigualdade de tipo Nirenberg-Gagliardo $\| \mathbf{u} \|_{L^q} \leq K \| \mathbf{u} \|_{L^{q_1}}^{1-\theta} \| \nabla \mathbf{u} \|_{L^{q_2}}^\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, valer para funções *escalares* u ($K > 0$ constante), então ela será automaticamente válida para funções *vetoriais* \mathbf{u} com a *mesma* constante K do caso escalar. Ademais, tem-se $\| D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^q} \leq \| D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^{q_1}}^{1-\theta} \| D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^{q_2}}^\theta$ se $1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, e assim por diante.

2. Preliminares, I

Nesta seção, reunimos por conveniência vários resultados básicos dados em [27, 28, 33] que terão papel relevante na derivação das estimativas (1.10), (1.11), (1.12) nas seções seguintes. No texto, restringiremos nossa atenção ao caso (fundamental) de dimensão $n = 3$, mas todos os argumentos usados podem ser facilmente estendidos/adaptados de modo a se aplicarem a $n = 2$ igualmente, com apenas pequenas mudanças óbvias. Em todo o texto, $\mathbf{u}(\cdot, t)$ sempre denotará uma solução de Leray (dada, qualquer) para as equações (1.1), mesmo que nada seja dito explicitamente.

Para a construção das soluções de Leray $\mathbf{u}(\cdot, t)$ do problema (1.1), ver e.g. [21, 33] e a discussão abaixo. Estas soluções foram obtidas em [33] usando um procedimento de regularização engenhoso revisado a seguir. Tomando $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ não negativa (qualquer) com $\int_{\mathbb{R}^3} G(x) dx = 1$, e definindo $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ pela convolução de $\mathbf{u}_0(\cdot)$ com $G_\delta(x) = \delta^{-n} G(x/\delta)$, $\delta > 0$, introduz-se $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ como a solução (única, clássica, globalmente definida e em L^2) do problema regularizado

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta = \nu \Delta \mathbf{u}_\delta, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_\delta(\cdot, t) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, 0) = \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} := G_\delta * \mathbf{u}_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H^m(\mathbb{R}^3), \quad (2.1b)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, t) := G_\delta * \mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$. Em [33], Leray logrou mostrar que, para uma sequência $\delta' \rightarrow 0$ apropriada, tem-se a convergência fraca (em $L^2(\mathbb{R}^3)$)

$$\mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, t) \rightharpoonup \mathbf{u}(\cdot, t) \quad \text{as } \delta' \rightarrow 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.2)$$

i.e., $\mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t)$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^3)$, para cada $t \geq 0$ (ver [33], p. 237), com $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap C_w^0([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$ contínua em $L^2(\mathbb{R}^3)$ no instante $t = 0$ e resolvendo a equação (1.1a) no sentido de distribuições. Ademais, (1.2) é satisfeita para todo $t \geq 0$, de modo que, em particular, tem-se

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (2.3)$$

Outra propriedade importante obtida em [33] é que $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty))$ para certo $T_{**} \gg 1$, com $D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \in L_{\text{loc}}^\infty([T_{**}, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$ para cada $m \geq 1$. Este fato permite simplificar significativamente o argumento desenvolvido para (1.10) – (1.12) mais adiante. Outros resultados importantes referem-se à projeção de Helmholtz de $-\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)$ em $L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$, ou seja, o campo $\mathbf{Q}(\cdot, t) \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot, t) := -\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla p(\cdot, t), \quad \text{a.e. } t > 0. \quad (2.4)$$

As estimativas que precisaremos de $\mathbf{Q}(\cdot, t) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ acima são revisadas a seguir.

Proposição 2.1. *Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geq T_{**}$), tem-se*

$$\| e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K \nu^{-\frac{3}{4}} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (2.5)$$

para todo $t > s$, onde $K = (8\pi)^{-3/4}$.

Prova: O argumento a seguir é adaptado de [27, 28]. Seja $\mathbb{F}[f] \equiv \hat{f}$ a transformada de Fourier de uma dada função $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, viz.,

$$\mathbb{F}[f](k) \equiv \hat{f}(k) := (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad k \in \mathbb{R}^3 \quad (2.6)$$

(onde $i^2 = -1$). Dada $\mathbf{v}(\cdot, s) = (\mathbf{v}_1(\cdot, s), \mathbf{v}_2(\cdot, s), \mathbf{v}_3(\cdot, s)) \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, obtém-se, pela identidade de Parseval,

$$\begin{aligned} \| e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \| \mathbb{F}[e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu|k|_2^2(t-s)} | \hat{\mathbf{v}}(k, s) |_2^2 dk \\ &\leq \| \hat{\mathbf{v}}(\cdot, s) \|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu|k|_2^2(t-s)} dk \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \nu^{-3/2} (t-s)^{-3/2} \| \hat{\mathbf{v}}(\cdot, s) \|_\infty^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\| e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/4} \nu^{-3/4} (t-s)^{-3/4} \| \hat{\mathbf{v}}(\cdot, s) \|_\infty, \quad (2.7)$$

onde $|\cdot|_2$ denota a norma Euclideana em \mathbb{R}^3 , e $\| \hat{\mathbf{v}}(\cdot, s) \|_\infty = \sup \{ | \hat{\mathbf{v}}(k, s) |_2 : k \in \mathbb{R}^3 \}$. Como será mostrado abaixo, (2.5) segue de uma aplicação direta de (2.7) a $\mathbf{v}(\cdot, s) = \mathbf{Q}(\cdot, s)$. Para isso, é preciso que se estime $\| \hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s) \|_\infty$: como tem-se $\mathbb{F}[\nabla P(\cdot, s)](k) = i\hat{p}(k, s)k$ e $\sum_{j=1}^3 k_j \hat{Q}_j(k, s) = 0$ (pois $\nabla \cdot \mathbf{Q}(\cdot, s) = 0$), segue que $\mathbb{F}[\nabla P(\cdot, s)](k)$ e $\hat{\mathbf{Q}}(k, s)$ são vetores ortogonais em \mathbb{C}^3 , para todo $k \in \mathbb{R}^3$. Lembrando, por (2.4), que $\hat{\mathbf{Q}}(k, s) + \mathbb{F}[\nabla P(\cdot, s)](k) = -\mathbb{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](k)$, obtém-se

$$| \hat{\mathbf{Q}}(k, s) |_2 \leq | \mathbb{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](k) |_2 \quad (2.8)$$

para todo $k \in \mathbb{R}^3$, de modo que

$$\| \hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s) \|_\infty \leq \| \mathbb{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s) \|_\infty. \quad (2.9)$$

Por outro lado, tem-se, para $1 \leq i \leq 3$,

$$\begin{aligned}
| \mathbb{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](k) | &\leq \sum_{j=1}^3 | \mathbb{F}[u_j(\cdot, s) D_j u_i(\cdot, s)](k) | \\
&\leq (2\pi)^{-3/2} \sum_{j=1}^3 \| u_j(\cdot, s) D_j u_i(\cdot, s) \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq (2\pi)^{-3/2} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \nabla u_i(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)},
\end{aligned}$$

usando Cauchy-Schwarz. (Aqui, como sempre, $D_j = \partial/\partial x_j$.) Isso fornece

$$\| \mathbb{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s) \|_{\infty} \leq (2\pi)^{-3/2} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.10)$$

De (2.7), (2.9) and (2.10), obtém-se (2.5), concluindo a prova da Proposição 2.1. \square

Note-se que, repetindo o argumento acima para as soluções das equações regularizadas (2.1), obtém-se de modo análogo que

$$\| e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}_{\delta}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K \nu^{-\frac{3}{4}} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \| \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (2.11)$$

para cada $t > s > 0$, sendo $K = (8\pi)^{-3/4}$, como antes, e

$$\mathbf{Q}_{\delta}(\cdot, s) = -\bar{\mathbf{u}}_{\delta}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, s) - \nabla p_{\delta}(\cdot, s). \quad (2.12)$$

A estimativa (2.11) é muito útil, visto que as soluções regularizadas $\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, t)$ definidas em (2.1) satisfazem a desigualdade de energia

$$\| \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \| D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (2.13)$$

para todo $t > 0$ (e todo $\delta > 0$), de modo que $\| \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \int_0^t \| D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds$ podem ser estimadas independentemente de $\delta > 0$. Isso será usado no Teorema 3.1 (Seção 3) para mostrar que a escolha particular de $t_0 \geq 0$ ao se definir as aproximações (1.5) não é relevante com respeito às propriedades (1.10b), (1.12b). Convém também generalizar a estimativa (2.5) para derivadas de ordem superior. No caso da equação do calor, será útil lembrarmos a seguinte estimativa (bem conhecida):

$$\| D^{\alpha} [e^{\nu \Delta \tau} \mathbf{u}] \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, m) \| \mathbf{u} \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} (\nu \tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}) - \frac{|\alpha|}{2}} \quad (2.14)$$

para todo $\tau > 0$, e quaisquer α (multi-índice), $1 \leq r \leq 2$, $\mathbf{u} \in L^r(\mathbb{R}^n)$ considerados, $n \geq 1$ arbitrário, e onde $m = |\alpha|$. (Para uma derivação de (2.14), ver e.g. [29, 32].)

Proposição 2.2. *Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geq T_{**}$), tem-se*

$$\| D^\alpha \{ e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \} \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K(m) \nu^{-\gamma} (t-s)^{-\gamma} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (2.15)$$

para todo $t > s$, onde $m = |\alpha|$, $\gamma = m/2 + 3/4$, e $K(m)$ depende apenas de m .

Prova: Este resultado é uma consequência direta de (2.5) e (2.14) acima. De fato, tem-se:

$$\begin{aligned} \| D^\alpha \{ e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \} \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \\ &\leq K(m) \nu^{-\frac{m}{2}} (t-s)^{-\frac{m}{2}} \| e^{\nu \Delta(t-s)/2} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad [\text{por (2.14)}] \\ &\leq K(m) \nu^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} (t-s)^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad [(2.5)] \end{aligned}$$

□

Para fins do próximo resultado a ser revisado nesta seção, dado na Proposição 2.3, precisaremos das seguintes desigualdades elementares de Nirenberg-Gagliardo (SNG) para funções $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ quaisquer:

$$\| u \|_\infty \leq K_0 \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \| D^2 u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4}, \quad K_0 < 0.678, \quad (2.16a)$$

ver e.g. { [50], Proposition 2.4, p. 5 }, ou { [44], Teorema 4.5.1, p. 52 }; e

$$\| D u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K_1 \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| D^2 u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}, \quad K_1 = 1, \quad (2.16b)$$

facilmente obtida usando a transformada de Fourier. De (2.16a), (2.16b), obtém-se

$$\| u \|_\infty \| D u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \leq K_2 \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \| D^2 u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad K_2 = K_0 K_1^{1/2} < 1. \quad (2.17)$$

Lembramos também a definição de T_{**} dada pela propriedade (1.3) na Seção 1.

Proposição 2.3. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray para (1.1). Então, existe $t_{**} \geq T_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução \mathbf{u}) suficientemente grande tal que $\| D\mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma função suave e monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**}, \infty)$.*

Prova: O argumento abaixo é adaptado da prova de { [27], Lemma 2.2 }. Considere-se $t_0 \geq T_{**}$ (a ser escolhido abaixo), e seja $t > t_0$. Aplicando $D_\ell = \partial/\partial x_\ell$ à primeira equação em (1.1a), tomando o produto escalar com $D_\ell \mathbf{u}(\cdot, t)$ e integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$, obtém-se, somando em $1 \leq \ell \leq 3$,

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds = \\
& = \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \sum_{i,j,\ell} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_i(x, s) D_\ell u_j(x, s) D_j D_\ell u_i(x, s) dx ds \\
& \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
& \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds,
\end{aligned}$$

por (2.17), lembrando (1.19) e (1.20). Em particular, tem-se

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \\
& \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \left[\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{1/2} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds
\end{aligned} \tag{2.18}$$

para todo $t \geq t_0$. Seja então $t_0 \geq t_*$ tal que, por (1.2): $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \nu$. De fato, com esta escolha, segue de (2.18) que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \nu \quad \forall s \geq t_0. \tag{2.19a}$$

[Prova de (2.19a): sendo falso, existiria $t_1 > t_0$ tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \nu$ para todo $t_0 \leq s < t_1$, com $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \nu$. Tomando $t = t_1$ em (2.18), resultaria $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, e, então, $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \nu$. Esta contradição mostra (2.19a), como afirmado. \square]

De (2.18) e (2.19a), segue que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_2}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \tag{2.19b}$$

para todo $t \geq t_2 \geq t_0$, onde $\gamma := \nu - \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}$ é uma constante positiva. Isto conclui a prova, em vista de resultados clássicos de regularidade de $\mathbf{u}(\cdot, t)$ (ver e.g. [29, 33, 32]), tendo-se $t_{**} = t_0$ com $t_0 \geq T_{**}$ escolhido em (2.19a) acima. \square

Observação 2.1. Como mostrado em [27], uma consequência da prova acima é que tem-se $t_{**} < 0.212 \cdot \nu^{-5} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4$ sempre. Um argumento mais elaborado desenvolvido no APÊNDICE A do presente texto produz a estimativa mais fina

$$t_{**} < 0.000\,753\,026 \cdot \nu^{-5} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4. \tag{2.20}$$

3. Preliminares, II

Nesta seção, vamos utilizar os resultados revisados acima para estabelecer (1.11). Além disso, vamos também obter (1.12a) para $m = 1$ (Teorema 3.2 abaixo) e $m = 0$ (Teorema 3.3), revisando as provas dadas em [27, 28] e [45], respectivamente.

Teorema 3.1. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray para (1.1). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 \geq 0$, tem-se*

$$\|D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) - D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K(m) \nu^{-\left(\frac{5}{4} + \frac{m}{2}\right)} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-\left(\frac{3}{4} + \frac{m}{2}\right)} \quad (3.1)$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-\tilde{t}_0)} \mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0)$, $m = |\alpha|$.

