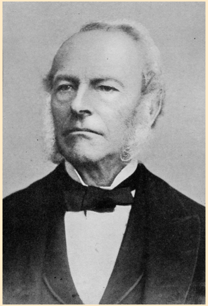
Decaimentos das Soluções de Leray e um Problema de Dirichlet via Espaços de Sobolev

Bruno Sant'Anna Donato de Moura

Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Matemática

20 de junho de 2025



Espaços de Sobolev

Motivação

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f, \text{ em } \Omega; \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado.

Motivação

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f, \text{ em } \Omega; \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema acima é uma função $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo (1).

Motivação

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + u = f, \ \text{em } \Omega; \\ u = 0, \ \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema acima é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfazendo (1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (1) por uma função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_{\mathcal{U}} -\phi \Delta u \, dx + \int_{\mathcal{U}} u\phi \, dx = \int_{\mathcal{U}} f\phi \, dx.$$

Motivação

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f, \text{ em } \Omega; \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema acima é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfazendo (1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (1) por uma função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_{\mathcal{U}} -\phi\Delta u \, dx + \int_{\mathcal{U}} u\phi \, dx = \int_{\mathcal{U}} f\phi \, dx.$$

Note que, utlizando integração por partes, a primeira integral acima pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} -\phi\Delta u \, dx = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \, dx = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \right).$$

Mas, como ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, inferimos que

$$\int_\Omega -\phi\Delta u \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Mas, como ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, inferimos que

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega u\phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx, \tag{2}$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Mas, como ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, inferimos que

$$\int_\Omega -\phi \Delta u \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega u\phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx, \tag{2}$$

para toda função $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$. Observe agora que, não precisamos mais que u seja de classe C^2 já que a segunda derivada de u não é utilizada em (2). Na verdade, não precisamos nem que u seja contínua, apenas integrável em Ω.

Derivada fraca

Nosso primeiro objetivo é generalizar a definição de derivada para funções que não são diferenciáveis no sentido usual.

Derivada fraca

Nosso primeiro objetivo é generalizar a definição de derivada para funções que não são diferenciáveis no sentido usual. Inicialmente, considere $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e ϕ uma função teste, utilizando integração por partes podemos escrever

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\phi\nu_i\, dS - \int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx,$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Derivada fraca

Nosso primeiro objetivo é generalizar a definição de derivada para funções que não são diferenciáveis no sentido usual. Inicialmente, considere $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e ϕ uma função teste, utilizando integração por partes podemos escrever

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\phi\nu_i \, dS - \int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Como ϕ tem suporte compacto em um aberto Ω, segue que $\phi \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Portanto, a expressão acima se torna

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx, \tag{3}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Se agora considerarmos $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx. \tag{4}$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

e podemos aplicar (3) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe de $\mathcal{C}^k$.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe de $\mathcal{C}^k$. Note que, o lado esquerdo de (4) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe de $\mathcal{C}^k$. Note que, o lado esquerdo de (4) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. O problema é que se u não for necessáriamente de classe $\mathcal{C}^k$, não existe garantia de que o lado direito de (4) está bem definido. Para contornar isso, nos perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que (4) é válida quando substituimos $D^\alpha u$ por v.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe de $\mathcal{C}^k$. Note que, o lado esquerdo de (4) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. O problema é que se u não for necessáriamente de classe $\mathcal{C}^k$, não existe garantia de que o lado direito de (4) está bem definido. Para contornar isso, nos perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que (4) é válida quando substituimos $D^\alpha u$ por v.
Sendo assim, definimos a α-ésima derivada fraca de uma função $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ como a função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (que denotamos por $D^\alpha u$) tal que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$.

Exemplos

1. A função $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = |x|$ não é diferenciável mas possui deriavada fraca dada por

$$u'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos

1. A função $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = |x|$ não é diferenciável mas possui deriavada fraca dada por
$$u'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x > 0; \\ 0, & \text{se } \ x = 0; \\ -1, & \text{se } \ x < 0. \end{cases}$$

2. A função $u : (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por
$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \ 0 < x \leqslant 1; \\ 2, & \text{se } \ 1 < x < 2, \end{cases}$$
não possui derivada fraca.

Exemplos

1. A função $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = |x|$ não é diferenciável mas possui deriavada fraca dada por
$$u'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; x > 0; \\ 0, & \text{se } \; x = 0; \\ -1, & \text{se } \; x < 0. \end{cases}$$

2. A função $u : (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por
$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \; 0 < x \leqslant 1; \\ 2, & \text{se } \; 1 < x < 2, \end{cases}$$
não possui derivada fraca.

