CONTEÚDO

CAPÍTULO UM

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

A teoria da medida é um ramo fundamental da matemática que estuda a generalização da noção de tamanho, volume e probabilidade. Originada das necessidades da análise e da teoria da probabilidade, essa teoria oferece uma estrutura rigorosa para tratar de conjuntos, funções e integrais em contextos mais abstratos e complexos. Este capítulo explora os conceitos-chave da teoria da medida, suas principais definições e teoremas.

1.1 Espaços e funções mensuráveis

Nesta seção trataremos especificamente dos conceitos de espaços e funções mensuráveis. Para este fim, precisamos inicialmente definir o significado de σ-álgebra. A partir deste conceito estaremos prontos para estabelecer o que chamamos de espaços mensuráveis

Definição 1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\eth$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra se satisfaz as seguintes condições

1. $\emptyset, X \in \eth$
2. Se $S \in \eth$ então $S^{\mathcal{C}} = X \setminus S \in \eth$
3. Se (S_n) é uma sequência de elementos de $\eth$ então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

O par $(X, \eth)$ é dito espaço mensurável e os subconjuntos de $\eth$ são chamados de conjuntos mensuráveis (ou $\eth$-mensuráveis)

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não vazio e considere $\eth = \{\emptyset, X\}$. Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. Com efeito,

1. $\emptyset, X \in \eth$ pela definição.
2. $\emptyset^{\mathcal{C}} = X \in \eth$ e $X^{\mathcal{C}} = \emptyset \in \eth$
3. $\mathrm{U}\emptyset = \emptyset \in \eth$ ou $\mathrm{U}X = X \in \eth$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. $\eth = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ não é uma σ-álgebra de X pois $\{a, b\}^{\mathcal{C}} = \{c, d\} \notin \eth$

Observação: Seja (S_α) uma coleção de conjuntos quaisquer. Pela Regra de De Morgan tem-se

$$\left(\bigcup_{\alpha} S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{\alpha} S_\alpha^{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_{\alpha} S_\alpha\right)^{\mathcal{C}} = \bigcup_{\alpha} S_\alpha^{\mathcal{C}}$$

Dessa forma, se (S_n) é uma sequência de elementos de uma σ-álgebra, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$

Observação: (união finita)

Observação: (interseção finita)

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto não enumerável e considere

$$\eth = \{S \subseteq X\,; S \text{ é enumerável ou } S^{\mathcal{C}} \text{ é enumerável}\}$$

Afirmamos que $\eth$ é uma σ-álgebra. De fato

1. $\emptyset \in \eth$ pois é enumerável e $X \in \eth$ pois $X^{\mathcal{C}} = \emptyset$ que é enumerável

2. se $S \in \eth$ temos as seguintes possibilidades

   S é enumerável, então $S^{\mathcal{C}} \in \eth$ pois $(S^{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}} = S$ é enumerável

   $S^{\mathcal{C}}$ é enumerável, então pela definição da σ-álgebra, $S^{\mathcal{C}} \in \eth$

3. Seja (S_n) uma sequência de subconjuntos em $\eth$, isto é, $S_n \in \eth$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aqui temos três possibilidades a serem consideradas

   S_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável, portanto está em $\eth$

   $S_n^{\mathcal{C}}$ é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_{n_0}^{\mathcal{C}}$$

   é enumerável pois é subconjunto de um conjunto enumerável $S_{n_0}^{\mathcal{C}}$, portanto está em $\eth$

   Se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

   $$S_i \subseteq X \;\text{ e }\; S_j^{\mathcal{C}} \subseteq X \;\text{ são enumeráveis}$$

   podemos afirmar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ não é enumerável, pois $S_j^{\mathcal{C}}$ é enumerável, e como X não é enumerável, segue que S_j também não é enumerável, fazendo com que a união se torne não enumerável. Dito isso, mostremos que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}}$ é enumerável. Com efeito, observe que

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^{\mathcal{C}} \subseteq S_j^{\mathcal{C}}$$

   ou seja, o complementar da união é subconjunto de um conjunto enumerável, logo é um conjunto enumerável. Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \eth$.

Dessa forma, $\eth$ é uma σ-álgebra

Exemplo 1.5. Seja X um conjunto não vazio. Se $\eth_1$ e $\eth_2$ são σ-álgebras de X então $\eth = \eth_1 \cap \eth_2$ também é uma σ-álgebra de X.

Dado um conjunto cujos elementos são subconjuntos de X, o resultado abaixo nos diz como encontrar a menor σ-álgebra contendo este.

Proposição 1.6. Sejam X um conjunto não vazio e $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Então a interseção de todas as σ-álgebras de subconjuntos de X que contem A é a menor σ-álgebra que contém A.

Demonstração. □

Observação: (σ-álgebra gerada)

Agora definimos uma σ-álgebra bastante importante para o estudo da teoria da medida conhecida como álgebra de Borel

Definição 1.7. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por todos os intervalos abertos (x, y) em $\mathbb{R}$, ou seja, considerando o conjunto

$$A = \{(x_\alpha, y_\alpha)\,;\, x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}, x_\alpha < y_\alpha\}$$

temos que

$$\mathcal{B} = \bigcap_\alpha \eth_\alpha,$$

onde cada $\eth_\alpha$ é uma σ-álgebra que contem A.

Equivalentemente, podemos dizer que $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. É fácil ver que essa equivalência é válida pois qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser expresso como união de intervalos abertos. Ainda mais, expressndo $\mathcal{B}$ dessa forma é possível ver que não precisamos que $\mathcal{B}$ seja uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ mas sim de qualquer espaço topólogico $(X, \mathcal{T})$, nesse caso dizemos que $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra gerada pela topólogia $\mathcal{T}$. Nesse trabalho a notação $\mathcal{B}$ será utilizada apenas para a álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

O resultado abaixo apresenta uma outra forma de definir a álgebra de Borel

Proposição 1.8. $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra gerada por todos intervalos fechados

Demonstração. □

Exemplo 1.9. Alguns exemplos de conjuntos que estão em $\mathcal{B}$ são

- Todo conjunto fechado é um conjunto em $\mathcal{B}$ pois é o complementar de um conjunto aberto.
- Todo conjunto enumerável está em $\mathcal{B}$ pois se $B = \{x_1, x_2, \dots\}$, então $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ que é um conjunto em $\mathcal{B}$ pois cada $\{x_n\}$ é um conjunto fechado.
- Todo intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é um conjunto em $\mathcal{B}$ pois $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{k}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a, b + \frac{1}{n})$.

A sensação é de que a álgebra de Borel contem todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, isto é $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Porem este não é o caso, pois existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são bastante dificeis de definir (vide [??]) que não estão em $\mathcal{B}$. Mas se esses conjuntos são tão dificeis de definir por que precisamos de uma σ-álgebra que exclui eles?

Na seção a seguir estudaremos o conceito de medida e suas propriedades, em um exemplo veremos que ao tentar definir uma medida no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uma propiedade importante não é satisfeita, mas restrigindo para o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ conseguimos definir a mesma medida de forma que todas propriedades são satisfeitas.

Definição 1.10. O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é dita reta extendida e é definido por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Observação: Operações com ∞ em $\overline{\mathbb{R}}$

1. $\infty + \infty = \infty$
2. $-\infty - \infty = -\infty$
3. $x + \infty = \infty + x = \infty$
4. $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
5. $\infty \cdot \infty = \infty$
6. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ se $x > 0$

7. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$ se $x < 0$
8. $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$ se $x < 0$
9. $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ se $x > 0$
10. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Proposição 1.11. Seja $\bar{\mathbb{R}}$ a reta estendida. Considere $E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$, $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\widehat{\mathcal{B}} = \{E_1, E_2, E_3, E\}$ com E variando na álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Então $\widehat{\mathcal{B}}$ é uma σ-álgebra em $\overline{\mathbb{R}}$ denominada álgebra estendida de Borel.

Demonstração. □

Um conceito bastante importante na teoria da medida, é a ideia de funções mensuráveis

Definição 1.12. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser $\eth$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto
$$\{x \in X \,;\, f(x) > \alpha\}$$
pertence a σ-álgebra.

Lema 1.13. As afirmações a seguir são equivalentes para uma função $f : X \to \mathbb{R}$

(a) $A_\alpha = \{x \in X \,;\, f(x) > \alpha\} \in \eth$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $B_\alpha = \{x \in X \,;\, f(x) \leqslant \alpha\} \in \eth$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $C_\alpha = \{x \in X \,;\, f(x) \geqslant \alpha\} \in \eth$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $D_\alpha = \{x \in X \,;\, f(x) > \alpha\} \in \eth$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração. □

Exemplo 1.14. A função constante $x \mapsto c$ é mensurável. Com efeito, se $\alpha \geqslant c$, então
$$\{x \in X \,;\, f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \eth$$
pois o único valor que a função assume é c. Se $\alpha < c$, então
$$\{x \in X \,;\, f(x) > \alpha\} = X \in \eth$$
Portanto a função constante é mensurável

Exemplo 1.15. A função caracteristica χ_E de um subconjunto $E \in \eth$ é mensurável dada por
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in E \\ 0 \text{ se } x \notin E. \end{cases}$$
é mensurável. Dito isso, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geqslant 1$, então
$$\{x \in X \,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset \in \eth,$$
pois a imagem de χ_E contem apenas os valores 0 e 1. Se $0 \leqslant \alpha < 1$ então
$$\{x \in X \,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = E \in \eth.$$
Por fim, se $\alpha < 0$, então
$$\{x \in X \,;\, \chi_E(x) > \alpha\} = X \in \eth.$$
Portanto χ_E é uma função mensurável, desde que E tambem seja.

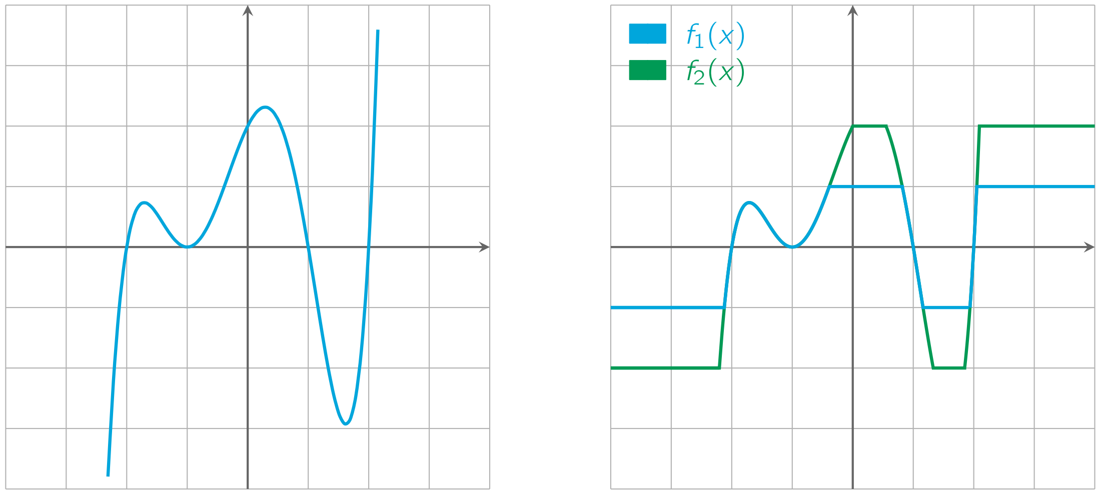


Figura 1.1: À esquerda o gráfico de f e à direita o gráfico de f_1 e f_2
Fonte: Autoral

Exemplo 1.16. Se $f : X \to \mathbb{R}$ com $X \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ é contínua, então f é mensurável. De fato, basta notar que

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

Pela contínuidade de f, o conjunto $f^{-1}((\alpha, \infty))$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma $\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$. Portanto f é mensurável.

Exemplo 1.17. Dada uma função f mensurável. A função *truncagem de f* (Figura 1.1) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leqslant n \text{ e } f(x) \geqslant -n \\ n & \text{se } f(x) > n \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$

Vamos estudar agora algumas propriedades elementares sobre funções mensuráveis

Proposição 1.18. Sejam X um espaço mensurável, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções

(a) cf

(b) $f^2 := f \cdot f$

(c) $f + g$

(d) fg

(e) $|f|$

são mensuráveis

Demonstração. □

Uma outra definição importante sobre funções mensuráveis e a de parte positiva e negativa de uma função

Definição 1.19. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma qualquer. Definimos as partes positiva e negativa de f respectivamente pelas funções não negativas $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Lema 1.20. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma funçao qualquer. Então

(a) $f = f^+ - f^-$

(b) $|f| = f^+ + f^-$

(c) $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$

(d) $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

O lema acima é importante para demonstrar a proposição abaixo

Proposição 1.21. Seja X um espaço mensurável. Então $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis

Demonstração. Segue direto do lema anterior. □

Agora, vamos passar a estudar funções mensuráveis na reta extendida.

Definição 1.22. Dizemos que uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\eth$-mensurável (ou mensurável) se

$$\{x \in X\,;\, f(x) > \alpha\} \in \eth$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, denotamos o conjunto de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por $\mathcal{M}(X, \eth)$

Em nenhum momento da definição acima mencionamos os elementos $\pm\infty$. O motivo será mostrado abaixo

...

Lema 1.23. Uma funçao $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se

$$A = \{x \in X\,;\, f(x) = \infty\} \in \eth \text{ e } B = \{x \in X\,;\, f(x) = -\infty\} \in \eth$$

e a função $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável

Demonstração. □

Observação: $(cf \cdots \in \mathcal{M}(X, \eth))$

...

Lema 1.24. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{M}(X, \eth)$. Então as funções

$$f(x) = \inf f_n(x) \qquad F(x) = \sup f_n(x)$$
$$f^*(x) = \liminf f_n(x) \quad F^*(x) = \limsup f_n(x)$$

pertencem a $\mathcal{M}(X, \eth)$

Demonstração. □

...

Corolário 1.25. Se (f_n) é uma sequência em $\mathcal{M}(X, \eth)$ que converge para f. Então $f \in \mathcal{M}(X, \eth)$

Demonstração. □

O resultado abaixo é ...

Proposição 1.26. Seja f uma função não negativa em $\mathcal{M}(X, \eth)$. Então existe uma sequência (φ_n) em $\mathcal{M}(X, \eth)$ tal que

(a) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

(b) cada φ_n possui um número finito de valores reais em sua imagem.

(c) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ para cada $x \in X$.

Demonstração. □

Para terminar essa seção, vamos definir e ver um exemplo de funções mensuráveis entre espaços mensuráveis

Definição 1.27. Sejam $(X, \eth_X)$ e $(Y, \eth_Y)$ espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $f : (X, \eth_X) \to (Y, \eth_Y)$ é mensurável quando

$$f^{-1}(E) \in \eth_X$$

para todo $E \in \eth_Y$

Exemplo 1.28.

1.2 Medida

Definição 1.29. Uma medida é uma função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) \geqslant 0$ para todo $S \in \eth$
3. se (E_n) é uma sequência de subconjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Observação: A tripla $(X, \eth, \mu)$ onde X é um conjunto, $\eth$ é uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\eth$ é chamada de espaço de medida.

Observação: (medida finita e σ-finita)

Exemplo 1.30. Seja $(\mathbb{N}, \eth)$ um espaço mensurável, onde $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. A função $\mu : \eth \to \bar{\mathbb{R}}$ dada por $\mu(E) = \#S$, se S é finito, e $\mu(S) = \infty$ se S é infinito, é uma medida em $\eth$. Com efeito,

1. $\mu(\emptyset) = 0$ por vacuidade
2. $\mu(S) \geqslant 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(S_k) = \infty$. Então a união é infinita pois contem pelo menos um conjunto infinito. Logo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por outro lado, se $\mu(S_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que a união pode ser infinita. Nesse caso

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

Por fim, se a união é finita, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_n = \emptyset$ para todo $n > k$. Assim

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} S_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

Exemplo 1.31. Sejam $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida e $A \in \eth$ um conjunto fixo. Então a função λ dada por

$$\lambda(S) = \mu(A \cap S)$$

é uma medida em $\eth$. Com efeito

1. $\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ pois μ é uma medida
2. $\lambda(S) \geqslant 0$ por definição
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em $\eth$. Então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap S_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(S_n)$$

pois μ é uma medida e a sequência $(A \cap S_n)$ é disjunta.

Portanto λ é uma medida

Exemplo 1.32. Sejam $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ medidas em uma σ-álgebra $\eth$ e $c_1, c_2, \ldots, c_j > 0$. Então

$$\mu(S) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(E)$$

é uma medida em $\eth$. De fato

1. $\mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(\emptyset) = 0$ pois $\mu_j(\emptyset) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.
2. $\mu(S) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(S) \geqslant 0$ pois $c_j \mu_j(S) \geqslant 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.
3. Seja (S_n) uma sequência de conjuntos disjuntos em $\eth$. Então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Portanto μ é uma medida.

O próximo passo é estudar algumas propiedade elementares provenientes da definição de medida.

Lema 1.33. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Se $E \subseteq F$ onde E e F são conjuntos mensuráveis. Então $\mu(E) \leqslant \mu(F)$

Demonstração. Note que

$$F = E \cup F = E \cup (F \setminus E),$$

onde E e $F \setminus E$ são conjuntos mensuráveis disjuntos. Dessa forma

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E).$$

Portanto, como μ é uma função não-negativa $\mu(F) \leqslant \mu(E)$. □

Observação: Da demonstração do lema anterior, conseguimos ver que se $E \subseteq F$

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$$

desde que $\mu(E) < \infty$.

Lema 1.34. Seja μ uma medida em $\eth$. Então

(a) se (E_n) é uma sequência crescente em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

(b) se (E_n) é uma sequência decrescente em $\eth$ e $\mu(F_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

Demonstração. □

Definição 1.35. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que duas funções $f : X \to \mathbb{R}$ são iguais em quase toda parte em X e denotamos por $f = g$ qtp em X se existe um conjunto $N \in \eth$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \notin N$.

Um outro conceito importante é o conceito de convergência em quase toda parte

Definição 1.36. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma sequência de funções (f_n) converge para f em quase toda parte, se existe um conjunto $N \in \eth$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \notin N$.

Por fim, para terminar essa seção, introduzimos o conceito de carga

Definição 1.37. Uma carga é uma função $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(S) \geqslant 0$ para todo $S \in \eth$
3. se $(S_n) \subseteq \eth$ é uma sequência de subconjuntos disjuntos em $\eth$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

isto é uma medida que não satisfaz a não-negatividade.

1.2.1 Construindo uma medida para $\mathbb{R}$

Nosso objetivo agora é construir uma medida para $\mathbb{R}$ e mostrar o motivo de utlizar a algebra de Borel ao inves de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definição 1.38. O comprimento de um intervalo aberto I é uma função ℓ dada por

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{se } I = (a, b) \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, a) \text{ ou } I = (a, \infty) \text{ com } a \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. O tamanho de A deve ser no máximo a soma dos comprimentos de uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. A definição abaixo formaliza essa ideia

Definição 1.39. A medida exterior $m(\,\cdot\,)$ de um conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é definida por

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)\,;\, I_1, I_2, \ldots, \text{ são intervalos abertos tais que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Essa definição envolve uma soma infinita de uma sequência $t_1, t_2, \ldots,$ de elementos de $[0, \infty]$, que é ∞ se pelo menos algum $t_k = \infty$, ou se a série definida pelas somas parciais de t_k é divergente. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Exemplo 1.40. Conjuntos finitos tem medida exterior nula. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto finito. Dado $\varepsilon > 0$ defina a sequência I_k de intervalos abertos por

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{se } k \leqslant n \\ \emptyset & \text{se } k > n \end{cases}$$

Então $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n.$$

Logo, $m(A) \leqslant 2\varepsilon n$. Como ε é arbitrário, temos que $m(A) = 0$

A proposição abaixo generaliza esse exemplo para conjuntos enumeráveis

Proposição 1.41. Conjuntos enumeráveis tem medida exterior nula.

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ um conjunto enumerável. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ defina a sequência

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

Dessa forma, $I_1, I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon$$

temos que $m(A) < 2\varepsilon$. Pelo fato de ε ser arbitrário, temos que $m(A) = 0$. □

Uma outra propiedade da medida exterior é sua invariância a translação

Proposição 1.42. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então

$$m(A) = m(t + A),$$

onde

$$t + A = \{t + a\,;\, a \in A\}$$

Demonstração. Seja $I_1, I_2, \ldots,$ uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem A. Dito isso $t + I_1, t + I_2, \ldots,$ é uma sequência de intervalos abertos tais que a união contem $t + A$. Logo

$$m(t + A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

Fazendo o ínfimo do ultimo termo, temos que $m(t + A) \leqslant m(A)$.

Para verificar a desigualdade na outra direção note que $A = -t + (t + A)$, então utilizando a desigualdade que acabamos de provar temos

$$m(A) = m(t - (t + A)) \leqslant (t + A).$$

Portanto $m(A) = m(t + A)$ □

(texto motivador)

Proposição 1.43. Seja (A_n) uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Então

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Demonstração. □

(medida do intervalo fechado) (explicar teorema de Heine-Borel)

Proposição 1.44. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então $m([a, b]) = b - a$

(o pulo do gato)

Proposição 1.45. Existem subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}$ A e B tais que

$$m(A \cup B) \neq m(A) + m(B)$$

Demonstração. □

Teorema 1.46. Não é possível definir uma medida μ que generaliza ℓ em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demonstração. □

(agora mostrar que em $\mathcal{B}$ é uma medida)

1.3 Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, projetada para lidar com uma classe mais ampla de funções e conjuntos. Ela permite calcular integrais considerando a medida dos valores que a função assume, tornando-se uma ferramenta fundamental na teoria da medida e análise funcional.

The "point"of Lebesgue integration is not that it's a way to do standard integrals of calculus by some new method. It's that the definition of the integral is more theoretically powerful: it leads to more elegant formalism and cleaner results (like the dominated convergence theorem) that are very useful in harmonic/functional analysis and probability theory.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da integral de Lebesgue, destacamos importância aos teoremas da convergência monotona e convergência dominada. Vale ressaltar que nessa seção estaremos trabalhando em um espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ fixo.

Figura 1.2: Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Definição 1.47. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é simples se assume apenas um número finito de valores em sua imagem $(\#\varphi(X) < \infty)$

Uma função φ simples e mensurável pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{1.1}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função caracteristica do conjunto $E_j \in \eth$. Essa representação é única pelo fato de todos a_j serem distintos, os conjuntos E_j serem disjuntos para todo $j = 1, \ldots, n$, além disso, $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Definição 1.48. Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ uma função simples com a representação (1.1). Definimos a integral de φ em relação a μ por

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

Observação: Adotamos a convenção $0 \cdot \infty = 0$. Dessa forma a integral da função identicamente nula é 0 indepdendente se o conjunto tem medida finita ou infinita.

Lema 1.49. Dadas funções simples $\varphi, \psi \in M^+(X, \eth)$ e $c \geqslant 0$ tem-se

(a) $\displaystyle\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$

(c) A aplicação $\lambda(E) = \displaystyle\int \varphi \chi_E \, d\mu$ para todo $E \in \eth$ é uma medida em $\eth$.

Demonstração.

(a) Mostremos que

$$\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu.$$

Com efeito, para $c = 0$,

$$\int c\varphi \, d\mu = 0 = c \int \varphi \, d\mu.$$

por outro lado, para $c > 0$, podemos escrever $c\varphi$ da seguinte forma

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} ca_j \chi_{E_j}$$

Dito isso,

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} ca_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu$$

(b) Agora, mostremos que

$$\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$$

Para isso, podemos considerar as representações padrões das funções simples $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k},$$

dessa forma, obtemos uma representaçao para $\varphi + \psi$ dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}.$$

No entanto, essa representação não necessáriamente é a representação padrão, pois é possível que existam $j_0, j_1 \in \{1, \dots, n\}$ e $k_0, k_1 \in \{1, \dots, m\}$, tais que $a_{j_0} + b_{k_0} = a_{j_1} + b_{k_1}$.

Considere os elementos distintos do conjunto

$$H = \{a_j + b_k \, ; j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, m\}\}$$

e denominamos os elementos por c_h com $h = 1, \dots, \#H$, e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Afirmamos que os conjuntos G_h são dois-a-dois disjuntos. De fato

$$G_h \cap G_H = (E_j \cap F_k) \cap (E_J \cap F_K) = E_j \cap E_J \cap F_k \cap F_K = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset,$$

sendo assim

$$\mu(G_h) = \widetilde{\sum} \mu(E_j \cap F_k)$$

onde o somatório $\widetilde{\Sigma}$ está relacionado aos indices $1 \leqslant j \leqslant n$ e $1 \leqslant k \leqslant m$ tais que $a_j + b_k = c_h$

Portanto definimos a representação padrão de $\varphi + \psi$ por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{\#H} c_h \chi_{G_h},$$

deste modo

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) \, d\mu &= \sum_{h=1}^{\#H} c_h \mu(G_h) \\
&= \sum_{h=1}^{\#H} \widetilde{\sum} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)
\end{aligned}$$

como X é a união das famílias $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, temos que

$$\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \quad e \quad \mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k).$$

Portanto

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

(c) Por fim, queremos mostrar que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E\, d\mu$$

é uma medida em $\eth$. Com efeito,

1. $\lambda(\emptyset) = \int \varphi \chi_\emptyset\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$

2. Note que como $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ os elementos a_j na representação padrão são não negativos. Com efeito, sabemos que $0 \leqslant \varphi(x)$ para todo $x \in X$, daí

$$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

porem, como os conjuntos E_j são disjuntos, existe um único $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ tal que $x \in E_{j_0}$. Dessa forma, para todo $j \neq j_0$, $\chi_{E_j}(x) = 0$, então

$$0 \leqslant \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x) = a_{j_0}$$

Daí,

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E \cap E_j) \geqslant 0$$

pois mostramos que $a_j > 0$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ e μ é uma medida.