Prova: Começamos escrevendo $\mathbf{v}(\cdot, t)$ na forma

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0), \quad t > t_0,$$

sendo $\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$ dada em (2.1), $\delta > 0$. Como

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) = e^{\nu\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds,$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = G_\delta * \mathbf{u}_0$, $\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) = -\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) - \nabla p_\delta(\cdot, s)$, dados em (2.1b) e (2.12), obtém-se

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds,$$

para $t > t_0$. Analogamente, tem-se, para $t > \tilde{t}_0$:

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds.$$

Segue então, para a diferença $\mathbf{v}(\cdot, t) - \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)$, sendo $t > \tilde{t}_0$ qualquer, que

$$\begin{aligned} D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) &= D^\alpha \{ e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] \} + \\ &\quad - D^\alpha \{ e^{\nu\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] \} + D^\alpha \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Portanto, dado $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$ compacto qualquer, tem-se, para cada $t > \tilde{t}_0$, $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
\| D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{K})} &\leq J_{\alpha, \delta}(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \| D^\alpha \{ e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \} \|_{L^2(\mathbb{K})} ds \\
&\leq J_{\alpha, \delta}(t) + K(m) \nu^{-\frac{m}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \left(\frac{t-s}{2} \right)^{-\frac{m}{2}} \| e^{\nu \Delta(t-s)/2} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq J_{\alpha, \delta}(t) + K(m) \nu^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{m}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \left(\frac{t-s}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \| \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq J_{\alpha, \delta}(t) + K(m) \nu^{-\frac{m}{2} - \frac{5}{4}} (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (3.3)
\end{aligned}$$

por (2.11), (2.13) e (2.14) acima (e Cauchy-Schwarz), onde

$$\begin{aligned}
J_{\alpha, \delta}(t) &= \| D^\alpha \{ e^{\nu \Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] \} \|_{L^2(\mathbb{K})} + \\
&\quad + \| D^\alpha \{ e^{\nu \Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] \} \|_{L^2(\mathbb{K})}.
\end{aligned}$$

Tomando $\delta = \delta' \rightarrow 0$ conforme (2.2), obtém-se $J_{\alpha, \delta}(t) \rightarrow 0$, pois, pelo teorema da convergência dominada e (2.2), tem-se, para cada $\sigma, \tau > 0$:

$$\| D^\alpha \{ e^{\nu \Delta \tau} [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma)] \} \|_{L^2(\mathbb{K})} \rightarrow 0 \quad \text{ao } \delta' \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

[De fato, sendo $F_\delta(\cdot, \tau) := D^\alpha \{ e^{\nu \Delta \tau} [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)] \}$, tem-se

$$F_\delta(\cdot, \tau) = H_\alpha(\cdot, \tau) * [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)]$$

onde $H_\alpha(\cdot, \tau) \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ é independente de δ . Como $\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma) \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^3)$, ver (2.2), segue que $F_{\delta'}(x, \tau) \rightarrow 0$ (ao $\delta' \rightarrow 0$) para cada $x \in \mathbb{R}^3$; por outro lado, por (2.13) e Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned}
|F_\delta(x, \tau)| &\leq \| H_\alpha(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq 2 \| H_\alpha(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Por convergência dominada, segue então que $\| F_{\delta'}(\cdot, \tau) \|_{L^2(\mathbb{K})} \rightarrow 0$ ao $\delta' \rightarrow 0$, visto que \mathbb{K} é compacto, o que conclui a demonstração da afirmação (3.4) acima.] Assim, fazendo $\delta = \delta' \rightarrow 0$ em (3.3), resulta

$$\| D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{K})} \leq K(m) \nu^{-\frac{m}{2} - \frac{5}{4}} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}}$$

para todo $t > \tilde{t}_0$ (sendo $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$ compacto *arbitrário*), o que é equivalente a (3.1). \square

O Teorema 3.1 estabelece (1.11) para todo $s = m \geq 0$ inteiro. Utilizando (1.13), segue a validade de (1.11) para todo $s \geq 0$ (s real), como afirmado.

Para a obtenção das estimativas (1.12), que será feito nas Seções 4 e 5 a seguir, precisaremos ter anteriormente estabelecido (1.12a) nos casos particulares $m = 0, 1$. Estes dois resultados já foram obtidos por outros autores; as provas mais simples são fornecidas em [45] ($m = 0$) e [27, 28] ($m = 1$), repetidas abaixo por conveniência. O resultado mais fácil é o segundo, por seguir imediatamente da desigualdade de energia (1.2) e do fato de $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ ser eventualmente monotônica, conforme a Proposição 2.3 da Seção 2 acima:

Teorema 3.2. *Se $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray para as equações (1.1), tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.5)$$

Prova: O argumento seguinte é obtido de [27, 28]. Se a propriedade (3.5) fosse falsa, existiria uma sequência crescente $t_\ell \nearrow \infty$ (com $t_\ell \geq t_{**}$ e $t_\ell \geq 2t_{\ell-1}$ para todo ℓ , digamos) e algum $\eta > 0$ fixo tais que

$$t_\ell \|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \eta \quad \forall \ell.$$

Em particular, teríamos de ter

$$\int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \geq (t_\ell - t_{\ell-1}) \|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} t_\ell \|D\mathbf{u}(\cdot, t_\ell)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} \eta$$

para todo ℓ , em contradição com (1.2), (2.3). Portanto, (3.5) tem de ser verdadeira. \square

Teorema 3.3 (SOLUÇÃO DO PROBLEMA CLÁSSICO DE LERAY). *Tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.6)$$

Prova: Seguindo o argumento em [45], seja t_{**} definido na Proposição 2.3 da Seção 2. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $t_0 \geq t_{**}$ suficientemente grande tal que, pelo Teorema 3.2, tenha-se

$$t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.7)$$

Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$, podemos escrever (pelo princípio de Duhamel)

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s) ds, \quad t \geq t_0, \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ é dada em (2.4), Seção 2.. Usando a representação (3.8) para $\mathbf{u}(\cdot, t)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \| e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \| e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq \| e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K \nu^{-3/4} \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq \| e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K \nu^{-3/4} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq \| e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K \nu^{-3/4} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \quad [\text{por (3.7)}]
\end{aligned}$$

para todo $t > t_0$, onde $K = (8\pi)^{-3/4}$, usando (1.2) e (2.5). Observando que

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \leq 6 \sqrt[4]{2} \quad \forall t \geq t_0 + 1,$$

obtem-se, então, para todo $t \geq t_0 + 1$:

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \| e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \nu^{-3/4} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon.$$

Como, para o semigrupo do calor, tem-se que $\| e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ ao $t \rightarrow \infty$, segue que

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + \nu^{-3/4} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \epsilon$$

para todo $t \gg 1$. Dado que $\epsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra (3.6), como afirmado. \square

Observação 3.1. De modo similar, poderíamos também estabelecer (1.8), ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{3}{4}} \| \mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (3.9)$$

mas este resultado não será necessário na análise a seguir. (Para uma prova de (3.9), ver [45], Section 3.) O mesmo vale para as propriedades (1.9), i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{3}{4}} \| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (3.10a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \| \mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (3.10b)$$

obtidas em [45], Section 4. Um ponto a destacar sobre as provas de (3.6), (3.9), (3.10) apresentadas em [45] é que *elas utilizam apenas resultados obtidos por Leray [33] e métodos matemáticos conhecidos até aquela época*. O mesmo não vale para as estimativas (bem mais difíceis) em (1.10) ou (1.12), como se verá nas Seções 4 e 5 seguir.

4. Prova de (1.12a)

Nesta seção, vamos demonstrar o seguinte resultado, dada uma solução de Leray (qualquer) $\mathbf{u}(\cdot, t)$ para as equações de Navier-Stokes (1.1).

Teorema 4.1. *Para todo $m \geq 0$, tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (4.1)$$

A prova do Teorema 4.1 ocupará toda a discussão a seguir. Novamente, o ponto de partida é dado pela representação (3.8) para $\mathbf{u}(\cdot, t)$, ou seja: considerando $t_0 \geq T_{**}$ (T_{**} dado em (1.3), Seção 1), podemos escrever, como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$:

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) ds, \quad \forall t \geq t_0, \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ é dada em (2.4), Seção 2. Em particular, segue que, para cada α ,

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq I_\alpha(t; t_0) + \int_{t_0}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \quad (4.3a)$$

para todo $t \geq t_0$, onde

$$I_\alpha(t; t_0) = \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad t \geq t_0. \quad (4.3b)$$

Note-se que (4.1) já foi obtido se $m = 0$ (Teorema 3.3) e $m = 1$ (Teorema 3.2), seguindo [27, 28, 45]. Em particular, tem-se

$$t^{\frac{1}{2}} \|D \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq M_1, \quad \forall t \geq T_{**} \quad (4.4)$$

para certa constante $M_1 > 0$ dependendo da solução $\mathbf{u}(\cdot, t)$ considerada. Mais geralmente, tem-se o seguinte resultado.

Lemma 4.1. *Sendo $U_m(t) := t^{\frac{m}{2}} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, tem-se, para cada $m \geq 0$:*

$$U_m \in L^\infty([T_{**}, \infty)). \quad (4.5)$$

Prova: Para $m = 0, 1$, (4.5) segue de (1.2), (4.4); assim, resta provar (4.5) para $m \geq 2$. Dados $t_0 \geq T_{**}$ e α multi-índice com $|\alpha| = m$, tem-se, de (4.3) acima, para $t \geq t_0$:

$$V_\alpha(t) \equiv t^{\frac{m}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq I_1(\alpha, t) + I_2(\alpha, t) + J_\alpha(t), \quad (4.6)$$

onde

$$I_1(\alpha, t) = t^{\frac{m}{2}} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (4.7a)$$

$$I_2(\alpha, t) = t^{\frac{m}{2}} \int_{t_0}^{\mu(t)} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (4.7b)$$

$$J_\alpha(t) = t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (4.7c)$$

sendo $\mu(t) = (t_0 + t)/2$. Estimar $I_1(t)$, $I_2(t)$ é simples: obtém-se, de (2.14) e (4.7a),

$$|I_1(\alpha, t)| \leq K(m, \nu) \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{m}{2}} t^{\frac{m}{2}} \leq K(m, \nu, t_0) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.8)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$, enquanto, por (2.15), (4.4) e (4.7b),

$$\begin{aligned} |I_2(\alpha, t)| &\leq K(m, \nu) t^{\frac{m}{2}} \int_{t_0}^{\mu(t)} (t-s)^{-\frac{m}{2}-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(m, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} t^{\frac{m}{2}} \int_{t_0}^{\mu(t)} s^{-\frac{1}{2}} (t-s)^{-\frac{m}{2}-\frac{3}{4}} \{s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\} ds \\ &\leq K(m, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} t^{\frac{m}{2}} (t-t_0)^{-\frac{m}{2}-\frac{3}{4}} M_1 \int_{t_0}^{\mu(t)} s^{-\frac{1}{2}} ds \\ &\leq K(m, \nu, t_0) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} M_1 (t-t_0)^{-\frac{3}{4}} (t+t_0)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.9a)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$, ou seja,

$$|I_2(\alpha, t)| \leq K(m, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0), \quad \forall t \geq t_0 + 1, \quad (4.9b)$$

onde $K(m, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) > 0$ depende dos dados $(m, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0)$. Assim, por (4.6), (4.8) e (4.9), tem-se

$$V_\alpha(t) \leq K(m, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + J_\alpha(t), \quad \forall t \geq t_0 + 1, \quad (4.10)$$

onde $J_\alpha(t)$ é dada em (4.7c). Para estimar $J_\alpha(t)$, que é o termo mais complicado, podemos proceder do modo seguinte. Ilustraremos o método considerando inicialmente o caso mais simples $|\alpha| = 2$, ou seja, $D^\alpha = D_j D_\ell$, procedendo depois por indução em $m = |\alpha|$.

Considerando $D^\alpha = D_j D_\ell$, tem-se, por (4.7c) e (2.14),

$$\begin{aligned} J_{j,\ell}(t) &\equiv t \int_{\mu(t)}^t \| D_j D_\ell [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \\ &= t \int_{\mu(t)}^t \| D_j [e^{\nu \Delta(t-s)} D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \\ &\leq K(\nu) t \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \| D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

Para prosseguir, é preciso estimar $\| D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)}$, o que é feito usando a teoria de Calderon-Zygmund de operadores integrais singulares (ver e.g. [49], Ch. 2, ou [15], Ch. 11). Por conveniência, revisamos brevemente como isso é feito, considerando o caso geral em \mathbb{R}^n . Por (2.4), Seção 2, tem-se $D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, t) = -D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)] - \nabla q_\ell(\cdot, t)$, $q_\ell(\cdot, t) = D_\ell p(\cdot, t)$. Tomando o divergente em x , resulta que $q_\ell(\cdot, t)$ é a solução (única) do problema de Poisson

$$-\Delta q_\ell(\cdot, t) = \operatorname{div} \{ D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)] \}, \quad q_\ell(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Aplicando a teoria de Calderon-Zygmund (cf. [23], Ch. 5), obtém-se, para cada $1 < r < \infty$:

$$\| \nabla q_\ell(\cdot, t) \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq K(r, n) \| D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)] \|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

para certa constante $K(r, n) > 0$ dependendo de r, n somente. Isso implica, por (2.4), que

$$\| D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, t) \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq K(r, n) \| D_\ell [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)] \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \quad (4.11)$$

para cada $1 < r < \infty$, onde, novamente, $K(r, n)$ depende de r, n . (Por exemplo, repetindo o argumento usado na prova da Proposição 2.1, tem-se $K(2, n) = 1$, para todo n .) Assim, com $r = 4/3$, $n = 3$, obtém-se $\| D_\ell \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} \leq K \| D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)] \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)}$, de modo que

$$\begin{aligned} J_{j,\ell}(t) &\leq K(\nu) t \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \| D_\ell [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)] \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) t \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left\{ \| D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} + \right. \\ &\quad \left. + \| \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D_\ell \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} \right\} ds \\ &\leq K(\nu) t \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left\{ \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \right. \\ &\quad \left. + \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \| D^2 \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right\} ds, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder (no último passo acima). Utilizando agora a desigualdade de

