CONTEÚDO

1 Espaços de Sobolev **3**

1.1 Preliminares 3

1.2 Motivação 6

1.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ 7

1.4 Aproximações 17

1.5 Extensões 29

1.6 Traços 33

1.7 Desigualdades de Sobolev 38

1.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 38

1.7.2 Desigualdade de Morrey 44

1.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev 48

1.8 Compacidade 50

2 Algumas aplicações dos Espaços de Sobolev **55**

2.1 Preliminares 55

2.1.1 Desigualdades 55

2.1.2 Transformada de Fourier 56

2.1.3 Semigrupo do calor 57

2.1.4 Notação 59

2.2 Propriedades das soluções de Leray 60

2.2.1 Introdução e contexto histórico 60

2.2.2 Resultados 61

2.3 Problema de Dirichlet 77

CAPÍTULO UM

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev e suas principais propriedades.

Vale ressaltar, que quando necessário, consideramos que as funções $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são definidas de forma que sejam nulas em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

1.1 Preliminares

Antes de começar de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo.

Definição 1.1. Seja $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega\,;\, \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Além disso, se $\operatorname{supp} \varphi$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega\,;\, \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp} \varphi$, então, $(\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}} \subseteq \{x \in \Omega\,;\, \varphi(x) = 0\}$. Ou seja, se $x \notin \operatorname{supp} \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Por outro lado, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \Omega$, então, $\Omega^{\mathcal{C}} \subseteq (\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}}$. Se Ω é aberto, então $\partial\Omega \subseteq \Omega^{\mathcal{C}}$. Portanto, se Ω é aberto, φ se anula em $\partial\Omega$, já que, $\partial\Omega \subseteq \Omega^{\mathcal{C}} \subseteq (\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}} \subseteq \{x\,;\, \varphi(x) = 0\}$.

Definição 1.2. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. O espaço $\mathcal{C}^k(\Omega)$ é composto por todas funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em que suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k também são contínuas. Se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dizemos que f é de classe $\mathcal{C}^k$.

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega).$$

Definição 1.3. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

A definição abaixo será âmplamente utilizada nesse capítulo.

Definição 1.4. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ contínua} \,; \operatorname{supp} f \text{ é compacto}\}$$

Além disso, definimos

$$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^k(\Omega),$$

que é o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ com suporte compacto.

Definição 1.5 (Espaços $\mathcal{L}^p$ e $\mathcal{L}^\infty$)**.** O espaço $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, é composto pelas funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty.$$

O espaço $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ é composto pelas funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensuráveis e limitadas em quase toda parte em Ω, e definimos sua norma por

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| ; x \in \Omega\} = \inf\{M \geqslant 0 \,; |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } \Omega\}$$

Os resultados abaixos são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev.

Teorema 1.6 (Teorema da Convergência Dominada)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Ver [2] p.p. 44. ☐

Teorema 1.7. O espaço $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é um espaço de Banach[1]

Demonstração. Ver [2] p.p. 59 ($1 \leqslant p < \infty$) e p.p. 61 ($p = \infty$) ☐

Teorema 1.8 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onde $1 \leqslant p \leqslant \infty$, e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjugados[2]. Então $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [2] p.p. 56. ☐

Uma generalização desse resultado será apresentada abaixo

Teorema 1.9 (Desigualdade de Hölder Generalizada)**.** Sejam $0 < p_1, \ldots, p_N \leqslant \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \cdots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}(\Omega)$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_N\|_{\mathcal{L}^{p_N}(\Omega)}.$$

[1] Espaço vetorial normado completo, i.e., toda sequência de Cauchy é convergente.
[2] p e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. □

Teorema 1.10. Se Ω é limitado e, $1 \leqslant p < q < \infty$. Então $\mathcal{L}^q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}$$

para toda $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ e, $c > 0$ é uma constante que depende de p, q e Ω

Demonstração. Ver [7] p.p. 186. □

Observação: Por convenção 1 e ∞ são expoentes conjugados.

Teorema 1.11 (Integração por partes em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular e $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então,

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i \, dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta pra fora em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 628 □

Teorema 1.12 (Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $f : B(y,s) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função integrável, então

$$\int_{B(y,s)} f\, dx = \int_0^s \int_{\partial B(y,r)} f\, dS dr.$$

Demonstração. Ver [7], p.p. 78. □

Teorema 1.13. Seja $(u_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$ para alguma função $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ e uma função $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que

(a) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ qtp[3] em Ω;

(b) $|u_{n_k}(x)| \leqslant v(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, qtp em Ω.

Demonstração. Ver [3], p.p. 94. □

Teorema 1.14 (Critério de compacidade de Arzelà-Ascoli)**.** Seja (u_k) uma sequência de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$|u_k(x)| \leqslant M,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $M > 0$ é uma constante e (u_k) é uniformemente equicontínua. Então, existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty \subseteq (u_k)_{k=1}^\infty$ e uma função contínua u tal que $u_{k_j} \to u$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver [7] p.p 137 □

[3] Duas funções u e v são ditas iguais em quase toda parte (qtp) se $u(x) = v(x)$ para todo $x \in X$ onde X^c tem medida nula

Teorema 1.15 (Teorema de Fubini)**.** Sejam $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu)$ e $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \nu)$ espaços de medida. Então, se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, a igualdade abaixo é válida

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\, d\mu \times d\nu = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\nu\right) d\mu = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu\right) d\nu.$$

Demonstração. Ver [7] p.p. 68 □

Uma outra forma de enunciar o Teorema de Fubini é a seguinte:

Teorema 1.16. Sejam $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\, dX = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f\, dy dx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f\, dx dy.$$

Essa versão do Teorema de Fubini é provada para integrais de Riemann, porém como em alguns casos as integrais de Riemann e Lebesgue coincidem, essas versões são equivalentes.

Teorema 1.17 (Mudança de variáveis)**.** Seja $\Psi : A \to B$ um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$. Seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável sobre B se, e somente se, $(f \circ \Psi)|\det D\Psi|$ é integrável sobre A. Neste caso,

$$\int_B f\, dx = \int_A (f\circ\Psi)|\det D\Psi|\, dy.$$

Demonstração. O capítulo 4 de [17] é destinado a demonstração desse teorema. □

1.2 Motivação

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ em } \Omega; \\ \qquad\quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfazendo (1.1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (1.1) por uma função $\phi \in \mathcal{C}^\infty_C(\Omega)$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega -\phi\Delta u\, dx + \int_\Omega u\phi\, dx = \int_\Omega f\phi\, dx.$$

Note que, utlizando integração por partes (ver Teorema 1.11), a primeira integral pode ser reescrita como

$$\int_\Omega -\phi\Delta u\, dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \phi\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, dx = -\sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial\Omega} \phi\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i\, dS - \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx\right).$$

Mas como ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, inferimos

$$\int_\Omega -\phi\Delta u\, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi\, dx.$$

Figura 1.1: Sergei Lvovich Sobolev (1908 – 1989)

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega u\phi = \int_\Omega f\phi, \tag{1.2}$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$[4]. Observe agora, que não precisamos mais que u seja de classe $\mathcal{C}^2$ já que a segunda derivada de u não é utilizada em (1.2). Na verdade, não precisamos nem que u seja contínua, apenas integrável em Ω. Na Seção 2.3, voltaremos a essa motivação para mostrar que para qualquer função $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca para (1.1). Essa solução é uma função que pertece ao espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, esse e outros espaços e suas propriedades serão estudadas ao longo desse trabalho.