3. Considere $(F_k) \subseteq \eth$ uma sequência disjunta de conjuntos

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) &= \int \varphi \chi_{\cup F_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cap E_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap E_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi \chi_{F_k}\, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.50. A função

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é um exemplo clássico nos cursos de análise na reta de uma função que não é integrável. Porem essa afirmação é válida apenas quando estamos trabalhando com a integral de Riemann, pois utlizando a integral de Lebesgue, essa função tem integral com resultado bem definido Com efeito, considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu^*)$ onde $\mathcal{B}$ é a álgebra de Borel e μ^* é medida exterior (de Lebesgue). Dessa forma

$$\int \chi_{\mathbb{Q}}\, d\mu^* = \mu^*(\mathbb{Q}) = 0.$$

pois $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Agora, podemos extender a definição da integral de Lebesgue para qualquer função mensurável não negatíva (não necessáriamente simples)

Definição 1.51. A integral de uma função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ em relação a μ é definida por

$$\int f\, d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi\, d\mu$$

onde φ são funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ tais que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$.

Além disso, definimos a integral da função f sobre um conjunto mensurável

Definição 1.52. A integral de $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ sobre um conjunto $E \in \eth$ é dada por

$$\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu$$

...

Lema 1.53. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $E, F \in \eth$. Então são válidas as afirmações abaixo

(a) se $f \leqslant g$ tem-se

$$\int f \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$$

(b) se $E \subseteq F$ tem-se

$$\int_E f \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu$$

Demonstração.

(a) Seja φ uma função simples em M^+, então

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant g \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu = \int g \, d\mu$$

(b) Como $f\chi_E \leqslant f\chi_F$, segue do item anterior que

$$\int f\chi_E \, d\mu \leqslant \int f\chi_F \, d\mu,$$

dito isso

$$\int_E F \, d\mu \leqslant \int_F f \, d\mu.$$

□

Um dos resultados mais importantes da teoria da medida é o Teorema da Convergência Monótona, que será enunciado e demonstraado a seguir.

Teorema 1.54 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo para f, então,

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ onde $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \eth)$, pelo corolário ?? temos que $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Pela monotonicidade da sequência $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, pelo item **(a)** do lema anterior

$$\int f_n \, d\mu \leqslant \int f_{n+1} \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dito isso

$$\lim \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu.$$

Por outro lado, seja $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ e considere

$$A_n = \{x \in X \,;\, f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)\} = \{x \in X \,;\, [f_n - \alpha\varphi](x) \geqslant 0\}$$

como f_n e φ são funções mensuráveis, temos que $A_n \in \eth$. Além disso, $A_n \subseteq A_{n+1}$ já que $f_n \leqslant f_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $\sup\{f_n\} = f$, $\alpha \in (0,1)$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Daí, pelo lema anterior

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leqslant \int_{A_n} f_n \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu. \tag{1.2}$$

Dessa forma, a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X, segue dos lemas ?? e ?? que

$$\int \varphi \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

Com efeito, sabemos que

$$\lambda(E) = \int \varphi\chi_E \, d\mu$$

é uma medida, assim

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi\chi_{\cup A_n} \, d\mu = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \lambda(A_n) = \lim \int \varphi\chi_{A_n} \, d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu$$

... fazendo $n \to \infty$ em 1.2

$$\alpha \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu.$$

Como a equação acima é válida para todo $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu,$$

ainda mais, segue do fato de φ ser uma função simples tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ tem-se que

$$\int f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \varphi \text{ simples} \\ \varphi \in M^+}} \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim \int f_n d\mu.$$

Assim

$$\int f \, d\mu \leqslant \lim \int f_n \, d\mu$$

Portanto por ?? e ??, chegamos a

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

□

O Lema 1.49 sobre as operações elementares envolvendo a integral de funções simples mensuráveis e não-negativas, tambem é válido para funções mensuráveis não-negativas quaisquer como mostra o corolário abaixo

Corolário 1.55. Sejam $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$ e $c > 0$, então são válidas as seguintes afirmações

(a) $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$

(b) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c = 0$
$$\int cf\, d\mu = 0 = c \int f\, d\mu.$$
Se $c > 0$, considere (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ convergindo para f (lema ??). Dito isso, $(c\varphi_n)$ é um sequência monótona crescente que converge para cf. Pelo Lema 1.49 e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que
$$\int cf\, d\mu = \lim \int c\varphi_n\, d\mu = c \lim \int \varphi_n\, d\mu = c \int f\, d\mu.$$

(b) De forma análoga considere (φ_n) e (ψ_n) sequências monótonas crescentes de funçoes simplies em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ que convergem para f e g respectivamente. Dessa forma $(\varphi_n + \psi_n)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f + g$. Portanto
$$\int (f+g)\, d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \lim \int \varphi_n\, d\mu + \lim \int \psi_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$
□

Um outro resultado importante dessa seção é o lema de Fatou que será apresentado a seguir.

Lema 1.56 (Lema de Fatou)**.** Se $(f_n) \subseteq M^+(X, \eth)$, então
$$\int \liminf f_n\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$, dessa forma $g_m \leqslant f_n$ para todo $m \leqslant n$. Sendo assim,
$$\int g_m\, d\mu \leqslant \int f_n\, d\mu$$
para todo $m \leqslant n$. Desse modo
$$\int g_m\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu.$$
Por outro lado, temos que (g_m) é crescente e converge para seu supremo, ou seja, $\liminf f_n$. Portanto pelo Teorema da Convergência Monótona
$$\int \liminf f_n\, d\mu = \lim \int g_m\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu.$$
□

Da mesma forma que definimos uma medida através de uma função simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ podemos generalizar esse resultado para funções que não são necessáriamente simples

Corolário 1.57. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. A aplicação $\lambda : \eth \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por
$$\lambda(E) = \int f\chi_E\, d\mu$$
é uma medida.

Demonstração.

1. $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f \, d\mu = \int f\chi_{\emptyset} \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$

2. Como $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$ temos que $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \geqslant \int_E 0 \, d\mu = 0$.

3. Sejam E_n uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathfrak{F}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e considere f_n definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$

Desse modo, pelo Corolário ?? e por indução temos que

$$\int f_n \, d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$

Além diso, podemos escrever

$$\lim f_n = \lim \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k} = f\chi_E$$

desde que (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos.

Por fim, como (f_n) é uma sequência crescente em M^+ que converge para $f\chi_E$, pelo Teorema da Convergência Monótona tem-se que

$$\lambda(E) = \int f\chi_E \, d\mu = \int \lim f_n \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k}$$

Portanto, λ é uma medida. □

Corolário 1.58. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda parte de X se, e somente se,

$$\int f \, d\mu = 0$$

Demonstração. Suponha que $\int f \, d\mu = 0$ e considere o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X \, ; f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $f \geqslant \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Note que

$$0 = \int f \, d\mu \geqslant \frac{1}{n} \int \chi_{E_n} \, d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geqslant 0.$$

Isto nos diz que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso

$$E = \{x \in X \, ; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pois se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$, logo

$$f(x) > \frac{1}{n_0} > 0.$$

Assim, $x \in E$.

Por outro lado, se $x \in E$, temos que $f(x) > 0$. Utilizando a propiedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{f(x)} < n_0 \iff f(x) > \frac{1}{n_0},$$

isto é, $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Portanto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ como queriamos mostrar. Dito isso

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = 0$$

desde que (E_n) é uma sequência crescente. Isto nos diz que $f(x) = 0$, para todo $x \in E^{\mathcal{C}}$ com $\mu(E) = 0$, ou seja $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

Reciprocamente, suponha que $f(x) = 0$ em quase toda parte em X. Se $E = \{x \in X\,;\, f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Sendo assim, considerando $f_n = n\chi_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temo que $f \leqslant \liminf f_n$ e pelo Lema de Fatou

$$0 \leqslant \int f\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu = \liminf n\mu(E) = 0$$

Portanto

$$\int f\, d\mu = 0.$$

□

Corolário 1.59. Seja $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então a aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Então, a medida λ é absolutamente contínua em relação a μ, isto é, se $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, então

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

isto é, $f\chi_E = 0$ em quase toda parte. Portanto

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu = 0.$$

□

O corolário abaixo é uma versão mais geral do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1.60. Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ que converge em quae toda parte de X para a função $f \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, então

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$$

Demonstração. Seja N um conjunto de medida nula. Suponha que (f_n) converge para f em todo o pontos de $M = N^{\mathcal{C}}$. Dessa forma, a sequência $(f_n\chi_M)$ converge para $f\chi_M$, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int f\chi_M \, d\mu = \lim \int f_n\chi_M \, d\mu.$$

Além disso, podemos escrever f e f_n da seguinte forma

$$f = f\chi_M + f\chi_N \text{ e } f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N,$$

pois $M = N^{\mathcal{C}}$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f\chi_N$ e $f_n\chi_N$ são nulas em quase toda parte. Dito isso, pelo Corolário 1.58, segue que

$$\lim \int f_n \, d\mu =$$

$\square$

O resultado abaixo ...

Corolário 1.61. Seja (g_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$. Então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $f_n = g_1 + \cdots + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g_n \geqslant 0$, temos que (f_n) é uma sequência crecente que converge para $f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu.$$

Por outro lado, como $g_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{F})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando indução e o Corolário ??

$$\lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu$$

Portanto

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

$\square$

Finalmente, podemos definir a integral de uma função mensurável qualquer

Definição 1.62. O conjunto $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ das funções integráveis consite em todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, tai que as integrais

$$\int f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \int f^- \, d\mu$$

são finitas. Neste caso, definimos a integral de f em relação a μ por

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

e se E é um conjunto mensurável

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Qualquer representação de f como subtrações de funções integráveis não-negativas resulta no mesmo valor da integral da definição acima. Com efeito seja f uma função integravel e escreva f como $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções integráveis não negativas, então

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu.$$

Note que

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \iff f^+ + f_2 = f_1 + f^-.$$

Dessa forma, pelo Corolário ?? temos que

$$\int f^+ \, d\mu + \int f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f^- \, d\mu.$$

Como $f_1, f_2, f^+, f^- \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, segue que

$$\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 d\mu.$$

Isto é

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.$$

Da mesma forma que definimos um medida a partir da integral de uma função não-negativa, podemos definir uma carga partindo da integral de uma função integrável qualquer como exibe o lema abaixo

Lema 1.63. Seja $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. A aplicação $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

é uma carga, denominada integral indefinida de f (em relação a μ).

Demonstração. Como $f^+, f^- \in M^+(X, \eth, \mu)$, pelo Corolário ?? temos que as funções $\lambda^+, \lambda^- : \eth \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu \quad \text{e} \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- \, d\mu.$$

são medidas em $\eth$ e são finitas pelo fato de f ser uma função integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ temos que λ é uma carga. □

Como a aplicação λ definida acima é uma carga, vemos que se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, então

$$\int_E f\, d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu,$$

ou seja

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu$$

Agora, estamos prontos para estudar algumas propriedades elementares das integrais de funções mensuráveis

Teorema 1.64. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Além disso

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d\mu. \tag{1.3}$$

Demonstração. Seja f uma função integrável, mostremos que $|f|$ também o é. Primeiramente note que

$$|f|^+ = |f| = f^+ + f^- \;\text{ e }\; |f|^- = 0,$$

Dito isso

$$\int |f|^+\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu$$

é finita pois f é integrável, e

$$\int |f|^-\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$$

que é finita. Portanto $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, suponha que $|f|$ é integrável, dessa forma

$$\begin{aligned} f^+ &\leqslant f^+ + f^- = |f| \\ f^- &\leqslant f^+ + f^- = |f| \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} \int f^+\, d\mu &\leqslant \int |f|\, d\mu \\ \int f^-\, d\mu &\leqslant \int |f|\, d\mu \end{aligned}$$

ambas finitas pois $|f|$ é integrável. Portanto f é integrável.

Para mostrar a desigualdade (1.3) basta utilizar a definição de função integravel e a desigualdade triangular.

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \left|\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\right| \leqslant \left|\int f^+\, d\mu\right| + \left|\int f^-\, d\mu\right| = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu = \int |f|\, d\mu$$

□

Corolário 1.65. Se $f \in \mathcal{M}(X, \eth)$, $g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $|f| \leqslant |g|$, então $f \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu$$

Demonstração. Se g é integrável então pelo Teorema anterior $|g|$ também o é. Além disso, como $|f| \leqslant |g|$

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu,$$

como $|g|$ é integrável a sua integral é finita, implicando na integral de $|f|$ também ser finita, ou seja, $|f|$ é integrável e novamente pelo Teorema anterior, f é integrável. □

Teorema 1.66. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f+g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e

(a) $\displaystyle\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu$

(b) $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$

Demonstração.

(a) Se $c \geqslant 0$. Note que $(cf)^+ = cf^+$ e $(cf)^- = cf^-$. Dito isso

$$\int cf\, d\mu = \int cf^+ - cf^-\, d\mu$$

como cf^+ e cf^- são funções mensuráveis não negativas, podemos utilizar o Corolário 1.55

$$\int cf\, d\mu = c \int f^+ - f^-\, d\mu = c \int f\, d\mu$$

Se $c < 0$ a demonstração é análoga, basta perceber que $(cf)^+ = -cf^-$ e $(cf)^- = -cf^+$ ambas funções não negativas pois $-c > 0$.

(b) Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, então pelo Teorema 1.64 $|f|, |g| \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$, como $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ temos que $f+g$ é integrável. Note que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

onde $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções integráveis não negativas. Dessa forma

$$\int (f+g)\, d\mu = \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu$$

Utilizando o Corolário 1.57 e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\mu &= \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.\end{aligned}$$

□

O teorema a seguir é um dos mais importantes da teoria da medida, envolvendo convergência de sequência de funções e integrais.

Teorema 1.67 (Teorema da Convergência Dominada)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n e f no conjunto de medida nula, podemos afirmar que a convergência acontece em todo X. Note que

$$\lim |f_n| \leqslant g \implies |f| \leqslant |g|,$$

como por hipótese f é mensurável e g é integrável, segue pelo Corolário 1.65 que f é integrável. Além disso, como $-g \leqslant f_n \leqslant g$ temos que $g + f_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema de Fatou e o Teorema 1.64 temos que

$$\begin{aligned}
\int g \, d\mu + \int f \, d\mu &= \int (g + f) \, d\mu \\
&= \int (g + \lim f_n) \, d\mu \\
&= \int \lim(g + f_n) \, d\mu \\
&= \int \liminf(g + f_n) \, d\mu \\
&\leqslant \liminf \int (g + f_n) \, d\mu \\
&= \liminf \left(\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu \right) \\
&= \int g \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu,
\end{aligned}$$

que implica em

$$\int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu. \tag{1.4}$$

Por outro lado, $g - f_n \geqslant 0$, de forma análoga mostramos que

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu. \tag{1.5}$$

Pelas desigualdades (1.4) e (1.5)

$$\limsup \int f_n \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu,$$

isto é[1]

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Finalizando a demonstração do teorema. □

No restante da seção focaremos nossa atenção em funções $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ onde a aplicação $x \mapsto f(x, t)$ é mensurável para todo $t \in [a, b]$.

[1] $\limsup x_n \leqslant x \leqslant \liminf x_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \implies \lim x_n = x$

Corolário 1.68. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, tenhamos

$$f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} f(x, t),$$

para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$, para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja t_n uma sequência em $[a, b]$ que converge para t_0 e considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = f(x, t_n)$. Então como $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leqslant g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ com g integrável, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\int f(x, t_0)\, d\mu(x) &= \int \lim_{t \to t_0} f(x, t)\, d\mu(x) \\
&= \int \lim f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim \int f(x, t_n)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

□

Uma consequência imediata do corolário será apresentada abaixo

Corolário 1.69. Se a aplicação $t \mapsto f(x, t)$ for contínua em $[a, b]$ para cada $x \in X$, e se existir uma função integrável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, t)| \leqslant g(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F dada por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração. Mostremos que $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$. Com efeito

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\, d\mu(x) = \int f(x, t_0)\, d\mu(x) = F(t_0)$$

□

Corolário 1.70. Suponha que ara algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \to f(x, t_0)$ seja integrável em X, que $\partial_t f$ existe em $X \times [a, b]$ e que existe uma função integrável g em X tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$ e $t \in [a, b]$. Então a função F definida por

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$$

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$ que converge para t, com $t \neq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim \frac{f(x, t_n) = f(x, t)}{t_n - t}$$

para todo $x \in X$. Desde modo a função $x \mapsto \partial f/\partial t\,(x, t)$ é mensurável pois é o limite de funções mensuráveis.

Agora seja $x \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe s_0, entre t_0 e t tal que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)$$

Dessa forma, temos que

$$|f(x, t)| = \left|f(x, t_0) + (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right| \leqslant |f(x, t_0)| + |t - t_0|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_0)\right|$$

Como f é mensurável e a aplicação $x \mapsto |f(x, t_0)| + |t - t_0|\,|\partial f/\partial t\,(x, s_0)|$ é integrável, pois é a soma de funções integráveis. Pelo Corolário 1.65 temos que f é integrável. Por outro lado

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x)$$

Além disso, por hipótese, podemos deduzir que

$$\lim\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\lim \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| < g(x)$$

para todo $x \in X$. Consequentemente

$$\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\right| < g(x)$$

para valores de n suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \lim \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x).$$

Assim, concluindo a prova do corolário. $\square$

1.4 Espaços $\mathcal{L}^p$

Nesta seção, estudaremos os famosos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, que desempenham um papel fundamental na análise funcional e em várias áreas da matemática aplicada. Esses espaços são construídos para acomodar funções cujas potências p-ésimas são integráveis, permitindo uma abordagem flexível e poderosa para o estudo de propriedades de funções em contextos como as equações diferenciais.

Proposição 1.71. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $N_\mu : \mathcal{L}(X, \eth, \mu) \to \mathbb{R}$ dada por

$$N_\mu(f) = \int |f| \, d\mu$$

é uma semi-norma. Além disso $N_\mu(f) = 0 \iff f \equiv 0$ em quase toda parte em X.

Demonstração. Note que

1. $N_\mu(f) = \displaystyle\int |f| \, d\mu \geqslant \int 0 \, d\mu = 0.$

2. $N_\mu(\lambda f) = \displaystyle\int |\lambda f| \, d\mu = \int |\lambda||f| \, d\mu = |\lambda| \int |f| \, d\mu = |\lambda| N_\mu(f).$

3. $N_\mu(f + g) = \displaystyle\int |f + g| \, d\mu \leqslant \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g).$

Portanto N_μ é uma semi-norma.

Além disso é fácil ver que

$$N_\mu(f) = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Observação: Note que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um espaço vetorial com a operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto se deve ao fato que $\mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ é um subespaço vetorial do espaço de funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$.

Estamos interessados em transformar $\mathcal{L}$ em um espaço vetorial normado. Para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 1.72. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$. Dizemos que f e g são μ-equivalentes ($f \sim_\mu g$) se $f \equiv g$ em quase toda parte em X.

O espaço

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \eth, \mu) = \{[f] \, ; f \in \mathcal{L}\}$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu) \, ; g \sim_\mu f\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^1$ ou espaço das funções somáveis. Esse espaço, munido das operações

$$[f] + [g] = [f + g]$$
$$[\lambda f] = \lambda[f]$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}(X, \eth, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

Proposição 1.73. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A aplicação $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

para todo $[f] \in \mathcal{L}^1$ é uma norma

Demonstração. Note que apenas precisamos mostrar que $\|[f]\|_1 = 0 \iff [f] = [0]$, pois as outras propriedades são análogas à demonstração da Proposição 1.71. Com efeito

$$\|[f]\|_1 = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \iff |f| \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff f \equiv 0 \text{ qtp em } X \iff [f] = [0].$$

Portanto $\|\cdot\|_1$ é uma norma e $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado. □

No restante do texto, adotaremos a notação $[f] = f$, ignorando as classes de equivalência e trabalhando apenas com o seus representantes.

Definição 1.74. Seja $1 \leqslant p < \infty$ um número real. O espaço

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \eth, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R}\, ; f \text{ é mensurável}, \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

é dito Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p$.

Nosso intuito agora é mostrar que $\mathcal{L}^p$ é um espaço vetorial normado, onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é sua norma. Mas antes, precisamos demonstrar algumas desigualdades importantes desses espaços que serão necessárias para mostrar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathcal{L}^p$.

Teorema 1.75 (Desigualdade de Young)**.** Sejm $A, B \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjuntados[a]. Então

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

[a] p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demonstração. Seja $\alpha \in (0, 1)$ e defina $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Note que $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$. Dessa forma

- $t \in (0,1)$ então $\varphi'(t) < 0$ pois $t^{\alpha-1} > 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} < 0$
- $t \in (1,\infty)$ então $\varphi'(t) > 0$ pois $t^{\alpha-1} < 1$ e então $1 - t^{\alpha-1} > 0$

Isto nos diz que φ é decrescente em $(0,1)$ e crescente em $(1,\infty)$. Ou seja, como φ é contínua, temos que 1 é um ponto de mínimo. Dito isso $\varphi(t) \geqslant \varphi(1)$ para todo $t \geqslant 0$ e $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$. Assim

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(t) \implies \alpha t - t^{\alpha} \geqslant \alpha - 1 \implies t^{\alpha} \leqslant \alpha t + (1-\alpha).$$

Sejam $a, b > 0$, então para $t = \frac{a}{b}$ temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \leqslant \alpha\frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Daí

$$a^{\alpha}b^{-\alpha} \leqslant \alpha\frac{a}{b} + 1 - \alpha.$$

Multiplicando a desigualdade acima por b, encontramos

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Além disso, note que a desigualdade é uma igualdade se, e somente se $t = 1$, isto é $a = b$. Agora considere que $\alpha = \frac{1}{p} \in (0,1)$, ou seja, $1 < p < \infty$. Dessa forma obtemos

$$a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \frac{a}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b,$$

e por hipótese $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Por fim, fazendo $a = A^p$ e $b = B^q$, temos o resultado desejado

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

que é uma igualdade quando $A^p = B^q$. □

Teorema 1.76 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_q$$

Demonstração. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ então $f \equiv 0$ qtp em X ou $g \equiv 0$ qtp em X. Dessa forma

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\, d\mu = 0.$$

Com isso, a desigualdade de Holder é trivial.

Agora considere que $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Young com

$$A = \frac{|f|}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad B = \frac{|g|}{\|g\|_q}$$

obtemos

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqslant \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}. \tag{1.6}$$

Como $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, então $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis. Logo

$$\left(\frac{1}{p\|f\|_p^p}\right)|f|^p + \left(\frac{1}{q\|g\|_q^q}\right)|g|^q$$

é integrável. Além disso, pelo Corolário 1.65

$$\left(\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\right)|fg|$$

é integrável e portanto $|fg|$ é integrável, isto é, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Por fim, integrando (1.6) com respeito a μ, chegamos a

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q}\, d\mu \leqslant \int \left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^p}{q\|g\|_q^q}.\right) d\mu$$

isto é

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |fg|\, d\mu \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g|^p\, d\mu.$$

Pela definição da norma em $\mathcal{L}^p$ segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\|q\|_p^p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Como queriamos demonstrar. □

O corolário abaixo é um caso particular da Desigualdade de Hölder quando $p = q$, o que acontece apenas quando $p = q = 2$.

Corolário 1.77 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^2$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \leqslant \int |fg|\, d\mu \leqslant \int |f|^2\, d\mu \int |g|^2\, d\mu$$

Demonstração. A primeira desigualdade é o Teorema 1.64 e a segunda é uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder. □

Teorema 1.78 (Desigualdade de Minkowski)**.** Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. Na Proposição 1.71 já mostramos que a Desigualdade de Minkowski é válida para $p = 1$. Dito isso, seja $1 < p < \infty$. Como $f, g \in \mathcal{L}^p$, então f e g são mensuráveis. Dessa forma, $f + g$ também é mensurável. Mostremos agora que $f + g \in \mathcal{L}^p$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &\leqslant (|f| + |g|)^p \\
&\leqslant (\max\{|f|, |g|\} + \max\{|f|, |g|\})^p \\
&= 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \\
&\leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p).
\end{aligned}$$

Daí

$$\int |f+g|^p\, d\mu \leqslant 2^p \int (|f|^p + |g|^p)\, d\mu \leqslant 2^p \left(\int |f|^p\, d\mu + \int |g|^p\, d\mu\right)$$

que é uma integral finita. Portanto $f+g \in \mathcal{L}^p$.

Também é fácil ver que

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leqslant |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Agora, seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Daí $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$. De fato,

$$\||f+g|^{p-1}\|_q^q = \int |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu = \int |f+g|^p < \infty \tag{1.7}$$

pois $f+g \in \mathcal{L}^p$. Portanto pela Desigualdade de Hölder e por (1.7) temos que

$$\int |f|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu = \||f| + |f+g|^{p-1}\|_1 \leqslant \||f|\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q = \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.8}$$

Análogamente

$$\int |g|\,|f+g|^{p-1}\, d\mu \leqslant \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}. \tag{1.9}$$

Dito isso, chegamos a

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p\, d\mu \\
&\leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&= \int |f||f+g|^{p-1}\, d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leqslant \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Se $\|f+g\|_p = 0$, então

$$\|f+g\|_p = 0 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Logo a desigualdade de Minkowski é válida. Agora, considere que $\|f+g\|_p \neq 0$ para obter

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Consequentemente

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por fim, como peq são expoentes conjugados, segue que $p - \frac{p}{q} = 1$. Portanto

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Assim, mostramos que a desigualdade de Minkowski é válida para $1 \leqslant p < \infty$. □

Agora, vamos provar que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leqslant p < \infty$.