Nirenberg-Gagliardo

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq K \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} \quad (4.12)$$

para $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, obtém-se, então,

$$\begin{aligned} J_{j,\ell}(t) &\leq K(\nu) t \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left\{ \|Du(\cdot, s)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^{5/4} \|D^2u(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} + \right. \\ &\quad \left. + \|u(\cdot, s)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} \|D^2u(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right\} ds, \\ &= K(\nu) t \int_{\mu(t)}^t s^{-\frac{11}{8}} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left\{ \left[s^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{5/4} \left[s \|D^2u(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{3/4} \right. \\ &\quad \left. + \|u(\cdot, s)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \left[s^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{3/4} \left[s \|D^2u(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right] \right\} ds, \\ &\leq K(\nu) M_1^{\frac{5}{4}} t (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}} ds + \\ &\quad + K(\nu) M_1^{\frac{3}{4}} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} t (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds, \end{aligned}$$

onde $U_2(t) = t \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Portanto, para cada $1 \leq j, \ell \leq 3$ (e cada $t \geq t_0 + 1$), obtém-se

$$\begin{aligned} J_{j,\ell}(t) &\leq K(\nu) M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}} ds + \\ &\quad + K(\nu) M_1^{\frac{3}{4}} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds, \\ &\leq K(\nu) M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{1}{4}} + K(\nu, M_1, u_0) (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds, \end{aligned}$$

pelo fato de se ter $U_2(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_2(s)$, e onde $K(\nu, M_1, u_0) > 0$ depende apenas de ν, M_1 e $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Assim, por (4.6) e (4.10), obtém-se, para $V_{j,\ell}(t) = t \|D_j D_\ell u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$:

$$V_{j,\ell}(t) \leq K(m, \nu, t_0, M_1, u_0) + K(\nu, M_1, u_0) (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds$$

para todos j, ℓ (e todo $t \geq t_0 + 1$), de modo que

$$U_2(t) \leq K_*(m, \nu, t_0, M_1, u_0) + K_{**}(\nu, M_1, u_0) (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds \quad (4.13)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$, onde $K_{**}(\nu, M_1, u_0) > 0$ depende apenas de ν, M_1 e $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Tomemos então t_2, \mathbb{M}_2 dados por

$$t_2 := 1 + t_0 + 2^{16} K_{**}^4, \quad \mathbb{M}_2 := \sup \{U_2(s) : t_0 \leq s \leq t_2\}, \quad (4.14)$$

onde $K_{**} = K_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)$ é a constante definida em (4.13) acima. Afirmamos que

$$U_2(t) \leq 2 K_*(m, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16 K_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbb{M}_2, \quad \forall t \geq t_2, \quad (4.15)$$

onde K_* , K_{**} são as constantes dadas em (4.13). [De fato, sendo $t \geq t_2$, definamos $\mathbb{U}_2(t)$ pondo $\mathbb{U}_2(t) := \sup \{U_2(s) : t_2 \leq s \leq t\}$. Se $\mu(t) \geq t_2$, então, por (4.13), obtém-se

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq K_*(m, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + K_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) (t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds \mathbb{U}_2(t) \\ &\leq K_*(m, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 8 K_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) (t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbb{U}_2(t), \end{aligned}$$

de modo que, pela definição de t_2 , tem-se $U_2(t) \leq K_* + \mathbb{U}_2(t)/2$. Se $\mu(t) < t_2$, então

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leq K_* + K_{**} \cdot (t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds (\mathbb{M}_2 + \mathbb{U}_2(t)) \\ &\leq K_* + 8 K_{**} \mathbb{M}_2 + 8 K_{**} (t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbb{U}_2(t), \end{aligned}$$

de modo que, pela definição de t_2 , obtém-se neste caso $U_2(t) \leq K_* + 8 K_{**} \mathbb{M}_2 + \mathbb{U}_2(t)/2$. Portanto, tem-se sempre

$$U_2(t) \leq K_* + 8 K_{**} \mathbb{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbb{U}_2(t), \quad \forall t \geq t_2.$$

Logo, $\mathbb{U}_2(t) \leq K_* + 8 K_{**} \mathbb{M}_2 + \mathbb{U}_2(t)/2$ para todo $t \geq t_2$, que é equivalente a (4.15).] De (4.15), segue imediatamente que $U_2 \in L^\infty([t_2, \infty))$. Como, por (1.3), tem-se também $U_2 \in L^\infty([T_{**}, t_2])$, resulta que $U_2 \in L^\infty([T_{**}, \infty))$, provando assim (4.5) no caso $m = 2$.

Mais geralmente, podemos mostrar (4.5) para $m \geq 2$ qualquer usando indução em m . Assim, dado $m \geq 3$, suponha-se que (4.5) já tenha sido obtida para os valores anteriores de m . Tomando-se, então, α (multi-índice) com $|\alpha| = m$, e escrevendo-se $D^\alpha = D_j D^{\alpha'}$ (para certo multi-índice α' com $|\alpha'| = m - 1$), tem-se, lembrando (4.7c) acima,

$$\begin{aligned} J_\alpha(t) &= t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t \|D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \\ &= t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t \|D_j [e^{\nu \Delta(t-s)} D^{\alpha'} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \\ &\leq K(\nu) t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{\alpha'} \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{\alpha'} [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \end{aligned}$$

usando (2.14) e a estimativa (4.16) abaixo (que segue novamente por Calderon-Zygmund),

$$\|D^\beta \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq K(r, n) \|D^\beta [\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.16)$$

para cada $1 < r < \infty$, e qualquer multi-índice β , que é mostrada de modo análogo a (4.11). Resulta, então, por Hölder e (4.12), como antes,

$$\begin{aligned} J_\alpha(t) &\leq \sum_{|\beta|+|\gamma|=m-1} K(\nu) t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\beta \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D^\gamma \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) \sum_{\ell=0}^{m-1} t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \|D^{m-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) \sum_{\ell=0}^{m-1} t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|D^{m-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2} ds, \end{aligned}$$

ou seja, $J_\alpha(t) \leq J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)$, onde

$$J_1(t) = K(\nu) t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2} ds, \quad (4.17a)$$

$$J_2(t) = K(\nu) \sum_{\ell=1}^{m-2} t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|D^{m-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2} ds, \quad (4.17b)$$

$$J_3(t) = K(\nu) t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{m-1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} ds. \quad (4.17c)$$

Escrevendo $\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2} = s^{-\frac{1}{2}} U_1(s) \leq M_1 s^{-\frac{1}{2}}$, $\|D^m \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2} = s^{-\frac{m}{2}} U_m(s)$, obtém-se

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq K(\nu) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\frac{3}{8}-\frac{m}{2}} U_m(s) ds \\ &\leq K(\nu) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_m(s) ds. \end{aligned} \quad (4.18a)$$

Analogamente, tem-se

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq K(\nu) \sum_{\ell=1}^{m-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{m-\ell} t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\frac{3}{8}-\frac{m}{2}} ds \\ &\leq K(\nu) \sum_{\ell=1}^{m-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{m-\ell} (t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (4.18b)$$

e

$$\begin{aligned} J_3(t) &\leq K(\nu) M_1 M_{m-1}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\frac{3}{8}-\frac{m}{2}} U_m(s)^{\frac{3}{4}} ds \\ &\leq K(\nu) M_1 M_{m-1}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_m(s)^{\frac{3}{4}} ds. \end{aligned} \quad (4.18c)$$

Observando novamente que $U_m(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_m(s)$, resulta de (4.6), (4.10), (4.17) e (4.18) que, para todo $t \geq t_0 + 1$, tem-se (sendo $M_0 \equiv \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$):

$$V_\alpha(t) \leq K(m, \nu, t_0, M_0, M_1, \dots, M_{m-1}) + K(\nu, M_0, M_1) (t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_m(s) ds$$

para todo α com $|\alpha| = m$, onde $V_\alpha(t) = t^{-\frac{m}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Portanto, tem-se

$$U_m(t) \leq K_*(m, \nu, t_0, M_0, \dots, M_{m-1}) + K_{**}(\nu, M_0, M_1) (t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{\mu(t)}^t (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_m(s) ds \quad (4.19)$$

para todo $t \geq t_0 + 1$, onde $K_{**}(\nu, M_0, M_1) > 0$ depende apenas de ν , M_1 e $M_0 = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$. Como no caso $m = 2$, tomemos agora t_m, \mathbb{M}_m dados por

$$t_m := 1 + t_0 + 2^{16} K_{**}^4, \quad \mathbb{M}_m := \sup \{ U_m(s) : t_0 \leq s \leq t_m \}, \quad (4.20)$$

onde $K_{**} = K_{**}(\nu, M_0, M_1)$ é a constante definida em (4.19) acima. Obtém-se, então,

$$U_m(t) \leq 2 K_*(m, \nu, t_0, M_0, M_1, \dots, M_{m-1}) + 16 K_{**}(\nu, M_0, M_1) \mathbb{M}_m, \quad \forall t \geq t_m, \quad (4.21)$$

onde K_*, K_{**} são as constantes dadas em (4.19). [A prova de (4.21) é exatamente análoga à de (4.15).] Isso mostra que U_m é limitada em $[t_m, \infty)$; como U_m é limitada em $[t_0, t_m]$ (por (1.3)), segue então que $U_m \in L^\infty([t_0, \infty))$, concluindo a prova do Lema 4.1. \square

Usando o Lema 4.1, obtém-se o Teorema 4.1 sem dificuldade. De fato, sendo $m \geq 2$, $t_0 \geq T_{**}$ quaisquer, pode-se proceder como segue. Dado $\epsilon > 0$ (arbitrário), seja $t_\epsilon \gg t_0$ suficientemente grande tal que, por (1.6c) e (4.7b), (4.9a) acima, tenha-se, para todo $t \geq t_\epsilon$:

$$t^{\frac{m}{2}} \| D^m [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{3} \epsilon \quad (4.22a)$$

e

$$t^{\frac{m}{2}} \int_{t_0}^{\mu(t)} \| D^m [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \frac{1}{3} \epsilon, \quad (4.22b)$$

onde, como antes, $\mu(t) = (t + t_0)/2$. Por (4.5), Lema 4.1, e lembrando (4.6), (4.7c) e (4.18), obtemos (aumentando t_ϵ se necessário)

$$t^{\frac{m}{2}} \int_{\mu(t)}^t \| D^m [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq \frac{1}{3} \epsilon \quad (4.22c)$$

para todo $t \geq t_\epsilon$. Por (4.2), vê-se que (4.22) implica termos $t^{m/2} \| D \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon$ para todo $t \geq t_\epsilon$, estabelecendo (4.1), como afirmado. \square

5. Prova de (1.12b)

Nesta seção, provaremos a estimativa (1.12b), para todo $m \geq 0$. Este fato, combinado com a propriedade de interpolação (1.13) [tomando-se, por exemplo, $s_1 = m$, $s_2 = m + 1$], estabelece o resultado mais geral dado em (1.10b), válido para todo $s \in \mathbb{R}$ não negativo. Como sempre, $\mathbf{u}(\cdot, t)$ denota uma solução de Leray (qualquer) para as equações de Navier-Stokes (1.1); tal solução é suave em $\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty)$, para certo $T_{**} \gg 1$, e satisfaz: $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L_{\text{loc}}^\infty([T_{**}, \infty), H^m(\mathbb{R}^3))$, para todo m [ver (1.3)]. O ponto de partida para obter (1.12b) envolve vários resultados anteriores, particularmente (2.5), (2.14), (2.15) e os Teoremas 3.1, 3.2 e 4.1 acima.

Teorema 5.1. *Para todo $m \geq 0$, e todo $t_0 \geq 0$, tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t) - D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (5.1)$$

para cada multi-índice α com $|\alpha| = m$.

Prova: Pelo Teorema 3.1, é suficiente mostrar (5.1) supondo-se $t_0 \geq T_{**}$. [Com efeito, tendo-se já estabelecido o resultado neste caso, então se poderia estendê-lo para $t_0 < T_{**}$ do seguinte modo: tomando-se $t'_0 \geq T_{**}$, teríamos

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t) - D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \\ & \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t) - D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t'_0)} \mathbf{u}(\cdot, t'_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \\ & \quad + \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \|D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t'_0)} \mathbf{u}(\cdot, t'_0) - e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t) - D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t'_0)} \mathbf{u}(\cdot, t'_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad [\text{por (3.1)}] \\ & = 0, \end{aligned}$$

onde no último passo se teria usado o resultado (5.1), já mostrado neste caso ($t'_0 \geq T_{**}$).] Supondo-se, então, $t_0 \geq T_{**}$, podemos escrever $\mathbf{u}(\cdot, t)$ na forma (4.2), para $t \geq t_0$, ou seja,

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) ds, \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ é dada em (2.4), Seção 2. Considerando inicialmente os casos $m = 0$ e $m = 1$,

podemos proceder do seguinte modo. Dado $\epsilon > 0$, seja $t_\epsilon > t_0$ suficientemente grande tal que, pelo Teorema 3.2, se tenha

$$t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_\epsilon. \quad (5.3)$$

Por (5.2) e (1.2), (2.5), tem-se

$$\begin{aligned} t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq t^{1/4} \int_{t_0}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq I(t, t_\epsilon) + K(\nu) t^{1/4} \int_{t_\epsilon}^t (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq I(t, t_\epsilon) + K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon t^{1/4} \int_{t_\epsilon}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \quad [\text{por (5.3)}] \\ &\leq I(t, t_\epsilon) + K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon t^{1/4} (t-t_\epsilon)^{-1/4} \end{aligned}$$

para todo $t > t_\epsilon$, onde $K(\nu) > 0$ é independente de ϵ , e

$$\begin{aligned} I(t, t_\epsilon) &:= K(\nu) t^{1/4} \int_{t_0}^{t_\epsilon} (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) t^{1/4} (t-t_\epsilon)^{-3/4} \int_{t_0}^{t_\epsilon} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t_\epsilon - t_0)^{1/2} t^{1/4} (t-t_\epsilon)^{-3/4} \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K(\nu) (1 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \epsilon$$

para todo $t > t_\epsilon$ grande, com $K(\nu)$ independente de ϵ . Isto mostra (5.1) no caso $m = 0$.