3. A função $u : (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ não é diferenciável mas possui derivadas pariciais fracas dadas por
$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{\frac{1}{2}}.$$

Espaços de Sobolev

Definição

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,;\, D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega),\ \text{para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k\},$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada fraca de u

Espaços de Sobolev

Definição

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,;\, D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega),\ \text{para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k\},$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada fraca de u

Teorema

$(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ é um espaço de Banach, onde

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

se $1 \leqslant p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Observações

1. Se $p = 2$ denotamos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$ pelo fato de ser um espaço de Hilbert, com seu produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx$$

Observações

1. Se $p = 2$ denotamos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$ pelo fato de ser um espaço de Hilbert, com seu produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega D^\alpha u\, D^\alpha v\, dx$$

2. Dizemos que uma sequência de funções $(u_n) \subseteq \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ converge uma função u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Observações

1. Se $p = 2$ denotamos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$ pelo fato de ser um espaço de Hilbert, com seu produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx$$

2. Dizemos que uma sequência de funções $(u_n) \subseteq \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ converge uma função u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

3. O espaço $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ ($H_0^k(\Omega)$ se $p = 2$) é definido como o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Isto é equivalente a dizer que dada uma função u em $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ existe uma sequência de funções em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Propriedades da derivada fraca

1. **(Unicidade)** Se v e $\tilde{v}$ são derivadas fracas de uma função u então $v = \tilde{v}$ qtp.

Propriedades da derivada fraca

1. **(Unicidade)** Se v e $\tilde{v}$ são derivadas fracas de uma função u então $v = \tilde{v}$ qtp.
2. **(Linearidade)** Se $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v.$$

Propriedades da derivada fraca

1. **(Unicidade)** Se v e $\tilde{v}$ são derivadas fracas de uma função u então $v = \tilde{v}$ qtp.
2. **(Linearidade)** Se $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e
$$D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v.$$
3. **(Regra de Leibniz)** Se $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e
$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u, \tag{5}$$
onde
$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$
e $\sigma \leqslant \alpha$ significa $\sigma_j \leqslant \alpha_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos, não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora

Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos, não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1; \\ 0, & \text{se } |x| \geqslant 1, \end{cases} \tag{6}$$

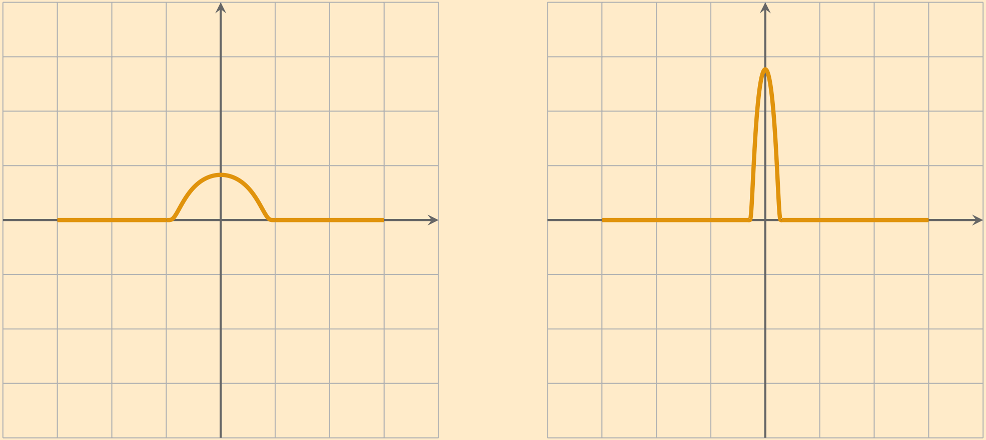
Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos η_ε dada por

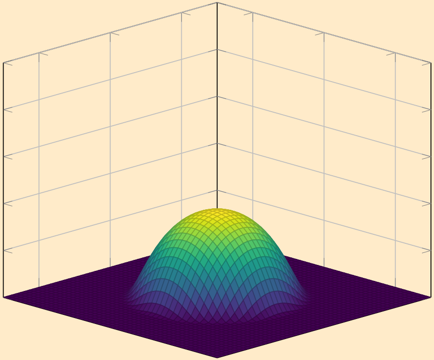
$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