Proposição 1.79. A aplicação $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0$ pois $|f| \geqslant 0$.

2. $\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p \, d\mu = 0 \iff f = 0 \ (f \sim_\mu 0)$

3. $\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\lambda|^p |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$

4. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ pela Desigualdade de Minkowski.

Portanto $\|\cdot\|_p$ é uma norma □

Agora, nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Para isso precisamos das seguintes definições

Definição 1.80. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$

Definição 1.81. Sejam (f_n) uma sequência em $\mathcal{L}^p$ e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Dizemos que (f_n) é convergente e converge para f se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$. Equivalentemente

$$\lim \|f_n - f\|_p = 0$$

Definição 1.82. Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

Teorema 1.83 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p$. Mostremos que (f_n) é convergente. Com efeito, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todo $n, m \geqslant n_0$. Esscolhendo ε de forma adequada e passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{=n} \tag{1.10}$$

Defina $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Observe que $g \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$, pois $g \geqslant 0$ e

$$g = |f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n|$$

isto é, g é formado pela soma e pelo limite de funções mensuráveis (f_n é integrável, em particular, mensurável). Queremos mostrar que $g \in \mathcal{L}^p$. De fato

$$\int |g|^p \, d\mu = \int g^p \, d\mu,$$

pois $g \geqslant 0$. Pela definição de g temos

$$\int g^p \, d\mu = \int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu,$$

nesse caso, como o limite existe, segue que o limite é igual ao limite inferior, logo

$$\int \left(|f_1| + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou temos que

$$\int \liminf_{k\to\infty} \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int \left(|f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right)^p d\mu$$

e utilizando definição da norma em $\mathcal{L}^p$ e a Desigualdade de Minkowski

$$\liminf_{k\to\infty} \left\| |f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n| \right\|_p^p \leqslant \liminf_{k\to\infty} \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{k} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p = \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p.$$

Por (1.10) temos que

$$\left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \right)^p \leqslant \left(\|f_1\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right) < \infty$$

que é finito pois o somatório é uma série geométrica com razão menor que 1. Logo

$$\int |g|^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}^p$. Agora seja, $E = \{x \in X\,;\, g(x) < \infty\} \in \eth$. Dito isso, $N = E^C = \{x \in X\,;\, g(x) = \infty\} \in \eth$. Mostremos que N tem medida nula. Com efeito, suponha que $\mu(N) > 0$, dessa forma

$$\int_X |g|^p \geqslant \int_N |g|^p = \infty\mu(N) = \infty,$$

o que implicaria em

$$\int |g|^p = \infty$$

que é uma contradição pois $g \in \mathcal{L}^p$. Dessa forma $\mu(N) = 0$, isto é, $g < \infty$ em quase toda parte em X. Sendo assim, defina $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x)) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Mostremos que $f \in \mathcal{L}^p$. Note que

$$f(x) = \left(f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \right) \chi_E.$$

Daí

$$|f| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \right| |\chi_E| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g.$$

Consequentemente, $|f|^p < g^p$. Logo

$$\int |f|^p \, d\mu \leqslant \int g^p \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}^p$. Por outro lado, para todo $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= f_1(x) + \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= \lim_{k \to \infty} (f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \cdots + f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\ &= \lim_{k \to \infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$, então $\lim f_n = f$ em quase toda parte em X. É fácil ver que

$$|f_k| = \left| f_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (f_{n+1} - f_n) \right| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_n| \leqslant |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| = g. \tag{1.11}$$

Por isso

$$|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2g)^p = 2^p g^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in \mathcal{L}^p$, então $2^p g^p \in \mathcal{L}^1$. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, chegamos a

$$\lim \|f_n - f\|_p = \lim \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \int \lim |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

Isto prova que $\mathcal{L}^p$ é completo. □

Agora introduzimos o espaço de Lebesgue, $\mathcal{L}^\infty$ explorando suas características fundamentais e o papel que desempenha em diversos problemas da análise funcional.

Definição 1.84. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. O espaço

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \eth, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ é mensurável e limitada qtp em } X\}$$

é chamado Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^\infty$. Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|; x \in X\} = \inf\{M \geqslant 0 \,;\, |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

Por fim, dizemos que f é uma função essencialmente limitada.

Observação: Note que

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0 \,;\, \mu(\{x \in X \,;\, |f(x)| > M\} = 0)\}.$$

sto segue da seguinte equivalência

$$|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X \iff \mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0.$$

De fato, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X se, e somente se, existe $N \in \eth$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in N^{\mathcal{C}}$. Note que $\{x \in X\,;|f(x)| > M\} \subseteq N$, dessa forma

$$\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) \leqslant \mu(N) = 0$$

Portanto, $\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0$.

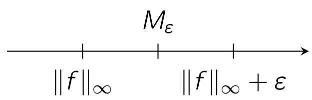
Reciprocamente, se $\mu(\{x \in X\,;|f(x)| > M\}) = 0$, então $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in \{|f(x)| > M\}^{\mathcal{C}}$, isto é, $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X.

Proposição 1.85. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Então

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

para todo $f \in \mathcal{L}^\infty$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$, então existe $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ em quase toda parte em X. Daí, como $\|f\|_\infty = \inf\{M_0 \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M_0 \text{ qtp em } X\}$, temos que dado $\varepsilon > 0$ conseguimos encontrar $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X.



Como $M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon$, então

$$|f(x)| \leqslant M_\varepsilon < \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ chegamos a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \text{ qtp em } X$$

□

Agora mostremos que $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço vetorial normado

Proposição 1.86. A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$$

é uma norma

Demonstração. Note que

1. $\|f\|_\infty \geqslant 0$ pois 0 é cota inferior de $\{M \geqslant 0\,;|f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } X\}$.

2. $\|f\|_\infty = 0$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M_\varepsilon$ em quase toda parte em X, com $M_\varepsilon < \varepsilon$. Daí, $|f(x)| < \varepsilon$ em quase toda parte em X. Fazendo $\varepsilon \to 0$, encontramos

$$|f(x)| \leqslant 0 \text{ qtp em } X$$

Dessa forma, $f(x) = 0$ em quase toda parte em X.

Reciprocamente, $\|0\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\,;0 \leqslant M \text{ qtp em } X\} = \inf[0, \infty) = 0$

3. $\|\lambda f\|$

4. (Desigualdade de Minkowski em $\mathcal{L}^\infty$) Se $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ então as funções são limitadas em quase toda parte em X, dito isso, $f + g$ também é limitada em quase toda parte em X. Logo $f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

   Por outro lado, como $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, então existem $M, \hat{M} \in \eth$ tais que $\mu(M) = \mu(\hat{M}) = 0$ e $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \notin M$ e $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ para todo $x \notin \hat{M}$. Seja $N = M \cup \hat{M} \in \eth$. Daí $\mu(N) = \mu(M \cup \hat{M}) \leqslant \mu(M) + \mu(\hat{M}) = 0 + 0 = 0$. Além disso

   $$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ qtp em } X$$

   para todo $x \notin N$, com $\mu(N) = 0$. Dessa forma

   $$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. □

Proposição 1.87 (Desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}^\infty$)**.** Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Demonstração. Note que se $g \in \mathcal{L}^\infty$ então $|g| \leqslant \|g\|_\infty$ em quase toda parte em X. Consequentemente

$$\|fg\|_1 = \int |fg|\, d\mu = \int |f|\,|g|\, d\mu \leqslant \int |f| \|g\|_\infty\, d\mu = \|g\|_\infty \int |f|\, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

□

O próximo passo é mostrar que $\mathcal{L}^\infty$ também é um espaço de Banach, como já mostramos que é um espaço vetorial normado, basta mostrar a completude

Teorema 1.88 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** $\mathcal{L}^\infty$ é um espaço completo

Demonstração. □

Agora vamos construir os espaços ℓ^p que são um caso particular dos espaços $\mathcal{L}^p$

Exemplo 1.89. Sejam $X = \mathbb{N}$, $\eth = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R}\,;\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

...

Observação: Denomatomos o espaço de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ por ℓ^p

Exemplo 1.90. $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ...

Vejamos mais alguma propriedades importantes dos espaços $\mathcal{L}^p$

Proposição 1.91. Sejam $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p < q < r \leqslant \infty$. Então

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$$

Demonstração. . . . □

Teorema 1.92 (Desigualdade de Interpolação)**.** Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p < q < r \leqslant \infty$. Então $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r \subseteq \mathcal{L}^q$ e

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$$

onde $\lambda \in (0, 1)$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \qquad \left(\text{i.e., } \lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}\right) \tag{1.12}$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $r = \infty$ Note que

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q} \in (0, 1)$$

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$, tem-se que

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \, d\mu = \int |f|^{q-p}|f|^p \, d\mu \leqslant \int \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p = \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p \, d\mu = \|f\|_p^p < \infty.$$

Com isso $f \in \mathcal{L}^q$ e ainda mais

$$\|f\|_q^q \leqslant \|f\|_\infty^{q-p}\|f\|_p^p \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e como $\lambda = \frac{p}{q}$, segue que

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

– $r < \infty$ Note que multiplicando (1.12) por q, temos

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1.$$

Com isso, $\frac{p}{\lambda q}$ e $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ são expoentes conjungados. Dito isso, aplicando a Desigualdade de Hölder com $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^r$ temos que

$$\begin{aligned}
\int |f|^q \, d\mu &= \int |f|^{\lambda q + (1-\lambda)q} \, d\mu \\
&= \int |f|^{\lambda q}|f|^{(1-\lambda)q} \\
&\leqslant \||f|^{\lambda q}\|_{\frac{p}{\lambda q}} \|f^{(1-\lambda)q}\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\
&= \left(\int |f|^{\lambda q \cdot \frac{p}{\lambda q}}\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^{(1-\lambda)q \cdot \frac{r}{(1-\lambda)q}}\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\
&= \left(\int |f|^p\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int |f|^q\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\
&= \|f\|_p^{\lambda q}\|f\|_r^{(1-\lambda)q} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Daí, $f \in \mathcal{L}^q$. Além disso

$$\|f\|_q^q \leqslant \|f\|_p^{\lambda q}\|f\|^{(1-\lambda)q} \iff \|f\|_q \leqslant \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Assim, mostrada a desiguldadde de interpolação. □

Proposição 1.93. Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q \leqslant \infty$. Então $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Demonstração. . . . □

Teorema 1.94 (Desigualdade de Chebyshev)**.** Sejam $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{L}^p$ com $1 \leqslant p < \infty$. Então

$$\|f\|_p \geqslant \alpha[\,\mu\,(\{x \in X\,; |f(x)| > \alpha\})\,]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. . . . □

Agora vamos ver um resultado sobre os espaços ℓ^p

Proposição 1.95. Sejam $0 < p < q \leqslant \infty$. Então $\ell^p \subseteq \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

Demonstração. Consideremos dois casos

– $q = \infty$

Seja $x \in \ell^p$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. É fácil ver que

$$|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ é cota superior de $x = (x_n)$. Dito isso

$$\|x\|_q = \|x\|_\infty = \sup |x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo $x \in \ell^q$ e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p.$$

– $q < \infty$

Utilizando a Desigualdade de Interpolação com $r = \infty$ e $\lambda = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ para obter que $\ell^p = \ell^p \cap \ell^r \subseteq \ell^q$ (pelo caso $q = \infty$) e

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \leqslant \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_p^{1-\frac{p}{q}} = \|x\|_p.$$

Assim, demonstrada a proposição. □

Os proximos resultados estão relacionados a densidade das funções simples em $\mathcal{L}^p$ e $\mathcal{L}^\infty$

Definição 1.96. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $E \subseteq X$ é dito denso em X se todo ponto de X é aderente a E. Isto é, dado $x \in X$ existe uma sequência (x_n) de elementos de E tal que $x_n \to x$.

Teorema 1.97. Seja $1 \leqslant p < \infty$. O conjunto das funções simples $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ com $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, n$ é denso em $\mathcal{L}^p$

Demonstração. Considere o conjunto

$$Y = \left\{ f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \,; \mu(E_j) < \infty \right\}.$$

Note que dada uma função $f \in Y$ temos que

$$\int |f|^p \, d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \right| d\mu = \int \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \mu(E_j) < \infty.$$

Isto é, $f \in \mathcal{L}^p$. Consequentemente $Y \subseteq \mathcal{L}^p$.

Por outro lado, seja $f \in \mathcal{L}^p$ sabemos que $f = f^+ - f^-$ onde $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+(X, \eth)$. Além disso pelo Lema ?? temos que existem sequências $(\varphi_n^+), (\varphi_n^-)$ de funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \eth)$ tais que

$$0 \leqslant \varphi_n^{\pm} \leqslant \varphi_{n+1}^{\pm} \text{ e } \varphi_n^{\pm} \to f^{\pm}.$$

É fácil ver que $(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) \subseteq \mathcal{M}(X, \eth)$ é uma sequência de funções simples tal que

$$\lim(\varphi_n^+ - \varphi_n^-) = \lim \varphi_n^+ + \lim \varphi_n^- = f^+ - f^- = f.$$

Seja $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim (φ_n) é uma sequência de funções simples tal que $\varphi_n \to f$. Perceba que

$$|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^- \leqslant f^+ + f^- = |f|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f \in \mathcal{L}^p$, então

$$\int |\varphi_n|^p \, d\mu \leqslant \int |f|^p \, d\mu < \infty,$$

ou seja, $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{L}^p$. Consequentemente, denotando φ_n por

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j \chi_{E_j}$$

segue que

$$|a_j|^p \mu(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \mu(E_j) = \int \sum_{j=1}^{m_n} |a_j|^p \chi_{E_j} \, d\mu = \int |\varphi_n|^p \, d\mu < \infty.$$

Isto nos diz que $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, m_n$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(\varphi_n) \subseteq Y$. Por fim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim \|\varphi_n - f\|_p^p = \lim \int |\varphi_n - f|^p \, d\mu = \int \lim |\varphi_n - f|^p \, d\mu = 0$$

pois

$$\lim \varphi_n = f \text{ e } |\varphi_n - f|^p \leqslant 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Portanto Y é denso em $\mathcal{L}^p$, já que dada uma função $f \in \mathcal{L}^p$, encontramos uma sequência em Y que converge para f. $\square$

Teorema 1.98. O conjunto das funções simples é denso em $\mathcal{L}^\infty$.

Demonstração. □

O proximos resultados são uma generalização da Desigualdade de Hölder

Lema 1.99. Sejam $0 < p, q \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$. Então $fg \in \mathcal{L}^r$ e

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração. ... □

Proposição 1.100 (Desigualdade de Hölder Generalizada)**.** Sejam $0 < p_1, \ldots, p_N \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \cdots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_N\|_{p_N}$$

Demonstração. Segue por indução do lema anterior. □

CAPÍTULO DOIS

INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

(introdução)

2.1 Espaços de Banach

(introdução)

Definição 2.1. Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é dita ser uma norma se satisfaz

- $\|x\| \geqslant 0$ para todo $x \in X$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$

(definições iniciais)

Exemplo 2.2. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido da norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é um espaço de Banach

Exemplo 2.3. O espaço

$$\ell^p \equiv \ell^p(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n)\,;\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

com $1 \leqslant p < \infty$ munido da norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Exemplo 2.4. O espaço

$$\ell^\infty \equiv \ell^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n)\,;\, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

munido da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

é um espaço de Banach.

Exemplo 2.5. O espaço

$$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K}\,;\, f \text{ é contínua}\}$$

munido da norma

$$\|f\|_{\max} = \max_{t\in[a,b]}\{|f(t)|\}$$

é um espaço de Banach

Exemplo 2.6. O espaço $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ munido da métrica

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt$$

não é um espaço completo

CAPÍTULO TRÊS

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev e suas principais propriedades.

3.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo.

Definição 3.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega \,;\, \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Além disso, se $\operatorname{supp} \varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega \,;\, \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp} \varphi$, então $(\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}} \subseteq \{x \in \Omega \,;\, \varphi(x) = 0\}$. Ou seja, se $x \notin \operatorname{supp} \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Além disso, se Ω é um aberto, então φ se anula em $\partial\Omega$.

Definição 3.2. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. O espaço $\mathcal{C}^k(\Omega)$ é composto por todas funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em que suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k também são contínuas. Se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dizemos que f é de classe $\mathcal{C}^k$.

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

Definição 3.3. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

A definição abaixo será âmplamente utilizada nesse capítulo

Definição 3.4. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ contínua}\,; \operatorname{supp} f \text{ é compacto}\}$$

Além disso definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega)$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ com suporte compacto.

Definição 3.5 (Espaços $\mathcal{L}^p$)**.**

Definição 3.6 (Espaços $\mathcal{L}^\infty$)**.**

Os resultados abaixos são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

Teorema 3.7. O espaço $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é um espaço de Banach[a]

[a] Espaço vetorial normado completo, i.e., toda sequência de Cauchy é convergente.

Demonstração. □

Teorema 3.8 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$ onde $1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados[a]. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p + \|g\|_q.$$

[a] p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. □

Uma generalização desse resultado será apresentada abaixo

Proposição 3.9 (Desigualdade de Hölder Generalizada)**.** Sejam $0 < p_1, \ldots, p_N \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \cdots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_N\|_{p_N}.$$

Demonstração. □

Observação: Por convenção 1 e ∞ são expoentes conjugados.

Teorema 3.10 (Integração por partes em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular e $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então,

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\, dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta pra fora em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 628 □

Teorema 3.11 (Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $f : B(y,s) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função integrável, então

$$\int_{B(y,s)} f\,dx = \int_0^s \int_{\partial B(y,r)} f\,dS dr.$$

Demonstração. Ver [7], p.p. 78. □

Teorema 3.12. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$ para alguma função $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ e uma função $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que

(a) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ qtp em Ω;

(b) $|u_{n_k}(x)| \leqslant v(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, qtp em Ω.

Demonstração. Ver [3], p.p. 94. □

Teorema 3.13 (Critério de compacidade de Arzelà-Ascoli)**.** Seja (u_k) uma sequência de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$|u_k(x)| \leqslant M,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $M > 0$ é uma constante e (u_k) é uniformemente equicontínua. Então, existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty} \subseteq (u_k)_{k=1}^{\infty}$ e uma função contínua u tal que $u_{k_j} \to u$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver [12], p.p 240. □

Teorema 3.14 (Teorema de Fubini)**.** Sejam $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\,dX = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f\,dydx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f\,dxdy.$$

Demonstração. Ver [14] p.p. ?? □

Teorema 3.15 (Mudança de variáveis)**.** Seja $\Psi : A \to B$ um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$. Seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável sobre B se, e somente se, $(f \circ \Psi)|\det D\Psi|$ é integrável sobre A. Neste caso,

$$\int_B f\,dx = \int_A (f \circ \Psi)|\det D\Psi|\,dy.$$

Demonstração. O capítulo 4 de [14] é destinado a demonstração desse teorema. □

3.2 Motivação

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega; \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Figura 3.1: Sergei Lvovich Sobolev (1908 – 1989)

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfazendo (3.1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (3.1) por uma função $\phi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx + \int_\Omega u\phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx.$$

Note que, utlizando integração por partes, a primeira integral pode ser reescrita como

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \, dx = -\sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, dS - \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \right).$$

Mas como ϕ se sobre em $\partial\Omega$, inferimos

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega u\phi = \int_\Omega f\phi, \tag{3.2}$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$[1]. Observe que agora, não precisamos mais que u seja de classe $\mathcal{C}^2$ já que a segunda derivada de u não é utilizada em (3.2). Na verdade, não precisamos nem que u seja contínua, apenas integrável em Ω. Na Seção 4.3, voltaremos a essa motivação para mostrar que para qualquer função $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca para (3.1). Essa solução é uma função que pertece ao espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, esse e outros espaços e suas propriedades serão estudadas ao longo desse trabalho.

3.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é generalizar a noção de derivada para funções que não são diferenciáveis em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e explorar algumas propriedades elementares.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} u\phi \nu_i \, dS - \int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula em $\partial\Omega$, como foi mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx, \tag{3.3}$$

[1]Nomenclatura: ϕ é chamada função teste.

para todo $i = 1, \ldots, n$. Ademais, se agora u for de classe $\mathcal{C}^k$ em Ω com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx. \tag{3.4}$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (3.3) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (3.4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe $\mathcal{C}^k$. Note que o lado esquerdo de (3.3) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. O problema é que se u não é necessáriamente uma função de classe $\mathcal{C}^k$ então o lado direito de (3.3) não está bem definido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que (3.3) é válida quando substituimos $D^\alpha u$ por v.

Essa pergunta motiva a definição abaixo.

Definição 3.16 (Derivada fraca em Ω)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, denotada por

$$D^\alpha u = v,$$

dado que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx, \tag{3.5}$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$.

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (3.5) para toda ϕ função teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (3.5), então u não possui a α-ésima derivada parcial fraca.

Observação: Aqui, utlizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue (utlizando a medida de Lebesgue), suas integrais coincidem.

Exemplo 3.17. A função $u : \Omega = (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é derivavel no sentido usual. Já que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + h - 1}{h} = 1,$$

mas

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - 1}{h} = 0.$$

Porém, u possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1; \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = \int_0^1 x\phi'\,dx + \int_1^2 \phi'\,dx = x\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi\,dx + \phi\Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim,

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi\,dx - \phi(1) = -\int_0^1 \phi\,dx.$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral.

$$\int_0^2 u\phi'\,dx = -\left(\int_0^1 1\phi\,dx - \int_1^2 0\phi\,dx\right) = -\int_0^2 v\phi\,dx.$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 3.18. A função $u : \Omega = (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1; \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possuí derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto significa que não existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega u\phi'\,dx = -\int_\Omega v\phi\,dx,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com efeito, suponha, por absurdo que existe tal v. Deste modo

$$-\int_0^2 v\phi\,dx = \int_0^2 u\phi'\,dx = \int_0^1 x\phi'\,dx + 2\int_1^2 \phi'\,dx = \int_0^1 \phi\,dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leqslant \phi_n \leqslant 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \to 0 \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v\phi_n\,dx - \int_0^1 \phi_n\,dx\right] = 0$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, pois $\phi_n \to 0$ qtp em Ω. Portanto, u não possui derivada fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é sobre sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 3.19. Sejam $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega u\phi = 0$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω.

Demonstração. Ver [3], p.p. ??. □

Com o lema acima em mente, temos todas as ferramentas para mostrar a unicidade da derivda fraca.

Proposição 3.20. Seja α um multi-índice. Se v e $\tilde{v}$ são ambas α-ésimas derivadas parciais fracas de uma função u. Então,

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \, dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v}\phi \, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Com isso, podemos escrever

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\phi \, dx = 0.$$

Logo, pelo Lema anterior, chegamos a

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto, $v = \tilde{v}$ qtp em Ω. □

Exemplo 3.21. Considere a função u do Exemplo 3.17, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1; \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

é a derivada de u no sentido fraco. Porem, a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{se } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca de u. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porém v e $\tilde{v}$ são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato,

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto, é verdade que

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.[2]

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 3.22. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,;\text{existem } v_i : \Omega \to \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que} \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mu = -\int v_i \phi \, d\mu \right\},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $k \in \mathbb{N}$, indutivamente, e pela derivada fraca.

[2]Todo conjunto enumerável (em particular finito) tem medida (de Lebesgue) nula.

Definição 3.23. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant n$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,;\, D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k\}\,,$$

com $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Ou, de outra forma,

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega)\,;\, D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega),\ \text{para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1\right\},$$

onde $D^\alpha u$ é a α-ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\,,$$

onde

$$\langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v\, dx.$$

No próximo capítulo, estudaremos algumas aplicações dos espaços de Sobolev, e os espaços H^k serão utilizados.

Definição 3.24. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leqslant p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Além disso, dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω, isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \Subset \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Isso será feito após o Teorema 3.26 sobre as propriedades da derivada fraca, que são necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Um outro espaço importante é o espaço $\mathcal{W}^{k,p}_0(\Omega)$ ($H^k_0(\Omega)$ se $p = 2$) que é definido como o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Ou seja, dada uma função em $u \in \mathcal{W}^{k,p}_0(\Omega)$ existe uma sequência (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. O teorema **??** mostra uma equivalência para as funções nesse espaço.

Observação: Essa não é a única forma de definir uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo a norma

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é equivalente a

$$\max_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

O próximo exemplo ilustra um caso em que uma função pode ou não possuir derivada fraca dependendo da dimensão n do espaço Euclidiano e do expoente de integração p.

Exemplo 3.25. Seja $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \|x\|^{-\alpha}, \tag{3.6}$$

onde $\alpha > 0$. Queremos verificar para quais valores de $\alpha > 0$, n e p a função u pertence ao espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de $\mathbf{0}$ com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{\|x\|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{\|x\|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{\|x\|^{\alpha+2}}\right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$\|Du(x)\| = \frac{|\alpha|}{\|x\|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes, temos que

$$\int_{\Omega\setminus B[0,\varepsilon]} u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega\setminus B[0,\varepsilon]} \phi\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i \, dS \tag{3.7}$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ denota o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial B[\mathbf{0}, \varepsilon]$. Agora se $\alpha + 1 < n$, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando $\|Du\|$ sobre Ω, concluimos que

$$\int_\Omega \|Du\|\, dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}}\, dx.$$

Transformando em coordenadas polares, conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma:

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}}\, dx = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}}\, dSdr = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}}\, dSdr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dSdr,$$

onde a integral de superficie acima, é igual a área da esfera n-dimensional de raio r dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1},$$

que por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n)r^{n-1}$. Dessa forma, chegamos a

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dSdr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2}\, dr = \sigma(n)\left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1}\right).$$

Note que se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim

$$\int_\Omega \|Du\|\, dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso, inferimos por () que

$$\left|\int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i\, dS\right| \leqslant \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u||\phi||\nu_i|\, dS \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha}\, dS,$$

onde essa ultima integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left|\int_{\partial B[0,\varepsilon]} u\phi\nu_i \, dS\right| \leqslant c\varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, por () deduzimos que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \phi\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n-1$. Além disso, $\|Du\| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha+1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular, $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geqslant n$.