1.3 Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é generalizar a noção de derivada para funções que não são diferenciáveis em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e explorar algumas propriedades elementares.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.11), temos que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} u\phi\nu_i \, dS - \int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, como foi mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto a expressão acima se torna

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx, \tag{1.3}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Ademais, se agora u for de classe $\mathcal{C}^k$ em Ω com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx. \tag{1.4}$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (1.3) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (1.4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe $\mathcal{C}^k$. Note que o lado esquerdo de (1.3) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. O problema é que se u não é necessáriamente uma função de classe $\mathcal{C}^k$ então o lado direito de (1.3) não está bem definido. Para resolver isso perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que (1.3) é válida quando substituimos $D^\alpha u$ por v.

Essa pergunta motiva a definição abaixo.

[4]Nomenclatura: ϕ é chamada função teste.

Definição 1.18 (Derivada fraca em Ω)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, denotada por

$$D^\alpha u = v,$$

dado que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx, \tag{1.5}$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$.

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (1.5) para toda ϕ função teste, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (1.5), então u não possui a α-ésima derivada parcial fraca.

Observação: Aqui, utlizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue (utlizando a medida de Lebesgue), suas integrais coincidem.

Exemplo 1.19. A função $u : \Omega = (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não é diferenciável no sentido usual, já que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + h - 1}{h} = 1,$$

mas

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - 1}{h} = 0.$$

Porém, u possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda função $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ temos que

$$\int_0^2 u\phi' \, dx = \int_0^1 x\phi' \, dx + \int_1^2 \phi' \, dx = x\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi \, dx + \phi\Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim,

$$\int_0^2 u\phi' \, dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi \, dx - \phi(1) = -\int_0^1 \phi \, dx.$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral para obter

$$\int_0^2 u\phi' \, dx = -\left(\int_0^1 1\phi \, dx - \int_1^2 0\phi \, dx \right) = -\int_0^2 v\phi \, dx.$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 1.20. A função $u : \Omega = (0, 2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leqslant 1; \\ 2, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possuí derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto significa que não existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega u\phi'\,dx = -\int_\Omega v\phi\,dx,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Com efeito, suponha, por absurdo que existe tal v. Deste modo

$$-\int_0^2 v\phi\,dx = \int_0^2 u\phi'\,dx = \int_0^1 x\phi'\,dx + 2\int_1^2 \phi'\,dx = -\int_0^1 \phi\,dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leqslant \phi_n \leqslant 1, \quad \phi_n(1) = 1, \quad \phi_n(x) \to 0 \text{ se } x \neq 1.$$

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v\phi_n\,dx - \int_0^1 \phi_n\,dx\right] = 0$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), pois $\phi_n \to 0$ qtp em Ω. Portanto, u não possui derivada fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é sobre sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 1.21. Sejam $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega u\phi = 0,$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω.

Demonstração. Ver [3], p.p. 110. □

Com o lema acima em mente, temos todas as ferramentas para mostrar a unicidade da derivda fraca.

Proposição 1.22. Seja α um multi-índice. Se v e $\tilde{v}$ são ambas α-ésimas derivadas parciais fracas de uma função u. Então,

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } \Omega.$$

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi\,dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega uD^\alpha\phi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \tilde{v}\phi\,dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Com isso, podemos escrever

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\phi\,dx = 0.$$

Logo, pelo Lema anterior, chegamos a

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ qtp em } \Omega.$$

Portanto, $v = \tilde{v}$ qtp em Ω. □

Exemplo 1.23. Considere a função u do Exemplo 1.19, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

é a derivada de u no sentido fraco. Porem, a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{se } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca de u. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, porém v e $\tilde{v}$ são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato,

$$(v - \tilde{v})(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Portanto, é verdade que

$$v = \tilde{v} \text{ qtp em } (0, 2).$$

pois $\{1\}$ é finito, logo tem medida nula.[5]

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Definição 1.24. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \,; \forall i = 1, \dots, n \; \exists v_i \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mu = -\int v_i \phi \, d\mu \right\},$$

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $k \in \mathbb{N}$, indutivamente, e pela derivada fraca.

Definição 1.25. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant n$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \,; D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k \},$$

com $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Ou, de outra forma,

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega) \,; D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1 \right\},$$

onde $D^\alpha u$ é a α-ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando $p = 2$, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert[6], munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)},$$

onde

$$\langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

No próximo capítulo, estudaremos algumas aplicações dos espaços de Sobolev, e os espaços H^k serão utilizados.

[5]Todo conjunto enumerável (em particular finito) tem medida (de Lebesgue) nula.
[6]Espaço vetorial com produto interno completo.

Definição 1.26. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leqslant p < \infty$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Além disso, dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω, isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \Subset \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Isso será feito após o Teorema 1.28 sobre as propriedades da derivada fraca, que são necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Um outro espaço importante é o espaço $\mathcal{W}^{k,p}_0(\Omega)$ ($H^k_0(\Omega)$ se $p = 2$) que é definido como o fecho de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Ou seja, dada uma função em $u \in \mathcal{W}^{k,p}_0(\Omega)$, existe uma sequência (u_k) em $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. O teorema 1.39 mostra uma equivalência para as funções nesse espaço.

Observação: Essa não é a única forma de definir uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo a norma

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é equivalente a

$$\max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

O próximo exemplo ilustra um caso em que uma função pode ou não possuir derivada fraca dependendo da dimensão n do espaço Euclidiano e do expoente de integração p.

Exemplo 1.27. Seja $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \|x\|^{-\alpha}, \tag{1.6}$$

onde $\alpha > 0$. Queremos verificar para quais valores de $\alpha > 0$, n e p a função u pertence ao espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de $\mathbf{0}$ com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{\|x\|^{\alpha+2}} \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

e daí, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{\|x\|^{\alpha+2}}, \ldots, \frac{-\alpha x_n}{\|x\|^{\alpha+2}} \right) \quad (x \neq \mathbf{0}),$$

segue que

$$\|Du(x)\| = \frac{|\alpha|}{\|x\|^{\alpha+1}} \quad (x \neq \mathbf{0}).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes (ver Teorema 1.11), temos que

$$\int_{\Omega \backslash B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega \backslash B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i\, dS \tag{1.7}$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ denota o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial B[\mathbf{0}, \varepsilon]$. Agora se $\alpha + 1 < n$, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando $\|Du\|$ sobre Ω, concluimos que

$$\int_\Omega \|Du\|\, dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}}\, dx.$$

Transformando em coordenadas polares (ver Teorema 1.12), conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma:

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}}\, dx = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}}\, dS dr = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}}\, dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr,$$

onde a integral de superficie acima, é igual a área da esfera n-dimensional de raio r dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1},$$

que por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n) r^{n-1}$. Dessa forma, chegamos a

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2}\, dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que se $n - \alpha - 1 < 0$ então $0^{n-\alpha-1} = \infty$. Sendo assim

$$\int_\Omega \|Du\|\, dx = \infty \iff \alpha + 1 > n.$$

Portanto, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso, inferimos por (1.6) que

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i\, dS \right| \leqslant \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u||\phi||\nu_i|\, dS \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| dS \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha}\, dS,$$

pois $|\nu_i| \leqslant |\nu| = 1$. Essa ultima integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i\, dS \right| \leqslant c \varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, por (1.7) deduzimos que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n - 1$. Além disso, $\|Du\| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha + 1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular, $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geqslant n$.