Considerando, agora, $m = 1$, seja novamente $t_\epsilon > t_0$ como em (5.3), para $\epsilon > 0$ dado. Por (5.2), tem-se, para cada $1 \leq \ell \leq 3$ e $t > t_\epsilon$:

$$\mathcal{V}_\ell(t) \equiv t^{\frac{3}{4}} \|D_\ell \mathbf{u}(\cdot, t) - D_\ell [e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \mathcal{I}_1(t) + \mathcal{I}_2(t) + \mathcal{J}_\ell(t), \quad (5.4)$$

onde

$$\mathcal{I}_1(t) = t^{\frac{3}{4}} \int_{t_0}^{t_\epsilon} \|D_\ell [e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (5.5a)$$

$$\mathcal{I}_2(t) = t^{\frac{3}{4}} \int_{t_\epsilon}^{\mu_\epsilon(t)} \|D_\ell [e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (5.5b)$$

$$\mathcal{J}_\ell(t) = t^{\frac{3}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t \|D_\ell [e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (5.5c)$$

sendo $\mu_\epsilon(t) := (t_\epsilon + t)/2$. Começando com $\mathcal{I}_1(t)$, tem-se, por (1.2), (2.3) e (2.15):

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(t) &\leq K(\nu) t^{3/4} \int_{t_0}^{t_\epsilon} (t-s)^{-5/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) t^{3/4} (t-t_\epsilon)^{-5/4} \int_{t_0}^{t_\epsilon} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t_\epsilon - t_0)^{1/2} t^{3/4} (t-t_\epsilon)^{-5/4}
\end{aligned} \tag{5.6a}$$

para todo $t > t_\epsilon$, onde $K(\nu)$ independe de ϵ . Para $\mathcal{I}_2(t)$, tem-se, por (1.2), (2.15) e (5.3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(t) &\leq K(\nu) t^{3/4} \int_{t_\epsilon}^{\mu_\epsilon(t)} (t-s)^{-5/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon t^{3/4} (t-t_\epsilon)^{-3/4} \int_{t_\epsilon}^{\mu_\epsilon(t)} (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\
&\leq K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon t^{3/4} (t-t_\epsilon)^{-3/4}
\end{aligned} \tag{5.6b}$$

para todo $t > t_\epsilon$, onde $K(\nu)$ independe de ϵ . Finalmente, considerando $\mathcal{J}_\ell(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\ell(t) &= t^{3/4} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t \|D_\ell [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) t^{3/4} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \|\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) t^{3/4} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \|\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) t^{3/4} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) t^{3/4} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{7/4} ds \\
&\leq K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \epsilon^{7/4} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} s^{-7/8} ds \\
&\leq K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \epsilon^{7/4} t^{3/4} (t+t_\epsilon)^{-3/4} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} s^{-1/8} ds \\
&\leq K(\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \epsilon^{7/4}
\end{aligned} \tag{5.6c}$$

para todo $t > t_\epsilon$, usando (2.14), (4.16), desigualdade de Hölder, (4.12) e o fato de se ter

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-7/8} s^{-1/8} ds \leq K = \frac{\pi}{\sin(\pi/8)}.$$

Claramente, obtemos de (5.4) e (5.6a), (5.6b), (5.6c) acima que

$$t^{3/4} \| D_\ell \mathbf{u}(\cdot, t) - D_\ell [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + \epsilon + K(\nu) \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \epsilon$$

para todo $t > t_\epsilon$ suficientemente grande, para cada $1 \leq \ell \leq 3$, o que prova (5.1) se $m = 1$.

Finalmente, consideramos o caso geral $m \geq 2$, procedendo de modo similar ao caso anterior. Dado $\epsilon > 0$ (arbitrário), tomamos $t_\epsilon > t_0$ suficientemente grande tal que, por (4.1) [Teorema 4.1], tenhamos

$$t^{\frac{k}{2}} \| D^k \mathbf{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_\epsilon \quad (5.7)$$

para todo $0 \leq k \leq m$. Dado α multi-índice com $|\alpha| = m$, definimos (para $t > t_\epsilon$)

$$\mathcal{V}_\alpha(t) \equiv t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \| D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t) - D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (5.8)$$

escrevendo $\mathcal{V}_\alpha(t) \leq \mathcal{I}_1(\alpha, t) + \mathcal{I}_2(\alpha, t) + \mathcal{J}(\alpha, t)$, onde

$$\mathcal{I}_1(\alpha, t) = t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{t_0}^{t_\epsilon} \| D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (5.9a)$$

$$\mathcal{I}_2(\alpha, t) = t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{t_0}^{\mu_\epsilon(t)} \| D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (5.9b)$$

$$\mathcal{J}(\alpha, t) = t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t \| D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds, \quad (5.9c)$$

sendo $\mu_\epsilon(t) = (t_\epsilon + t)/2$. Com relação a $\mathcal{I}_1(\alpha, t)$, tem-se, por (1.2), (2.3) e (2.15):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\alpha, t) &\leq K(\nu) t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{t_0}^{t_\epsilon} (t-s)^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} (t-t_\epsilon)^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} \int_{t_0}^{t_\epsilon} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t_\epsilon - t_0)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} (t-t_\epsilon)^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} \end{aligned} \quad (5.10a)$$

para todo $t > t_\epsilon$, onde $K(\nu)$ independe de ϵ . Para $\mathcal{I}_2(\alpha, t)$, tem-se, de (1.2), (2.15) e (5.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(\alpha, t) &\leq K(\nu) t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{t_\epsilon}^{\mu_\epsilon(t)} (t-s)^{-\frac{m}{2} - \frac{3}{4}} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K(\nu) \epsilon^2 t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} (t-t_\epsilon)^{-\frac{m}{2} - \frac{1}{4}} \int_{t_\epsilon}^{\mu_\epsilon(t)} (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\ &\leq K(\nu) \epsilon^2 t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} (t-t_\epsilon)^{-\frac{m}{2} - \frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (5.10b)$$

para todo $t > t_\epsilon$, onde $K(\nu)$ independe de ϵ . Finalmente, para $\mathcal{J}(\alpha, t)$, tem-se, escrevendo $D^\alpha = D_j D^{\alpha'}$, sendo α' multi-índice de ordem $m - 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\alpha, t) &= t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t \| D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&= t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t \| D_j [e^{\nu \Delta(t-s)} D^{\alpha'} \mathbf{Q}(\cdot, s)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \| D^{\alpha'} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \| D^{\alpha'} [\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)] \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq \sum_{|\beta| + |\gamma| = m-1} K(\nu) t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \| D^\beta \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D^\gamma \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) \sum_{\ell=0}^{m-1} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \| D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \| D^{m-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(\nu) \sum_{\ell=0}^{m-1} t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} \| D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \| D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \| D^{m-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2} ds \\
&\leq K(\nu) \sum_{\ell=0}^{m-1} \epsilon^2 t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} s^{-m/2 - 9\ell/8 - 3/8} ds \\
&\leq K(m, \nu) \epsilon^2 t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} (t + t_\epsilon)^{-\frac{m}{2} - \frac{1}{4}} \int_{\mu_\epsilon(t)}^t (t-s)^{-7/8} s^{-1/8} ds \\
&\leq K(m, \nu) \epsilon^2
\end{aligned} \tag{5.10c}$$

para todo $t > t_\epsilon$, usando-se (2.14), (4.16), desigualdade de Hölder, (4.12) e (5.7), tendo-se que a constante $K(m, \nu) > 0$ em (5.10c) independe de ϵ (e t_ϵ). [Foi suposto também, no penúltimo passo acima, que t_ϵ tenha sido tomado em (5.7) de modo a satisfazer: $t_\epsilon \geq 1$.] Por (5.8) e (5.10a), (5.10b), (5.10c), segue em particular que se tem

$$t^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \| D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t) - D^\alpha [e^{\nu \Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)] \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + K(m, \nu) \epsilon) \epsilon$$

para todo $t > t_\epsilon$ suficientemente grande, para cada α com $|\alpha| = m$, sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, e $m \geq 2$ qualquer (com $K(m, \nu)$ independente de ϵ). Somado aos casos $m = 0$ e $m = 1$ considerados antes, isso conclui a prova de (5.1) para todo $m \geq 0$, como afirmado. \square

Deixamos em aberto a obtenção de (1.10), (1.12) para $n \geq 4$, $m \geq 0$ arbitrários.

APÊNDICE A

Neste apêndice, vamos mostrar como obter a estimativa (2.20) para o valor t_{**} dado na Proposição 2.3 da Seção 2. O ponto de partida é a seguinte estimativa,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \sum_{i,j,\ell=1}^3 |D_\ell u_i| |D_\ell u_j| |D_j u_i| \right\} dx \leq K_3^3 \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2}, \quad (\text{A.1})$$

onde $K_3 < 0.581\,862\,001\,307$ (ver [1], Theorem 2.1) é a constante na desigualdade de Nirenberg-Gagliardo [1]

$$\|u\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq K_3 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}. \quad (\text{A.2})$$

[Prova de (A.1): aplicando-se repetidamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,\ell=1}^3 |D_\ell u_i| |D_\ell u_j| |D_j u_i| &\leq \sum_{i,\ell=1}^3 |D_\ell u_i| \left\{ \sum_{j=1}^3 |D_\ell u_j|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j=1}^3 |D_j u_i|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 |D_j u_i|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{\ell=1}^3 |D_\ell u_i|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j,\ell=1}^3 |D_\ell u_j|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \sum_{j,\ell=1}^3 |D_\ell u_j|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 |D_j u_i|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i,\ell=1}^3 |D_\ell u_i|^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \sum_{i,j,\ell=1}^3 |D_\ell u_i| |D_\ell u_j| |D_j u_i| \right\} dx \leq \|w\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3, \quad w(x) := \left\{ \sum_{i,j=1}^3 |D_j u_i|^2 \right\}^{1/2}.$$

Isso fornece

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \sum_{i,j,\ell=1}^3 |D_\ell u_i| |D_\ell u_j| |D_j u_i| \right\} dx &\leq K_3^3 \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2} \|Dw\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2} \quad [\text{por (A.2)}] \\ &\leq K_3^3 \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2} \end{aligned}$$

pois, por (1.19), tem-se $\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e $\|Dw\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Agora, considere $\hat{t} > 0$ qualquer satisfazendo

$$\hat{t} > \frac{1}{2} K_3^{12} \nu^{-5} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4. \quad (\text{A.3})$$

Como (por (1.2)) $\int_0^{\hat{t}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \leq \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$, tem de existir $t' \in (0, \hat{t}]$ tal que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{t}}}. \quad (\text{A.4})$$

Portanto, por (A.3), tem-se

$$K_3^3 \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} < \nu \quad (\text{A.5})$$

para todo $s \geq t'$ próximo do ponto t' . Isso fornece, diferenciando (1.1a) com respeito à variável x_ℓ , tomando o produto escalar com $D_\ell \mathbf{u}(\cdot, t)$ e somando para $\ell = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t'}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \sum_{i,j,\ell} \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}^3} |D_\ell u_i(x, s)| |D_\ell u_j(x, s)| |D_j u_i(x, s)| dx ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t'}^t K_3^3 \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2} ds \quad [\text{por (A.1)}] \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t'}^t [K_3^3 \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}] \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t'}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \quad [\text{por (A.5)}] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

para todo $t \geq t'$ próximo a t' , onde na quarta linha acima usamos a desigualdade (2.16b) da Seção 2. Segue daí que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é limitada por $\|D\mathbf{u}(\cdot, t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, e como $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ não pode crescer (por (1.2)), resulta que

$$K_3^3 \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} < \nu, \quad \forall t \geq t'. \quad (\text{A.7})$$

Em particular, podemos repetir a derivação de (A.6) acima no intervalo $[t_0, t]$, para $t_0 < t \in [t', \infty)$ arbitrário, obtendo

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t [K_3^3 \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}] \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds. \quad [\text{por (A.7)}] \end{aligned}$$

Portanto, $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é monotonicamente decrescente em $[t', \infty) \supseteq [\hat{t}, \infty)$, de modo que, pela teoria clássica de Leray [33], tem-se de ter $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (t', \infty))$. Lembrando a desigualdade (A.3) definindo t' , isto completa a prova de (2.20), visto que tem-se $1/2 K_3^{12} < 0.000\,753\,026$. \square

Em resumo, pelo argumento acima, tem-se demonstrado o seguinte resultado:

Teorema A.1. *Dado um estado inicial $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ qualquer, seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para as equações de Navier-Stokes (1.1). Então, existe $0 \leq t_{**} < 0.000\,753\,026\,\nu^{-5} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^4$ com $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [t_{**}, \infty))$ e tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é finita e monotonicamente decrescente em todo o intervalo $[t_{**}, \infty)$.*

PARTE II

Problema de Existência Global para Equações de Advecção-Difusão Conservativas

1. Introdução

Na segunda parte deste trabalho, estenderemos um procedimento de análise introduzido pelo autor para a derivação de várias estimativas básicas importantes para as soluções $u(\cdot, t)$ de equações de advecção-difusão conservativas em meios heterogêneos [53]. O método foi inicialmente aplicado a equações (ou sistemas de equações) em uma dimensão espacial ($n = 1$), no caso mais simples de velocidades advectivas limitadas (i.e., $\kappa = 0$ em (1.1) a seguir), ver [3, 6, 35, 37]. Posteriormente, o autor estendeu os resultados para equações mais gerais

$$u_t + (b(x, t, u) |u|^\kappa u)_x = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com $\kappa > 0$ constante, $b(x, t, u)$ limitada [54], tendo orientado trabalhos de doutorado na aplicação do método a equações unidimensionais similares no caso de difusão não linear [10, 14, 17, 22]. No presente trabalho, consideraremos finalmente o desenvolvimento destas técnicas em dimensão n arbitrária, adotando (por simplicidade) como protótipo o problema

$$u_t + \operatorname{div} (b(x, t, u) |u|^\kappa u) + \operatorname{div} f(t, u) = \operatorname{div} (A(x, t, u) \nabla u), \quad (1.1a)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1.1b)$$

sendo $A(x, t, u)$ matriz suave satisfazendo $A(x, t, u) \geq \mu(t)I$ para $\mu \in C^0([0, \infty))$ positiva, ou seja,

$$\langle A(x, t, u) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \mu(t) |\mathbf{v}|_2^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, e onde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ são funções suaves, com \mathbf{b} satisfazendo

$$\mathbf{b} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}) \quad [\text{para cada } T > 0]. \quad (1.3)$$

É conhecido (ver e.g. [30, 47] e Seção 2 abaixo) que o problema (1.1)-(1.3) possui solução (clássica, limitada, única) $u(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ para certo $0 < T < \infty$ (ou seja, existência *local* está bem estabelecida); esta solução pode ser continuada (i.e., estendida) a intervalos de existência mais amplos enquanto permanecer limitada. Assim, é importante examinar o comportamento das normas altas (especialmente $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$) no intervalo de existência da solução. Porém, sob hipóteses tão gerais como (1.3) acima, esta questão pode tornar-se *muito* difícil, como explicamos intuitivamente a seguir. Considere-se, por exemplo, soluções $v(\cdot, t)$ não negativas da equação

$$v_t + \operatorname{div}(\mathbf{b}(x) v^{\kappa+1}) = \Delta v, \quad (1.4)$$

que reescrevemos na forma

$$v_t + (\kappa + 1) v^\kappa \mathbf{b}(x) \cdot \nabla v = \Delta v + \beta(x) v^{\kappa+1} \quad (1.4')$$

onde $\beta(x) := -\operatorname{div} \mathbf{b}(x)$. Supondo que $\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) > 0\}$ seja não vazio, vê-se de (1.4') que $v(x, t)$ é estimulada a crescer nos pontos $x \in \Omega$, particularmente onde ocorrer $\beta(x) \gg 1$. Como (1.4) conserva massa, se $v(\cdot, t)$ crescer pronunciadamente em alguma parte de Ω então o perfil de $v(\cdot, t)$ terá de afinar-se, tornando-se assim mais suscetível aos efeitos dissipativos do termo difusivo presente em (1.4). O efeito final sobre a solução (i.e., ocorrência de blow-up ou não, supondo $\kappa > 0$) resultante desta competição entre os termos do lado direito em (1.4') é difícil de ser previsto. A situação pode à primeira vista parecer (equivocadamente) similar à das soluções não negativas da equação

$$w_t = \Delta w + w^{\kappa+1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

examinada originalmente por Fujita [20] e subsequentemente generalizada por outros (ver e.g. [2, 12, 31, 40, 41]), onde *todas as soluções não negativas* (exceto $w(\cdot, t) \equiv 0$) *explodem em tempo finito* se $0 < \kappa \leq 2/n$ (e também para $\kappa > 2/n$ se $w(\cdot, 0)$ for apropriadamente grande) [20, 24]. Como ficará mostrado nos resultados a seguir, a situação em (1.4) tem natureza oposta: *todas as soluções de (1.4) são globalmente definidas* se $0 \leq \kappa < 1/n$ (e também para $\kappa \geq 1/n$ se $v(\cdot, 0)$ for apropriadamente pequena). Esta diferença notável entre os dois sistemas é devida ao fato de (1.4) conservar massa, o que não acontece com (1.5). Considerações análogas podem ser feitas no caso geral do problema (1.1)-(1.3): todas as soluções vão existir globalmente se $0 \leq \kappa < 1/n$ (pela razão de se ter conservação de massa e, melhor ainda, no caso de soluções $u(\cdot, t)$ sem sinal definido, a propriedade dada em (1.11) abaixo).