Teorema 3.26 (Propriedades da derivada fraca)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Então

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$.

(b) $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) **(Linearidade)** para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v$$

(d) se Ω' é um aberto de Ω, então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$

(e) **(Regra de Leibniz)** se $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma}u, \tag{3.8}$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$$

e $\sigma \leqslant \alpha$ significa $\sigma_j \leqslant \alpha_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. A demonstração para $D^\alpha D^\beta u$ é análoga. Com efeito, é verdade que

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\beta \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha D^\beta\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^{\alpha+\beta}\phi\, dx.$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável, então o operador D^α é a α-ésima derivada parcial no sentido usual. Dessa forma $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^{\alpha+\beta}\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_\Omega \phi D^{\alpha+\beta}u\, dx = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega \phi D^{\alpha+\beta}u\, dx.$$

Portanto $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^{\alpha}u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β com $|\beta| \leqslant k-|\alpha|$ tal que $D^{\beta}(D^{\alpha}u) \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta}u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^{\gamma}u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leqslant k$. Em particular como $|\beta| \leqslant k-|\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leqslant k$. Portanto $D^{\alpha}u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_{\Omega}(\lambda u + v)D^{\alpha}\phi\, dx = \int_{\Omega}\lambda u D^{\alpha}\phi\, dx + \int_{\Omega} v D^{\alpha}\phi\, dx = \lambda\int_{\Omega} u D^{\alpha}\phi\, dx + \int_{\Omega} v D^{\alpha}\phi\, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas utlimas integrais acima, obtemos

$$\lambda\int_{\Omega} u D^{\alpha}\phi\, dx + \int_{\Omega} v D^{\alpha}\phi\, dx = \lambda(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\phi D^{\alpha}u\, dx + (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\phi D^{\alpha}v\, dx = \int_{\Omega}(\lambda D^{\alpha}u + D^{\alpha}v)\phi\, dx.$$

Portanto, $D^{\alpha}(\lambda u + v) = \lambda D^{\alpha}u + D^{\alpha}v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega' \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega'}|u|^p\, dx \ \text{ e } \ \int_{\Omega'}|D^{\alpha}u|^p\, dx \ \ (\forall\alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leqslant k)$$

são finitas. De fato, é verdade que

$$\int_{\Omega'}|u|^p\, dx \leqslant \int_{\Omega}|u|^p\, dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega'}|D^{\alpha}u|^p\, dx \leqslant \int_{\Omega}|D^{\alpha}u|^p\, dx < \infty \ \ (\forall\alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leqslant k),$$

ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$.

(e) Para mostrar que (3.8) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$.

Com efeito, para $|\alpha| = 1$, como $\eta, \phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, temos que

$$D^{\alpha}(\eta\phi) = \phi D^{\alpha}\eta + \eta D^{\alpha}\phi.$$

Dessa forma,

$$\int_{\Omega}\eta u D^{\alpha}\phi\, dx = \int_{\Omega} u D^{\alpha}(\eta\phi) - \int_{\Omega} u\phi D^{\alpha}\eta\, dx.$$

Como η e ϕ têm suporte compacto, então $D^{\alpha}(\eta\phi)$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral do lado direito, chegamos a

$$\int_{\Omega}\eta u D^{\alpha}\phi\, dx = -\int_{\Omega}\eta\phi D^{\alpha}u\, dx - \int_{\Omega} u\phi D^{\alpha}\eta\, dx = -\int_{\Omega}(\eta D^{\alpha}u + u D^{\alpha}\eta)\phi\, dx.$$

Portanto, $D^{\alpha}(\eta u) = \eta D^{\alpha}u + u D^{\alpha}\eta$ como queriamos mostrar.

Agora seja $m < k$ e suponha que (3.8) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant m$ e toda função de teste η. Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m+1$. Então α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Deste modo, podemos escrever por **(a)** que

$$\int_{\Omega}\eta u D^{\alpha}\phi\, dx = \int_{\Omega}\eta u D^{\beta+\gamma}\phi\, dx = \int_{\Omega}\eta u D^{\beta}(D^{\gamma}\phi)\, dx = (-1)^{|\beta|}\int_{\Omega} D^{\beta}(\eta u)D^{\gamma}\phi\, dx.$$

Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^{\beta}(\eta u)$ e a γ-ésima derivada fraca. Assim, por **(c)**, deduzimos que

$$\int_{\Omega}\eta u D^{\alpha}\phi\, dx = (-1)^{|\beta|}\int_{\Omega}\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma}\eta D^{\beta-\sigma}u D^{\gamma}\phi\, dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|}\int_{\Omega}\left[\sum_{\sigma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\gamma}(D^{\sigma}\eta D^{\beta-\sigma}u)\right]\phi\, dx.$$

Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} \left(D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \right) \right] \phi \, dx \tag{3.9}$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u,$$

que ainda pode ser expandido em quatro somatórios como abaixo:

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\beta < \rho \leqslant \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ &\qquad + \sum_{0 \leqslant \sigma < \gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Porém, note que $0 \leqslant \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leqslant \sigma$ significa que $0 \leqslant \sigma_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $j = 1, \ldots, n$ tal que $\sigma_j < \gamma_j$. Como $|\gamma| = 1$, suponha sem perda de generalidade que $\gamma = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Dessa forma, para $j = 1$, concluimos que $0 \leqslant \sigma_1 < 1$. Como $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \ldots, n$, vale $0 \leqslant \sigma_i < 0$, que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma, $\beta < \rho \leqslant \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (3.10) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + u D^\alpha \eta. \tag{3.11}$$

Por fim, a menos de uma mudança de variaveis, escrevemos (3.11) como

$$\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u,$$

pois

$$\binom{\alpha-\gamma}{\sigma} + \binom{\alpha-\gamma}{\sigma-\gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (3.9), temos que

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u$$

como queriamos mostrar. □

Com os resultados obtidos, agora é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach.

Teorema 3.27. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Observe que

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0 \iff \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0 \iff D^\alpha u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Em particular, se $\alpha = (0, \ldots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α. Sendo assim $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Sendo assim, pelo Teorema 3.26, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha(\lambda u)\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|\lambda D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = |\lambda|^p \|u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = |\lambda|\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 3.26, segue que

$$\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski em ℓ^p

$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ou seja,

$$\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. □

Teorema 3.28. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é completo

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

para todo $n, m > n_0$. Note que

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \|u_n - u_m\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon^p,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. Ou seja, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, que é um espaço completo (Teorema 1.83). Dito isso, podemos escrever

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$ denotamos $D^\alpha u_n$ por u_n e u_α por u. Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema 3.12, utlizando a definição de derivada fraca e passando a uma subsequência (se necessário), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = \int_\Omega (\lim u_n) D^\alpha \phi = \lim \int_\Omega u_n D^\alpha \phi \, dx = \lim\, (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi \, dx \\ = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \lim D^\alpha u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx.\end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha u = u_\alpha$, e consequentemente, $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$.

Por outro lado, considere (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$. Além disso, vale o seguinte:

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. Isto nos diz que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ que é um espaço completo (Teorema 1.88). Sendo assim, obtemo

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^\infty(\Omega),$$

De forma análoga ao caso $1 \leqslant p < \infty$, mostramos que $D^\alpha u = u_\alpha$ e portanto $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. □

3.4 Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora. Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados e exemplos da teoria de aproximação, que é de extrema importância no estudo de equações diferenciais parciais.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1; \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.12}$$

conhecida como molificador de Friedrich, onde $c > 0$ é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1.$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função η de classe $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compacto satifazendo.

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$

- $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon) = \delta(x)$, onde δ é a função delta de Dirac.

Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{3.13}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Essa função η_ε é de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\operatorname{supp}\eta_\varepsilon \subseteq B[0,\varepsilon]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon\, dx = 1.$$

Essa aplicação será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se u é uma função locamente integrável, definimos a molificação de u por $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, isto é

$$u^\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y) = \int_{B[0,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(y)u(x-y)\, dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propriedades importantes sobre essas aproximações.

Teorema 3.29 (Aproximação local por funções suaves)**.** Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \ \text{ em } \Omega_\varepsilon,$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\, d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então,

(a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$;

(b) $u^\varepsilon \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração.

(a) Seja $g(x) = (x-y)/\varepsilon$. Logo, pela Regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta_\varepsilon(x-y)\right] &= \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right),\end{aligned} \tag{3.14}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ Por outro lado, sejam $x \in \Omega_\varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$ e h de forma que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Deste modo,

$$\frac{u^\varepsilon(x+he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]u(y)\, dy. \tag{3.15}$$

Note que, novamente utilizando a regra da cadeia e (3.14)

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \tag{3.16}$$

quando $h \to 0$. Consequentemente, por (3.15), (3.16) e o Teorema da converência dominada, temos que

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) u(y)\, dy = \int_{\Omega} \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_i}(x-y) u(y)\, dy.$$

Indutivamente, mostramos que $D^{\alpha} u^{\varepsilon}$ existe e

$$D^{\alpha} u^{\varepsilon} = D^{\alpha} \eta_{\varepsilon} * u.$$

O fato de u^{ε} ser de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ segue do fato de η_{ε} ser de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ por definição e u ser integrável.

(b) Afirmamos que a α-ésima derivada parcial de u^{ε} no sentido usual é igual a convulução de η_{ε} com a α-ésima derivada parcial fraca de u para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Consequentemente

$$D^{\alpha} u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * D^{\alpha} u.$$

Com efeito, no item **(a)** vimos que $D^{\alpha} u^{\varepsilon} = D^{\alpha} \eta_{\varepsilon} * u$. Primeiramente, se $g(x) = x - y$, temos

$$D_x^{e_i} \eta_{\varepsilon}(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_{\varepsilon} \circ g)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_k}(x-y) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_i}(x-y).$$

Por outro lado, se $h(y) = x - y$, obtemos

$$D_y^{e_i} \eta_{\varepsilon}(x-y) = \frac{\partial}{\partial y_i}(\eta_{\varepsilon} \circ h)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial y_k}(x-y) \frac{\partial h_k}{\partial y_i}(y) = -\frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial y_i}(x-y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação, chegamos a

$$D_x^{e_i} \eta_{\varepsilon}(x-y) = -D_y^{e_i} \eta_{\varepsilon}(x-y).$$

Repetindo esse cálculo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$D_x^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x-y).$$

Deste modo, podemos escrever

$$D^{\alpha} u^{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} D_x^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x-y) u(y)\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x-y) u(y)\, dy.$$

Fixando $x \in \Omega_{\varepsilon}$, a função $\phi_x(y) = \eta_{\varepsilon}(x-y)$ é suave e tem suporte compacto em Ω. Aplicando a definição de derivada fraca com função teste $\eta_{\varepsilon}(x-y)$, segue que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x-y) u(y)\, dy. = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x-y) D^{\alpha} u(y)\, dy.$$

Portanto, deduzimos que

$$D^{\alpha} u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * D^{\alpha} u. \tag{3.17}$$

Além disso, afirmamos que dados abertos V, W tais que $V \Subset W \Subset \Omega$, uma função $v \in \mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, inferimos

$$\|v^{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}. \tag{3.18}$$

Com efeito, note que se $1 < p < \infty$ e $x \in V$, é verdade que

$$|v^{\varepsilon}(x)| = \left| \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y) v(y)\, dy \right| \leqslant \int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_{\varepsilon}^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_{\varepsilon}^{\frac{1}{p}}(x-y) v(y) \right| dy.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral, obtemos

$$\int_{B[x,\varepsilon]} \left|\eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y)\eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y)v(y)\right| dy \leqslant \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)|v(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$ e utilizando o Teorema de Fubini, segue que

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|^p\, dx = \int_V \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)|v(y)|^p\, dy\, dx \leqslant \int_W |v(y)|^p \int_{B[y,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\, dx\, dy.$$

Isto é,

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Por fim, seja $V \Subset \Omega$ um aberto. Afirmamos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ em } \mathcal{L}^p(V) \tag{3.19}$$

quando $\varepsilon \to 0$, para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. De fato, seja W um aberto de forma que $V \Subset W \Subset \Omega$, $\delta > 0$. Utilizando a afirmação anterior com $v^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$ e $v = D^\alpha u$ escolhendo $w \in \mathcal{C}(W)$ tal que

$$\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} < \delta.$$

Temos

$$\|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant 2\delta + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)}$$

Como $w \in \mathcal{C}(W)$, então $w^\varepsilon \to w$ uniformemente em V quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, $D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u$ em $\mathcal{L}^p(V)$. Dessa forma,

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto,

$$u^\varepsilon \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega),$$

como queriamos mostrar □

Exemplo 3.30. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, dada uma função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega u\phi'\, dx = \int_{-1}^1 u\phi'\, dx = \int_{-1}^0 u\phi'\, dx + \int_0^1 u\phi'\, dx.$$

Utlizando integração por partes, obtemos

$$\int_\Omega u\phi' = -\int_{-1}^0 -\phi\, dx - \int_0^1 \phi\, dx - x\phi\Big|_{-1}^0 + x\phi\Big|_0^1 = -\int_{-1}^0 -\phi\, dx - \int_0^1 \phi\, dx - \phi(-1) + \phi(1)$$

Porem, ϕ tem suorte compacto, logo, se anula em $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Dito isso

$$\int_\Omega u\phi'\, dx = -\int_{-1}^0 -\phi\, dx - \int_0^1 \phi\, dx = -\int_\Omega \text{sgn}(x)\phi\, dx.$$

Portanto

$$u' = \text{sgn}$$

no sentido fraco, onde

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Além disso

$$\int_\Omega |\operatorname{sgn}(x)|^p \, dx = \int_{-1}^{1} 1^p \, dx = \mu((-1,1)) = 2 < \infty,$$

onde μ é a medida de Lebesgue. Assim, $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e, portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para para $1 \leqslant p < \infty$. Vamos utiizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u. Seja $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| \leqslant 1; \\ 0 & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

(ver Figura 3.3) onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta \, dx = 1,$$

isto é,

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx \right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Logo, definimos a função molificadora $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon \, dx = 1 \;\text{ e }\; \operatorname{supp} \eta = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u. Com efeito,

$$u^\varepsilon(x) = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x) u(x-y) \, dy.$$

A Figura 3.2 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ε.

Exemplo 3.31. Seja $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de $|\cdot|$ não ser diferenciável. Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, quando $0 < p < 2$, dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}.$$

Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a i-ésima coordenada. Utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_\Omega u D^{e_i} \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} u \phi \nu^i \, ds - \int_\Omega \phi D^{e_i} u \, dx, \tag{3.20}$$

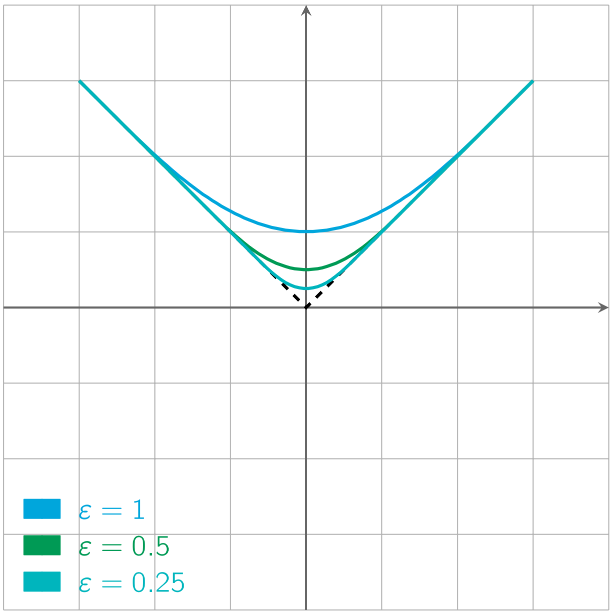


Figura 3.2: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ε com $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$
Fonte: Autoral

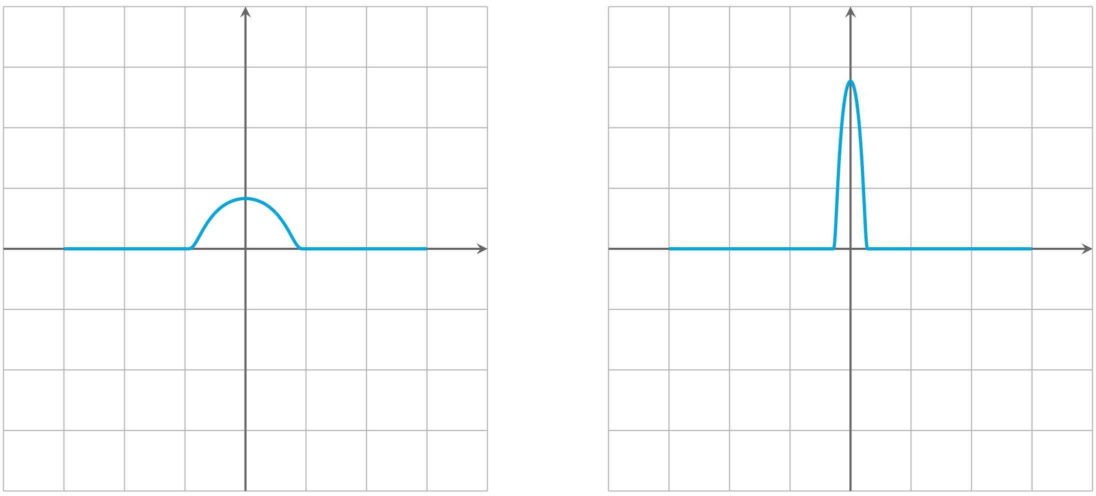


Figura 3.3: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$
Fonte: Autoral

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial\Omega$. Para calcular $D^{e_i}u$ precisamos dividir o domínio Ω em Ω_1, Ω_2, Ω_3 e Ω_4, onde Ω_i é a restrição ao i-ésimo quadrante (ver Figura 3.4).

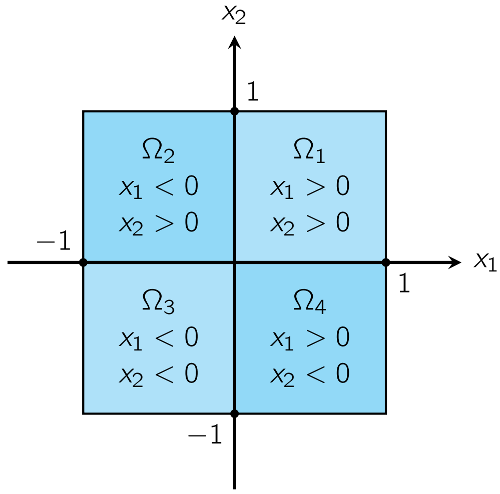


Figura 3.4: Domínio da função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$.
Fonte: Autoral

Note que em $\Omega_1 = (0,1) \times (0,1)$, $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$. Logo, nesse conjunto $D^{e_i}u$ existe no sentido usual e é dada por

$$D^{e_i}u = \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga, deduzimos que

$$\begin{aligned} D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \tfrac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_2 \text{ e } \Omega_3, \\ D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \tfrac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}} && \text{em } \Omega_4. \end{aligned}$$

Dito isso, concluimos que

$$\int_\Omega \phi D^{e_i}u\,dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx$$

que podemos escrever como

$$\int_\Omega \phi D^{e_i}u\,dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \frac{1}{2}x_i^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx + \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx$$

Por fim, como ϕ tem suporte compacto em Ω, ϕ se anula em $\partial\Omega$. Dessa forma

$$\int_{\partial\Omega} u\phi\nu^i\,ds = 0.$$

Portanto, por (3.20) chegamos a

$$\int_\Omega uD^{e_i}\phi\,dx = -\int_\Omega \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\phi\,dx.$$

Isto é,

$$D^{e_i}u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}$$

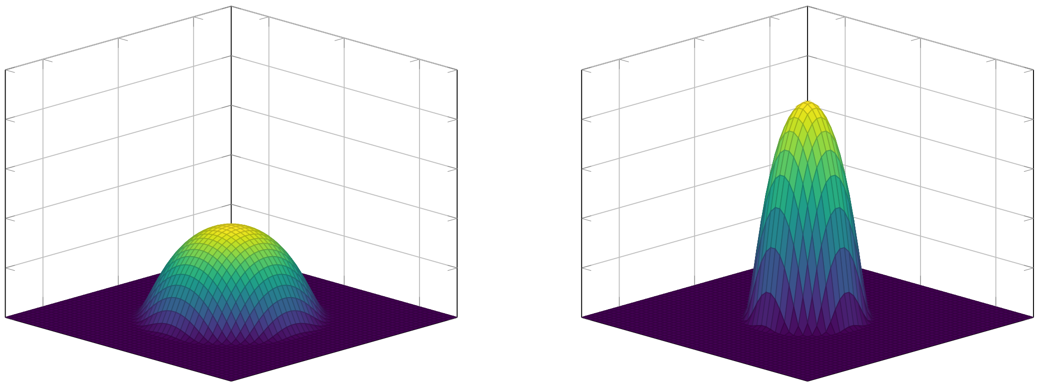


Figura 3.5: η e η_ε com $\varepsilon = 0.5$
Fonte: Autoral

como queriamos mostrar. Além disso,

$$\int_\Omega |D^{e_i}(x_1, x_2)|^p \, dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}}\right|^p \, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\mathrm{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini, encontramos

$$\frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\mathrm{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p}\int_{-1}^{1} dx_j \int_{-1}^{1} |\mathrm{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-1}}\int_{-1}^{1} |\mathrm{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i.$$

Dito isso, precisamos ver para quais valores de p essa integral é finita. Sendo assim

$$\frac{1}{2^{p-1}}\int_{-1}^{1} |\mathrm{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} \, dx_i = \frac{1}{2^{p-2}}\int_{0}^{1} x_i^{-\frac{p}{2}} \, dx = \frac{1}{2^{p-2}}\left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}-1}\right]$$

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando $p < 2$. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1; \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

(ver Figura 3.5) e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u, dada por

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_\Omega \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \, dy.$$

Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε. A Figura 3.6 mostra o gráfico de u, onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε.

Teorema 3.32 (Meyers-Serrin)**.** Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

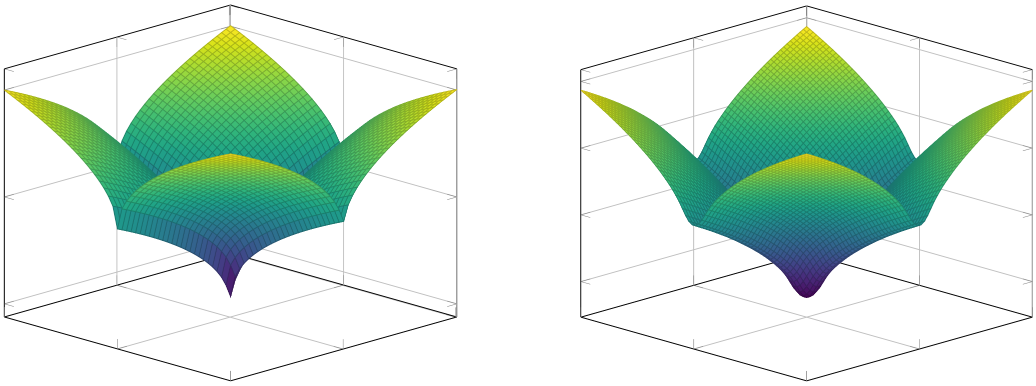


Figura 3.6: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^ε com $\varepsilon = 0.25$
Fonte: Autoral

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

onde $\Omega_i = \{x \in \Omega\,;\, d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. Defina $\Omega_i' = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$. Além disso, escolha qualquer aberto $\Omega_0' \Subset \Omega$ de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i'$$

e seja $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{\Omega_i'\}_{i=0}^{\infty}$, isto é,

$$0 \leqslant \phi_i \leqslant 1 \text{ com } \phi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_i') \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = 1 \text{ em } \Omega.$$

Como, por hipótese, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, temos pelo Teorema 3.26

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Além disso, $\operatorname{supp}(\phi_i u) \subseteq \Omega_i'$. Fixando $\delta > 0$, escolha um $\varepsilon_i > 0$ de forma que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e } \operatorname{supp} u^i \subseteq \Omega_i''$$

com $\Omega_i'' = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} \supseteq \Omega_i'$.

Seja $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Como $u = u\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \phi_i u$, então, para cada $V \Subset \Omega$, inferimos que

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \frac{\delta}{2}.$$

Passando ao supremo sobre os conjuntos $V \Subset \Omega$ obtemos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Isto mostra que u pertence ao fecho de $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Logo é equivalente dizer que existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ $\square$

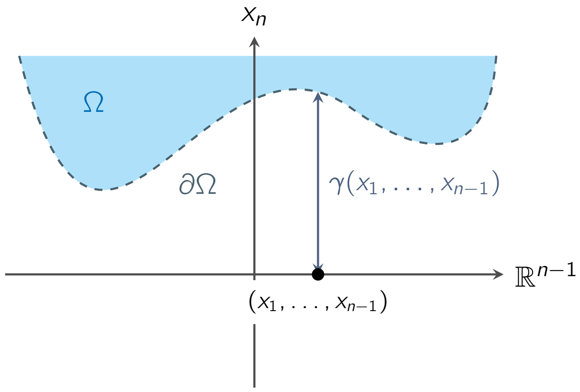


Figura 3.7: Função γ da definição 3.33
Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 626.