Teorema 1.28 (Propriedades da derivada fraca)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Então,

(a) $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$;

(b) $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) **(Linearidade)** para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v;$$

(d) se Ω' é um aberto de Ω, então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$;

(e) **(Regra de Leibniz)** se $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u, \tag{1.8}$$

onde

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leqslant \alpha$ significa $\sigma_j \leqslant \alpha_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. A demonstração para $D^\alpha D^\beta u$ é análoga. Com efeito, é verdade que

$$\int_\Omega D^\alpha u D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha D^\beta \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Note que a ultima igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável e D^α e D^β são derivadas parciais usuais. Dessa forma $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_\Omega \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco.

(b) Suponha que $D^\alpha u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β com $|\beta| \leqslant k - |\alpha|$ tal que $D^\beta(D^\alpha u) \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta}u \notin \mathcal{L}^p(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^\gamma u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leqslant k$. Em particular como $|\beta| \leqslant k - |\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leqslant k$. Portanto $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

(c) Note que

$$\int_\Omega (\lambda u + v) D^\alpha \phi \, dx = \int_\Omega \lambda u D^\alpha \phi \, dx + \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx = \lambda \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx + \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas utlimas integrais acima, obtemos

$$\lambda \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx + \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx = \lambda(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi D^\alpha v \, dx = \int_\Omega (\lambda D^\alpha u + D^\alpha v) \phi \, dx.$$

Portanto, $D^\alpha(\lambda u + v) = \lambda D^\alpha u + D^\alpha v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega' \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega'} |u|^p\, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p\, dx$$

são finitas, para todo α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. De fato, é verdade que

$$\int_{\Omega'} |u|^p\, dx \leqslant \int_{\Omega} |u|^p\, dx < \infty,$$

e

$$\int_{\Omega'} |D^\alpha u|^p\, dx \leqslant \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p\, dx < \infty,$$

para todo α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$, ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$.

(e) Para mostrar que (1.8) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$.

Com efeito, para $|\alpha| = 1$, como $\eta, \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$D^\alpha(\eta\phi) = \phi D^\alpha \eta + \eta D^\alpha \phi.$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\, dx = \int_\Omega u D^\alpha(\eta\phi) - \int_\Omega u\phi D^\alpha \eta\, dx.$$

Como η e ϕ têm suporte compacto, então $D^\alpha(\eta\phi)$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral do lado direito, chegamos a

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\, dx = -\int_\Omega \eta\phi D^\alpha u\, dx - \int_\Omega u\phi D^\alpha \eta\, dx = -\int_\Omega (\eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta)\phi\, dx.$$

Portanto, $D^\alpha(\eta u) = \eta D^\alpha u + u D^\alpha \eta$ como queriamos mostrar.

Agora seja $m < k$ e suponha que (1.8) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant m$ e toda função teste η. Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m + 1$. Então α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Deste modo, podemos escrever por **(a)** que

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\, dx = \int_\Omega \eta u D^{\beta+\gamma} \phi\, dx = \int_\Omega \eta u D^\beta (D^\gamma \phi)\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta(\eta u) D^\gamma \phi\, dx.$$

Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^\beta(\eta u)$ e a γ-ésima derivada fraca. Assim, por **(c)**, deduzimos que

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \phi\, dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \eta D^{\beta-\sigma} u) \right] \phi\, dx.$$

Além disso, como $|\gamma| = 1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} \left(D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u \right) \right] \phi\, dx, \tag{1.9}$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u,$$

que ainda pode ser expandido em quatro somatórios como abaixo:

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u + \sum_{\beta < \rho \leqslant \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\rho-\gamma} D^\rho \eta D^{\alpha-\rho} u \\ &\qquad + \sum_{0 \leqslant \sigma < \gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha-\sigma} u. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Porém, note que $0 \leqslant \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leqslant \sigma$ significa que $0 \leqslant \sigma_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $j = 1, \ldots, n$ tal que $\sigma_j < \gamma_j$. Como $|\gamma| = 1$, suponha sem perda de generalidade que $\gamma = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Dessa forma, para $j = 1$, concluimos que $0 \leqslant \sigma_1 < 1$. Como $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \ldots, n$, vale $0 \leqslant \sigma_i < 0$, que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma, $\beta < \rho \leqslant \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (1.10) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\eta D^\alpha u + \sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^\rho \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^\alpha \eta. \tag{1.11}$$

Por fim, a menos de uma mudança de variaveis, escrevemos (1.11) como

$$\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

pois

$$\binom{\alpha - \gamma}{\sigma} + \binom{\alpha - \gamma}{\sigma - \gamma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

e

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a equação (1.9), temos que

$$\int_\Omega \eta u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx.$$

Portanto

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \eta D^{\alpha - \sigma} u$$

como queriamos mostrar. □

Com os resultados obtidos, agora é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach.

Teorema 1.29. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Observe que, para $1 \leqslant p < \infty$, temos que

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Com isso, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0 \iff \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0 \iff D^\alpha u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Em particular, se $\alpha = (0, \ldots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α. Sendo assim $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Sendo assim, pelo Teorema 1.28, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha(\lambda u)\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\lambda D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \\ &= |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = |\lambda|^p \|u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 1.28, segue que

$$\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski em ℓ^p

$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ou seja,

$$\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$.

Para o caso $p = \infty$, a demonstração é análoga. Com efeito

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Com isso, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = 0 \iff \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = 0 \iff D^\alpha u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Em particular, se $\alpha = (0, \ldots, 0)$, $u = D^\alpha u = 0$.

Por outro lado, se $u = 0$, $D^\alpha u = 0$ para todo multi-índice α. Sendo assim $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Sendo assim, pelo Teorema 1.28, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha(\lambda u)\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|\lambda D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \\ &= |\lambda| \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = |\lambda|\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 1.28, segue que

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \\ &\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}\right) \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} + \|v\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$.