Como sugerido em (1.4'), a *magnitude* do coeficiente $\mathbf{b}(x, t, u)$ não deve desempenhar papel importante, ao contrário de suas derivadas — ou, mais propriamente, a *variação* de $\mathbf{b}(x, t, u)$ em \mathbb{R}^n , dada pela quantidade $B(t)$ definida do seguinte modo. Para cada $1 \leq j \leq n$, introduzimos $B_j(t)$ dada por

$$B_j(t) := \frac{1}{2} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}^n} b_j(x, t, u(x, t)) - \inf_{x \in \mathbb{R}^n} b_j(x, t, u(x, t)) \right], \quad 0 \leq t < T_*, \quad (1.6a)$$

e então definimos

$$B(t) = |(B_1(t), \dots, B_n(t))|_2 = \left\{ B_1(t)^2 + \dots + B_n(t)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.6b)$$

para cada $0 \leq t < T_*$ [acima, e em todo o texto que segue, $[0, T_*)$ denota sempre o intervalo máximo de existência da solução $u(\cdot, t)$ considerada]. Para a descrição dos resultados principais a serem obtidos neste trabalho, precisamos ainda introduzir as quantidades $\mathbb{B}_\mu(0; t)$ e $\mathbb{U}_p(0; t)$, $1 \leq p \leq \infty$, definidas por

$$\mathbb{B}_\mu(0; t) := \sup \left\{ \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} : 0 \leq \tau \leq t \right\}, \quad (1.7)$$

$$\mathbb{U}_p(0; t) := \sup \left\{ \|u(\cdot, \tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} : 0 \leq \tau \leq t \right\}, \quad (1.8)$$

para $0 \leq t < T_*$, $1 \leq p \leq \infty$. Na Seção 3, após alguns preliminares coletados (por conveniência) na Seção 2 anterior, as seguintes propriedades fundamentais das soluções do problema (1.1) - (1.3) serão mostradas. A primeira delas estabelece o importante fato de suas soluções serem todas globais quando $\kappa > 0$ não for grande (sendo o valor crítico, no caso do problema (1.1), dado por $1/n$).

Teorema A. *Sendo $0 \leq \kappa < 1/n$, a solução do problema (1.1) - (1.3) acima está definida globalmente (i.e., $T_* = \infty$), para qualquer $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tendo-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, \kappa) \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{1-n\kappa}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{1-n\kappa}} \right\} \quad (1.9)$$

para todo $0 \leq t < \infty$, onde $K(n, \kappa) = 2^{\frac{n}{1-n\kappa}}$.

No caso $\kappa \geq 1/n$, uma solução será garantidamente global quando conseguir ser mostrado que alguma (e então todas) de suas normas altas $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $p > n\kappa$, não puder explodir em tempo finito, como consequência do seguinte resultado:

Teorema B. *Sejam $\kappa \geq 0$ e $u(\cdot, t)$, $0 \leq t < T_*$, solução do problema (1.1) - (1.3). Para cada $p \geq 1$ satisfazendo $p > n\kappa$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, \kappa, p) \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{p-n\kappa}} \mathbb{U}_p(0; t)^{\frac{p}{p-n\kappa}} \right\} \quad (1.10)$$

para todo $0 \leq t < T_*$, sendo $K(n, \kappa, p) = \{2p\}^{\frac{n}{p-n\kappa}}$.

Note-se que o TEOREMA A é um corolário do TEOREMA B acima (tomando-se $p = 1$), em virtude da seguinte propriedade básica (conhecida) das soluções da equação (1.1):

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t > 0, \quad (1.11)$$

ou seja, $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ decresce monotonicamente em t . Esta propriedade é também satisfeita pelas demais normas $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $p > 1$, quando o termo \mathbf{b} em (1.1a) não depender explicitamente de x , ou, mais geralmente, se tivermos [45]

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x, t, u) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, u \in \mathbb{R}. \quad (1.12a)$$

Neste caso, não apenas estarão as soluções de (1.1a), (1.1b) definidas para todo $t > 0$, como também decairão ao $t \rightarrow \infty$, tendo-se ([8], Theorem 3.2)

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2e)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}} \quad \forall t > 0. \quad (1.12b)$$

Neste trabalho, estamos justamente interessados na situação (muito mais difícil) em que (1.12a) não é válida, quando (em geral) não se tem decaimento, podendo existir soluções estacionárias, etc. Mesmo quando $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$, a taxa de decaimento não é conhecida, em geral. Experimentos numéricos parecem indicar o seguinte comportamento, quando \mathbf{b}, \mathbf{f} na equação (1.1a) independem do tempo t :

Conjectura A: as soluções estacionárias, quando existem, são estáveis (atratoras);

Conjectura B: na ausência de soluções estacionárias (exceto $u \equiv 0$) tem-se sempre $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ ao $t \rightarrow \infty$.

Como estas, muitas questões de interesse para (1.1) - (1.3) permanecem em aberto.

2. Preliminares

Nesta seção, revisaremos resumidamente alguns resultados básicos para as soluções $u(\cdot, t)$ do problema (1.1)-(1.3), que serão usadas na análise a seguir (Seção 3). Estas propriedades podem ser estabelecidas, sem esforço adicional, para o problema levemente mais geral

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{b}(x, t, u) |u|^\kappa u) + \operatorname{div} \mathbf{f}(t, u) = \operatorname{div}(A(x, t, u) \nabla u), \quad (2.1a)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (2.1b)$$

para $1 \leq p_0 < \infty$ dado (e não somente $p_0 = 1$, como em (1.1b)), onde a matriz A satisfaz a condição de elipticidade (1.2) acima (para certa $\mu \in C^0([0, \infty))$ positiva) e \mathbf{b} satisfaz (1.3).⁵ Em (2.1), a condição (2.1b) é entendida no sentido de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{K})} \rightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

para cada conjunto compacto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ considerado. Por *solução* de (2.1a), (2.1b) em um dado intervalo $[0, T_*)$ entende-se uma função suave $u(\cdot, t) \in L^\infty_{\text{loc}}([0, T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ que satisfaz a equação (2.1a) classicamente para $0 < t < T_*$ e verifica (2.2) ao $t \rightarrow 0$. A *existência* (local) de tais soluções decorre da teoria geral de equações parabólicas (ver e.g. [30], ou [47], Ch. 7); sabe-se também que as soluções são *únicas*, como pode ser mostrado usando princípios de comparação (ver e.g. [13], Theorem 2.1).

Proposição 2.1. *Se $u(\cdot, t) \in L^\infty_{\text{loc}}([0, T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (2.1), onde $0 < T_* \leq \infty$, então tem-se $u(\cdot, t) \in C^0([0, T_*), L^p(\mathbb{R}^n))$ para cada $p_0 \leq p < \infty$. Além disso, tem-se, para cada $p_0 \leq p < \infty$:*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{4} (p-1) \mathbb{B}_\mu(0; t)^2 \mathbb{U}_p(0; t)^{2\kappa} \int_0^t \mu(\tau) d\tau \right\} \quad (2.3)$$

para todo $0 \leq t < T_*$, com $\mathbb{B}_\mu(0; t)$, $\mathbb{U}_p(0; t)$ definidas em (1.7), (1.8) acima.

A prova da Proposição 2.1 pode ser feita adaptando-se o argumento usado em ([3], Theorem 1), ou ([8], Theorem 2.1). Em particular, com $p_0 = 1$, $p = 1$ em (2.3), obtém-se a estimativa (1.11) referida na Seção 1, ou seja,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t > 0. \quad (2.4)$$

⁵Além disso, supõe-se \mathbf{b} suave (mais precisamente: \mathbf{b} , $\mathbf{b}_{x_1}, \dots, \mathbf{b}_{x_n}$ e \mathbf{b}_u são supostas contínuas). Sobre o termo de fluxo \mathbf{f} , por não depender de x , só será preciso supor que \mathbf{f} , \mathbf{f}_u sejam contínuas.

Proposição 2.2. *Seendo $u(\cdot, t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (2.1) em um dado intervalo $[0, T_*)$, então tem-se, para cada $q \geq p_0 + 1$:*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{q-2} |\nabla u|^2 dx d\tau < \infty, \quad \forall 0 < t < T_*. \quad (2.5)$$

Prova: Para $q > 2$, considere $\Phi(u) := L_\delta(u)^q$, onde $L_\delta(\cdot)$ é uma função sinal regularizada (ver e.g. [8, 13, 29]), sendo $\delta > 0$ dado. Seja também, para $R > 0$ grande, $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função de corte satisfazendo $\zeta_R(x) = 1$ se $|x| \leq R - 1$, $\zeta_R(x) = 0$ se $|x| \geq R$, $0 \leq \zeta_R(x) \leq 1$ para todo x , $|\nabla \zeta_R(x)| \leq C$ para certa constante C independente de x e R . Multiplicando-se a equação (2.1a) por $\Phi'(u(x, t)) \zeta_R(x)$ e integrando-se em $[t_0, t]$ (dado $0 < t_0 < t$ arbitrário), obtém-se, integrando-se por partes e fazendo $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{|x| < R} |u(x, t)|^q \zeta_R(x) dx + q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} |u(x, \tau)|^{q-2} \langle A(x, \tau, u) \nabla u, \nabla u \rangle \zeta_R(x) dx d\tau = \\ & \quad (2.6) \\ & = \int_{|x| < R} |u(x, t_0)|^q \zeta_R(x) dx + q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{|x| < R} |u|^{q-2+\kappa} u \langle \mathbf{b}(x, \tau, u) - \beta(\tau), \nabla u \rangle \zeta_R(x) dx d\tau \\ & - q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} G_q(u) \langle \beta(\tau), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau + q \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} |u|^{q+\kappa} \langle \mathbf{b}(x, \tau, u), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau \\ & - q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} \langle \mathbf{F}_q(\tau, u), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau + q \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} |u|^{q-2} u \langle \mathbf{f}(\tau, u), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau \\ & - q \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} |u|^{q-2} u \langle A(x, \tau, u) \nabla u, \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau, \end{aligned}$$

onde

$$G_q(u) := \int_0^u |v|^{q-2+\kappa} v dv, \quad \mathbf{F}_q(t, u) := \int_0^u |v|^{q-2} \mathbf{f}(t, v) dv, \quad (2.7a)$$

e $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$, com $\beta_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, dado por

$$\beta_j(t) := \frac{1}{2} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}^n} b_j(x, t, u(x, t)) + \inf_{x \in \mathbb{R}^n} b_j(x, t, u(x, t)) \right]. \quad (2.7b)$$

Para obter (2.6), observamos que

$$\begin{aligned} & \int_{|x| < R} |u|^{q-2+\kappa} u \langle \mathbf{b}(x, \tau, u), \nabla u \rangle \zeta_R(x) dx = \\ & = \int_{|x| < R} |u|^{q-2+\kappa} u \langle \mathbf{b}(x, \tau, u) - \beta(\tau), \nabla u \rangle \zeta_R(x) dx + \int_{|x| < R} \langle \beta(\tau), \nabla G_q(u) \rangle \zeta_R(x) dx \\ & = \int_{|x| < R} |u|^{q-2+\kappa} u \langle \mathbf{b}(x, \tau, u) - \beta(\tau), \nabla u \rangle \zeta_R(x) dx - \int_{R-1 < |x| < R} G_q(u) \langle \beta(\tau), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |u|^{q-2} \langle \mathbf{f}(\tau, u), \nabla u \rangle \zeta_R(x) dx &= \int_{|x| < R} [\operatorname{div} \mathbf{F}_q(\tau, u)] \zeta_R(x) dx \\ &= - \int_{R-1 < |x| < R} \langle \mathbf{F}_q(\tau, u), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx. \end{aligned}$$