Definição 3.33. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que sua fronteira $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^k$ se para cada ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ existe um raio $r > 0$ e uma função de classe $\mathcal{C}^k$ $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r] \,;\, x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ se é de classe $\mathcal{C}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.34. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$, como Ω tem fronteira de classe $\mathcal{C}^1$, existe um raio $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r] \,;\, x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}. \tag{3.21}$$

Definimos $V = \Omega \cap B[\tilde{x}, r/2]$ (ver Figura **??**). Além disso, definimos para cada $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $x \in V$

$$x^\varepsilon = x + \lambda\varepsilon e_n = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + \lambda\varepsilon). \tag{3.22}$$

Observe que, para um $\lambda > 0$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a bola $B[x^\varepsilon, \varepsilon]$ está contída em $\Omega \cap B[\tilde{x}, r]$ para todo $x \in V$. De fato, por definição, dado $x \in V$ temos que $x \in \Omega$ e $\|x - \tilde{x}\| \leqslant r/2$. Note que $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ suficientemente grande. Com efeito, como $x \in V$, em particular $x \in \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$. Como Ω tem fronteira de classe $\mathcal{C}^1$, temos que $x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})$, daí

$$x_n^\varepsilon = x_n + \lambda\varepsilon > x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

e por (3.22) deduzimos que

$$\|x^\varepsilon - \tilde{x}\| = \|x + \lambda\varepsilon e_n - \tilde{x}\| \leqslant \|x - \tilde{x}\| + \|\lambda\varepsilon e_n\| \leqslant \frac{r}{2} + \lambda\varepsilon < r$$

desde que $0 < \varepsilon < r/2\lambda$. Logo, $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Por isso, $B[x^\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário.

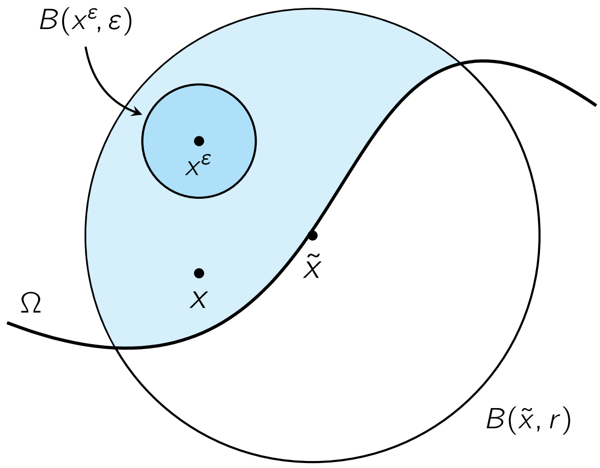


Figura 3.8: Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 253

Agora, definimos $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$ para todo $x \in V$ e $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Assim, pelo Teorema 3.29 $v^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$. Dito isso, afirmamos que

$$\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \to 0.$$

De fato, seja α um multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$, então

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}.$$

A segunda norma do lado direito da desigualdade acima vaí a 0 quando $\varepsilon \to 0$, pois a translação é contínua na norma do espaço $\mathcal{L}^p$ e

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} = \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$ (ver Teorema 3.29). Ou seja, é verdade que

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0. \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Note que todos os cálculos foram feitos em uma vizinhança de um ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$. Dito isso, como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado), pelo Teorema de Heine-Borel[3], podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, raios $r_i > 0$, conjuntos $V_i = \Omega \cap B[\tilde{x}_i, {}^{r_i}\!/_2]$ e funções v_i^ε, com $i = 1, \ldots, N \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, e

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(\tilde{x}_i, {}^{r_i}\!/_2).$$

Além disso, considere um aberto limitado V_0 da forma $\Omega \cap B(\tilde{x}_0, {}^{r_0}\!/_2)$ e uma função v_0^ε com $\|v_0^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_0)} \to 0$ e

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} V_i$$

[3]Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui subcobertura finita.

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos $\{V_i\}_{i=0}^N$ em Ω. Defina

$$v^\varepsilon = \sum_{i=0}^N \phi_i v_i^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

e observando que $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$, obtemos

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i v_i^\varepsilon) - D^\alpha(\phi_i u)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Utilizando a Regra de Leibniz, segue que

$$\begin{aligned}\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &\leqslant \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \left\|D^\sigma \phi_i \left[D^{\alpha-\sigma}\left(v_i^\varepsilon - u\right)\right]\right\|_{\mathcal{L}^p(V_i)} \\ &\leqslant c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma}(v_i^\varepsilon - u)\|_{\mathcal{L}^p(V_i)},\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de ϕ_i (e por consequência $D^\sigma\phi_i$) ter suporte compacto e ser suave na ultima desigualdade. Ademais, como $|\alpha - \sigma| \leqslant k$, temos que

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \leqslant c \sum_{i=0}^N \|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \to 0$$

Por fim, definindo $u_n := v^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ chegamos a

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$, como era desejado. $\square$

3.5 Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto especifico. Nessa seção, veremos uma forma de estender funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por meio de um operador linear.

Teorema 3.35. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leqslant p < \infty$, tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, tem-se que

(a) $Eu = u$ qtp em Ω;

(b) $\operatorname{supp} Eu \subseteq \Omega'$;

(c) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p, Ω e Ω'.

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e considere inicialmente que $\partial\Omega$ esteja contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de $\tilde{x}$. Dessa forma, podemos supor que existe uma bola $B = B(\tilde{x}, r)$ tal que

$$\begin{aligned} B^+ &= B \cap \{x_n \geqslant 0\} \subseteq \overline{\Omega}; \\ B^- &= B \cap \{x_n \leqslant 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Além disso, assuma que $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n}{2}) & \text{se } x \in B^- \end{cases}$$

que chamamos de reflexão de ordem superior da função u de B^+ a B^-. Afirmamos que $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$. Com efeito, denotando $u^- = \bar{u}\big|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}\big|_{B^+}$, podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \ \text{ em } \ \{x_n = 0\}.$$

De fato, pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \tfrac{x_n}{2})$$

quando $x_n = 0$, obtemos

$$\left.\frac{\partial u^-}{\partial x_n}\right|_{\{x_n=0\}} = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \left.\frac{\partial u^+}{\partial x_n}\right|_{\{x_n=0\}}$$

Também é verdade que

$$u^+ = u^- \ \text{ e } \ \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \ \text{ em } \ \{x_n = 0\},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$ Portanto $D^\alpha u^- = D^\alpha u^+$ em $\{x_n = 0\}$ com $|\alpha| \leqslant 1$. Sendo assim, $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$, pois fora de $\{x_n = 0\}$, as componentes de $\bar{u}$ já eram de classe $\mathcal{C}^\infty$, então apenas restava verificar que em $B^+ \cap B^- = B \cap \{x_n = 0\}$ as componentes em B^+ e B^- se igualavam, implicando a continuidade $\bar{u}$ e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}, \tag{3.24}$$

onde c é uma constante[4] positiva que não depende de u. De fato, sabemos que

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(B)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p \, dx\right].$$

Como $B = B^+ \cup B^-$, e denotando $(x_1, \dots, x_{n-1})$ por x' podemos reescrever o último somatório da seguinte forma

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p \, dx\right] = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p \, dx + \int_{B^-} |4D^\alpha[u(x', -\tfrac{x_n}{2})] - 3D^\alpha[u(x', -x_n)]|^p \, dx\right]$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p \, dx + 3 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p \, dx + 4 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p \, dx\right]$$

onde usamos o fato de que

$$(a+b)^p \leqslant (2\max\{a, b\})^p = 2^p \max\{a, b\}^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$$

[4]Durante essa e outras demonstrações, mesmo se o valor da constante c mudar, ainda continuaremos denotando por c, então por exemplo $c + 2^p$, $c(1+n)$, etc, ainda serão denotados por c.

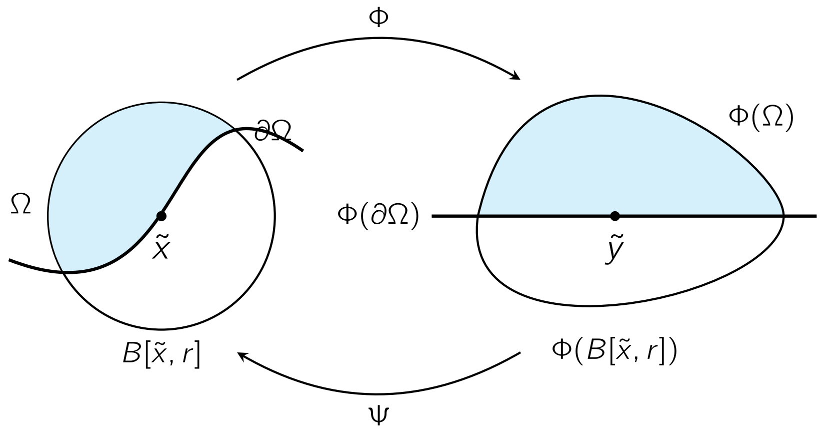


Figura 3.9: Representação gráfica do homemorfismo Φ
Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 256

para todo $a, b \geqslant 0$. Porem, $-x_n, -\frac{x_n}{2} \geqslant 0$, então podemos considerar que as integrais em B^- são integrais sobre B^+, através de uma mudança de variáveis, para encontrar

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p\, dx\right] \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1}\left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p\, dx\right] = c\|u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Portanto,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Por outro lado, se $\partial\Omega$ não está necessáriamente contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de $\tilde{x}$, temos que existe um homeomorfismo Φ com inversa Ψ que planifica $\partial\Omega$ perto de $\tilde{x}$, basta usar a função γ de classe $\mathcal{C}^1$ da Definição 3.33 e definir Φ por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})). \tag{3.25}$$

De forma análoga definimos Ψ por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})). \tag{3.26}$$

Dete modo, é fácil ver que $\Psi^{-1} = \Phi$ e que Φ e Ψ são de classe $\mathcal{C}^1$ (por definição) . Sendo assim, seja $y = \Phi(x)$ (ou seja $x = \Psi(y)$) e definimos $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo como foi feito anteriormente (u' é de classe $\mathcal{C}^1$), podemos escolher uma bola $B = B(\tilde{y}, r)$ e definimos $\bar{u}'$ de forma que $\bar{u}' \in \mathcal{C}^1(B)$ e

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}. \tag{3.27}$$

Seja $B' = \Psi(B)$, assim conseguimos obter uma extensão $\bar{u}$ de u para B' com

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para $\bar{u} \equiv \bar{u}' \circ \Phi$, obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis

$$\|D^\alpha \bar{u}'\|^p_{\mathcal{L}^p(B)} = \int_B |D^\alpha \bar{u}'(y)|^p\, dy = \int_B |D^\alpha \bar{u}(\Psi(y))|^p\, dy = \int_{B'} |D^\alpha \bar{u}(x)|^p\, dx = \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(B')}.$$

Dessa forma, passando ao somatório, quando $|\alpha| \leqslant 1$, chegamos a

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')}. \tag{3.28}$$

Além disso, é verdade

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u'\|^p_{\mathcal{L}^p(B^+)} = \int_{B^+} |D^\alpha u'(y)|^p\, dy &= \int_{B^+} |D^\alpha u(\Psi(y))|^p\, dy \\ &= \int_{\Psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p\, dx \leqslant \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\, dx = \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \tag{3.29}$$

Portanto, por (3.27), (3.28) e (3.29), obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} = \|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}, \tag{3.30}$$

como queríamos mostrar.

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x\in\partial\Omega} B'_x$, que é uma cobertura aberta, pois $B'_x = \Psi(B(\tilde{y}, r))$, e imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto.Pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma subcobertura finita de $\partial\Omega$. Sendo assim, existem uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, abertos B'_i e extensões $\bar{u}_i$ de u em B'_i de forma que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B'_i$. Por outro lado, considere um aberto $B'_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N B'_i.$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{B'_i\}_{i=0}^N$ e defina

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N \phi_i \bar{u}_i$$

onde $\bar{u}_i$ está associada a B'_i e $\bar{u}_0 = u$. Deste modo, obtemos a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Com efeito

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i\bar{u}_i)\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})}$$

onde c é uma constante positiva que depende de p. Logo, utilizando a Regra de Leibniz (ver Teorema 3.26), inferimos

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i\bar{u}_i)\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma\phi_i D^{\alpha-\sigma}\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\operatorname{supp} D^\sigma\phi_i \subseteq \operatorname{supp}\phi_i \subseteq B'_i$, então o suporte de $D^\sigma\phi_i$ também é compacto (pois B'_i é limitado), sendo assim $\max|D^\sigma\phi_i|$ existe em B'_i. Portanto, vale a desigualdade

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma\phi_i D^{\alpha-\sigma}\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma}\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(B'_i)}$$

onde agora a constante c também depende de B'_i. Além disso,

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma}\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(B'_i)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}.$$

Por fim, utilizando (3.30), chegamos a

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B_i')} \leqslant c\|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c depende de B_i', p e N. Portanto, deduzimos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \tag{3.31}$$

Defina Ω' aberto de forma que $\bigcup_{i=0}^N B_i' \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\operatorname{supp} \bar{u} \subseteq \Omega'$. Defina também $\bar{E} : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $\bar{E}u = \bar{u}$. Temos que $\bar{E}$ é linear,

$$\|\bar{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e $\operatorname{supp} \bar{E}u \subseteq \Omega'$. Sendo assim, definimos $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por

$$Eu = \lim \overline{u_k}$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ que converge para u (sabemos que essa sequência existe pois mostramos no Teorema 3.34 que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$). Podemos afirmar que o limite converge em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\overline{u_k} - \overline{u_\ell}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

Logo $(\overline{u_n})$ é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 3.28), deduzimos que $\lim \overline{u_k}$ existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned}\|Eu - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} &\leqslant \|Eu - \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\overline{u_k} - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \\ &\leqslant \|Eu - \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0\end{aligned}$$

pois $u_k \to u$ e $\overline{u_k} = u_k$ em Ω (ver ()). Portanto, $Eu = u$ qtp em Ω, provando o item **(a)**.

Para verificar o ítem **(b)**, basta ver que, por definição, $\operatorname{supp} \overline{u_k} \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\operatorname{supp} Eu \subseteq \Omega'$.

Por fim, para mostrar o item **(c)**, note que E é um operador limitado, pois

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\lim \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \lim \|\overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

□

3.6 Traços

Em alguns casos, no estudo de equações diferenciais parciais, é necessário impor condições de contorno na fronteira de um domínio. Para isso, precisamos entender o que significa restringir uma função em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ à fronteira de Ω. Nesta seção, veremos como isso pode ser feito por meio do operador traço.

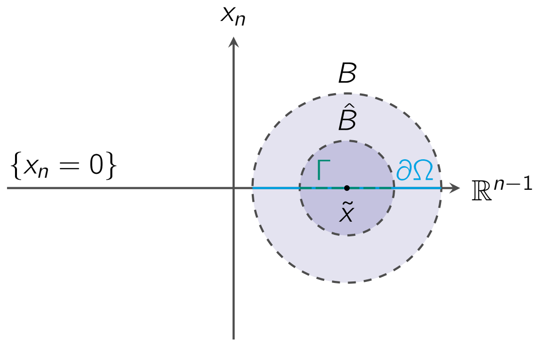


Figura 3.10

Teorema 3.36. Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Então, existe um operador linear limitado $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, tal que

(a) $Tu = u\big|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$;

(b) $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde c depende apenas de p e Ω.

Demonstração. Incialmente suponha que $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Da mesma forma que foi feito no Teorema 3.35 considere $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e suponhamos que $\partial\Omega$ está contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de $\tilde{x}$. Sejam $B = B(\tilde{x}, r)$ (e defina B^+ e B^- como em (3.23)) e $\widehat{B} = B(\tilde{x}, r/2)$, e considere $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$ de forma que $\xi \geqslant 0$ em B e $\xi \equiv 1$ em $\widehat{B}$, e denote $\Gamma = \partial\Omega \cap \widehat{B}$ (ver Figura 3.10) e $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 3.10)

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n}\, dx = \int_{\partial B^+} \xi|u|^p\, \nu_n dx'$$

onde ν é o vetor normal unitário que aponta para baixo em ∂B^+, isto é $\nu = (0, \ldots, 0, -1)$. Sendo assim, $\nu_n = -1$ e

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n}\, dx = -\int_{\partial B^+} \xi|u|^p\, dx',$$

pois $\operatorname{supp} \xi|u|^p \subseteq \operatorname{supp} \xi \subseteq B$. Dessa forma, como $\Gamma \subseteq \hat{B}$ e $\xi(x) = 1$ para todo $x \in \hat{B}$, concluimos que

$$\int_\Gamma |u|^p\, dx' = \int_\Gamma \xi|u|^p\, dx' \leqslant \int_{\partial B^+} \xi|u|^p\, dx' = -\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n}\, dx.$$

Calculando a derivada acima, obtemos

$$\int_\Gamma |u|^p\, dx' \leqslant -\int_{B^+} \left[\frac{\partial\xi}{\partial x_n}|u|^p + p|u|^{p-1}\operatorname{sgn} u\, \frac{\partial u}{\partial x_n}\xi\right] dx \leqslant c\int_{B^+} \left[|u|^p + |u|^{p-1}\|Du\|\right] dx$$

onde utilizamos o fato de ξ e suas derivadas parciais terem suporte compacto para a ultima desigualdade. Por fim utilizando a Desigualdade de Young

$$\int_\Gamma |u|^p\, dx' \leqslant c\int_{B^+} \left[|u|^p + \frac{|u|^{(p-1)p'}}{p'} + \frac{\|Du\|^p}{p}\right] dx \leqslant c\int_{B^+} |u|^p + \|Du\|^p\, dx. \tag{3.32}$$

Caso $\partial\Omega$ não esteja necessáriamente contido em $\{x_n = 0\}$ perto de $\tilde{x}$, considere o homeomorfismo Φ com inversa Ψ da demonstração do Teorema 3.35 (ver (3.25) e (3.26)) e defina $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 3.15), inferimos

$$\int_\Gamma |u'|^p\, dy' = \int_\Gamma |u \circ \Psi|\, dy' = \int_{\Psi(\Gamma)} |u|^p\, dx'$$

e

$$\int_{B^+} \left[|u'(y)|^p + \|Du'(y)\|^p\right] dy \leqslant c \int_{\Psi(B^+)} \left[|u(x)|^p + \|Du(x)\|^p\right] dx,$$

onde c é uma constante que depende de γ que surge devido a regra da cadeia. Dessa forma, por (3.32), podemos escrever

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))} = \int_{\Psi(\Gamma)} |u|^p \, dx' = \int_{\Gamma} |u'|^p \, dy' &\leqslant c \int_{B^+} \left[|u'|^p + \|Du'\|^p\right] dy \\ &\leqslant c \int_{\Psi(B^+)} \left[|u|^p + \|Du\|^p\right] dx = \|u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\Psi(B^+))}.\end{aligned}$$

Como $\Psi(B^+) \subseteq \Omega$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma quantidade finita de abertos (em $\partial\Omega$) $\Psi(\Gamma_i)$ tal que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \Psi(\Gamma_i)$$

e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_i))} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.33}$$

Considere uma partição da unidade $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ subordinada a cobertura $\{\Psi(\Gamma_i)\}_{i=1}^N$, e denote $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$.

Defina $\widetilde{T} : \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por $\widetilde{T}u = u|_{\partial\Omega}$. Dessa forma, podemos escrever por (3.33), que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}u\|^p_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |\widetilde{T}u|^p \, dx = \int_{\partial\Omega} |u|^p \, dx &\leqslant c \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \phi_i^p |u|^p \, dx \\ &= c \sum_{i=1}^{N} \int_{\Psi(\Gamma_i)} |u|^p \, dx \leqslant c\|u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde c é uma constante que depende de p e Ω. Isto mostra que $\widetilde{T}$ é um operador limitado. Por fim, defina $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por

$$Tu = \lim \widetilde{T}u_k$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ que converge para $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Observe que

$$\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|\lim \widetilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \lim \|\widetilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leqslant c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Isto prova **(b)**. □

Teorema 3.37 (Funções traço zero em $\mathcal{W}^{1,p}$)**.** Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por definição existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Como u_k tem suporte compacto em Ω então u_k se anula em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $Tu_k = 0$ sobre $\partial\Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e como $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado, então

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}.$$

Portanto $Tu = 0$ qtp sobre $\partial\Omega$ Reciprocamente, suponha que $Tu = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando partições da unidade e o homeomorfismo Φ que planifica $\partial\Omega$ como foi feito anteriormente, podemos supor que

$$\begin{aligned} &u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \\ &u \text{ tem suporte compacto em } \overline{\mathbb{R}^n_+} \\ &Tu = 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde $\mathbb{R}^n_+$ denota o semiplano superior de $\mathbb{R}^n$. Como $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ então existe um sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \subseteq \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ (ver Teorema 3.34). Como $(u_k) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, então $Tu_k = u_k|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Assim por (3.35) e usando que T é limitado, temos que

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\mathbb{R}^n)} = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \lim \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Isto é, $Tu_k \to 0$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Dito isso, seja $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geqslant 0$. Pelo teorema fundamental do cálculo, podemos escrever u_k da seguinte forma

$$u_k(x', x_n) = u_k(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t)\, dt$$

e, consequentemente,

$$|u_k(x', x_n)|^p \leqslant c\left(|u_k(x', 0)|^p + \left(\int_0^{x_n} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t)\right| dt\right)^p\right)$$

onde a constante c depende de p (aqui, utlizamos a desigualdade $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$). Integrando ambos os lados sobre $\mathbb{R}^{n-1}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p\, dx' &\leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p\, dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\|\, dt\right)^p dx'\right) \\ &\leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p\, dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\|^p\, dt\right)\left(\int_0^{x_n} 1^{p'}\, dt\right)^{p/p'} dx'\right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Hölder. Como $p/p' = p - 1$ (pois p e p' são expoentes conjugados), tem-se pelo Teorema de Fubini que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p\, dx' \leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p\, dx' + x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du_k(x', t)\|^p\, dx' dt\right).$$

Por fim, como $\|u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} \to 0$ quando $k \to \infty$, e utlizando o Teorema da Convergência Dominada, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p\, dx' \leqslant c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \|Du(x', t)\|^p\, dx' dt. \tag{3.36}$$

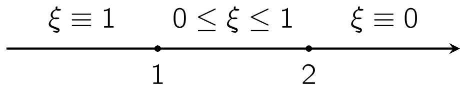


Figura 3.11: ξ definido em (3.37).

Seja $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\begin{aligned} &\xi \equiv 1 \text{ em } [0,1] \\ &\xi \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \setminus [0,2] \\ &0 \leqslant \xi \leqslant 1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

(ver Figura 3.11) e defina $\xi_k(x) = \xi(kx_n)$ e $v_k(x) = u(x)(1 - \xi_k(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_n}(x) &= (1 - \xi_k(x))\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) - ku\xi' \\ \frac{\partial v_k}{\partial x'}(x) &= (1 - \xi_k(x))\frac{\partial u}{\partial x'}(x). \end{aligned}$$

Consequentemente, as seguintes desigualdades valem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx &\leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\left\| \frac{\partial v_k}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \right)^p dx \\ &\leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\xi_k \left\| \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \xi_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| + k|u||\xi'| \right)^p dx, \end{aligned}$$

onde c é uma constante que depende de p e n. Deste modo, chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \xi_k^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_{\mathbb{R}^n_+} |\xi'|^p |u|^p dx \tag{3.38}$$

Observe que $\operatorname{supp} \xi' \subseteq \operatorname{supp} \xi \subseteq [0,2]$. Isto nos diz que $\xi'(kx_n) = 0$ quando $kx_n > 2$ ou $x_n > 2/k$. Logo podemos escrever a ultima desigualdade como

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \xi_k^p \|Du\|^p \, dx + ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \, dx' dx_n,$$

onde ?? ξ' pelo seu máximo em $[0,2]$. Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\xi(kx_n)|^p \|Du\|^p \, dx &= \int_0^{\frac{2}{k}} |\xi(kx_n)|^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p \, dx' dx_n \\ &\leqslant c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, onde estimamos ξ pelo seu máximo em $[0,2]$, e usamos que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ Além disso, utlizando (3.36), podemos ecrever

$$ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt \leqslant ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds dt \leqslant c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds \to 0$$

quando $k \to \infty$. Portanto, por (3.38), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx \to 0$$

isto é $\|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$ quando $k \to \infty$.

Por fim, pela definição de v_k inferimos que

$$\|v_k - u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\mathbb{R}^n_+} |v_k - u|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \xi_k |u|^p \, dx.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, chegamos a

$$\|v_k - u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^{\frac{2}{k}} \xi(kx_n)^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p \, dx' dx_n \leqslant c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p \, dx' dx_n \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Dessa forma

$$\|v_k - u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|v_k - u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|Dv_k - Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$$

Defina $u_k = \eta_{\frac{1}{k}} * v_k$. Assim, $u_k \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$ para k suficientemente grande (ver Teorema ??) e

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|u_k - v_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} + \|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$$

quando $k \to \infty$. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$. □

3.7 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços.