$\square$

Teorema 1.30. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é completo.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$. Note que, se $1 \leqslant p < \infty$

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \|u_n - u_m\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon^p,$$

e se $p = \infty$,

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. Ou seja, $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, para cada α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. Lembrando que $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é um espaço completo (ver Teorema 1.7), podemos escrever

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$ denotamos $D^\alpha u_n$ por u_n e u_α por u. Por fim, precisamos mostrar que

$$D^\alpha u = u_\alpha.$$

Com efeito, pelo Teorema 1.13, utlizando a definição de derivada fraca e passando a uma subsequência (se necessário), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \phi\, dx = \int_\Omega (\lim u_n) D^\alpha \phi = \lim \int_\Omega u_n D^\alpha \phi\, dx = \lim\,(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi\, dx \\ = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \lim D^\alpha u_n \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi\, dx.\end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha u = u_\alpha$, e consequentemente, $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. □

1.4 Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora. Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados e exemplos da teoria de aproximação, que é de extrema importância no estudo de equações diferenciais parciais.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1; \\ 0, & \text{se } |x| \geqslant 1, \end{cases} \tag{1.12}$$

conhecida como molificador de Friedrich, onde $c > 0$ é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1.$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função η de classe $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compacto satifazendo.

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$
- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon) = \delta(x)$, onde δ é a função delta de Dirac.

Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{1.13}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Essa função η_ε é de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\operatorname{supp}\eta_\varepsilon \subseteq B[0,\varepsilon]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1.$$

Essa aplicação será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se u é uma função locamente integrável, definimos a molificação de u por $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, isto é

$$u^\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y) = \int_{B[0,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(y)u(x-y)\, dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propriedades importantes sobre essas aproximações.

Teorema 1.31 (Aproximação local por funções suaves)**.** Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ e defina

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \ \text{ em } \Omega_\varepsilon,$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\, d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Então,

(a) $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$;

(b) $u^\varepsilon \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração.

(a) Seja $g(x) = (x-y)/\varepsilon$. Logo, pela Regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\big[\eta_\varepsilon(x-y)\big] &= \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{k=1}^n \frac{\partial\eta}{\partial x_k}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right),\end{aligned} \tag{1.14}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ Por outro lado, sejam $x \in \Omega_\varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$ e h de forma que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Deste modo,

$$\frac{u^\varepsilon(x+he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]u(y)\, dy. \tag{1.15}$$

Note que, novamente utilizando a regra da cadeia e (1.14)

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right), \tag{1.16}$$

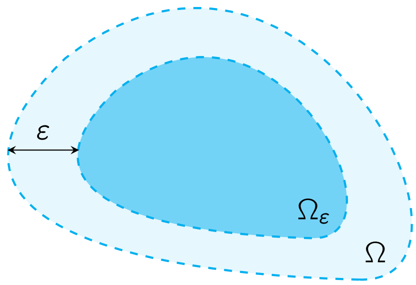

Figura 1.2: Representação visual dos conjuntos Ω_ε.
Fonte: Autoral.

quando $h \to 0$. Consequentemente, por (1.15), (1.16) e o Teorema da converência dominada (ver Teorema 1.6), temos que

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) u(y)\, dy.$$

Indutivamente, mostramos que $D^\alpha u^\varepsilon$ existe e

$$D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u.$$

O fato de u^ε ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ segue do fato de η_ε ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ (por definição) e u ser integrável.

(b) Afirmamos que a α-ésima derivada parcial de u^ε no sentido usual é igual a convulução de η_ε com a α-ésima derivada parcial fraca de u para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Consequentemente

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u.$$

Com efeito, no item **(a)** vimos que $D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u$. Primeiramente, se $g(x) = x - y$, temos que

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\varepsilon \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_k}(x-y) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y).$$

Por outro lado, se $h(y) = x - y$, obtemos

$$D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x-y) = \frac{\partial}{\partial y_i}(\eta_\varepsilon \circ h)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_k}(x-y) \frac{\partial h_k}{\partial y_i}(y) = -\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação, chegamos a

$$D_x^{e_i} \eta_\varepsilon(x-y) = -D_y^{e_i} \eta_\varepsilon(x-y).$$

Repetindo esse cálculo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y).$$

Deste modo, podemos escrever

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy.$$

Fixando $x \in \Omega_\varepsilon$, a função $\phi_x(y) = \eta_\varepsilon(x-y)$ é suave e tem suporte compacto em Ω. Aplicando a definição de derivada fraca com função teste $\eta_\varepsilon(x-y)$, segue que

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy. = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|}\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)\,dy.$$

Portanto, deduzimos que

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u. \tag{1.17}$$

Além disso, afirmamos que dados abertos V, W tais que $V \Subset W \Subset \Omega$, uma função $v \in \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, inferimos

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}. \tag{1.18}$$

Com efeito, se $p = 1$, note que

$$|v^\varepsilon(x)| = \left|\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)\,dy\right| \leqslant \int_{B[x,\varepsilon]} |\eta_\varepsilon(x-y)||v(y)|\,dy.$$

Integrando sobre V e utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.15), concluimos que

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|\,dx \leqslant \int_V\int_{B[x,\varepsilon]} |v(y)||\eta_\varepsilon(x-y)|\,dydx \leqslant \int_W |v(y)|\int_{B[y,\varepsilon]} |\eta_\varepsilon(x-y)|dxdy.$$

Porem, $\int_{B[y,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\,dx = 1$, sendo assim, obtemos

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}^1(W)}.$$

Se $1 < p < \infty$, observe que

$$|v^\varepsilon(x)| = \left|\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)\,dy\right| \leqslant \int_{B[x,\varepsilon]} \left|\eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y)\eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y)v(y)\right|\,dy.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8) na última integral, segue que

$$\int_{B[x,\varepsilon]} \left|\eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y)\eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y)v(y)\right|\,dy \leqslant \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)|v(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembrando que, $\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$, integrando sobre V e utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.15), obtemos

$$\int_V |v^\varepsilon(x)|^p\,dx \leqslant \int_V\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)|v(y)|^p\,dydx \leqslant \int_W |v(y)|^p\int_{B[y,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x-y)\,dxdy.$$

Isto é,

$$\|v^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Por fim, seja $V \Subset \Omega$ um aberto. Afirmamos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ em } \mathcal{L}^p(V) \tag{1.19}$$

quando $\varepsilon \to 0$, para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. De fato, sejam W um aberto de forma que $V \Subset W \Subset \Omega$ e $\delta > 0$. Utilizando (1.18) com $v^\varepsilon = D^\alpha u^\varepsilon$ e $v = D^\alpha u$, e escolhendo $w \in \mathcal{C}(W)$ tal que

$$\|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} < \delta.$$

Temos

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} &\leqslant \|D^\alpha u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leqslant \|D^\alpha u - w\|_{\mathcal{L}^p(W)} + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|w - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(W)} \\ &\leqslant 2\delta + \|w^\varepsilon - w\|_{\mathcal{L}^p(V)},\end{aligned}$$

para todo α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. Como $w \in \mathcal{C}(W)$, então $w^\varepsilon \to w$ uniformemente[7] em V quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, $D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u$ em $\mathcal{L}^p(V)$. Dessa forma,