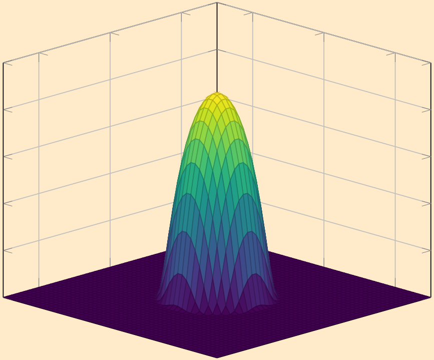
Essa aplicação será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}$. Se u é uma função localmente integrável, definimos a **molificação** de u por $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, isto é

$$u^\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y) = \int_{B[0,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(y)u(x-y)\,dy,$$

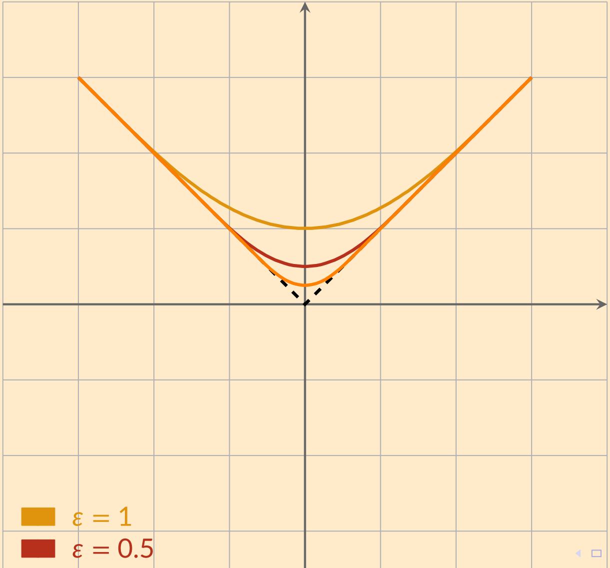
para todo $x \in \mathbb{R}^n$.



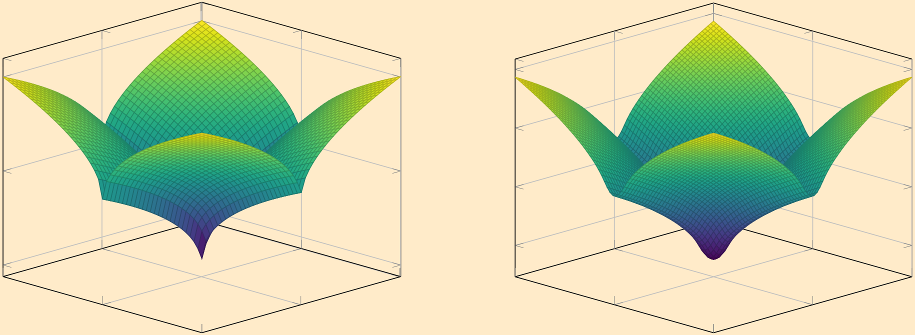




Exemplos



Exemplos



À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^{ε} com $\varepsilon = 0.25$.
Fonte: Autoral.

Resultados

Nesse capítulo estudamos três resultados

Teorema

Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \quad \text{em } \Omega_\varepsilon,$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então,

(a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$;

(b) $u^\varepsilon \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$.

Resultados

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \;\text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega),$$

quando $n \to \infty$.

Resultados

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \to u \ \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega),$$

quando $n \to \infty$.

Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto específico.

Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto específico.
Nessa seção estudamos o resultado abaixo

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então, existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leqslant p < \infty$, tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, tem-se que

(a) $Eu = u$ qtp em Ω;

(b) $\operatorname{supp} Eu \subseteq \Omega'$;

(c) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p, Ω e Ω'.

Traços

Em alguns casos, no estudo de equações diferenciais parciais, é necessário impor condições de contorno na fronteira de um domínio. Para isso, precisamos entender o que significa restringir uma função em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ à fronteira de Ω. Isso pode ser feito por meio do operador **traço**.

Nessa seção vimos dois resultados

Teorema

Seja Ω um aberto limitado, com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Então, existe um operador linear limitado $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, tal que

(a) $Tu = u\big|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$;

(b) $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde c depende apenas de p e Ω.

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então,

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços.
Dividiremos o estudo dessas desigualdades em dois casos: $1 \leqslant p < n$ e $n < p \leqslant \infty$, onde n é a dimensão do espaço Euclidiano.

Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Definição

Se $1 \leqslant p < n$, o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Definição

Se $1 \leqslant p < n$, o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Teorema

Seja $1 \leqslant p < n$. Então, existe uma constante c, que depende apenas de p e n, tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{7}$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Definição

Se $1 \leqslant p < n$, o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Teorema

Seja $1 \leqslant p < n$. Então, existe uma constante c, que depende apenas de p e n, tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{7}$$

para toda função $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração da desigualdade de GNS

$\boxed{p = 1}$

Como, por hipótese, u tem suporte compacto, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\, dy_i,$$

e assim,

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \right| dy_i \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\|\, dy_i.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de 1 até n, obtemos

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$ por X_i e integrando ambos os lados da desigualdade acima, em relação a x_1, de $-\infty$ a ∞, chegamos a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\|\, dy_1 \right)^{\frac{n}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.\end{aligned}$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1, então a sua integral é constante em relação a x_1. Sendo assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, a desigualdade acima se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\|\, dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\|\, dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Por conseguinte, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} I_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}\, dx_2,$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\|\, dy_1 \text{ e } I_i = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\|\, dx_1 dy_i \quad (i = 2, \dots, n).$$

Porém, I_2 é constante em relação a x_2, então

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant I_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}\, dx_2.$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini, inferimos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1dx_2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\|Du(X_1)\|\,dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\|Du(X_2)\|\,dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\|Du(X_i)\|\,dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, chegamos a

$$\|u\|^{p^*}_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\|Du\|dx_1\ldots dy_i\ldots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|Du\|\,dx\right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|^{p^*}_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ou seja,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{8}$$

como queriamos mostrar.

$\boxed{1 < p < n}$

Considere a função $|u|^\gamma$, com $\gamma > 1$ a ser escolhido a seguir. Utilizando a desigualdade obtida no caso $p = 1$, podemos escrever

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[|u|^\gamma\right]^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|D(|u|^\gamma)\|\, dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}\|Du\|\, dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na última integral, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|Du\|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Escolhendo γ de forma que $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\dfrac{p}{p-1}$, isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

Nesse caso, $\dfrac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim, por (9) podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|Du\|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

finalizando a demonstração. $\square$

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Então. $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e, além disso,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde $c > 0$ é uma constante que depende apenas de n, p e Ω.

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < n$, então a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \tag{10}$$

é válida para $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n.

Teorema (Desigualdade de Poincaré)

Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida, onde c é uma constante que depende de p, q e n.

Desigualde de Morrey

Teorema

Sejam $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n < p \leqslant \infty$ e $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Então,

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n.

Teorema

Seja Ω um aberto limitado, com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Considere $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n < p \leqslant \infty$. Então, u tem uma versão (coincide com u qtp em Ω) contínua $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, tal que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c é um constante que depende de n, p e Ω.

Desigualdads gerais de Sobolev

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp < n$, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω.

Desigualdads gerais de Sobolev

Teorema

Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$, e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp > n$, então $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0, 1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \tag{11}$$

é valida, onde c depende apenas de k, p, n, γ e Ω.

Resumo dos mergulhos

1. $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, com $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e $1 \leqslant p < n$;
2. $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, com $1 \leqslant s \leqslant \infty$;
3. $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, com $kp < n$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{k}{n}$;
4. $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-\ell-1\gamma}(\overline{\Omega})$, com $kp > n$ e $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Compacidade

Definição

Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos $X \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} Y$, se para todo $x \in X$, tem-se

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y, isto é, existe uma subsequência que converge em Y.

Compacidade

Definição

Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, se para todo $x \in X$, tem-se

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y, isto é, existe uma subsequência que converge em Y.

Teorema de Rellich-Kondrachov

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Então,

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega),$$

com $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q < p^*$.

Aplicações dos espaços de Sobolev

Introdução

Em 1934, no artigo *"Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplassement l'espace"* Leray construiu soluções fracas de energia finita

$$\mathbf{u}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^{\infty}([0,\infty),\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}_w\left([0,\infty),\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right) \cap \mathcal{L}^2([0,\infty),\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))^1 \tag{12}$$

para as seguintes equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u}; \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0; \\ \mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0 \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{13}$$

onde $\nu > 0$ é constante e $\nabla\cdot\mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$. Estas soluções são tais que $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$, quando $t \to 0^+$, e satisfazem a desigualdade de energia abaixo:

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{14}$$

para todo $t > 0$.