Dividiremos o estudo dessas desigualdades em dois casos, $1 \leqslant p < n$ e $n < p \leqslant \infty$. O caso $n = p$ não será apresentado nesse texto, aos interessados consultar [5] p.p. 275.

3.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja $1 \leqslant p < n$. Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo[5]

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.39}$$

onde c é uma constante positiva, $1 \leqslant q < \infty$ e $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, de forma que c e q não dependam de u.

Primeiramente, vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (3.39) é válida, o valor de q não é arbitrário, mas sim admite uma forma especifica. Para isso, seja $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ não nula e $\lambda > 0$. Sendo assim, definimos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (3.39) a u_λ, obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.40}$$

Note que

$$\|u_\lambda\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^p \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}$$

[5]Lembrando que $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ representa o gradiente fraco, quando calculamos a norma do gradiente em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ estamos calculando a norma $\mathcal{L}^p$ da norma euclidiana do gradiente.

e

$$\begin{aligned}\|Du_\lambda\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D(u(\lambda x))|^p\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p\, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p\, dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Utilizando essas duas igualdades acima em (3.40), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}}\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

a qual podemos reescrever como

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.41}$$

Observe que se $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} > 0$, obtemos uma contradição quando $\lambda \to 0$, pois isso implicaria em $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, que só acontece se $u = 0$ (o que é uma contradição). De forma análoga se $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} < 0$ obtemos uma contradição quando $\lambda \to \infty$. Sendo assim, para que a igualdade (3.39) seja válida, precisamos que

$$1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} = 0,$$

ou seja,

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

Isso motiva a definição abaixo.

Definição 3.38. Se $1 \leqslant p < n$ o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Os cálculos no início da seção mostram que a desigualdade (3.39), somente é válida quando $q = p^*$. O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é verídica.

Teorema 3.39 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** Seja $1 \leqslant p < n$. Então, existe uma constante c, que depende apenas de p e n, tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.42}$$

para toda função $u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos dois casos

Caso 1: Considere que $p = 1$

Como por hipótese, u tem suporte compacto, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)\, dy_i$$

e assim

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)\right| dy_i \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)|\, dy_i.$$

Elevando ambos os lados a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de $i = 1$ até n obtemos

$$|u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$ por X_i e integrando ambos os lados da desigualdade a cima, em relação a x_1, de $-\infty$ a ∞, chegamos a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.\end{aligned}$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1, então a sua integral é constante em relação a x_1. Sendo assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, a desigualdade acima se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

onde podemos reescrever a ultima integral da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} I_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \text{ e } I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Porém, I_2 é constante em relação a x_2 então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant I_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, inferimos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_2)|\, dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, chegamos a

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\, dx \right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{p^*}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.43}$$

como queriamos mostrar.

Caso 2: Assuma que $1 < p < n$
Considere a função $|u|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido a seguir. Utilizando a desigualdade obtida no caso $p = 1$, podemos escrever

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} \, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[|u|^\gamma\right]^{\frac{n}{n-1}} \, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)| \, dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|Du| \, dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na ultima integral obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} \, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Escolhendo γ de forma que $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\dfrac{p}{p-1}$, isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

nesse caso, $\dfrac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim, podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

finalizando a demonstração. □

Observação: Note que o suporte compato é necessário, como exemplo tome a função $u(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma $|Du| \equiv 0$. Consequentemente

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 0 \implies u \equiv 0,$$

que é uma contradição.

Teorema 3.40. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e, além disso

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde $c > 0$ é uma constante que depende apenas de n, p e Ω.

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.35, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\begin{aligned} &\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega \\ &\bar{u} \text{ tem suporte compacto} \\ &\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Como $\bar{u}$ tem suporte compacto, sabemos que existe uma sequência (u_k), dada por $\eta_{\frac{1}{k}} * \bar{u}$, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0 \tag{3.45}$$

e para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema ??). Pela Desigaldade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (3.42), concluimos que

$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.46}$$

Note que
$$\|Du_k - D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$
quando $k \to \infty$. Isso mostra que (Du_k) é convergente (e portanto de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, por (3.46), observamos que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ que é um espaço completo. Logo, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema 3.12, a menos de uma subsequência $u_k(x) \to v(x)$ qtp em $\mathbb{R}^n$, quando $k \to \infty$. Análogamente, por (3.45) $u_k(x) \to \bar{u}(x)$ qtp em $\mathbb{R}^n$, quando $k \to \infty$ desde que $\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$, quando $k \to \infty$. Com isso $v(x) = \bar{u}(x)$ qtp em $\mathbb{R}^n$. Dessa forma
$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$
quando $k \to \infty$. A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev também implica em
$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$
para todo $k \in \mathbb{R}^n$. Passando ao limite, quando $k \to \infty$, obtemos
$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$
Essa desigualdade finaliza a demonstração, já que, por (3.44)
$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$
como queriamos mostrar. □

Teorema 3.41. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < n$, então a desigualdade
$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$
é válida para $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, conseguimos uma sequência de funções (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, quando $k \to \infty$. Além disso, podemos estender cada u_k para ser 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Sendo assim, aplicamos a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (3.42) para obter
$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \leqslant c\|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$
para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que $\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \|Du_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$, quando $k \to \infty$. Sendo assim, pelo Teorema 3.12, passando a uma subsequência (se necessário), chegamos a
$$u_k(x) \to u(x) \text{ qtp em } \Omega. \tag{3.47}$$
Por outro lado, pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (3.42), inferimos que
$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$$
quando $k, \ell \to \infty$, pois (Du_k) é convergente (em particular, de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, que é um espaço completo (ver Teorema ??). Dito isso, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ tal que $u_k \to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Novamente, utliizando o Teorema 3.12, passando a uma subsequência (se necessário), segue que,
$$u_k(x) \to v(x) \text{ qtp em } \Omega. \tag{3.48}$$
Logo, por (3.47) e (3.48), $v \equiv u$ qtp em Ω. Dessa forma
$$\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \to 0.$$

Passando ao limite, chegamos a

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}}(\Omega) \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Provando o caso em que $q = p^*$. Agora considere $1 \leqslant q < p^*$. Como Ω é limitado, temos, pelos Teoremas ?? e ??, que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q \leqslant p^*$. □

Um caso particular da desigualdade acima é a Desigualdade de Poincaré que será apresentada no resultado abaixo.

Corolário 3.42 (Desigualdade de Poincaré)**.** Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida onde c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração. Primeiramente considere $1 \leqslant p < n$. Por definição, $1 \leqslant p < p^*$, pelo Teorema 3.40, concluimos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Agora considere que $n \leqslant p < \infty$ e $1 \leqslant s < n$ tal que $p < s^*$ (isto é possível pois $s^* \to \infty$ se $s \to n^-$). Note que, pelo Teorema ??, podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

já que $1 \leqslant p < s^*$, $s < p$ e Ω é limitado Por fim, considere $p = \infty$. Pelo que foi visto acima, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Passando ao limite quando $s \to n^-$, temos que $s^* \to \infty$. Dessa forma, $\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$. Portanto,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. □

O resultado acima nos diz que

$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega) \quad (1 \leqslant q \leqslant p^*) \text{ e } \mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{s^*}(\Omega) \quad (1 \leqslant s \leqslant \infty)$$

isto é o mesmo que dizer que $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $1 \leqslant q \leqslant p^*$, $\mathcal{W}^{1,s}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{s^*}(\Omega)$ com $1 \leqslant s \leqslant \infty$ e o operador inclusão ι (em cada um dos casos) é um operados linear limitado.

Além disso, podemos mostrar que a norma $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} := \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$, é equivalente a norma usual dos espaços de Sobolev $\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Com efeito,

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Dessa forma, concluimos que

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$, são equivalentes.

3.7.2 Desigualdade de Morrey

Para estudar essa próxima classe de desigualdades, precisamos de algumas definições relacionadas aos espaços de Hölder.

Definição 3.43. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita ser Hölder continua com expoente $\gamma \in (0, 1]$, quando

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c\|x - y\|^{\gamma},$$

para todo $x, y \in \Omega$. Além disso, denotamos o espaço dessas funções por $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 3.44. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, escrevemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \;\text{ e }\; [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\gamma}} \right\},$$

para denotar a norma de u no espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com essas definições, estamos prontos para enunciar e demonstrar a Desigualdade de Morrey.

Teorema 3.45 (Desigualdade de Morrey)**.** Seja $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e $n < p \leqslant \infty$. Então

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n e $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

Demonstração. Primeiramente, escolha uma bola $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Afirmamos que existe uma constante $c > 0$ dependendo apenas de n tal que[6]

$$⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|y - x|^{n-1}}\, dy. \tag{3.49}$$

Com efeito, fixando $w \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$, e $0 < s < r$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da Regra da cadeia, que

$$|u(x + sw) - u(x)| = \left| \int_0^s \frac{du}{dt}(x + tw)\, dt \right| = \left| \int_0^s Du(x + tw) \cdot w\, dt \right| \leqslant \int_0^s \|Du(x + tw)\|\, dt,$$

onde utilizamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de $|w| = 1$. Logo, integrando ambos os lados sobre $\partial B(\mathbf{0}, 1)$ e aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)|\, dS_w &\leqslant \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} \|Du(x + tw)\|\, dS_w dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} \|Du(x + tw)\| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}}\, dS_w dt. \end{aligned}$$

[6]A integral

$$⨍_{B(x,r)} f\, dy := \frac{1}{\sigma(n)r^n} \int_{B(x,r)} f\, dy$$

onde $\sigma(n)r^n$ é o volume da esfera n-dimensional, representa a média da função f sobre $B(x, r)$.

Seja $y = x + tw$, de forma que $t = \|x - y\|$. Assim, por meio de coordenadas polares e mudança de variáveis obtemos

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS_w \leqslant \int_0^s \int_{B(x,t)} \frac{\|Du(y)\|}{|x-y|^{n-1}}\, dS_w dt = \int_{B(x,s)} \frac{\|Du(y)\|}{|x-y|^{n-1}}\, dy$$

e, como $s < r$, tem-se

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS_w \leqslant \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x-y|^{n-1}}\, dy.$$

Multiplicando a equação acima por s^{n-1} e integrando de 0 a r, com respeito a s, chegamos a

$$\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|\, dSds \leqslant \int_0^r s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x-y|^{n-1}}\, dyds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x + sw$, obtemos

$$\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} |u(y) - u(x)|\, dSds \leqslant \left(\int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{|x-y|^{n-1}}\, dy\right)\left(\int_0^r s^{n-1} ds\right).$$

Utilizando coordenadas polares no lado esquerdo e resolvendo a última integral do lado direito, segue que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy.$$

Por fim, dividindo ambos os lados por $\sigma(n) r^n$ (volume da n-esfera de raio r), temos

$$⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant \frac{1}{n\sigma(n)} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy.$$

como era desejado.

Agora, fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Note que, podemos escrever

$$|u(x)| = \frac{|u(x)|}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} dy = ⨍_{B(x,1)} |u(x)|\, dy.$$

Dito isso, deduzimos que

$$|u(x)| \leqslant ⨍_{B(x,1)} |u(x) - u(y)|\, dy + ⨍_{B(x,1)} |u(y)|\, dy. \tag{3.50}$$

Observe que, pela desigualdade de Hölder, inferimos

$$\begin{aligned} ⨍_{B(x,1)} |u(y)|\, dy &= \frac{1}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} |u(y)|\, dy \\ &\leqslant \frac{1}{\sigma(n)} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} 1^{p'}\, dy\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{3.51}$$

onde p e p' são expoentes conjugados. Além disso, utilizando a desigualdade de Hölder novamente, chegamos a

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy \leqslant \left(\int_{B(x,1)} \|Du\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x-y\|^{(n-1)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

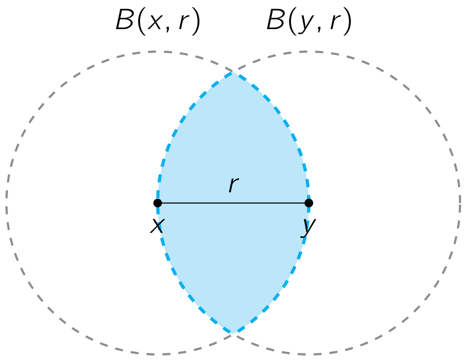


Figura 3.12: $B = B(x,r) \cap B(y,r)$.
Fonte: Autoral

onde p e p' são expoentes conjugados e a última integral é finita. De fato, utliizando coordenadas polares

$$\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x-y\|^{(n-1)p'}} = \int_0^1 \int_{\partial B(x,r)} \frac{1}{r^{(n-1)p'}} dS dr = n\sigma(n) \int_0^1 r^{(n-1)(1-p')}\, dr = n\sigma(n) \frac{p-1}{p-n} < \infty,$$

pois $n < p$. Dito isso, segue que

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.52}$$

Dessa forma, por (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52), deduzimos que

$$|u(x)| \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como x é arbitrário, também obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.53}$$

Agora, considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ e denote $r = \|x-y\|$. Portando, seja $B = B(x,r) \cap B(y,r)$ (ver Figura 3.12), sendo assim

$$|u(x) - u(y)| = \fint_B |u(x) - u(y)|\, dz \leqslant \fint_B |u(x) - u(z)|\, dz + \fint_B |u(y) - u(z)|\, dz. \tag{3.54}$$

Calculando a primeira acima integral obtemos, por (3.50), que

$$\fint_B |u(x) - u(z)|\, dz \leqslant \fint_{B(x,r)} |u(z) - u(x)|\, dz \leqslant c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(z)\|}{|z-x|^{n-1}}\, dz.$$

Analogamente a (3.52), inferimos que

$$\fint_B |u(x) - u(z)|\, dz \leqslant cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da mesma forma, segue que

$$\fint_B |u(y) - u(z)|\, dz \leqslant cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Sendo assim, por (3.54), podemos escrever

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c\|x-y\|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Isso mostra que

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|^\gamma} \right\} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.55}$$

Portanto por (3.53) e (3.55)

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Definição 3.46. Dizemos que u^* é uma versão de uma função u se

$$u = u^* \text{ qtp em seu domínio}$$

Para demonstrar a próxima desigualdade de Sobolev, precisamos do seguinte resultado

Teorema 3.47. O espaço de Hölder $(\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})})$ é um espaço de Banach

Demonstração. verificar (ainda não consegui) □

Teorema 3.48. Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Considere $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n < p \leqslant \infty$. Então u tem uma versão contínua $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, tal que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c é um constnte que depende de n, p e Ω.

Demonstração. Utilizando o Teorema 3.35, podemos considerar a extensão de u, $Eu = \bar{u}$, tal que

$$\begin{aligned} &\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega \\ &\bar{u} \text{ tem suporte compacto} \\ &\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Além disso, como $\operatorname{supp} \bar{u}$ é compcto, temos pelo Teorema 3.29, que existe uma sequência $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para k suficientemente grande, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0. \tag{3.57}$$

quando $k \to \infty$ Além disso, pelo Teorema 3.45, podemos escrever

$$\|u_k - u_l\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k - u_l\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ (pois é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$). Como $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 3.28), existe uma função $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \to 0. \tag{3.58}$$

Note que $u^* = \bar{u}$ qtp em $\mathbb{R}^n$ (análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.40) e $u = \bar{u}$ qtp em Ω (por (3.56)). Logo $u = u^*$ qtp em Ω, ou seja u^* é uma versão contínua de u. O Teorema 3.45 também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Passando ao limite, quando $k \to \infty$, chegamos por (3.57) e (3.58) a

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim, por (3.56) é verdade que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, concluimos que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

como era desejado. □

3.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev

Teorema 3.49. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp < n$, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant kp < n$ temos que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Como Ω é limitado e $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^1$, pelo Teorema 3.35 podemos considerar uma extenão $\overline{D^\beta u}$ de $D^\beta u$ com $|\beta| \leqslant k-1$. Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev obtemos

$$\|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D(\overline{D^\beta u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

Dessa forma, como $\overline{D^\beta u} = D^\beta u$ qtp em Ω, podemos escrever

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \leqslant \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D(\overline{D^\beta} u)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

porém a extensão é um operador linear limitado, sendo assim, temos que $\|\bar{v}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ para todo $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Dito isso, inferimos que

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|D^\beta u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Dessa forma $u \in \mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$. De forma análoga temos que $u \in \mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Indutivamente, chegamos a $u \in \mathcal{W}^{0,q}(\Omega) = \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

como queriamos mostrar. □

Definição 3.50. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é formado pelas funções $u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Esse espaço é munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|\leqslant k} [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

Teorema 3.51. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp > n$, então $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0,1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida com c dependendo apenas de k, p, n, γ e Ω.

Demonstração. Suponha que $\frac{n}{p}$ não é um inteiro. Então como visto na demonstração anterior temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ quando

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n} \tag{3.59}$$

desde que $\ell p < n$. Além disso, ℓ é um inteiro tal que

$$\ell < \frac{n}{p} < \ell + 1 \tag{3.60}$$

isto é $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Consequentemente temos por (3.59) e (3.60) que

$$r = \frac{pn}{n - pl} > n$$

Além disso, $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{1,r}(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leqslant k - \ell - 1$. Dito isso, pelo Teorema 3.35, seja $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de $D^\alpha u$. Assim pela Desigualdade de Morrey $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant c\|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Mostrando que $D^\alpha u \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ Observe também que $1 - \frac{n}{r} = \ell + 1 - \frac{n}{p} = \gamma$. Portanto $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}\right) \\ &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} + \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}\right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} 2\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} c\|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Por fim, suponha que $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Seja $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Como anteriormente, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}$ desde que (3.59) seja satisfeito. Porém agora

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} = n.$$

Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leqslant k - \ell$. Sejam $n < q < \infty$ e $1 \leqslant s = \frac{nq}{n+q} < n$. Dessa forma $s^* = q$ e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev temos que

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|D(D^\alpha u)\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c\|D(D^\alpha u)\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)}$$

que é finito pois $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$. Como Ω é limitado concluimos que

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-1$. Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-1 = k-\frac{n}{p}$. Como $n < q < \infty$, utilizando a Desigualdade de Morrey

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\Omega)}$$

para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-2$. Assim, tomando $\gamma \in (0,1)$ obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-l-1,q}(\Omega)} \leqslant \cdots \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$$

como era desejado. □

3.8 Compacidade

Definição 3.52. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos por $X \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} Y$ se para todo $x \in X$

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y, isto é, existe uma subsequência que converge em Y.

Observação: Se um mergulho satisfaz apenas a primeira propiedade, dizemos que X está continuamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 3.53 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Então

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega)$$

com $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q < p^*$

Demonstração. Seja $1 \leqslant q < p^*$ fixo. Como Ω é limitado, segue que $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}$ e pelo Teorema 3.40 temos $\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Logo $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Resta mostrar que se $(u_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ que converge em $\mathcal{L}^q(\Omega)$.

Pelo Teorema de Extensão, podemos supor sem perda de generalidade que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e que para todo $k \in \mathbb{N}$, u_k tem suporte compacto em algum aberto limitado $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Também podemos supor que

$$\sup_k \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} < \infty \tag{3.61}$$

poisa sequência é limitada

Primeiramente vamos estudar as funções suavizadas $u_k^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_k$ onde η_ε é a função molificadora vista na Seção 3.4. Também podemos supor que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ as funções u_k^ε tem suporte em V. Afirmamos que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \to 0 \tag{3.62}$$

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$. Com efeito, note que se u_k é suave, então

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(\tau) u_k(x-\tau)\, d\tau - u_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) u_k(x-\tau)\, d\tau - u_k(x)$$

Fazendo a substituição $\tau = \varepsilon y$ e lembrando que $\int_{B(0,1)} \eta(y)\, dy = 1$, obtemos

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y)\left(u_k(x-\varepsilon y) - u_k(x)\right)\, dy = \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_k(x - \varepsilon t y)\, dt dy$$

Para calcular essa derivada, seja $g(t) = x - \varepsilon t y$. Pela Regra da Cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}(u_k \circ g) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(g(t))\, g_j'(t) = -\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(g(t))\, y_j = -\varepsilon D u_k(x - \varepsilon t y)\cdot y$$

Sendo assim

$$u_k^\varepsilon(x) - u_k(x) = -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 D u_k(x - \varepsilon t y)\cdot y\, dt dy.$$

Daí, passando o módulo em ambos os lados e Utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) obtemos

$$|u_k^\varepsilon(x) - u_k(x)| \leqslant \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|D u_k(x - \varepsilon t y)\|\, dt dy$$

e integrando ambos os lados sobre V

$$\begin{aligned}\int_V |u_k^\varepsilon(x) - u_k(x)|\, dx &\leqslant \int_V \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|D u_k(x - \varepsilon t y)\|\, dt dy dx \\ &\leqslant \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \|D u_k(x - \varepsilon t y)\|\, dx dt dy \leqslant \varepsilon \int_V \|D u_k(z)\|\, dz.\end{aligned}$$

Isto é

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon \|D u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon c \|D u_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \varepsilon c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}$$

Akém disso, utilizando (3.61) e o Teorema da Convergência Dominada obtemos que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \to 0 \tag{3.63}$$

quando $\varepsilon \to 0$ uniformemente em k. Como $1 \leqslant q < p^*$, podemos utilizar a Desigualdade de Interpolação das normas $\mathcal{L}^p$

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^{\theta} \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

onde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$ e $0 < \theta < 1$. Ademais, por (3.61) e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, $\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$ é finito. De fato

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta} \leqslant c \|D u_k^\varepsilon - D u_k\|_{\mathcal{L}^p(V)}^{1-\theta} \leqslant c \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}^{1-\theta} < \infty.$$

Assim por (3.63)

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant c \|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^{\theta} \to 0$$

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$. Como era desejado.

Agora, afirmamos que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a sequência $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_k^\varepsilon(x)| \leqslant \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_k(y)|\, dy \leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \frac{c}{\varepsilon^n} < \infty \tag{3.64}$$

onde por (3.61) c não depende de k. De forma análoga, mostramos que

$$\|D u_k^\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \tag{3.65}$$

Isso prova que $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(V)$ é uniformemente limitada pois mostramos que $\|u_k^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant M$ onde $M > 0$ não depende de k. Ademais, $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é equicontínua pois, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\delta < \tilde{\varepsilon}/L$ tal que, pela Desigualdade do Valor Médio

$$\|x - y\| \leqslant \delta \implies |u_k^\varepsilon(x) - u_k^\varepsilon(y)| \leqslant L\|x - y\| < L\delta < \tilde{\varepsilon}.$$

onde $L = \sup_{x \in V} \|Du_k(x)\|$, que existe por (3.61) e (3.65) e não depende de k e x.

Agora seja $\delta > 0$ fixo. Mostremos que existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ tal que

$$\limsup_{j,\ell \to \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \delta. \tag{3.66}$$

De fato, por (3.62), conseguimos um valor de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|u_k^\varepsilon - u_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \frac{\delta}{2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ Além disso, sabemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ as funções u_k e u_k^ε tem suporte em um aberto limitado fixo $V \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos utilizar o fato da sequência $(u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ ser equicontínua e uniformemente limitada junto do Critério de Compacidade de Arzelà-Ascoli para obter uma subsequência $(u_{k_j}^\varepsilon)_{j=1}^\infty \subseteq (u_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente em V. Em particular

$$\limsup_{j,\ell \to \infty} \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_\ell}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} = 0.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}\limsup_{j,\ell \to \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant{}& \limsup_{j,\ell \to \infty} \|u_{k_j} - u_{k_j}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} \\ &+ \limsup_{j,\ell \to \infty} \|u_{k_j}^\varepsilon - u_{k_\ell}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \limsup_{j,\ell \to \infty} \|u_{k_\ell}^\varepsilon - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \delta.\end{aligned}$$

como era desejado. Por fim, escolhendo $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots$ em (3.66), conseguimos extrair uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ que satisfaz

$$\limsup_{j,\ell \to \infty} \|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} = 0$$

por que isso é suficiente? □

CAPÍTULO QUATRO

ALGUMAS APLICAÇÕES DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

4.1 Preliminares

4.1.1 Desigualdades

O primeiro preliminar para esse capítulo é a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, iremos apresentar o caso geral abaixo, mas utilizaremos apenas alguns casos particulares que serão mencionados após o teorema.

Teorema 4.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg — Caso 1)**.** Seja $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$ com $\ell < k$, $r = 1$ e $\frac{\ell}{k} \leqslant \theta \leqslant 1$. Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^{\ell}u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D^k u\|^{\theta}_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.2 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg — Caso 2)**.** Seja $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$ com $\ell < k$, $1 < r < \infty$, $k - \ell - \frac{n}{r}$ e $\frac{\ell}{k} \leqslant \theta \leqslant 1$. Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^{\ell}u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D^k u\|^{\theta}_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [6] $\square$

A desigualdade de Ladyzhenskaya é um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg apresentada acima. Quando $\ell = 0$, $m = 1$, $p = 4$, $q = r = 2$ e $\theta = \frac{3}{4}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}\|Du\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \tag{4.1}$$

Outras formas da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg que serão utilizadas são

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\|u\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.2}$$

onde $0 < c < 1$, e

$$\|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.3}$$

4.1.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta indispensável para o estudo de equações diferenciais parciais, aqui apresentaremos as definições básicas e algumas propriedades elementares que serão utlizadas ao decorrer do texto.

Definição 4.3. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\omega} f(x)\, dx,$$

e a transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\omega} f(\omega)\, d\omega.$$

Como $|e^{\pm ix\cdot\omega}| = 1$ e $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ as integrais acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou $\omega \in \mathbb{R}^n$ no caso da transformada inversa).