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto,

$$u^\varepsilon \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega),$$

como queriamos mostrar. □

Exemplo 1.32. A função $u(x) = |x|$ definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, dada uma função $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega u\phi'\,dx = \int_{-1}^1 u\phi'\,dx = \int_{-1}^0 u\phi'\,dx + \int_0^1 u\phi'\,dx.$$

Utlizando integração por partes (ver Teorema 1.11), obtemos

$$\int_\Omega u\phi'\,dx = -\int_{-1}^0 -\phi\,dx - \int_0^1 \phi\,dx - x\phi\Big|_{-1}^0 + x\phi\Big|_0^1 = -\int_{-1}^0 -\phi\,dx - \int_0^1 \phi\,dx - \phi(-1) + \phi(1).$$

Porem, ϕ tem suorte compacto, logo, se anula em $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Dito isso, podemos escrever

$$\int_\Omega u\phi'\,dx = -\int_{-1}^0 -\phi\,dx - \int_0^1 \phi\,dx = -\int_\Omega \text{sgn}(x)\phi\,dx.$$

Portanto, é verdade que

$$u' = \text{sgn}$$

no sentido fraco, onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Além disso

$$\int_\Omega |\text{sgn}(x)|^p\,dx = \int_{-1}^1 1^p\,dx = \mu((-1, 1)) = 2 < \infty,$$

onde μ é a medida de Lebesgue. Assim, $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e, portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para para $1 \leqslant p < \infty$. Vamos utiizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u. Seja $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{se } |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

[7] Uma sequência de funções (w_k) converge uniformemente para w, se, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ (que não pode depender de x) tal que

$$|w_k(x) - w| < \varepsilon$$

para todo x e $k > K$.

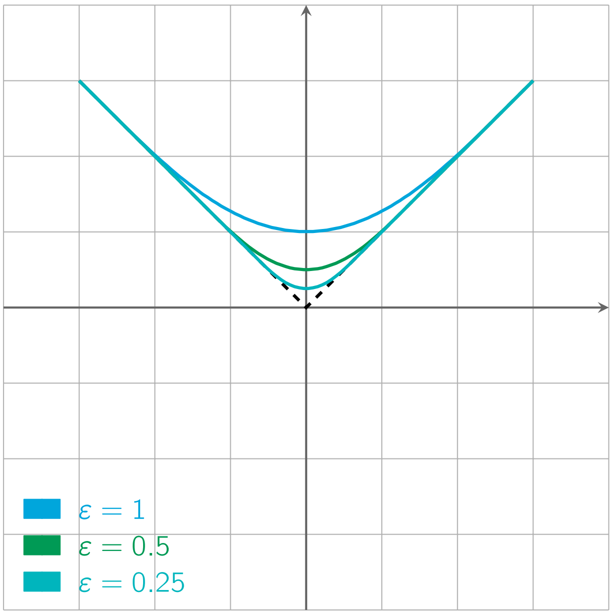

Figura 1.3: Aproximações suaves da função $|x|$ (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_ε com $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$.
Fonte: Autoral.

(ver Figura 1.4) onde c é determinado de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta \, dx = 1,$$

isto é,

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) dx \right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor. Logo, definimos a função molificadora $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon \, dx = 1 \;\text{ e }\; \operatorname{supp} \eta = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u. Com efeito,

$$u^\varepsilon(x) = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \eta_\varepsilon(x) u(x - y) \, dy.$$

A Figura 1.3 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ε.

Exemplo 1.33. Seja $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de $| \cdot |$ não ser diferenciável. Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, quando $0 < p < 2$, dada por

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}}.$$

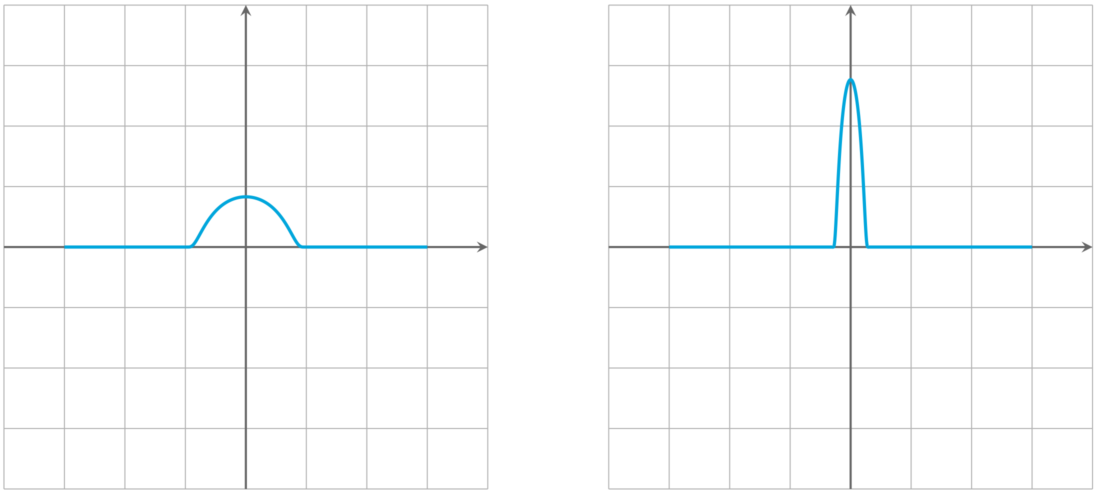

Figura 1.4: Funções η e η_ε com $\varepsilon = 0.3$.
Fonte: Autoral.

Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a i-ésima coordenada. Utilizando integração por partes (ver Teorema 1.11), obtemos

$$\int_\Omega u D^{e_i}\phi \, dx = \int_{\partial\Omega} u\phi\nu^i \, ds - \int_\Omega \phi D^{e_i} u \, dx, \tag{1.20}$$

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário que aponta para dentro em $\partial\Omega$. Para calcular $D^{e_i}u$ precisamos dividir o domínio Ω em Ω_1, Ω_2, Ω_3 e Ω_4, onde Ω_i é a restrição ao i-ésimo quadrante (ver Figura 1.5).