Como, por (1.6), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |u|^{q-2+\kappa} u \langle \mathbf{b}(x, \tau, u) - \beta(\tau), \nabla u \rangle \zeta_R(x) dx \\ \leq B(\tau) \int_{|x| < R} |u|^{q-1+\kappa} |\nabla u| \zeta_R(x) dx \\ \leq \frac{1}{2} \mu(\tau) \int_{|x| < R} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx + \frac{1}{2} \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{|x| < R} |u|^{q+2\kappa} \zeta_R(x) dx, \end{aligned}$$

resulta de (1.2), (2.6) que

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |u(x, t)|^q \zeta_R(x) dx + \frac{1}{2} q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{|x| < R} |u(x, \tau)|^{q-2} |\nabla u|^2 \zeta_R(x) dx d\tau \\ \leq \int_{|x| < R} |u(x, t_0)|^q \zeta_R(x) dx + \frac{1}{2} q(q-1) \int_{t_0}^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{|x| < R} |u|^{q+2\kappa} \zeta_R(x) dx d\tau \\ - q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} G_q(u) \langle \beta(\tau), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau + q \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} |u|^{q+\kappa} \langle \mathbf{b}(x, \tau, u), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau \\ - q(q-1) \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} \langle \mathbf{F}_q(\tau, u), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau + q \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} |u|^{q-2} u \langle \mathbf{f}(\tau, u), \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau \\ - q \int_{t_0}^t \int_{R-1 < |x| < R} |u|^{q-2} u \langle A(x, \tau, u) \nabla u, \nabla \zeta_R(x) \rangle dx d\tau, \end{aligned}$$

para todo $R > 1$. Fazendo $R \rightarrow \infty$, obtém-se, então,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + \frac{1}{2} q(q-1) \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{q-2} |\nabla u|^2 dx d\tau \\ \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + \frac{1}{2} q(q-1) \int_{t_0}^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+2\kappa} dx d\tau, \end{aligned} \tag{2.8}$$

de onde (2.5) pode ser derivado sem dificuldade. De fato, (2.8) produz

$$\int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{q-2} |\nabla u|^2 dx d\tau \leq \int_{t_0}^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+2\kappa} dx d\tau,$$

de modo que, fazendo $t_0 \rightarrow 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} |\nabla u|^2 dx d\tau &\leq \int_0^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{q+2\kappa} dx d\tau \\
&\leq \mathbb{U}_\infty(0; t)^{2\kappa} \int_0^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^q dx d\tau \\
&\leq \mathbb{U}_q(0; t)^q \mathbb{U}_\infty(0; t)^{2\kappa} \int_0^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} d\tau,
\end{aligned}$$

para cada $0 < t < T_*$, o que conclui a prova de (2.5) se $q > 2$. Considerando, agora, $q = 2$, pode-se obter (2.5) de modo inteiramente análogo, com a diferença de se multiplicar desta vez a equação (2.1a) por $u(x, t) \zeta_R(x)$, em vez de $\Phi'_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x)$ como feito antes. Integrando-se, então, o resultado em $[t_0, t]$, para $0 < t_0 < t$ dado, obtém-se, seguindo marcha inteiramente similar a (2.6)-(2.8) acima,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_{t_0}^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx d\tau \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_{t_0}^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2+2\kappa} dx d\tau \quad (2.8')$$

(sendo $q = 2$, $p_0 = 1$), de onde resulta, como antes,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mu(\tau) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx d\tau &\leq \int_0^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{2+2\kappa} dx d\tau \\
&\leq \mathbb{U}_2(0; t)^2 \mathbb{U}_\infty(0; t)^{2\kappa} \int_0^t \frac{B(\tau)^2}{\mu(\tau)} d\tau,
\end{aligned}$$

o que estabelece (2.5) no caso $q = 2$. Isso conclui a demonstração da Proposição 2.2. \square

Observe-se que, da Proposição 2.2, segue imediatamente que, para todo $0 < t < T_*$:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \langle A(x, \tau, u) \nabla u, \nabla u \rangle dx d\tau < \infty \quad (2.9a)$$

se $p_0 = 1$ ($q = 2$), e

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{q-2} \langle A(x, \tau, u) \nabla u, \nabla u \rangle dx d\tau < \infty \quad (2.9b)$$

sendo $q \geq p_0 + 1$, $q > 2$. Outra consequência importante de (2.5) acima é dada na Proposição 2.3 a seguir, que representa o ponto de partida para a análise na Seção 3 estabelecendo o resultado principal (TEOREMA B) anunciado na Seção 1.

Proposição 2.3. Sendo $u(\cdot, t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (2.1) em um dado intervalo $[0, T_*)$, tem-se, para cada $q \geq p_0 + 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} \langle A(x, t, u) \nabla u, \nabla u \rangle dx \\ &= q(q-1) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2+\kappa} u(x, t) \langle \mathbf{b}(x, t, u) - \beta(t), \nabla u \rangle dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

para todo $t \in (0, T_*) \setminus E_q$, sendo $E_q \subset (0, \infty)$ de medida zero e $\beta(t)$ dada em (2.7b).

Prova: Na notação da prova anterior, multiplicando-se (2.1a) por $u(x, t) \zeta_R(x)$ se $q = 2$, e por $\Phi'_\delta(u(x, t)) \zeta_R(x)$ se $q > 2$, e integrando-se o resultado em $[t_0, t]$, obtém-se, fazendo $\delta \rightarrow 0$, $t_0 \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$, por (2.5), (2.6) e (2.7),

$$\begin{aligned} & \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} \langle A(x, \tau, u) \nabla u, \nabla u \rangle dx d\tau = \\ &= \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^{q-2+\kappa} u(x, \tau) \langle \mathbf{b}(x, \tau, u) - \beta(\tau), \nabla u \rangle dx d\tau \end{aligned}$$

se $q > 2$, para todo $0 < t < T_*$. Sendo $q = 2$, o resultado correspondente obtido é

$$\begin{aligned} & \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \langle A(x, \tau, u) \nabla u, \nabla u \rangle dx d\tau = \\ &= \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, \tau)|^\kappa u(x, \tau) \langle \mathbf{b}(x, \tau, u) - \beta(\tau), \nabla u \rangle dx d\tau, \end{aligned}$$

para todo $0 < t < T_*$. Nas expressões acima, todas as integrais são bem definidas e finitas [por (2.5), Proposição 2.2, e (2.9)], envolvendo funções integráveis (no sentido de Lebesgue) nas regiões indicadas. (Para o termo $z(x, t) = |u(x, t)|^{q-2+\kappa} u(x, t) \langle \mathbf{b}(x, t, u) - \beta(t), \nabla u \rangle$, por exemplo, tem-se, por (1.6) e (2.7b):

$$\begin{aligned} |z(x, t)| &\leq |u(x, t)|^{q-1+\kappa} |\mathbf{b}(x, t, u) - \beta(t)|_2 |\nabla u|_2 \\ &\leq B(t) |u(x, t)|^{q-1+\kappa} |\nabla u|_2 \\ &\leq \frac{B(t)^2}{\mu(t)} |u(x, t)|^{q+2\kappa} + \mu(t) |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u|_2^2 \\ &\leq \mu(t) \mathbb{B}_\mu(0; t)^2 \mathbb{U}_\infty(0; t)^{2\kappa} |u(x, t)|^q + \mu(t) |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u|_2^2, \end{aligned}$$

de modo que $z \in L^1(\mathbb{R}^n \times [0, t])$ para cada $0 < t < T_*$, como afirmado.) O resultado (2.10) segue, então, aplicando o teorema de diferenciação de Lebesgue, para cada $q \geq p_0 + 1$. \square

Observação 3.1. Na verdade, por (2.1), tem-se (2.10) válida para todo $0 < t < T_*$.

3. Prova de (1.10)

Nesta seção, vamos obter o resultado principal (TEOREMA B), reescrito na forma mais geral a seguir para as soluções do problema (2.1), sob as hipóteses de trabalho (1.2) e (1.3) descritas na Seção 1.

Teorema 3.1. *Sejam $\kappa \geq 0$, $p_0 \geq 1$ e $u(\cdot, t)$, $0 \leq t < T_*$, solução do problema (2.1). Para cada $p \geq p_0$ satisfazendo $p > n\kappa$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, \kappa, p) \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{p-n\kappa}} \mathbb{U}_p(0; t)^{\frac{p}{p-n\kappa}} \right\} \quad (3.1)$$

para todo $0 \leq t < T_*$, sendo $K(n, \kappa, p) = \{2p\}^{\frac{n}{p-n\kappa}}$ e $\mathbb{B}_\mu(0; t)$, $\mathbb{U}_p(0; t)$ definidas em (1.7), (1.8) acima.

A prova do Teorema 3.1 será feita a partir da Proposição 2.3, com o auxílio de vários resultados auxiliares apresentados nos lemas abaixo. Também serão necessárias diversas desigualdades de Nirenberg-Gagliardo, incluindo a desigualdade de Nash [36]

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq K(n) \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2}} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{n+2}} \quad \forall v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^n), \quad (3.2)$$

para certa constante $K(n) < 1$ (ver [9] para a determinação de seu valor optimal). Esta desigualdade será importante mais adiante para se estimar $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u(\cdot, t)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}$, dado $q \geq p_0/2$ (Lema 3.2), na versão desenvolvida pelo autor para o clássico método L^p - L^q em ordem a se aplicar à investigação de problemas da forma (2.1) acima. Em particular, dado $q \geq 2p_0$, resulta desde já conveniente introduzir a função auxiliar $v^{[q]}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$v^{[q]}(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & \text{se } q = 2, \\ |u(x, t)|^{q/2} & \text{se } q > 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Em termos de $v^{[q]}(\cdot, t)$, tem-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (3.4a)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{q/2} = \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.4b)$$

e também

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u(x, t)|_2^2 dx = \frac{4}{q^2} \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (3.5)$$

Lema 3.1. *Seja $q \geq 2p_0$. Sendo $v^{[q]}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada em (3.3) acima, tem-se*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 4\left(1 - \frac{1}{q}\right) \mu(t) \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ & \leq 2q\left(1 - \frac{1}{q}\right) B(t) \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^{2+\frac{4\kappa}{q}}(\mathbb{R}^n)}^{1+\frac{2\kappa}{q}} \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

para todo $t \in (0, T_*) \setminus E_q$, sendo $E_q \subset (0, \infty)$, $|E_q|_1 = 0$, dado na Proposição 2.3.

Prova: De (2.10), tem-se, por (1.2) e (1.3), (1.6), (2.7b), para $t \in (0, T_*) \setminus E_q$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q(q-1) \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u|_2^2 dx \\ & \leq q(q-1) B(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-1+\kappa} |\nabla u|_2 dx \quad [\text{por (1.2), (1.6), (2.10)}] \\ & \leq q(q-1) B(t) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q+2\kappa} dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-2} |\nabla u|_2^2 dx \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

que, em termos da função $v^{[q]}(\cdot, t)$ definida em (3.3), equivale a (3.6), como afirmado. \square

De (3.6), resulta a importante estimativa (3.8) abaixo, para $q \geq 2p_0$ com $q > 2n\kappa$, usando-se as desigualdades de Nirenberg-Gagliardo

$$\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^\theta, \quad \theta = \frac{1-1/r}{1/2+1/n} \quad (3.7)$$

(ver e.g. [19], p. 24), nos casos $2 \leq r < 2 + 2/n$. Aplicando-se (3.7) para estimar $\|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^{2+\frac{4\kappa}{q}}(\mathbb{R}^n)}$ no lado direito da desigualdade (3.6), Lema 3.1, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 4\left(1 - \frac{1}{q}\right) \mu(t) \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ & \leq 2q\left(1 - \frac{1}{q}\right) B(t) \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2} \frac{q-(n-2)\kappa}{q}} \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2} \frac{(n+1)q+2n\kappa}{q}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

para $q \geq 2p_0$ satisfazendo $q > 2n\kappa$. (Esta última condição foi feita de modo a (3.8) poder ser útil: ela torna o expoente do termo $\|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ no lado direito da

expressão (3.8) menor que 2 [que é o expoente do mesmo termo no lado esquerdo]. Posto de outra forma (equivalente): vamos deste ponto em diante supor sempre que se tenha q verificando $q \geq 2p$, com $p \geq p_0$ dado (fixo) satisfazendo⁶

$$p \geq p_0, \quad p > n\kappa. \quad (3.9)$$

Esta condição sobre q permite que se prossiga a análise além da estimativa (3.8), como mostram os seguintes resultados.

Lema 3.2. *Seja $q \geq 2p$, com p dado em (3.9). Sendo $v^{[q]}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida em (3.3), tem-se*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{4}{n+2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{2n\kappa}{q}\right) \mu(t) \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ & \leq \frac{4}{n+2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{2n\kappa}{q}\right) \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{(n+2)q}{q-2n\kappa}} \cdot \mu(t) \left(\frac{B(t)}{\mu(t)}\right)^{\frac{(n+2)q}{q-2n\kappa}} \cdot \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{2 \cdot \left[\frac{q-(n-2)\kappa}{q-2n\kappa}\right]}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

para todo $t \in (0, T_*) \setminus E_q$, sendo $E_q \subset (0, \infty)$, $|E_q|_1 = 0$, dado na Proposição 2.3.

Prova: Considerando o termo no lado direito de (3.8), tem-se

$$\begin{aligned} & 2q \left(1 - \frac{1}{q}\right) B(t) \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2} \frac{q-(n-2)\kappa}{q}} \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2} \frac{(n+1)q+2n\kappa}{q}} \\ & = 4 \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left[\frac{q}{2} B(t) \mu(t)^{-\frac{(n+1)q+2n\kappa}{(n+2)q}} \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2} \frac{q-(n-2)\kappa}{q}} \right] \times \\ & \quad \times \left[\mu(t)^{\frac{(n+1)q+2n\kappa}{(n+2)q}} \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2} \frac{(n+1)q+2n\kappa}{q}} \right] \\ & \leq \frac{4}{n+2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{2n\kappa}{q}\right) \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{(n+2)q}{q-2n\kappa}} \cdot \mu(t) \left(\frac{B(t)}{\mu(t)}\right)^{\frac{(n+2)q}{q-2n\kappa}} \cdot \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{2 \cdot \left[\frac{q-(n-2)\kappa}{q-2n\kappa}\right]} \\ & \quad + 4 \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{(n+1)q+2n\kappa}{(n+2)q} \mu(t) \|\nabla v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

aplicando-se (no último passo) a desigualdade elementar de Young (ver e.g. [16], p. 622). Estimando-se em (3.8) seu termo direito como realizado nesta prova, obtém-se (3.10). \square

⁶A condição $p > n\kappa$ imposta em (3.9) acima não é resultado de limitação do método de análise apresentado, mas uma condição *natural*, prevista por argumentos de escala aplicados a (2.1).

Lema 3.3. *Seja $q \geq 2p$, com p dado em (3.9), e seja $v^{[q]}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada em (3.3). Se $\hat{t} \in (0, T_*) \setminus E_q$ for tal que*

$$\left. \frac{d}{dt} \|v^{[q]}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right|_{t=\hat{t}} \geq 0, \quad (3.11a)$$

então

$$\|v^{[q]}(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq K(n) \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{n}{2} \frac{q}{q-2n\kappa}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{n}{2} \frac{q}{q-2n\kappa}} \|v^{[q]}(\cdot, \hat{t})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q-n\kappa}{q-2n\kappa}}, \quad (3.11b)$$

onde $K(n) > 0$ é a constante de Nash dada em (3.2).

Prova: De (3.10), Lema 3.2, obtém-se, usando a hipótese (3.11a) acima, a estimativa

$$\|\nabla v^{[q]}(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{n+2}{2} \frac{q}{q-2n\kappa}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{n+2}{2} \frac{q}{q-2n\kappa}} \|v^{[q]}(\cdot, \hat{t})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q-(n-2)\kappa}{q-2n\kappa}}, \quad (3.12)$$

de onde segue o resultado (3.11b) aplicando-se a desigualdade (3.2) para $v = v^{[q]}(\cdot, \hat{t})$. \square

Em termos da solução $u(\cdot, t)$ do problema (2.1), o Lema 3.3 é escrito como segue.