A unicidade desas soluções ainda é um problema em aberto; porém, no mesmo artigo Leray mostrou que existe um instante de tempo T_{**} tal que a solução **u** se torna suave em $\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty)$ e $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}([T_{**}, \infty), H^k(\mathbb{R}^3))$ para cada $k \geqslant 0$. Um problema importante que foi deixado em aberto por Leray no final de seu artigo diz respeito ao decaimento de energia em L^2 da solução de (13). Matematicamente, isto significa entender o que acontece com $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$, quando $t \to \infty$. Leray suspeitava que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$. Uma demonstração para esse fato será apresentada nessa apresentação

Uma outra forma de estudar propriedades das soluções das equações de Navier-Stokes (13) é a partir das soluções $\mathbf{v}(\cdot,t)$ do problema linearizado

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t = \nu\Delta\mathbf{v}; \\ \mathbf{v}(\cdot,t_0) = \mathbf{u}(\cdot,t_0), \end{cases} \tag{15}$$

com $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Aqui,

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0),$$

onde $e^{\nu\Delta(t-t_0)}$ é o semigrupo do calor visto nos preliminares. Com essas soluções, é possível estudar algumas estimativas de decaimento como

$$\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

$$t^{\frac{n}{4}}\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

$$t^{\frac{s}{2}}\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \to 0, \tag{16}$$

quando $t \to \infty$,

Resultados auxiliares

Tomando uma função molificadora $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ e sua versão escalada η_δ definimos $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \eta_\delta * \mathbf{u}_0$, introduzimos $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ como a solução única do problema regularizado

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta = \nu \Delta \mathbf{u}_\delta; \\ \mathbf{u}_\delta(\cdot, 0) = \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta}, \end{cases} \tag{17}$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_\delta = \eta_\delta * \mathbf{u}_\delta$. Em seu artigo, Leray mostrou que existe uma sequência apropriada $\delta' \to 0$ tal que conseguimos seguinte a convergência fraca em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\mathbf{u}_{\delta'} \rightharpoonup \mathbf{u}, \tag{18}$$

para todo $t \geqslant 0$, onde $\mathbf{u}(\cdot, t)$ apresentada em (12) é contínua no instante $t = 0$. Além disso, a desigualdade de energia (14) é satisfeita para todo $t \geqslant 0$ e, em particular,

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, dt \leqslant \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{19}$$

Outros resultados importantes se referem à projeção de Helmholtz[2] de $-\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)$ em $\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ isto é, o campo $\mathbf{Q}(\cdot,t)\in\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot,t)\ :=-\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)-\nabla p(\cdot,t), \tag{20}$$

para todo $t>0$.
A seguir, estudaremos algumas estimativas para $\mathbf{Q}(\cdot,t)$.

[2] A projeção de Helmholtz é uma forma de escrever um campo vetorial F como $F=G+H$, onde G,H são campos vetoriais tais que $\nabla\cdot G=0$ e $H=\nabla\Phi$ para alguma função $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Proposição

Para quase todo $s > 0$ (e para todo $s \geqslant T_{**}$), tem-se

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > s$, onde c é uma constante positiva.

Proposição

Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geqslant T_{**}$), tem-se

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s))\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > s$, onde $k = |\alpha|$ e $c(k)$ depende apenas de k.

Proposição

Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (13). Então existe $t_{**} > T_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução $\mathbf{u}$) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma funçao monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**}, \infty)$.

Proposição

Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray para (13). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 > 0$, tem-se

$$\|D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t) - D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{5}{4}+\frac{k}{2}\right)} \|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}_0)^{-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)},$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0)$ e $k = |\alpha|$.

Decaimentos da solução de Leray

Teorema

Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (13); então,

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0, \tag{21}$$

quando $t \to \infty$.

Teorema (Solução do problema clássico de Leray)
Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (13), então

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração

Seja t_{**} como definido anteriormente. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $t_0 \geqslant t_{**}$ suficientemente grande tal que, pelo Teorema anterior, podemos inferir

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon, \tag{22}$$

para todo $t \geqslant t_0$. Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$, escrevemos

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\, ds, \tag{23}$$

para todo $t \geqslant t_0$.

Dito isso, utlizando uma das estimativas vistas, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t} \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \\ &\leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de energia (14), concluímos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds,$$

para todo $t \geqslant t_0$.