Teorema 4.4. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração. Ver [5] p.p. 183. □

Teorema 4.5 (Propiedades da transformada de Fourier)**.** Seja $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Então

(a) $\widehat{\lambda u + v} = \lambda \hat{u} + \hat{v}$;

(b) $\langle u, v\rangle = \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle$;

(c) $\widehat{D^\alpha u} = (i\omega)^\alpha \hat{u}$ para todo multi-índice α tal que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$;[1]

(d) $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}\hat{v}$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 185. □

Exemplo 4.6 (Transformada da derivada temporal)**.** Considere uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere sua derivada temporal. Dessa forma

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx = \frac{\partial u}{\partial t}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x} u(x,t)\, dx\right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

onde a penultima igualdade é válida pois $e^{-i\omega\cdot x}$ não depende de t.

Exemplo 4.7 (Derivada do Laplaciano)**.** Lembrando que dada uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o Laplaciano de u é dado por

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Dito isso, utlizando a transformada da derivada vista no item **(c)** do Teorema 4.5

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = -\omega_j^2 \hat{u}.$$

[1]Se $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice então $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1}\omega_2^{\alpha_2}\cdots\omega_n^{\alpha_n}$

Dessa forma

$$\widehat{\Delta u} = -(\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2)\hat{u} = -\|\omega\|^2\hat{u}.$$

4.1.3 Semigrupo do calor

Definição 4.8. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores de lineares limitados $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é um semigrupo se

1. $T(0) = I_X$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$

Nesse trabalho, será importante conhecer o semigrupo do calor, que provem da solução da equação do calor

$$\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \tag{4.4}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \tag{4.5}$$

Para encontrar, essas soluções, utlizaremos a transformada de Fourier. Dito isso, aplicando a transformada em (4.4) e (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_t - \nu\|\omega\|^2\mathbf{u} = 0 \quad & t > 0 \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} \quad & t = 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, temporariamente ignoramos as variaveis espaciais e trabalhamos apenas no domínino do tempo, sendo assim basta resolver a equação diferencial ordinária acima e depois aplicar a transformada inversa. Com efeito, a EDO tem solução dada por

$$\hat{\mathbf{u}} = Ae^{-\nu\|\omega\|^2 t},$$

onde A é determinado pela condição inicial, nesse caso $A = \hat{\mathbf{v}}$. Sendo assim a solução do problema auxiliar associado

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}e^{-\nu t\|\omega\|^2}.$$

Dessa forma podemos aplicar a transformada inversa para obter

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} * F}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

onde F é a transformada inversa de $e^{\nu t\|\omega\|^2}$. Ou seja

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x}e^{-\nu t\|\omega\|^2}\,d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t\omega_k^2}\,d\omega_k.$$

Para resolver essa integral, primeiramente precisamos completar o quadrado no expoente. Dito isso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t\omega_k^2}\,d\omega_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\nu t\omega_k^2 + ix_k\omega_k + \frac{x_k^2}{2\nu t} - \frac{x_k^2}{2\nu t}\right)d\omega_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\nu t}\right)\exp\left(-\left(\sqrt{\nu t}\omega_k - \frac{ix_k}{2\nu t}\right)^2\right)d\omega_k \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t_k = \sqrt{\nu t}\omega_k - \frac{ix_k}{2\nu t}$ obtemos $dt_k = \sqrt{\nu t}\,d\omega_k$ e a integral se torna

$$\frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-x_k^2}{4\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t_k^2}\,dt_k = \left(\frac{\pi}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}}$$

Sendo assim

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2}\, d\omega_k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} = \frac{1}{(2\nu t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}$$

Portanto

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\nu t}} \mathbf{v}(y)\, dy$$

O semigrupo do calor, denotado por $e^{\nu\Delta\tau}$ com $\tau > 0$ é uma família de operadores dada por

$$e^{\nu\Delta\tau}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} * E(\cdot, t)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}$$

com $E(x,t) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}$ O resto dessa subseção será destinada a estudar algumas propriedades que serão utlizadas no restante do texto

Proposição 4.9 (Priopriedades do semigrupo do calor)**.** Considere o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta\tau}$ então são válidas

(a) $e^{\nu\Delta\tau}(\lambda u + v) = \lambda e^{\nu\Delta\tau} u + e^{\nu\Delta\tau} v$

(b) $D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau} u) = e^{\nu\Delta\tau}(D^\alpha u)$

Demonstração. **(a)** Segue do fato da convolução ser um operador linear

(b) Análogo ao que foi mostrado no Teorema 3.29 □

Proposição 4.10. Seja $1 \leqslant r \leqslant 2$ e $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ então

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau} u)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(n,k)(\nu\tau)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)-\frac{k}{2}} \|u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \tag{4.6}$$

onde $k = |\alpha|$.

Demonstração. Ver [13] p.p. 32 □

4.1.4 Notação

Introduziremos a notação que será utliizada ao decorrer do texto.

Letras em negrito representam vetores n-dimensionais $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ (na maioria dos casos $n = 3$). A k-ésima derivada parcial é denotada por D_k. Também vale ressaltar a definição da norma $\mathcal{L}^p$ das funções vetoriais

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|D\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|D_j u_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

e de forma geral

$$\|D^k\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|D_{j_1}\cdots D_{j_k} u_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

e a norma em $\mathcal{L}^\infty$ é dada por

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^\infty} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|u_i(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

4.2 Propriedades da soluções de Leray

4.2.1 Introdução e contexto histórico

Em 1934 no artigo *"Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplassement l'espace"* [9] Leray construiu soluções fracas de energia finita[2]

$$\mathbf{u}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^\infty\big([0,\infty),\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\big) \cap \mathcal{C}_W\big([0,\infty),\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap \mathcal{L}^2\big([0,\infty),\dot{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^3)\big)^3 \tag{4.7}$$

para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u} \\ &\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ &\mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0 \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde $\nu > 0$ é constante. Estas soluções são tais que $\|\mathbf{u}(\cdot,t)-\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ quando $t\to 0^+$ e satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.9}$$

A unicidade desas soluções ainda é um problema em aberto, porem no mesmo artigo Leray mostrou que existe um instante de tempo T_{**} tal que a solução $\mathbf{u}$ se torna suave em $\mathbb{R}^3\times[T_{**},\infty)$ e $\mathbf{u}(\cdot,t)\in\mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}\big([T_{**},\infty),H^k(\mathbb{R}^3)\big)^4$ para cada $k\geqslant 0$. Um problema importante que foi deixado em aberto por Leray no final de seu artigo diz a respeito do decaimento de energia em L^2 da soluçao. Matemáticamente, isto é entender o que acontece com $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ quando $t\to\infty$. Leray suspeitava que no limite, essa norma é igual a zero, e de fato foi provado que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t\to\infty$. Uma demonstração para esse fato será apresentada no Teorema 4.16.

Uma outra forma de estudar propriedades das soluções das equações de Navier-Stokes é a partir das soluções $\mathbf{v}(\cdot,t)$ do problema linearizado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \nu\Delta\mathbf{v} \\ \mathbf{v}(\cdot,t_0) &= \mathbf{u}(\cdot,t_0) \end{aligned}$$

com $t\geqslant t_0\geqslant 0$. Aqui $\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)$ onde $e^{\nu\Delta(t-t_0)}$ é o semigrupo do calor visto no preliminares. Com essas soluções é possível estudar algumas estimativas de decaimento como

$$\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

[2]i.e., qual é o significado de energia finita?

[3]$\mathcal{L}^\infty\big([0,\infty),\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\big)$ é o espaço das funções $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ (i.e., $u_i\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ para todo $i=1,2,3$) com $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ tais que $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é limitada qtp. $\mathcal{C}_W\big([0,\infty),\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\big)$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot,t):[0,\infty)\to\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ fracamente contínuas e $\mathcal{L}^2\big([0,\infty),\dot{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^3)\big)$ é o espaço das funções tais que

$$\int_0^\infty \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,dt < \infty$$

[4]i.e., qual é a definição desse espaço

$$t^{\frac{n}{4}}\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

Uma outra pertunta importante (que não será trabalhada aqui) é sobre o erro ou diferença da solução de Leray e da solução do problema linearizado. Essa pergunta foi respondida por Weigner em [17] onde foi provado que

$$t^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}(\cdot,t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t \to \infty$.

4.2.2 Resultados

Tomando uma função molificadora $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ e sua versão escalada η_δ como vista no Capítulo 3, Seção 3.4 definimos $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \eta_\delta * \mathbf{u}_0$, introduzimos $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$ como a solução única do problema regularizado

$$\begin{aligned} &\partial_t \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}_\delta + \nabla\mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta = \nu\Delta\mathbf{u}_\delta \\ &\mathbf{u}_\delta(\cdot,0) = \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot,t) = \eta_\delta * \mathbf{u}_\delta(\cdot,t)$. Em seu artigo, Leray mostrou que existe uma sequência apropriada $\delta' \to 0$ tal que conseguimos a convergência fraca em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{u}_{\delta'} \rightharpoonup \mathbf{u}(\cdot,t)$$

para todo $t \geqslant 0$, com $\mathbf{u}(\cdot,t)$ apresentada em (4.7) contínua no instante $t=0$. Além disso, a desigualdade de energia (4.9) é satisfeita para todo $t \geqslant 0$ e em particular

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,dt \leqslant \frac{1}{2\nu}\|\mathbf{u}_0\| \tag{4.11}$$

Outros resultados importantes se referem à projeção de Helmholtz de $-\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)$ em $\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ isto é, o campo $\mathbf{Q}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot,t) := -\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t) - \nabla p(\cdot,t)$$

para $t > 0$. A seguir, estudaremos algumas estimativas de $\mathbf{Q}(\cdot,t)$

Proposição 4.11. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geqslant T_{**}$) tem-se

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > s$, onde c é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, dada por

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\omega\cdot x} f(x)\,dx.$$

Dada $\mathbf{v}(\cdot,s) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ abitrária, obtemos pelo Teorema 4.4

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2} = \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)]\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu\|\omega\|^2(t-s)}\|\hat{\mathbf{v}}(\omega,s)\|\,d\omega,$$

onde utlizamos o resultado sobre a transformada de Fourier do semigrupo do calor visto nos preliminares. Além disso, $\|\hat{\mathbf{v}}(\omega,s)\|^2 \leqslant \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_\infty = \sup\{\|\hat{\mathbf{v}}(\omega,s)\|\,;\omega\in\mathbb{R}^3\}$. Daí

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2} \leqslant \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-s)\|\omega\|^2}d\omega,$$

onde a integral do lado direito é uma Gaussiana, cujo resultado é $c\nu^{-\frac{3}{2}}(t-s)^{-\frac{3}{2}}$. Portanto

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_\infty. \tag{4.12}$$

O resultado que queremos, é uma aplicação direta de (4.12) com $\mathbf{v}(\cdot,s)=\mathbf{Q}(\cdot,s)$, o restante da demonstração será dedicado a estimativa do valor de $\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot,s)\|_\infty$.

Note que utilizando a derivada da transformada, temos que $\mathcal{F}[D^\alpha f]=(i\omega)^\alpha\hat{f}$, sendo assim se $\alpha=e_j$ para algum $j=1,2,3$, $\mathcal{F}[D^{e_j}f]=i\omega_j\hat{f}$. Dito isso $\mathcal{F}[\nabla p(\cdot,s)]=i\hat{p}(\omega,s)\omega$ e $\omega\cdot\hat{\mathbf{Q}}=0$ pois $\mathbf{Q}=\mathbf{u}_t-\nu\Delta\mathbf{u}$ e $\nabla\cdot\mathbf{Q}=(\nabla\cdot\mathbf{u})_t-\nu\Delta(\nabla\cdot\mathbf{u})=0$ já que $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$, dessa forma

$$0=\widehat{\nabla\cdot\mathbf{Q}}=\sum_{j=1}^{3}\widehat{\frac{\partial Q_j}{\partial x_j}}=\sum_{j=1}^{3}i\omega_j\hat{\mathbf{Q}},$$

ou seja, $\omega\cdot\hat{\mathbf{Q}}=0$. Além disso, pela definição de $\mathbf{Q}(\cdot,s)$ temos que $\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)+\mathcal{F}[\nabla p(\cdot,s)](\omega)=-\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)](\omega)$, sendo assim, fazendo o produto interno por $\hat{\mathbf{Q}}$ em ambos os lados e utlizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) obtemos

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)\cdot\hat{\mathbf{Q}}(k,s)+i\hat{p}(\omega,s)\omega\cdot\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)=-\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)](\omega)\cdot\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)$$

isto é

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)\|\leqslant\|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)](\omega)\|,$$

pois $i\hat{p}(\omega,s)\omega\cdot\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)=0$, para todo $\omega\in\mathbb{R}$. Isso nos diz que

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot,s)\|_\infty\leqslant\|\mathcal{F}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}](\cdot,s)\|_\infty. \tag{4.13}$$

Por outro lado, para $i=1,2,3$,

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla u_i(\cdot,s)](k)|\leqslant\sum_{j=1}^{3}|\mathcal{F}[u_j(\cdot,s)D^{e_j}u_i(\cdot,s)](k)|\leqslant(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{3}\|u_j(\cdot,s)D^{e_j}u_i(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Por fim, novamente utliizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) e a definição das normas

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla u_i(\cdot,s)](k)|\leqslant c\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_j(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Isto mostra que

$$\|\mathcal{F}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}](\cdot,s)\|_\infty\leqslant c\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.14}$$

Dito isso, por (4.12), (4.13) e (4.14)

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

como queriamos mostrar. □

Repetindo o argumento utilizado na demonstração para as soluções do problema regularizado (4.10) obtemos

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.15}$$

onde c é uma constante positíva e

$$\mathbf{Q}_\delta(\cdot,s)-=\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)-\nabla p_\delta(\cdot,s)$$

Observação: Vale ressaltar que as soluções do probblema regulariazado também satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}_\delta(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}+2\nu\int_0^t\|D\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds\leqslant\|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.16}$$

Proposição 4.12. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geqslant T_{**}$), tem-se

$$\|D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\right)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > s$, onde $k = |\alpha|$ e $c(m)$ depende apenas de m.

Demonstração. Por (4.6) obtemos

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}(t-s)^{-\frac{k}{2}}\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

e pelo resultado anterior

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Proposição 4.13. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (4.8). Então existe $t_{**} > T_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução $\mathbf{u}$) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma funçao monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**},\infty)$.

Demonstração. Sejam $t_0 \geqslant T_{**}$ e $t > t_0$. Aplicando a k-ésima derivada parcial D_k à $\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u}$, fazendo o produto escalar com $D_k\mathbf{u}$, integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0,t]$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\mathbf{u}_t\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx + \int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx&\\ + \int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\nabla p\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx = \nu\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\Delta\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx&\end{aligned} \tag{4.17}$$

Vamos analisar cada integral separadamente. Note que $D_k\mathbf{u}_t\cdot D_k\mathbf{u} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D_k\mathbf{u}\|^2$. Dessa forma

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\mathbf{u}_t\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|D_k\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 - \|D_k\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2\,dx.$$

Note que expandindo a segunda integral e utilizando integração por partes[5] temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = \sum_{i=1}^3\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} D_k u_i(D_i u_j)D_k u_j\,dx = -\sum_{i=1}^3\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_i(D_k u_i D_k u_j)\,dx$$

e utilizando a regra do produto na última integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = -\sum_{i=1}^3\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j\,dx - \sum_{i=1}^3\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j\,dx$$

porém a primeira integral do lado direito é igual a zero pois

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j\,dx &= \sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k\left(\sum_{i=1}^3 D_i u_i\right)D_k u_j\,dx\\ &= \sum_{j-1}^3\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k(\nabla\cdot\mathbf{u})D_k u_j = 0\end{aligned}$$

[5] explicar pq não tem termo de fronteira, não lembro da explicação

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j\,dx.$$

A terceira integral é igual a zero, já que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k\nabla p\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_k D_j p D_k u_j\,dx = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j D_k p D_k u_j\,dx$$

utlizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k\nabla p\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_j D_k u_j\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_k\left(\sum_{j=1}^{3} D_j u_j\right)\,dx = 0$$

pois novamente $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por fim, a ultima integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k u_i D_k u_i$$

novamente utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u}\,dx &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_j D_k u_i)(D_j D_k u_i)\\ &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_j D_k u_i)^2\,dx = -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_j D_k\mathbf{u}\|^2\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k D\mathbf{u}\|^2\,dx\end{aligned}$$

Dito isso, voltando para (4.17) e somando em $1 \leqslant k \leqslant 3$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 - \|D_k\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2\,dx + \nu\sum_{k=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k D\mathbf{u}\|^2\,dxds&\\ = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j\,dxds.&\end{aligned}$$

Lembrando da definição das normas vistas nos preliminares, multiplicando ambos os lados por 2 e reorganizando os termos, podemos reescrever a equaçao acima como:

$$\begin{aligned}&\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds\\ &\qquad = \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} u_i D_k u_j D_j D_k u_i\,dxds.\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder e a definição das normas, temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a aqui precisa detalhar, a gente fez mas não consegui entender pelas fotos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_\infty\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds$$

que pela Desigualdade de Gagliardo-Nireneberg (4.2) em $\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_\infty$ é menor ou igual a

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds.$$

Em particular temos

$$\begin{aligned}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &+ 2\nu\int_{t_0}^{t}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds\\ &\leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t}\left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\right]^{\frac{1}{2}}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned} \tag{4.18}$$

para todo $t \geqslant t_0$. Daí, seja $t_0 > t_*$ tal que por (4.9) $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2$. Dessa forma, segue que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2 \tag{4.19}$$

para todo $s > t_0$. Com efeito, suponha que (4.19) é falso, dessa forma, existiria $t_1 > t_0$ tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \nu^2$ para todo $t_0 \leqslant s < t_1$ com $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \nu^2$. Tomando $t = t_1$ em (4.18) temos que $\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. De fato

$$\begin{aligned}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &+ 2\nu\int_{t_0}^{t_1}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds\\ &\leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t_1}\left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\right]^{\frac{1}{2}}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

como $s \in [t_0, t_1]$ temos que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \nu^2$ obtemos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t_1}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t_1}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

que resulta em $\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ como desejado. Então

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \nu^2$$

o que é uma contradição. Dessa forma (4.19) é válido. De (4.18) e (4.19) temos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\gamma\int_{t_0}^{t}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_2)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t \geqslant t_2 \geqslant t_0$, onde $\gamma = \nu - \|\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} > 0$ é uma constante. Tomando $t_{**} = t_0$, finalizamos a demonstração. □

Proposição 4.14. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ solução de Leray para (4.8). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 > 0$ tem-se

$$\|D^\alpha\mathbf{v}(\cdot,t) - D^\alpha\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{5}{4}+\frac{k}{2}\right)}\|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}(t-\tilde{t}_0)^{-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)}$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_0)$ e $k = |\alpha|$.

Demonstração. Primeiramente, escrevemos $\mathbf{v}(\cdot,t)$ como

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,t)\right] + e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0)$$

onde $t > t_0$ e $\mathbf{u}_\delta(\cdot,t)$ dada em (4.10). Ademais, temos que

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0) = e^{\nu\Delta t_0}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot,s)\,ds \tag{4.20}$$

Com efeito, considere a equação

$$\partial_s\mathbf{u}_\delta = \mathbf{Q}_\delta + \nu\Delta\mathbf{u}_\delta$$

aplicando o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta(t_0-s)}$ em ambos os lados e integrando sobre $[0, t_0]$, obtemos

$$\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\partial_s \mathbf{u}_\delta\, ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta\, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta \mathbf{u}_\delta\, ds. \tag{4.21}$$

Note que

$$\partial_s \left[e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{u}_\delta\right] = -\nu e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta + e^{\nu\Delta(t_0-s)}\partial_s\mathbf{u}_\delta$$

ou seja

$$e^{\nu\Delta(t_0-s)}\partial_s\mathbf{u}_\delta = \partial_s\left[e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{u}_\delta\right] + \nu e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta.$$

Dessa forma, (4.21) se torna

$$\int_0^{t_0} \partial_s\left[e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{u}_\delta\right]\, ds + \nu\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta\, ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta\, ds + \nu\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta\, ds$$

isto é,

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) - e^{\nu\Delta t_0}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta\, ds$$

que reorganizando os termos, é exatamente a equação (4.20) que queriamos mostrar. Dito isso

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)\right] + e^{\nu\Delta t}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\, ds$$

para $t > t_0$. De forma análoga para $t > \tilde{t}_0$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)\right] + e^{\nu\Delta t}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\, ds.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} D^\alpha\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha\mathbf{v}(\cdot, t) &= D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)\right]\right) \\ &\quad - D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)\right]\right) + D^\alpha\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\, ds. \end{aligned}$$

Portanto, seja $K \subseteq \mathbb{R}^3$ um compacto qualquer, dito isso, temos para cada $t > \tilde{t}_0$ e $\delta > 0$

$$\|D^\alpha\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D^\alpha\left[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\right]\|_{\mathcal{L}^2(K)}\, ds$$

utilizando (4.15), temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a

$$J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{k}{2}}\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds$$

que pela Proposição 4.12, é menor ou igual a

$$J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-\tilde{t}_0)^{-\frac{k}{2}}\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds. \tag{4.22}$$

Observe que a integral pode ser simplificada, já que $s \leqslant \tilde{t}_0$ implica em $(t-s)^{-\frac{3}{4}} \leqslant (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}}$ e pela desigualdade de energia $\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Sendo assim

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds. \tag{4.23}$$

Pela desigualdade de Hölder e a desigualdade de energia, segue que

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2\nu^{\frac{1}{2}}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.24}$$

Portanto, por (4.23) e (4.23), obtemos

$$\|D^\alpha\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) - D^\alpha\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}-\frac{5}{4}\right)}(t-\tilde{t}_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

onde

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\delta}(t) = {}& \left\|D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,\tilde{t}_0)\right]\right)\right\|_{\mathcal{L}^2(K)} \\ & + \left\|D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0)\right]\right)\right\|_{\mathcal{L}^2(K)}. \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \delta' \to 0$, temos que $J_{\alpha,\delta}(t) \to 0$. pois, dados $\sigma, \tau > 0$

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot,\sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot,\sigma)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} \to 0$$

quando $\delta' \to 0$. De fato, denotando $\Phi_\delta(\cdot,\tau) = D^\alpha\left(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot,\sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,\sigma)]\right)$, tem-se

$$\Phi_\delta(\cdot,\tau) = H_\alpha(\cdot,\tau) * [\mathbf{u}(\cdot,\sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,\sigma)]$$

onde $H_\alpha(\cdot,\tau) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ não depende de δ. Como $\mathbf{u}(\cdot,\sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot,\sigma) \rightharpoonup 0$, segue que $\Phi_{\delta'}(x,\tau) \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$. Por outro lado

$$\begin{aligned} |\Phi_\delta(x,t)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x-y,\tau)[\mathbf{u}(y,\sigma) - \mathbf{u}_\delta(y,\sigma)]|\, dy \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x-y,\tau)|^2\, dy \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(y,\sigma) - \mathbf{u}_\delta(y,\sigma)|^2\, dy \\ &= \|H_\alpha(\cdot,\tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}(\cdot,\sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,\sigma)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

utilizando a desigualdade triangular e (4.16) obtemos

$$|\Phi_\delta(x,t)| \leqslant 2\|H_\alpha(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (pois $2\|H_\alpha(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante em relação a x e K é limitado, logo pertence a $\mathcal{L}^1(K)$), segue que $\|\Phi_{\delta'}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \to 0$, quando $\delta' \to 0$ pelo fato de K ser compacto. Dito isso, fazendo $\delta = \delta' \to 0$ em (4.22) temos que

$$\|D^\alpha\tilde{\mathbf{v}} - D^\alpha\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{5}{4}\right)}\|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}(t-\tilde{t}_0)^{-\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}\right)}$$

para todo $t_0 > \tilde{t}_0$. Tomando o supremo de todos $K \subseteq \mathbb{R}^3$ obtemos a desigualdade desejada. □

Teorema 4.15. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (4.8), então

$$t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Suponha que a afirmação é falsa, nesse caso existe uma sequência crescente $t_\ell \to \infty$ (com $t_\ell \geqslant t_{**}$ e $t_\ell \geqslant 2t_{\ell-1}$ para todo ℓ) e um $\varepsilon > 0$ fixo tal que

$$t_\ell\|D\mathbf{u}(\cdot,t_\ell)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \geqslant \varepsilon$$

para todo ℓ. Em particular

$$\int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2}\, dt \geqslant (t_\ell - t_{\ell-1})\|D\mathbf{u}(\cdot,t_\ell)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \geqslant \frac{1}{2}t_\ell\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^2} \geqslant \frac{1}{2}\eta$$

para todo ℓ, o que contradiz com a desigualdade de energia e (4.11). Portanto, a afirmação do teorema é válida. □

Teorema 4.16 (Solução do problema clássico de Leray)**.** Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (4.8), então

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} como definido na Proposição 4.13. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $t_0 \geqslant t_{**}$ suficientemente grande tal que pelo Teorema anterior, temos

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon$$

para todo $t \geqslant t_0$. Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$ obtemos, de forma análoga ao que foi feito na Proposição 4.14

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\, ds$$

Dito isso, utlizando a Proposição 4.11

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t} \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \\ &\leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds\end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds$$

e pelo Teorema 4.15 é menor ou igual a

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, \varepsilon \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds.$$

Note que

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} \leqslant 6\sqrt[4]{2}$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Sendo assim

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \varepsilon\nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Como $\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ quando $t \to \infty$, temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \left(1 + \nu^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\right) \varepsilon$$

para todo $t \gg 1$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

como era desejado. □

Note que os Teoremas 4.15 e 4.16 juntos mostram que temos o decaimento de energia na norma do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$. Já que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}$.