Lema 3.3'. *Seja $q \geq 2p$, com p dado em (3.9). Se $\hat{t} \in (0, T_*) \setminus E_q$ for tal que*

$$\left. \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \right|_{t=\hat{t}} \geq 0, \quad (3.13a)$$

então

$$\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)^{\frac{2}{q}} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \left(\frac{B(\hat{t})}{\mu(\hat{t})}\right)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q-n\kappa}{q-2n\kappa}}, \quad (3.13b)$$

onde $K(n) > 0$ é a constante de Nash dada em (3.2).

Os lemas acima indicam intuitivamente um caminho básico para a obtenção de resultados como (3.1) usando argumentos tipo L^p - L^q : para cada $q \geq 2p_0$, $q > 2n\kappa$, examina-se o comportamento (local) em t de $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. Caso esteja *crescendo*, então $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ pode ser estimada (localmente) em termos de $\|u(\cdot, t)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}$, por meio da desigualdade de energia (3.10), de acordo com o Lema 3.3'; se estiver *decrecendo*, então (3.10) torna-se neste caso inútil, mas possivelmente esta situação possa ser compensada pelo fato de se saber que $\|u(\cdot, t)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}$ não esteja crescendo (momentaneamente, pelo menos). Em qualquer dos casos, sempre se possui alguma informação aparentemente importante sobre $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, embora varie (de modo complicado, provavelmente) com q e t . Assim, não é evidente uma estratégia simples que indique como utilizar a informação disponível de modo eficaz. O próximo lema mostra precisamente como isso pode ser feito.

Lema 3.4. *Seja $q \geq 2p$, com p dado em (3.9). Sendo $u(\cdot, t)$, $0 \leq t < T_*$, solução do problema (2.1), tem-se*

$$\mathbb{U}_q(0; t) \leq \max \left\{ \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; K(n)^{\frac{2}{q}} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(0; t)^{\frac{q-n\kappa}{q-2n\kappa}} \right\} \quad (3.14)$$

para todo $0 \leq t < T_*$, onde $\mathbb{B}_\mu(0; t)$, $\mathbb{U}_q(0; t)$, $\mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(0; t)$ são definidas em (1.7) e (1.8), e $K(n)$ é dada na desigualdade (3.2).

Prova: Dado $0 \leq t < T_*$, fixo no que segue, seja (por conveniência) $\gamma_q \in \mathbb{R}^+$ definido por

$$\gamma_q = K(n)^{\frac{2}{q}} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(0; t)^{\frac{q-n\kappa}{q-2n\kappa}}$$

e consideremos os casos possíveis para os valores de $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ no intervalo $0 \leq \tau \leq t$:

Caso I: $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \gamma_q$ para todo $0 \leq \tau < t$.

Neste caso, segue do Lema 3.3' que temos de ter $d/d\tau \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q < 0$ para quase todo $\tau \in I \equiv [0, t]$, de modo que $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é (estritamente) decrescente neste intervalo. Em particular, segue que $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ para todo τ em I , ou seja, tem-se neste caso

$$\mathbb{U}_q(0; t) = \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Caso II: $\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \gamma_q$, tendo-se $\|u(\cdot, t_*)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma_q$ para algum $0 < t_* < t$.

Neste caso, existe $0 < t_1 \leq t_*$ tal que $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \gamma_q$ em $[0, t_1)$, $\|u(\cdot, t_1)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \gamma_q$. Pelo Lema 3.3', segue repetindo o argumento acima que $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ tem de ser decrescente em $[0, t_1]$. Por outro lado, no intervalo $J \equiv [t_1, t]$ temos de ter $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma_q$ para todo $\tau \in J$. [De fato, se assim não fosse, teriam de existir $t_2 < t_3 \in [t_1, t]$ tais que $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \gamma_q$ para todo $t_2 < \tau \leq t_3$, tendo-se $\|u(\cdot, t_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \gamma_q$. Assim, teria de existir $t_{**} \in (t_2, t_3) \setminus E_q$ com $d/d\tau \|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q$ positiva em $\tau = t_{**}$, de modo que, pelo Lema 3.3', valeria $\|u(\cdot, t_{**})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma_q$, contradizendo o fato de ter-se $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \gamma_q$ em todo o intervalo (t_2, t_3) .] Portanto, tem-se também aqui $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ para todo $\tau \in [0, t]$, ou seja, obtém-se novamente $\mathbb{U}_q(0; t) = \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

Caso III: $\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma_q$.

Neste caso, repetindo-se o argumento aplicado no **Caso II** acima para o intervalo J , resulta que se tem $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma_q$ em todo o intervalo $[0, t]$, de modo que, neste caso, tem-se

$$\mathbb{U}_q(0; t) \leq K(n)^{\frac{2}{q}} \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(0; t)^{\frac{q-n\kappa}{q-2n\kappa}}.$$

Em todos os casos, tem-se sempre (3.14) acima, o que conclui a prova do Lema 3.4. \square

Para os resultados seguintes, será conveniente introduzir, para cada $1 \leq j \leq m$, $p \geq p_0$, $p > n\kappa$, a constante $C(j, m) \equiv C(j, m; n, p, \kappa) > 0$ definida por

$$C(j, m) := \prod_{\ell=j}^m \lambda(2^\ell p)^{\frac{p-2^{-\ell}n\kappa}{p-2^{-\ell}n\kappa}} \quad (3.15a)$$

sendo

$$\lambda(q) \equiv \lambda(n, \kappa, q) := K(n)^{\frac{2}{q}} \left(\frac{q}{2} \right)^{\frac{n}{q-2n\kappa}} \quad (3.15b)$$

para todo $q \geq 2p$, onde $K(n) > 0$ denota a constante de Nash na desigualdade (3.2).

Lema 3.5. *Seja $p \geq p_0$, $p > n\kappa$. Sendo $u(\cdot, t)$, $0 \leq t < T_*$, solução de (2.1), tem-se*

$$\mathbb{U}_{2p}(0; t) \leq \max \left\{ \|u_0\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}; \lambda(2p) \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{2p-2n\kappa}} \mathbb{U}_p(0; t)^{\frac{2p-n\kappa}{2p-2n\kappa}} \right\} \quad (3.16a)$$

e, mais geralmente, para todo $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{2^m p}(0; t) \leq \max \left\{ \|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}; C(j, m) \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{p-n\kappa/2^m}{p} \left[\frac{2n}{2^j p-2n\kappa} - \frac{n}{2^m p-n\kappa} \right]} \right. \\ \times \|u_0\|_{L^{2^j p/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p-n\kappa/2^m}{p-2n\kappa/2^j}}, \quad 2 \leq j \leq m; \\ \left. C(1, m) \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n(1-2^{-m})}{p-n\kappa}} \mathbb{U}_p(0; t)^{\frac{p-n\kappa/2^m}{p-n\kappa}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.16b)$$

onde $C(j, m)$, $1 \leq j \leq m$, são as constantes dadas em (3.15), com $\mathbb{B}_\mu(0; t)$, $\mathbb{U}_q(0; t)$ definidas em (1.7), (1.8).

Prova: A expressão (3.16a) corresponde a (3.14) do Lema 3.4 acima, tomando-se simplesmente $q = 2p$; a prova de (3.16b) é realizada por indução em m , como indicado a seguir. Para $m = 2$, (3.16b) é obtida combinando-se (3.16a) e [(3.14), com $q = 4p$]. Dado $m \geq 3$ arbitrário, supondo-se que (3.16b) seja válida para inteiros menores que m , obtém-se, pelo Lema 3.4, tomando-se $q = 2^m p$ em (3.14),

$$\mathbb{U}_{2^m p}(0; t) \leq \max \left\{ \|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}; \lambda(2^m p) \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n}{2^m p-2n\kappa}} \mathbb{U}_{2^{m-1} p}(0; t)^{\frac{p-n\kappa/2^m}{p-2n\kappa/2^m}} \right\},$$

de onde a expressão (3.16b) segue aplicando-se a hipótese de indução para $\mathbb{U}_{2^{m-1} p}(0; t)$. \square

Antes de prosseguir, será útil estimar as constantes $C(j, m)$ definidas em (3.15). Observando as somas elementares abaixo,

$$\sum_{\ell=1}^m \frac{2^\ell p}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)} = \frac{1}{p - n\kappa} - \frac{1}{2^m p - n\kappa}, \quad (3.17a)$$

$$\sum_{\ell=1}^m \frac{\ell \cdot 2^\ell p}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)} = \frac{1}{p - n\kappa} - \frac{m+1}{2^m p - n\kappa} + \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{2^j p - n\kappa}, \quad (3.17b)$$

resulta a seguinte estimativa básica para os coeficientes $C(j, m)$ em (3.15), (3.16).

Lema 3.6. *Sejam $p > n\kappa$, $m \geq 2$. Então, para $C(j, m)$ dado em (3.15), tem-se*

$$C(j, m) \leq (2p)^{\frac{n}{p-n\kappa}} \equiv K(n, \kappa, p), \quad \forall 1 \leq j \leq m. \quad (3.18)$$

Prova: Como $K(n) < 1$ para todo n (cf. [9], p. 213) obtém-se, de (3.15):

$$C(j, m) \leq p^{\frac{(2^m p - n\kappa)}{2^m p}} \sum_{\ell=j}^m \frac{2^\ell p n}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)} \times 2^{\frac{(2^m p - n\kappa)}{2^m p}} \sum_{\ell=j}^m \frac{\ell \cdot 2^\ell p n}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)},$$

de onde segue a estimativa (3.18), visto que

$$\begin{aligned} \frac{2^m p - n\kappa}{2^m p} \sum_{\ell=j}^m \frac{2^\ell p}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)} &\leq \sum_{\ell=1}^m \frac{2^\ell p}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)} \leq \frac{1}{p - n\kappa} \\ \text{e} \\ \frac{2^m p - n\kappa}{2^m p} \sum_{\ell=j}^m \frac{\ell \cdot 2^\ell p}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)} &\leq \sum_{\ell=1}^m \frac{\ell \cdot 2^\ell p}{(2^\ell p - 2n\kappa)(2^\ell p - n\kappa)} \leq \frac{1}{p - n\kappa} \end{aligned}$$

(devido a (3.17) acima). [Note-se que estimativas mais finas para $C(j, m)$ também podem ser obtidas, de modo análogo, mas este ponto não é essencial no argumento a seguir.] \square

Usando-se as expressões (3.15), (3.16b) e (3.18) acima, obtém-se uma estimativa mais simples para $\mathbb{U}_{2^m p}(0; t)$, descrita em (3.19) abaixo. Esta estimativa representa o passo final para estabelecermos o Teorema 3.1.

Lema 3.7. *Seja $p \geq p_0$, com $p > n\kappa$. Sendo $u(\cdot, t)$, $0 \leq t < T_*$, solução do problema dado em (2.1) acima, tem-se*

$$\mathbb{U}_{2^m p}(0; t) \leq K(n, \kappa, p) \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n(1-2^{-m})}{p-n\kappa}} \mathbb{U}_p(0; t)^{\frac{p-n\kappa/2^m}{p-n\kappa}} \right\} \quad (3.19)$$

para todo $0 \leq t < T_*$, e todo $m \geq 1$, onde $\mathbb{B}_\mu(0; t)$, $\mathbb{U}_q(0; t)$ são dadas em (1.7), (1.8), e onde $K(n, \kappa, p)$ é definida em (3.18).

Prova: Se $m = 1$, o resultado segue imediatamente de (3.15b), (3.16a), já que $\lambda(2p) \leq K(n, \kappa, p)$. Consideremos, assim, $m \geq 2$. Dado $2 \leq j \leq m$, obtém-se, então, estimando-se $\|u_0\|_{L^{2^j p/2}(\mathbb{R}^n)}$ por interpolação com respeito às duas normas $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ e $\|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}$ (e usando (3.18) acima):

$$\begin{aligned}
C(j, m) \mathbb{B}_\mu(0; t) & \frac{p - n\kappa/2^m}{p} \left[\frac{2n}{2^j p - 2n\kappa} - \frac{n}{2^m p - n\kappa} \right] \|u_0\|_{L^{2^j p/2}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p - 2n\kappa/2^j}} \\
& \leq K(n, \kappa, p) \left[\|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p - 2n\kappa/2^j} \frac{1 - 2^{-j+1}}{1 - 2^{-m}}} \right] \times \\
& \quad \times \left[\mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p} \left[\frac{2n}{2^j p - 2n\kappa} - \frac{n}{2^m p - n\kappa} \right]} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p - 2n\kappa/2^j} \frac{2^{-j+1} - 2^{-m}}{1 - 2^{-m}}} \right] \\
& \leq \theta \cdot K(n, \kappa, p) \|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} + (1 - \theta) \cdot K(n, \kappa, p) \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n(1 - 2^{-m})}{p - n\kappa}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p - n\kappa}}
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Young ([16], p. 622), onde $\theta \in (0, 1)$ é dado por

$$\theta = \frac{1 - 2^{-j+1}}{1 - 2^{-m}} \frac{p - n\kappa/2^m}{p - 2n\kappa/2^j}.$$

Assim, de (3.16b) e (3.18), segue que, denotando $K \equiv K(n, \kappa, p)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2^m p}(0; t) & \leq \max \left\{ \|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}; \right. \\
& \quad \theta \cdot K \|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)} + (1 - \theta) \cdot K \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n(1 - 2^{-m})}{p - n\kappa}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p - n\kappa}}; \\
& \quad \left. K \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n(1 - 2^{-m})}{p - n\kappa}} \mathbb{U}_p(0; t)^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p - n\kappa}} \right\} \\
& \leq K \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L^{2^m p}(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu(0; t)^{\frac{n(1 - 2^{-m})}{p - n\kappa}} \mathbb{U}_p(0; t)^{\frac{p - n\kappa/2^m}{p - n\kappa}} \right\}
\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t < T_*$, como afirmado. Isso conclui a prova do Lema 3.7. \square

Do Lema 3.7, pode-se finalmente obter a estimativa (3.1), sendo apenas necessário que se tome $m \rightarrow \infty$ em (3.19), pelo fato de se ter

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mathbb{U}_q(0; t) = \mathbb{U}_\infty(0; t). \quad (3.20)$$

Isso conclui a prova do Teorema 3.1, que ocupou toda a discussão da presente seção.