Por (22), deduzimos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,\varepsilon\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}}s^{-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Note que

$$\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}}s^{-\frac{1}{2}}\,ds \leqslant c,$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Sendo assim, é verdade que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\varepsilon\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Por outro lado, pela identidade de Plancharel, sabemos que

$$\begin{aligned}\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &= \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)]\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\omega,t_0)]\|^2\,d\omega = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2}\|\hat{\mathbf{u}}(\omega,t_0)\|^2\,d\omega.\end{aligned}$$

Como $e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2}\|\hat{\mathbf{u}}(\omega,t_0)\|^2 \leqslant \|\hat{\mathbf{u}}(\omega,t_0)\|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, então, pelo Teorema da Convergência Dominada, inferimos

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Dito isso, concluímos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \left(1 + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\right)\varepsilon,$$

para todo $t, t_0 > 0$ suficientemente grandes. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$. $\square$

Note que os últimos dois teoremas juntos mostram que temos o decaimento de energia na norma do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$, já que $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Mais precisamente,

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + t^{-1}\big[t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big]^2 \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Lema

Para cada $k \geqslant 0$ inteiro, denotando $U_k(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$, tem-se

$$U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty)).$$

Teorema

Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (13), então, para todo $k \geqslant 0$ inteiro tem-se

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

O Teorema anterior mostra um decaimento para as soluções de Leray na norma do espaço $H^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{W}^{k,2}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\ell=0}^{k} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Mais precisamente

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\ell=0}^{k} \big[t^{-\frac{\ell}{2}} t^{\frac{\ell}{2}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}\big]^2 = \sum_{\ell=0}^{k} t^{-\ell} \big[t^{\frac{\ell}{2}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}\big]^2 \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Problema de Dirichlet

Vamos retornar ao problema visto no início da apresentação, para isso precisamos de alguns resultados de análise funcional

Teorema da Representação de Riesz

Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então, existe um único $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle \,,$$

para todo $u \in H$. Além disso, $\|f\| = \|v\|$.

Teorema de Lax-Milgram

Sejam H um espaço de Hilbert, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear tal que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B(u, v)| \leqslant \alpha \|u\| \|v\|$, para todo $u, v \in H$, i.e., a forma bilinear é limitada;
2. $\beta \|u\|^2 \leqslant B(u, u)$, para todo $u \in H$, i.e., a forma bilinear é coerciva,

e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então, existe um único $v \in H$ tal que

$$B(u, v) = f(u),$$

para todo $u \in H$.

Ideia da demonstração

1. Mostramos que existe um operador $A : H \to H$ tal que $B(u, v) = \langle u, Av \rangle$, para todo $u, v \in H$.
2. A é um operador linear e limitado.
3. A é injetivo e $\text{Im}A$ é fechado.
4. A é sobrejetivo.
5. Mostramos que existe $v \in H$ tal que $f(u) = B(u, v)$, para todo $u, v \in H$.
6. Mostramos que v é único.

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \text{ em } \Omega; \\ \qquad\qquad u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{24}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Na motivação, vimos que u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_\Omega Du \cdot D\phi \, dx + \int_\Omega u\phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx,$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Porém, pela densidade das funções teste em $H_0^1(\Omega)$, podemos dizer que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet, se esta satisfaz a igualdade

$$\int_\Omega Du \cdot Dv\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

Defina a forma $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$B(u, v) = \int_\Omega Du \cdot Dv \, dx + \int_\Omega uv \, dx,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$, e o funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(v) = \int_\Omega fv \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Note que B é uma forma bilinear limitada e coerciva. Com efeito, a bilinearidade de B segue do fato do gradiente fraco D e a integral serem operadores lineares. Além disso, é verdade que

$$B(u,u) = \int_\Omega Du \cdot Du \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx = \int_\Omega \|Du\|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^2 \, dx = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Logo, B é coercivo

Utilizando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}|B(u,v)| &\leqslant \int_\Omega |Du\cdot Dv|\,dx + \int_\Omega |uv|\,dx\\ &\leqslant \int_\Omega \|Du\|\|Dv\|\,dx + \int_\Omega |u||v|\,dx \leqslant \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|Dv\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$ Porém, sabemos que $\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Dito isso, obtemos

$$|B(u,v)| \leqslant c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Logo, B é limitado.

Por fim, temos que φ é um funcional linear limitado. De fato, a linearidade de φ segue da distributividade do produto e da linearidade da integral. Por outro lado, pela Desigualdade de Hölder, podemos escrever

$$|\varphi(v)| \leqslant \int_\Omega |f||v|\,dx \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} < \infty$, pois, por hípotese, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = \varphi(v),$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, u é a única solução fraca para o problema de Dirichlet.

OBRIGADO