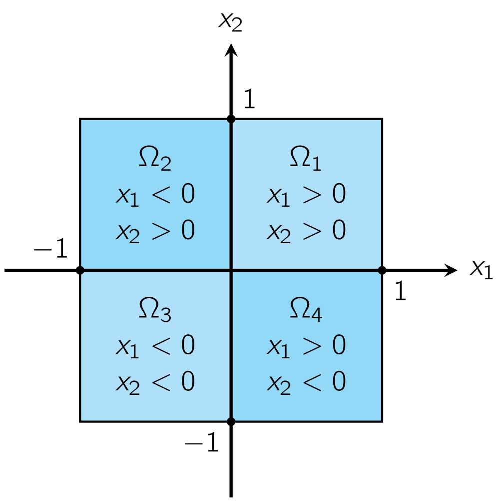

Figura 1.5: Domínio da função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$.
Fonte: Autoral

Note que em $\Omega_1 = (0,1) \times (0,1)$, $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$. Logo, nesse conjunto $D^{e_i}u$ existe no sentido usual e é dada por

$$D^{e_i}u = \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}}.$$

De forma análoga, deduzimos que

$$\begin{aligned} D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \tfrac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}}, &&\text{em } \Omega_2 \text{ e } \Omega_3, \\ D^{e_i}u(x_1, x_2) &= \tfrac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}}, &&\text{em } \Omega_4. \end{aligned}$$

Dito isso, concluimos que

$$\int_\Omega \phi D^{e_i} u\, dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx + \int_{\Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx,$$

que podemos escrever como

$$\int_\Omega \phi D^{e_i} u\, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \frac{1}{2} x_i^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx + \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \frac{1}{2}(-x_i)^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx$$

Por fim, como ϕ tem suporte compacto em Ω, ϕ se anula em $\partial\Omega$. Dessa forma

$$\int_{\partial\Omega} u\phi\nu^i\, ds = 0.$$

Portanto, por (1.20) chegamos a

$$\int_\Omega u D^{e_i} \phi\, dx = -\int_\Omega \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi\, dx.$$

Isto é,

$$D^{e_i} u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}},$$

para $i = 1, 2$, como queriamos mostrar. Além disso,

$$\int_\Omega |D^{e_i}(x_1, x_2)|^p\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left| \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}} \right|^p dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}}\, dx_i dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.15), encontramos

$$\frac{1}{2^p} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}}\, dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^{1} dx_j \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}}\, dx_i = \frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}}\, dx_i.$$

Dito isso, precisamos ver para quais valores de p essa integral é finita. Sendo assim

$$\frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}}\, dx_i = \frac{1}{2^{p-2}} \int_0^1 x_i^{-\frac{p}{2}}\, dx = \frac{1}{2^{p-2}} \left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2} - 1} \right]$$

$0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando $p < 2$. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 < p < 2$.

Agora defina $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1} \right), & \text{se } \|x\| < 1; \\ 0, & \text{se } \|x\| \geqslant 1, \end{cases}$$

(ver Figura 1.6) e η_ε da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u, dada por

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_\Omega \eta(x_1, x_2) u(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\, dy.$$

Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^ε. A Figura 1.7 mostra o gráfico de u, onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^ε.

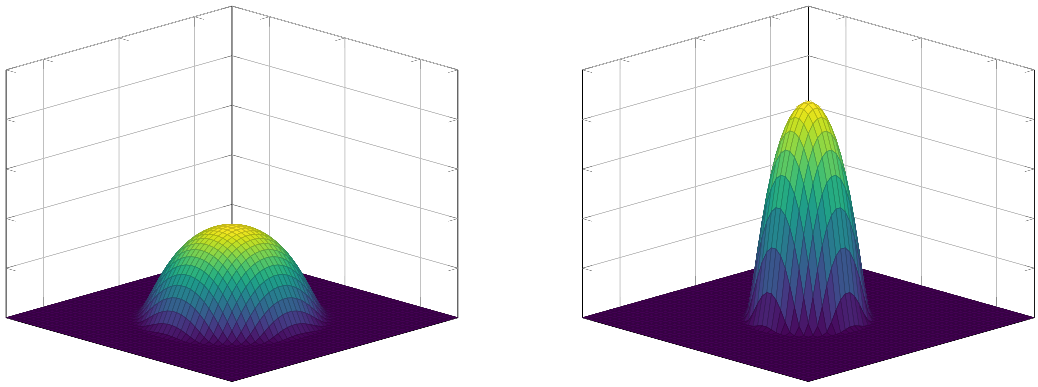

Figura 1.6: η e η_ε com $\varepsilon = 0.5$.
Fonte: Autoral.

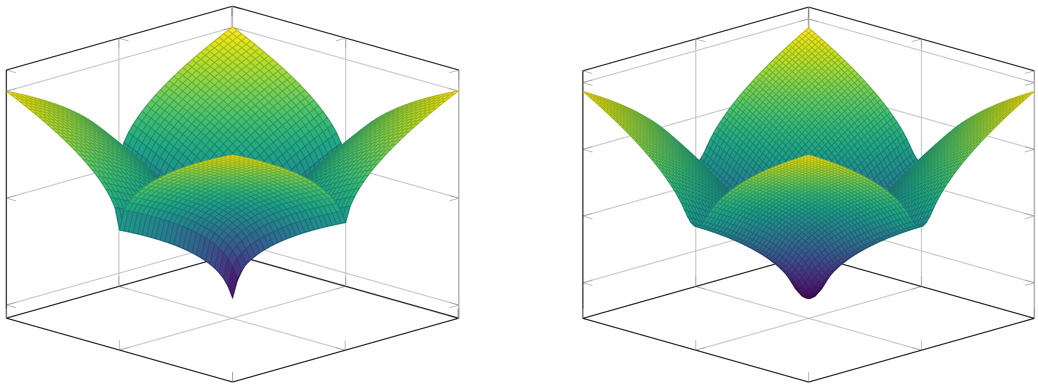

Figura 1.7: À esquerda, a função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^ε com $\varepsilon = 0.25$.
Fonte: Autoral.

Teorema 1.34 (Meyers-Serrin)**.** Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \tag{1.21}$$

onde $\Omega_i = \{x \in \Omega\,;\, d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. De fato, se $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, então $x \in \Omega_{i_0}$ para algum $i_0 \in \mathbb{N}$, em particular, $x \in \Omega$ pois $\Omega_i \subseteq \Omega$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $x \in \Omega$, então $d(x, \partial\Omega) > 0$, então existe algum $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i_0}$, logo, $x \in \Omega_{i_0}$, dessa forma, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Portanto, vale (1.21).

Defina $\Omega_i' = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$. Além disso, escolha qualquer aberto $\Omega_0' \Subset \Omega$ de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i'$$

e seja $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade suave subordinada à cobertura aberta $\{\Omega_i'\}_{i=0}^{\infty}$, isto é,

$$0 \leqslant \phi_i \leqslant 1 \text{ com } \phi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_i') \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = 1 \text{ em } \Omega.$$

Como, por hipótese, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, temos pelo Teorema 1.28

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Além disso, $\operatorname{supp}(\phi_i u) \subseteq \Omega_i'$. Fixando $\delta > 0$, escolha um $\varepsilon_i > 0$ de forma que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e } \operatorname{supp} u^i \subseteq \Omega_i'',$$

com $\Omega_i'' = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} \supseteq \Omega_i'$.