4. Condições de existência global

Nesta seção, vamos aplicar a análise acima de modo a obter condições garantindo existência global (i.e., $T_* = \infty$) das soluções $u(\cdot, t)$ do problema (1.1)-(1.3), ou seja,

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{b}(x, t, u) |u|^\kappa u) + \operatorname{div} \mathbf{f}(t, u) = \operatorname{div}(A(x, t, u) \nabla u), \quad (4.1a)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (4.1b)$$

sendo A (tensor difusivo) e \mathbf{b}, \mathbf{f} (campos vetoriais) suaves satisfazendo (1.2) e (1.3). Um exemplo de condições de existência global é dado no Teorema 4.1 a seguir, onde (ver (1.7), Seção 1)

$$\mathbb{B}_\mu(0; \infty) = \sup_{t \geq 0} \frac{B(t)}{\mu(t)} \leq \infty. \quad (4.2)$$

Teorema 4.1. *Na notação acima, tem-se, a respeito das soluções do problema:*

- (i) *se $0 \leq \kappa < 1/n$, então $u(\cdot, t)$ está definida para todo $t > 0$ (para todo dado u_0);*
- (ii) *se $\kappa = 1/n$, as soluções são globais sempre que $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \mathbb{B}_\mu(0; \infty)^{-n}$;*
- (iii) *se $\kappa > 1/n$, as soluções são globais sempre que o dado inicial satisfizer*

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{n\kappa-1} \leq \{n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty)\}^{-n} \quad (4.3)$$

Prova: O caso (i), já considerado no TEOREMA A da Seção 1, é consequência imediata da propriedade (2.4) e do Teorema 3.1 (tomando-se $p = 1$ em (3.1)). Nos casos (ii) e (iii), podemos proceder do seguinte modo. Da desigualdade (3.8) [reescrita em termos de $u(\cdot, t)$, usando (3.4), (3.5)], obtém-se, considerando $q = 2n\kappa \geq 2$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{2n\kappa} + 2n\kappa(2n\kappa - 1) \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2n\kappa-2} |\nabla u|^2 dx \\ & \leq n\kappa \frac{B(t)}{\mu(t)} \|u(\cdot, t)\|_{L^{n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^\kappa \left\{ 2n\kappa(2n\kappa - 1) \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2n\kappa-2} |\nabla u|^2 dx \right\} \\ & \leq n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^{n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^\kappa \left\{ 2n\kappa(2n\kappa - 1) \mu(t) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{2n\kappa-2} |\nabla u|^2 dx \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

para todo $t \in (0, T_*) \setminus E_{2n\kappa}$, de modo que temos $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}$ decrescente em $[0, T]$

sempre que tivermos

$$n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^{n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^\kappa \leq 1, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.5)$$

No caso (ii), esta condição é simplesmente $\mathbb{B}_\mu(0; \infty)^n \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$, que é automaticamente satisfeita em qualquer intervalo $[0, T]$ se for satisfeita em $t = 0$, devido a (2.4). Isso mostra que $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é monotonicamente decrescente em $[0, T_*)$ caso se tenha $\mathbb{B}_\mu(0; \infty)^n \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$. Pelo Teorema 3.1, $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ é controlada (como $n\kappa = 1$) por $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, e, assim sendo, $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ tem de permanecer limitada em qualquer intervalo limitado. Logo, não se pode ter $T_* < \infty$ neste caso, como afirmado em (ii).

Finalmente, consideremos o caso (iii). Observando que (por interpolação) tem-se

$$n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^{n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^\kappa \leq n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-1/\kappa}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n\kappa-2}{2n-1/\kappa}} \quad (4.6)$$

e também (novamente, por interpolação)

$$n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-1/\kappa}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n\kappa-2}{2n-1/\kappa}} < n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}^{\kappa-\frac{1}{n}} \quad (4.7)$$

para todo $t \in [0, T_*)$, obtemos, por (4.3) e (4.7),

$$n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-1/\kappa}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n\kappa-2}{2n-1/\kappa}} < 1 \quad (4.8)$$

para todo $t \in [0, T_*)$ suficientemente próximo de zero. Afirmamos que (4.8) acima tem de ser verdadeira para todo $t \in [0, T_*)$. [De fato, se não fosse, existiria $T_1 \in (0, T_*)$ tal que se teria

$$n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-1/\kappa}} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n\kappa-2}{2n-1/\kappa}} < 1, \quad \forall 0 \leq t < T_1, \quad (4.9)$$

enquanto $n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, T_1)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-1/\kappa}} \|u(\cdot, T_1)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n\kappa-2}{2n-1/\kappa}} = 1$. Por (4.6), teríamos então (4.5) satisfeita para $T = T_1$, de modo que, por (4.4), $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}$ seria decrescente no intervalo $[0, T_1]$. Assim, teríamos

$$\begin{aligned} 1 &= n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, T_1)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-1/\kappa}} \|u(\cdot, T_1)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n\kappa-2}{2n-1/\kappa}} \\ &\leq n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2n-1/\kappa}} \|u_0\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n\kappa-2}{2n-1/\kappa}} \quad [\text{por (2.4)}] \\ &\leq n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\kappa-\frac{1}{n}} < 1. \quad [\text{por (4.7), (4.3)}] \end{aligned}$$

Esta contradição mostra que (4.8) tem de ser válida para todo $0 \leq t < T_*$, como afirmado.] Sendo (4.8) verdadeira para todo $0 \leq t < T_*$, resulta então, por (4.6), que

$$n\kappa \mathbb{B}_\mu(0; \infty) \|u(\cdot, t)\|_{L^{n\kappa}(\mathbb{R}^n)}^\kappa < 1, \quad \forall t \in [0, T_*). \quad (4.10)$$

Isso mostra, por (4.4), que $\|u(\cdot, t)\|_{L^{2n\kappa}(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente no intervalo de existência $[0, T_*)$. Portanto, pelo Teorema 3.1 [aplicado a $p = 2n\kappa$], temos de ter $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ limitada em todo o intervalo $[0, T_*)$, de modo que, como no caso (ii), T_* não pode ser finito. \square

References

- [1] M. AGUEH, *Gagliardo-Nirenberg inequalities involving the gradient L^2 -norm*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **346** (2008), 757-762.
- [2] C. BUNDLE AND H. BRUNNER, *Blow-up in diffusion equations: a survey*, J. Comp. Appl. Math. **97** (1998), 3-22.
- [3] J. A. BARRIONUEVO, L. S. OLIVEIRA AND P. R. ZINGANO, *General asymptotic supnorm estimates for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations in heterogeneous media*, Intern. J. Partial Diff. Equations (2014), 1-8 (freely available at: <http://www.hindawi.com/journals/ijpde/2014/450417>).
- [4] J. BENAMEUR, *On the blow-up criterion of 3D Navier-Stokes equations*, J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), 719-727.
- [5] J. BENAMEUR AND R. SELMI, *Long time decay to the Leray solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations*, Bull. London Math. Soc. **44** (2012), 1001-1019.
- [6] P. BRAZ E SILVA, W. G. MELO AND P. R. ZINGANO, *An asymptotic sup-norm estimate for solutions of 1-D systems of convection-diffusion equations*, J. Diff. Eqs. **258** (2015), 2806-2822.
- [7] P. BRAZ E SILVA, J. LORENZ, W. G. MELO AND P. R. ZINGANO, *On the large time approximation of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n by Stokes flows* (in preparation).
- [8] P. BRAZ E SILVA, L. SCHÜTZ AND P. R. ZINGANO, *On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in \mathbb{R}^n* , Nonlin. Anal. **93** (2013), 90-96.
- [9] E. A. CARLEN AND M. LOSS, *Sharp constant in Nash's inequality*, Intern. Math. Res. Notices, 1993, 213-215.
- [10] J. Q. CHAGAS, *Some results for doubly nonlinear equations with advection*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brazil (work in progress).
- [11] P. CONSTANTIN, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics*, in: B. Engquist and W. Schmid (Eds.), *Mathematics Unlimited — 2001 and Beyond*, Springer, New York, 2001, pp. 353-360.

- [12] K. DENG AND H. A. LEVINE, *The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel*, J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 85-126.
- [13] N. L. DIEHL, L. FABRIS AND P. R. ZINGANO, *Comparison results for smooth solutions of quasilinear parabolic equations*, Adv. Diff. Eqs. Control Proc. **14** (2014), 11-22.
- [14] N. L. DIEHL, *Some results for unsigned porous medium equations with advection*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brazil (work in progress).
- [15] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, vol. 2, Interscience, New York, 1963.
- [16] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [17] L. FABRIS, *On global existence and supnorm results for nonnegative solutions of the porous medium equation with arbitrary advection terms* (Portuguese), PhD Thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, October 2013 (available at: <http://hdl.handle.net/10183/88277>).
- [18] C. L. FEFFERMAN, *Existence and smoothness of the Navier–Stokes equations*, in: A. M. Jaffe and A. J. Wiles (Eds.), *The Millenium Prize Problems*, American Mathematical Society, Providence, 2006, pp. 57-70 (freely available at http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/NavierStokes.pdf).
- [19] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [20] H. FUJITA, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **13** (1966), 109-124.
- [21] G. P. GALDI, *An introduction to the Navier–Stokes initial–boundary problem*, in: G. P. Galdi, J. G. Heywood and R. Rannacher (Eds.), *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Dynamics*, Birkhauser, Basel, 2000, pp. 1-70.
- [22] P. L. GUIDOLIN, *Some results for p -Laplacian evolution equations with advection*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brazil (work in progress).
- [23] R. H. GUTERRES, *On singular integral operators, with applications to partial differential equations* (Portuguese), M. Sc. Dissertation, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, September 2014 (available at <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/115175>).

- [24] K. HAYAKAWA, *On the non-existence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, *Proced. Japan Acad. Sci., Ser. A*, **49** (1973), 503-505.
- [25] R. KAJIKIYA AND T. MIYAKAWA, *On the L^2 decay of weak solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^n* , *Math. Z.* **192** (1986), 135-148.
- [26] T. KATO, *Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions*, *Math. Z.* **187** (1984), 471-480.
- [27] H.-O. KREISS, T. HAGSTROM, J. LORENZ AND P. R. ZINGANO, *Decay in time of the solutions of the Navier–Stokes equations for incompressible flows*, unpublished note, University of New Mexico, Albuquerque, NM, 2002.
- [28] H.-O. KREISS, T. HAGSTROM, J. LORENZ AND P. R. ZINGANO, *Decay in time of incompressible flows*, *J. Math. Fluid Mech.* **5** (2003), 231-244.
- [29] H.-O. KREISS AND J. LORENZ, *Initial–boundary value problems and the Navier–Stokes equations*, Academic Press, New York, 1989. (Reprinted in the series SIAM Classics in Applied Mathematics, Vol. 47, 2004.)
- [30] O. A. LADYZHENSKAYA, V. A. SOLONNIKOV AND N. N. URALCEVA, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.
- [31] H. A. LEVINE, *The role of critical exponents in blow-up theorems*, *SIAM Rev.* **32** (1990), 262-288.
- [32] J. LORENZ AND P. R. ZINGANO, *The Navier-Stokes equations for incompressible flows: solution properties at potential blow-up times*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, July 2012 (available at <http://www.arXiv.org/abs/1503.01767>).
- [33] J. LERAY, *Essai sur le mouvement d’un fluide visqueux emplissant l’espace*, *Acta Math.* **63** (1934), 193-248.
- [34] K. MASUDA, *Weak solutions of the Navier-Stokes equations*, *Tôhoku Math. Journal* **36** (1984), 623-646.
- [35] W. G. MELO, *A-priori estimates for systems of advection-diffusion equations* (Portuguese), PhD Thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brazil, 2011 (available at: <http://hdl.handle.net/123456789/7355>).

- [36] J. NASH, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. **80** (1958), 931-954.
- [37] L. S. OLIVEIRA, *Two results in classical analysis* (Portuguese), PhD Thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, 2013 (available at: <http://hdl.handle.net/10183/70212>).
- [38] M. OLIVER AND E. S. TITI, *Remark on the rate of decay of higher order derivatives for solutions to the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n* , J. Funct. Anal. **172** (2000), 1-18.
- [39] C. F. PERUSATO, *On the Leray's problem for the Navier-Stokes equations and some generalizations* (Portuguese), M. Sc. Dissertation, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, September 2014 (available at <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/115208>).
- [40] R. G. PINSKY, *Existence and non-existence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in \mathbb{R}^d* , J. Diff. Eqs. **133** (1997), 152-177.
- [41] P. QUITTNER AND PH. SOUPLET, *Superlinear Parabolic Problems: blow-up, global existence and steady states*, Birkhäuser, Basel, 2007.
- [42] J. C. ROBINSON, W. SADOWSKI AND R. P. SILVA, *Lower bounds on blow up solutions of the three-dimensional Navier-Stokes equations in homogeneous Sobolev spaces*, J. Math. Phys. **53** (2012), no. 11, 115618, 15 pp.
- [43] M. E. SCHONBEK AND M. WIEGNER, *On the decay of higher-order norms of the solutions of Navier-Stokes equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **126A** (1996), 677-685.
- [44] L. SCHÜTZ, *Some results on advection-diffusion equations, with applications to the Navier-Stokes equations* (in Portuguese), Doctorate Thesis, Graduate Program in Mathematics (<http://www.mat.ufrgs.br/~ppgmat>), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, June 2008 (available at <http://hdl.handle.net/10183/13714>).
- [45] L. SCHÜTZ, J. P. ZINGANO AND P. R. ZINGANO, *On the supnorm form of Leray's problem for the incompressible Navier-Stokes equations* (submitted).
- [46] G. SEREGIN, *A certain necessary condition of potential blow-up for Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **312** (2012), 833-845.

- [47] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [48] J. SERRIN, *The initial value problem for the Navier–Stokes equations*, in: R. Langer (Ed.), *Nonlinear Problems*, University of Wisconsin Press, Madison, 1963, pp. 69-98.
- [49] E. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
- [50] M. E. TAYLOR, *Partial Differential Equations* (2nd ed.), vol. III, Springer, New York, 2011.
- [51] J. YUAN, *Existence theorem and blow-up criterion of the strong solutions to the magneto-micropolar fluid equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **31** (2008), 1113-1130.
- [52] M. WIEGNER, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on \mathbb{R}^n* , J. London Math. Soc. **35** (1987), 303-313.
- [53] P. R. ZINGANO, *New L^p - L^q procedures for advection-diffusion equations, I* ($n = 1, \kappa = 0$), unpublished notes, Porto Alegre, RS, 2010.
- [54] P. R. ZINGANO, *New L^p - L^q procedures for advection-diffusion equations, II* ($n = 1, \kappa > 0$), unpublished notes, Porto Alegre, RS, 2011.