A demonstração do lema abaixo é bastante extensa, porem é de extrema importância para o último teorema dessa seção

Lema 4.17. Para cada $k \geqslant 0$, denotando $U_k(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ tem-se

$$U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$$

Demonstração. O caso $k = 0$ segue da desigualdade de energia pois esta nos diz que

$$U_0(t) = t^0 \|D^0 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t > 0$ (em particular $t \geqslant T_{**}$) e $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante. Logo, U_0 é limitada e $U_0 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$.

O caso $k = 1$ também já foi provado anteriormente. Pelo Teorema 4.15, temos que $U_1(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, isso é suficiente para mostrar que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ pois (??).

Dito isso, resta provar a afirmaçao para $k \geqslant 2$. De forma análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema ??, dado $t_0 \geqslant T_{**}$ podemos escrever $\mathbf{u}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)\, ds.$$

Dessa forma, para cada multi-índice α temos que

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \quad (4.25)$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$ Defina $U^\alpha(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|$ com $k = |\alpha|$. De (4.25) segue que

$$U^\alpha(t) \leqslant I_1(\alpha, t) + I_2(\alpha, t) + J_\alpha(t)$$

onde

$$I_1(\alpha, t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

$$I_2(\alpha, t) = \int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds,$$

$$J_\alpha(t) = \int_{t'}^{t} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

com $t' = \frac{t_0 + t}{2}$. Conseguimos estimar $I_1(\alpha, t)$ de forma direta. Com efeito, por (4.6) e pela desigualdade de energia

$$|I_1(\alpha, t)| \leqslant c(k, \nu) \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} \leqslant c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}}.$$

Porém note que

$$(t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(1 + \frac{t_0}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} \leqslant (1 + t_0)^{\frac{k}{2}}.$$

pois $\frac{t_0}{t - t_0} \leqslant t_0$ para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Dessa forma

$$|I_1(\alpha, t)| \leqslant c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0)$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Por outro lado utlizando a Proposição 4.12, temos

$$\begin{aligned} |I_2(\alpha, t)| &\leqslant c(k, \nu) \int_{t_0}^{t'} (t - s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \\ &\leqslant c(k, \nu) \int_{t_0}^{t'} (t - s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \end{aligned}$$

como sabemos que $U_1 \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**},\infty))$ temos que existe uma constante M_1 tal que $|U_1(s)| = s^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant M_1$ qtp em $[T_{**},\infty)$. Dessa forma, também utlizando a desigualdade de energia e o fato de $s \geqslant t_0$ (o que implica em $(t-s_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})} \leqslant (t-t_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}$)

$$|I_2(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu)\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(t-t_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}\int_{t_0}^{t'} s^{-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Sendo assim

$$|I_2(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu)\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(t-t_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t+t_0)^{\frac{1}{2}}$$

e de forma análoga ao que foi feito para $I_1(\alpha,t)$, $(t-t_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})}(t+t_0)^{\frac{1}{2}}$ é menor que uma constante que depende apenas de t_0 e k. Por isso

$$|I_2(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu,t_0,M_1,\mathbf{u}_0)$$

para todo $t \geqslant t_0+1$. Assim, obtemos

$$U^{\alpha}(t) \leqslant c(k,\nu,t_0,M_1,\mathbf{u}_0) + J_{\alpha}(t). \tag{4.26}$$

Logo, ainda resta estimar J_α, porem não conseguimos estimar J_α de forma geral para todo α, então faremos essa estimativa para o caso em que $|\alpha| = 2$ e depois utilizaremos indução para mostrar a estimativa de forma geral. Com efeito, considerando $D^\alpha = D_iD_j$ (consequentemente denotando $J_\alpha(t)$ por $J_{ij}(t)$) temos por (4.6) que

$$J_{i\ell}(t) = t\int_{t'}^{t}\|D_i[e^{\nu\Delta(t-t_0)}D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(\nu)\,t\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\,ds.$$

Para estimar $\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$ Note que $D_\ell\mathbf{Q} = -D_\ell[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}] - D_\ell\nabla p = -D_\ell[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}] - \nabla q_\ell$ onde $q_\ell = D_\ell p$. Aplicando o divergente nessa equação, temos que

$$-\Delta q_\ell = \operatorname{div}(D_\ell[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}]).$$

Aplicando a teoria de Calderon-Zygmund, temos para cada $1 < r < \infty$

$$\|\nabla q_\ell(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(r,n)\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]\|$$

o que implica em

$$\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(r,n)\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}.$$

No nosso, caso temos

$$\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$$

Dito isso

$$\begin{aligned}J_{i\ell}(t) &\leqslant c(\nu)\,t\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\\ &\leqslant c(\nu)\,t\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\left(\|D_\ell\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla D_\ell\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\right)ds\end{aligned}$$

Utliizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu)\,t\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\Big(\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\Big)ds$$

e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.1)

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu)\, t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \Big(\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{5}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \Big)\, ds.$$

Reescrevendo a equação acima como

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu)\, t \int_{t'}^{t} s^{-\frac{11}{8}} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \Big(\big(s^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big)^{\frac{5}{4}} \big(s\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big)^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \big(s^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big)^{\frac{3}{4}} \big(s\|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big) \Big)\, ds.$$

Fazendo as substituições adequadas, temos que o lado direito da equação acima é menor que

$$c(\nu)\, t M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}}\, ds + c(\nu)\, t M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds.$$

Utilizando a desigualdade de Young ($ab \leqslant a^p p^{-1} + b^q q^{-1}$ onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$) com $a = 1$, $b = U_2(s)^{\frac{3}{4}}$, $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$, temos que $U_2(s)^{\frac{3}{4}} \leqslant 1 + U_2(s)$. Dessa forma

$$c(\nu, M_1)\, t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}}\, ds + \Big(c(\nu, M_1)\, t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)\, t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \Big) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds.$$

Para simplificar a expressão acima, note que vamos precisar olhar essa passagem. Dito isso

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu, M_1)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds$$

para todo i, ℓ e $t \geqslant t_0 + 1$. Dessa forma

$$U_2(t) \leqslant c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds \tag{4.27}$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Considere agora, $t_2, \mathbf{M}_2$ dados por

$$t_2 := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \qquad \mathbf{M}_2 := \sup\{U_2(s) : t_0 \leqslant s \leqslant t_2\}.$$

Afirmamos que

$$U_2(t) \leqslant 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16 c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)\, \mathbf{M}_2$$

para todo $t \geqslant t_2$. De fato, definindo $\mathbf{U}_2(t) := \sup\{U_2(s) : t_2 \leqslant s \leqslant t\}$. Se $t' \geqslant t_2$, então por (4.27) temos

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leqslant c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)\, \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}}\, ds \\ &\leqslant c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 8c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_2(t) \end{aligned}$$

porém, como $t \geqslant t_2$ temos que, pela definição de t_2, $t + t_0 > t_2 > 2^{16} c_{**}^4$, isso implica em $2^{16} c_{**}^4 < t + t_0$ e elevando ambos os lados por $1/4$ obtemos $16 c_{**} < (t+t_0)^{\frac{1}{4}}$ que podemos reescrever como $8c_{**}(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} < 1/2$. Dito isso, obtemos

$$U_2(t) < c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

Por outro lado, se $t' < t_2$, podemos reescrever (4.27) como

$$U_2(t) \leqslant c_* + c_{**}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \left(\int_{t'}^{t_2} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds + \int_{t_2}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds \right).$$

Observe que em $[t', t_2]$ $U_2(s) \leqslant \mathbf{M}_2 \leqslant \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$ e em $[t_2, t]$, $U_2(s) \leqslant \mathbf{U}_2(s) \leqslant \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leqslant c_* + c_{**}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}\, \mathbf{M}_2 \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}}\, ds + c_{**}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}\, \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}}\, ds \\ &\leqslant c_* + c_{**}(t+t_0)^{-\frac{1}{4}}\, \mathbf{M}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{U}_2(t) \end{aligned}$$

mas $(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \leqslant 1$. Sendo assim

$$U_2(t) \leqslant c_* + c_{**}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{U}_2(t).$$

Logo, $\frac{1}{2}\mathbf{U}_2(t) \leqslant c_* + 8c_{**}$, que é equivalente à

$$U_2(t) \leqslant 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)\mathbf{M}_2$$

ou seja, mostramos que $U_2(t)$ é limitado por uma constante que não depende de t em $[t_2, \infty)$. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([t_2, \infty])$. Porém, sabemos que em $[T_{**}, \infty)$ em particular em $[T_{**}, t_2]$ $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave, o que implica em U_2 ser suave em um compacto, consequentemente limitada. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ como era desejado. Assim mostrado o caso $k = 2$.

Suponha que $U_\ell \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ para todo $\ell < k$. Dito isso seja α um multi-índice de ordem k. Denotando D^α por $D_i D^\gamma$ (onde γ é um multi-índice de ordem $k-1$), temos, de forma análoga ao que foi feito no caso $k = 2$

$$J_\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant c(\nu)\, t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Além disso por Calderon-Zygmund

$$\|D^\beta \mathbf{Q}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(r, n) \|D^\beta[\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}$$

para cada $1 < r < \infty$ e qualquer multi-índice β. Dessa forma

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu)\, t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\, ds$$

Utilizando a regra de Leibniz, obtemos

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\sigma \leqslant \gamma} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\sigma \mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla D^{\gamma-\sigma} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)},$$

e utlizando a Desigualdade de Hölder

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds,$$

além disso, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (4.1) segue que

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot, s)\|\, ds.$$

Escrevendo $J_\alpha(t)$ como a soma $J_1(t)+J_2(t)+J_3(t)$ onde

$$J_1(t)=c(\nu)t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|D^{\mathrm{u}}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|\,ds.$$

$$J_2(t)=c(\nu)\sum_{\ell=1}^{k-2}t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|D^\ell\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}}\|D^{k-\ell}\mathbf{u}(\cdot,s)\|\,ds.$$

$$J_3(t)=c(\nu)t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|D^{k-1}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|\,ds.$$

Como sabemos que $\|D^q\mathbf{u}(\cdot,s)\|=s^{-\frac{q}{2}}U_q(s)\leqslant M_q$ para $q<k$ e $\|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|=s^{-\frac{k}{2}}U_k(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}J_1(t)&\leqslant c(\nu)\,M_1^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\,t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)}\,U_k(s)\,ds\\&\leqslant c(\nu,k)M_1^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}U_k(s)\,ds\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de $s^{-\frac{3}{8}}<(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}$ para a ultima desigualdade. Análogamente para $J_2(t)$ temos

$$\begin{aligned}J_2(t)&\leqslant c(\nu)\sum_{\ell=1}^{k-2}M_\ell^{\frac{1}{4}}M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}}M_{k-\ell}\,t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)}\,ds\\&\leqslant c(\nu,k)\sum_{\ell=1}^{k-2}M_\ell^{\frac{1}{4}}M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}}M_{k-\ell}\,(t-t_0)^{-\frac{3}{8}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\,ds\\&\leqslant c(\nu,k)\sum_{\ell=1}^{k-2}M_\ell^{\frac{1}{4}}M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}}M_{k-\ell}\,(t-t_0)^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

e para $J_3(t)$

$$\begin{aligned}J_3(t)&\leqslant c(\nu)M_1M_{k-1}^{\frac{1}{4}}\,t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)}U_k(s)^{\frac{3}{4}}\,ds\\&\leqslant c(\nu,k)M_1M_{k-1}^{\frac{1}{4}}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}U_k(s)^{\frac{3}{4}}\,ds.\end{aligned}$$

Lembrando que $U_k(s)^{\frac{3}{4}}\leqslant 1+U_k(s)$, segue por (4.26) e pelas estimativas acima que

$$U^\alpha(t)\leqslant c(k,\nu,t_0,\mathbf{u}_0,M_1,\ldots,M_1)+c(k,\nu,\mathbf{u}_0,M_1)(t+t_0)\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}U_k(s)\,ds$$

onde $U^\alpha(t)=t^{\frac{k}{2}}\|D^\alpha\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Portanto

$$U_k(t)\leqslant c_*(k,\nu,t_0,\mathbf{u}_0,M_1,\ldots,M_1)+c_{**}(k,\nu,\mathbf{u}_0,M_1)(t+t_0)\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}U_k(s)\,ds$$

para todo $t\geqslant t_0+1$. De forma análoga ao caso $k=2$, definimos $t_k,\mathbf{M}_k$ por

$$t_k:=1+t_0+2^{16}c_{**}^4\qquad\mathbf{M}_k:=\sup\{U_k(s)\,;\,t_0\leqslant s\leqslant t_k\}$$

Sendo assim, afirmamos novamente que

$$U_k(t)=2c_*(k,\nu,t_0,\mathbf{u}_0,M_1,\ldots,M_{k-1})+16c_{**}(k,\nu,\mathbf{u}_0,M_1)\mathbf{M}_k$$

para todo $t\geqslant t_k$. Essa demonstração é exatamente a mesma que foi feita para o caso $k=2$. Ou seja, temos que U_k é limitada por uma constante que não depende de t em $[t_k,\infty)$, como U_k é limitada em $[T_{**},\infty)$, segue que $U_k\in\mathcal{L}^\infty([T_{**},\infty))$, como era desejado. $\square$

Teorema 4.18. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (4.8), então para todo $k \geqslant 0$ tem-se

$$t^{\frac{k}{2}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t \to \infty$

Demonstração. Os Teoremas 4.16 e 4.15 mostram os casos $k=0$ e $k=1$. Sendo assim, considere $k \geqslant 2$ e $t_0 \geqslant T_{**}$. Lembrando que

$$\|D^k\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D^k[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t'} \|D^k[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds$$
$$+ \int_{t'}^{t} \|D^k[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $t_\varepsilon > t_0$ suficientemente grande de forma que

$$t^{\frac{k}{2}}\|D^k[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$$

e

$$t^{\frac{k}{2}}\int_{t_0}^{t'} \|D^k[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Pelo Lema anterior, também é possível obter $t_\varepsilon > t_0$ de forma que

$$t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t} \|D^k[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon.$$

para todo $t \geqslant t_\varepsilon$. Ou seja, temos $t^{\frac{k}{2}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot,t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_\varepsilon$. Portanto

$$t^{\frac{k}{2}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

como queriamos mostrar. □

4.3 Problema de Dirichlet

Nessa seção retornamos ao problema visto na motivação do capítulo anterior.

O ponto principal dessa seção é o Teorema de Lax-Milgram que será utilizado para mostrar a existência de soluções fracas para o problema de Dirichet. Para demonstrá-lo, será necessário o Teorema da Representação de Riesz para espaços de Hilbert, que será apresentado abaixo.

Teorema 4.19 (Teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert)**.** Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v\rangle$$

para todo $u \in H$. Além disso $\|f\| = \|v\|$.

Demonstração. Seja $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado não nulo, então existe $z \in H$ tal que $f(z) \neq 0$. Como f é linear z deve ser não nulo. Ou seja, $\ker f \neq H$. Como f é limitado segue que $\ker f$ é fechado, sendo assim (por [15] p.p. 129), $H = \ker f \oplus \ker f^{\perp}$. Portanto, $\ker f^{\perp} \neq \{0\}$ (pois caso contrário $\ker f = H$). Dito isso, seja $w \in \ker f^{\perp}$ não nulo, então, para cada $u \in H$, $f(u)w - f(w)u \in \ker f$ já que

$$f(f(u)w - f(w)u) = f(u)f(w) - f(w)f(u) = 0.$$

Dessa forma

$$0 = \langle f(u)w - f(w)u, w\rangle = f(u)\langle w, w\rangle - f(w)\langle u, w\rangle,$$

ou seja

$$f(u) = \left\langle u, \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \right\rangle.$$

Escolhendo $v := \dfrac{f(w)}{\|w\|^2} w \in H$ (note que v não depende de u), temos que existe $v \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v\rangle$ para todo $u \in H$.

Para mostrar que v é único, suponha que exista $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = \langle u, \tilde{v}\rangle$ para todo $u \in H$. Dito isso

$$\langle u, v\rangle = f(u) = \langle u, \tilde{v}\rangle$$

para todo $u \in H$. Logo é verdade que

$$\langle u, v - \tilde{v}\rangle = 0$$

para todo $u \in H$, Em particular se $u = v - \tilde{v} \in H$, temos $\|v - \tilde{v}\| = 0$, ou seja, $v = \tilde{v}$. Portanto v é único.

Por fim, resta mostrar que $\|f\| = \|v\|$. De fato, note que $f(v) = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$. Ou seja

$$\|v\|^2 = f(v) \leqslant |f(v)| \leqslant \|f\|\|v\|.$$

Como v é não nulo, temos $\|v\| \leqslant \|f\|$. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schawarz

$$|f(u)| = |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$$

o que implica em $\|f\| \leqslant \|v\|$. Portanto, vale a igualdade:

$$\|f\| = \|v\|$$

□

Teorema 4.20 (Teorema de Lax-Milgram)**.** Sejam H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear tal que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B(u, v)| \leqslant \alpha\|u\|\|v\|$ para todo $u, v \in H$, i.e., a forma bilinear é limitada;
2. $\beta\|u\|^2 \leqslant B(u, u)$ para todo $u \in H$, i.e., a forma bilinear é coerciva,

e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então, existe um único $v \in H$ tal que

$$B(u, v) = f(u)$$

para todo $u \in H$.

Demonstração. Essa demonstração sera dividida em seis passos

Passo 1: Mostremos que existe uma aplicação $A : H \to H$ tal que $B(u, v) = \langle u, Av\rangle$ para todo $u, v \in H$.

Para cada $v \in H$ defina $g_v : H \to \mathbb{R}$ por

$$g_v(u) = B(u, v).$$

para todo $u \in H$ Claramente g_v é linear (pois B é uma forma bilinear). Além disso, g_v é limitada, já que

$$|g_v(u)| = |B(u, v)| \leqslant \alpha\|u\|\|v\|$$

para todo $u \in H$, onde utilizamos o fato de B ser limitada (ver ítem 1). Sendo assim,

$$\|g_v\| \leqslant \alpha\|v\|.$$

Logo g_v é limitada. Dito isso, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema ??), existe um único $w_v \in H$ tal que

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle$$

para todo $u \in H$. Agora, seja $A : H \to H$ dado por $Av = w_v$. Dessa forma, podemos escrever

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle = \langle u, Av \rangle . \tag{4.28}$$

para todo $u, v \in H$

Passo 2: Afirmamos que A é um operador linear e limitado

Sejam $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim, por (4.28), obtemos

$$\langle u, A(\lambda x + y)\rangle = B(u, \lambda x + y) = \lambda B(u, x) + B(u, y) = \lambda \langle u, Ax\rangle + \langle u, Ay\rangle = \langle u, \lambda Ax + Ay\rangle ,$$

para tudo $u \in H$, pois B é uma forma bilinear. Com isso $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$, para todo $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ Logo, A é linear. Além disso, dado $v \in H$, inferimos por (4.28) que

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av\rangle = B(Av, v) \leqslant |B(Av, v)| \leqslant \alpha\|Av\|\|v\|$$

pelo item 1. Deste modo, a seguinte desigualdade é válida:

$$\|Av\| \leqslant \alpha\|v\|.$$

para todo $v \in H$. Portanto A é limitado

Passo 3: É verdade que A é injetivo e $\mathrm{Im}A$ é fechado

Sabemos que existe $\beta > 0$ tal que $\beta\|u\|^2 \leqslant |B(u, u)|$ para todo $u \in H$. Dessa forma, por (4.28), concluimos que

$$\beta\|u\|^2 \leqslant |B(u, u)| = |\langle u, Au\rangle| \leqslant \|u\|\|Au\|$$

para todo $u \in H$, ou seja

$$\beta\|u\| \leqslant \|Au\| \tag{4.29}$$

para todo $u \in H$. Seja $u \in \ker A$, então $Au = 0$, daí por (4.29)

$$\beta\|u\| \leqslant \|Au\| = 0$$

o que implica em $u = 0$. Portanto A é injetiva.

Além disso, seja $(Au_k) \subseteq \mathrm{Im}A$ tal que $Au_k \to v \in H$, quando $k \to \infty$. Mostremos que $v \in \mathrm{Im}A$. Com efeito, (Au_k) é de cauchy (porque converge). Dito isso, por (4.29)

$$\beta\|u_k - u_\ell\| \leqslant \|Au_k - Au_\ell\| \to 0$$

Ou seja, $(u_k) \subseteq H$ é de Cauchy. Como H é completo, existe $u_0 \in H$ tal que $u_n \to u_0$. Como A é limitado (o que implica em A ser contínuo) temos que $Au_k \to Au_0$, quando $k \to \infty$. Pela unicidade do limite, deduzimos que $v = Av_0 \in \mathrm{Im}A$. Portanto Vamos mostrar que $\mathrm{Im}A$ é fechado.

Passo 4: A é sobrejetivo

Sabemos que $H = \text{Im}A \oplus \text{Im}A^{\perp}$ (pois ImA é fechado). Mostremos que $\text{Im}A^{\perp} = \{0\}$. Com efeito, se $w \in \text{Im}A^{\perp}$, temos pelo item 2, e por (4.28) que

$$\beta\|w\|^2 \leqslant B(w,w) \leqslant |B(w,w)| = |\langle w, Aw\rangle| = 0$$

pois $Aw \in \text{Im}A$ e $w \in \text{Im}A^{\perp}$. Logo, $w = 0$, o que implica em $H = \text{Im}A$. Portanto, A é sobrejetiva.

Passo 5: É verdade que existe $v \in H$ tal que $f(u) = B(u,v)$ para todo $u \in H$.

Como f é um funcional linear limitado em H, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema ??), existe $z \in H$ tal que $f(u) = \langle u, z\rangle$ para todo $u \in H$. Como A é uma bijeção, existe um único $v \in H$ tal que $z = Av$. Dessa forma, podemos escrever

$$f(u) = \langle u, z\rangle = \langle u, Av\rangle = B(u,v) \tag{4.30}$$

para todo $u \in H$.

Passo 6: Vamos mostrar que v em (4.30) é único

Suponha que existe $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = B(u,\tilde{v})$ para todo $u \in H$. Dessa forma, as igualdades abaixo são válidas

$$B(u,v) = f(u) = B(u,\tilde{v}).$$

para todo $u \in H$. Por isso, pela linearidade de B, segue que $B(u, v-\tilde{v}) = 0$ para todo $u \in H$. Dito isso, pelo item 2, chegamos a

$$\beta\|v-\tilde{v}\|^2 \leqslant |B(v-\tilde{v}, v-\tilde{v})| = 0.$$

Sendo assim, $v = \tilde{v}$. Portanto, v é único. $\square$

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram (Existência de soluções fracas)**.** Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Na motivação vimos que u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_{\Omega} Du \cdot D\phi \, dx + \int_{\Omega} u\phi \, dx = \int_{\Omega} f\phi \, dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Porem, pela densidade das funções teste em $H_0^1(\Omega)$ (ver Teorema ??), podemos dizer que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se esta satisfaz a igualdade

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$[6].

Defina a forma $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$B(u,v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx$$

[6] Vale ressaltar que $H_0^1(\Omega) = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço com produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \int_{\Omega} D^{\alpha}u D^{\alpha}v \, dx.$$

Mais precisamente, pelo Teorema 3.28, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$, e o funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(v) = \int_\Omega f v \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Note que B é uma forma bilinear limitada e coerciva. Com efeito, a bilinearidade de B segue do fato do gradiente fraco D e a integral serem operadores lineares. Além disso, é verdade que

$$B(u, u) = \int_\Omega Du \cdot Du \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx = \int_\Omega \|Du\|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^2 \, dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Logo, B é coercivo e, utilizando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &\leqslant \int_\Omega |Du \cdot Dv| \, dx + \int_\Omega |uv| \, dx \\
&\leqslant \int_\Omega \|Du\|\|Dv\| \, dx + \int_\Omega |u||v| \, dx \leqslant \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|Dv\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

Porém, sabemos que $\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Dito isso, obtemos

$$|B(u, v)| \leqslant c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Logo, B é limitado.

Por fim, temos que φ é um funcional linear limitado. De fato, a linearidade de φ segue da distributividade do produto e da linearidade da integral. Por outro lado,

$$|\varphi(v)| \leqslant \int_\Omega |f||v| \, dx \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} < \infty$ pois, por hípotese, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = \varphi(v)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, existe u é a única solução fraca para o problema de Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

[1] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.

[2] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.

[3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[4] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.

[6] Alberto Fiorenza, Maria Rosaria Formica, Tomáš Roskovec e Filip Soudský. *Detailed proof of classical Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality with historical remarks*. 2018.

[7] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 1999.

[8] Giovanni P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems*. 2nd. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.

[9] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.

[10] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: `1604.02484 [math.HO]`.

[11] Elon Lages Lima. *Curso de Análise vol. 2*. 12ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020.

[12] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.

[13] Jens Lorenz e Paulo R. Zingano. *The Navier-Stokes equations for Incompressible Flows: solution properties at potential blow-up times*. 2015.

[14] James R. Munkres. *Analysis on Manifolds*. CRC Press, 1991.

[15] César R. de Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. 1ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018, p. 257.

[16] C.W. Oseen. *Hydrodynamik*. Mahtematik in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.

[17] Michael Wiegner. «Decay Results for Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations on Rn». Em: *Journal of The London Mathematical Society-second Series* 35 (1987), pp. 303–313.

[18] Paulo R. Zingano. *Two problems in Partial Differential Equations (in Portuguese)*. 2018.