Seja $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Como $u = u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \phi_i u$, então, para cada $V \Subset \Omega$, inferimos que

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} = \frac{\delta}{2}.$$

Passando ao supremo sobre os conjuntos $V \Subset \Omega$ obtemos

$$\|v - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Isto mostra que u pertence ao fecho de $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Logo é equivalente a existir uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. $\square$

Definição 1.35. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que sua fronteira $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^k$ se para cada ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ existe um raio $r > 0$ e uma função de classe $\mathcal{C}^k$ $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r]\,;\, x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ se é de classe $\mathcal{C}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

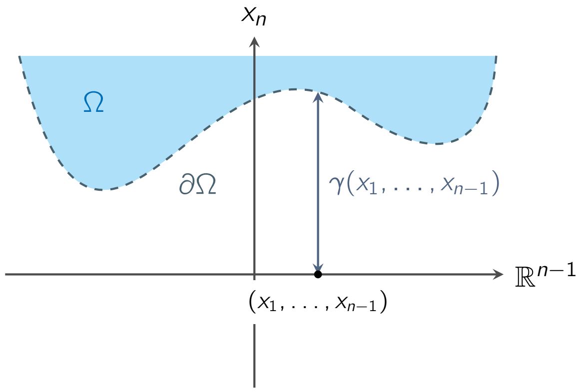

Figura 1.8: Função γ da definição 1.35
Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 626.

Teorema 1.36. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial\Omega$, como Ω tem fronteira de classe $\mathcal{C}^1$, existe um raio $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r]\,;\, x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}. \tag{1.22}$$

Definimos $V = \Omega \cap B[\tilde{x}, r/2]$ (ver Figura 1.9). Além disso, definimos para cada $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ e $x \in V$

$$x^\varepsilon = x + \lambda\varepsilon e_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda\varepsilon). \tag{1.23}$$

Observe que, para um $\lambda > 0$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a bola $B[x^\varepsilon, \varepsilon]$ está contída em $\Omega \cap B[\tilde{x}, r]$ para todo $x \in V$. De fato, por definição, dado $x \in V$ temos que $x \in \Omega$ e $\|x - \tilde{x}\| \leqslant r/2$. Note que $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ suficientemente grande. Com efeito, como $x \in V$, em particular $x \in \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$. Como Ω tem fronteira de classe $\mathcal{C}^1$, temos que $x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$, daí

$$x_n^\varepsilon = x_n + \lambda\varepsilon > x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

e por (1.23) deduzimos que

$$\|x^\varepsilon - \tilde{x}\| = \|x + \lambda\varepsilon e_n - \tilde{x}\| \leqslant \|x - \tilde{x}\| + \|\lambda\varepsilon e_n\| \leqslant \frac{r}{2} + \lambda\varepsilon < r$$

desde que $0 < \varepsilon < r/2\lambda$. Logo, $x^\varepsilon \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Por isso, $B[x^\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário.

Agora, definimos $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$ para todo $x \in V$ e $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Assim, pelo Teorema 1.31 $v^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$. Dito isso, afirmamos que

$$\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} \to 0.$$

De fato, seja α um multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$, então

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)}.$$

A segunda norma do lado direito da desigualdade acima vaí a 0 quando $\varepsilon \to 0$, pois a translação é contínua na norma do espaço $\mathcal{L}^p$ e

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} = \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * u_\varepsilon) - u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0,$$

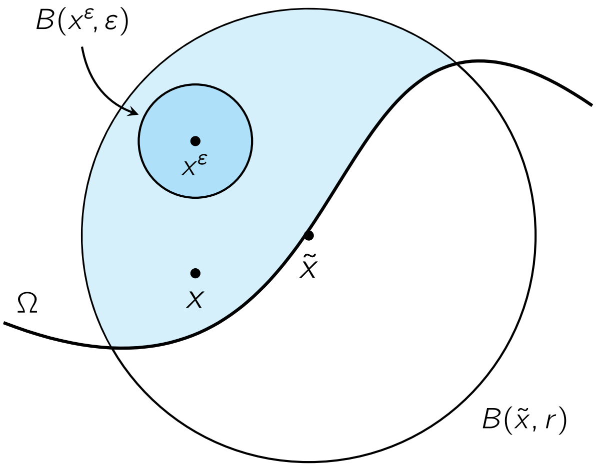

Figura 1.9: Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 253

quando $\varepsilon \to 0$ (ver Teorema 1.31). Ou seja, é verdade que

$$\begin{aligned}\|v^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \\ &\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(V)} + \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(V)} \to 0.\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Note que todos os cálculos foram feitos em uma vizinhança de um ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$. Dito isso, como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado), pelo Teorema de Heine-Borel[8], podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, raios $r_i > 0$, conjuntos $V_i = \Omega \cap B[\tilde{x}_i, {}^{r_i}/_2]$ e funções v_i^ε, com $i = 1, \ldots, N \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, e

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(\tilde{x}_i, {}^{r_i}/_2).$$

Além disso, considere um aberto limitado $V_0 = \Omega \cap B(\tilde{x}_0, {}^{r_0}/_2)$ e uma função $v_0^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(V_0) \cap \mathcal{W}^{k,p}(V_0)$ com $\|v_0^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_0)} \to 0$ e

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} V_i.$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos $\{V_i\}_{i=0}^N$ em Ω. Defina

$$v^\varepsilon = \sum_{i=0}^{N} \phi_i v_i^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),$$

e observando que $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$, obtemos

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\phi_i v_i^\varepsilon) - D^\alpha(\phi_i u)\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

[8]Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui subcobertura finita.

Utilizando a Regra de Leibniz, segue que

$$\begin{aligned}\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} &\leqslant \sum_{i=0}^{N}\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}\left\|D^\sigma \phi_i\left[D^{\alpha-\sigma}\left(v_i^\varepsilon - u\right)\right]\right\|_{\mathcal{L}^p(V_i)}\\ &\leqslant c\sum_{i=0}^{N}\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}\|D^{\alpha-\sigma}(v_i^\varepsilon - u)\|_{\mathcal{L}^p(V_i)},\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de ϕ_i (e por consequência $D^\sigma\phi_i$) ter suporte compacto e ser suave na ultima desigualdade. Ademais, como $|\alpha-\sigma|\leqslant k$, temos que

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\sum_{i=0}^{N}\sum_{\sigma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}\|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \leqslant c\sum_{i=0}^{N}\|v_i^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \to 0.$$

Por fim, definindo $u_n := v^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ chegamos a

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $n\to\infty$, como era desejado. □

1.5 Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto especifico. Nessa seção, veremos uma forma de estender funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por meio de um operador linear.

Teorema 1.37. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e Ω' um aberto tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Então existe um operador linear limitado $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1\leqslant p<\infty$, tal que para cada $u\in\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, tem-se que

(a) $Eu = u$ qtp em Ω;

(b) $\operatorname{supp} Eu \subseteq \Omega'$;

(c) $\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p, Ω e Ω'.

Demonstração. Seja $\tilde{x}\in\partial\Omega$ e considere inicialmente que $\partial\Omega$ esteja contido no plano $\{x_n=0\}$ perto de $\tilde{x}$. Dessa forma, podemos supor que existe uma bola $B=B(\tilde{x},r)$ tal que

$$\begin{aligned}B^+ &= B\cap\{x_n\geqslant 0\}\subseteq\overline{\Omega};\\ B^- &= B\cap\{x_n\leqslant 0\}\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\Omega.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Além disso, assuma que $u\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x\in B^+\\ -3u(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)+4u(x_1,\ldots,x_{n-1},\frac{x_n}{2}), & \text{se } x\in B^-\end{cases}$$

que chamamos de reflexão de ordem superior da função u de B^+ a B^-. Afirmamos que $\bar{u}\in\mathcal{C}^1(B)$. Com efeito, denotando $u^- = \bar{u}\big|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}\big|_{B^+}$, podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n} \quad\text{em}\quad \{x_n=0\}.$$

De fato, pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tfrac{x_n}{2})$$

quando $x_n = 0$, obtemos

$$\left.\frac{\partial u^-}{\partial x_n}\right|_{\{x_n=0\}} = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \left.\frac{\partial u^+}{\partial x_n}\right|_{\{x_n=0\}}$$

Também é verdade que

$$u^+ = u^- \text{ e } \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \text{ em } \{x_n = 0\},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$ Portanto $D^\alpha u^- = D^\alpha u^+$ em $\{x_n = 0\}$ com $|\alpha| \leqslant 1$. Sendo assim, $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$, pois fora de $\{x_n = 0\}$, as componentes de $\bar{u}$ já eram de classe $\mathcal{C}^\infty$, então apenas restava verificar que em $B^+ \cap B^- = B \cap \{x_n = 0\}$ as componentes em B^+ e B^- se igualavam, implicando a continuidade $\bar{u}$ e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}, \tag{1.25}$$

onde c é uma constante[9] positiva que não depende de u. De fato, sabemos que

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(B)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p \, dx\right].$$

Como $B = B^+ \cup B^-$, e denotando $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ por x' podemos reescrever o último somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p \, dx\right] = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p \, dx + \int_{B^-} |4D^\alpha[u(x', -\tfrac{x_n}{2})] - 3D^\alpha[u(x', -x_n)]|^p \, dx\right]$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u(x)|^p \, dx + 3\cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p \, dx + 4\cdot 2^p \int_{B^-} |D^\alpha u(x', -x_n)|^p \, dx\right],$$

onde usamos o fato de que

$$(a+b)^p \leqslant (2\max\{a,b\})^p = 2^p \max\{a,b\}^p \leqslant 2^p(a^p + b^p),$$

para todo $a, b \geqslant 0$. Porem, $-x_n, -\frac{x_n}{2} \geqslant 0$, então podemos considerar que as integrais em B^- são integrais sobre B^+, através de uma mudança de variáveis, para encontrar

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_B |D^\alpha \bar{u}|^p \, dx\right] \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p \, dx\right] = c\|u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Portanto,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Por outro lado, se $\partial\Omega$ não está necessáriamente contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de $\tilde{x}$, temos que existe um homeomorfismo Φ com inversa Ψ que planifica $\partial\Omega$ perto de $\tilde{x}$ (ver Figura 1.10), basta usar a função γ de classe $\mathcal{C}^1$ da Definição 1.35 e definir Φ por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})). \tag{1.26}$$

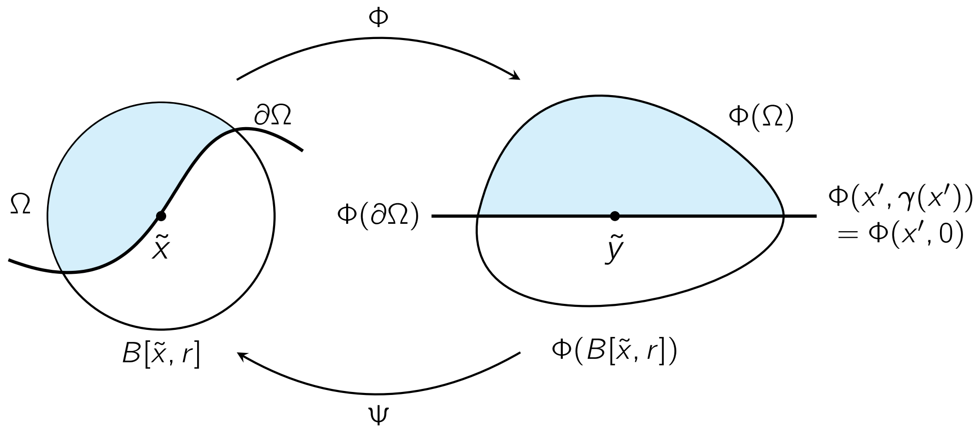

Figura 1.10: Representação gráfica do homemorfismo Φ.
Fonte: Autoral. Baseada em [5] p.p. 256.

De forma análoga definimos Ψ por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_{n-1})). \tag{1.27}$$

Dete modo, é fácil ver que $\Psi^{-1} = \Phi$ e que Φ e Ψ são de classe $\mathcal{C}^1$ (por definição) . Sendo assim, seja $y = \Phi(x)$ (ou seja $x = \Psi(y)$) e definimos $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo como foi feito anteriormente (u' é de classe $\mathcal{C}^1$), podemos escolher uma bola $B = B(\tilde{y}, r)$ e definimos $\bar{u}'$ de forma que $\bar{u}' \in \mathcal{C}^1(B)$ e

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}. \tag{1.28}$$

Seja $B' = \Psi(B)$, assim conseguimos obter uma extensão $\bar{u}$ de u para B' com

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para $\bar{u} \equiv \bar{u}' \circ \Phi$, obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.17)

$$\|D^\alpha \bar{u}'\|^p_{\mathcal{L}^p(B)} = \int_B |D^\alpha \bar{u}'(y)|^p \, dy = \int_B |D^\alpha \bar{u}(\Psi(y))|^p \, dy = \int_{B'} |D^\alpha \bar{u}(x)|^p \, dx = \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(B')}.$$

Dessa forma, passando ao somatório, quando $|\alpha| \leqslant 1$, chegamos a

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')}. \tag{1.29}$$

Além disso, é verdade

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u'\|^p_{\mathcal{L}^p(B^+)} = \int_{B^+} |D^\alpha u'(y)|^p \, dy &= \int_{B^+} |D^\alpha u(\Psi(y))|^p \, dy \\ &= \int_{\Psi(B^+)} |D^\alpha u(x)|^p \, dx \leqslant \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx = \|D^\alpha u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.30}$$

Portanto, por (1.28), (1.29) e (1.30), obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} = \|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}, \tag{1.31}$$

[9] Durante essa e outras demonstrações, mesmo se o valor da constante c mudar, ainda continuaremos denotando por c, então por exemplo $c + 2^p$, $c(1+n)$, etc, ainda serão denotados por c.

como queríamos mostrar.

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x\in\partial\Omega} B'_x$, que é uma cobertura aberta, pois $B'_x = \Psi(B(\tilde{y}, r))$, e imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto.Pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma subcobertura finita de $\partial\Omega$. Sendo assim, existem uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial\Omega$, abertos B'_i e extensões $\bar{u}_i$ de u em B'_i de forma que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B'_i$. Por outro lado, considere um aberto $B'_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N B'_i.$$

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{B'_i\}_{i=0}^N$ e defina

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^N \phi_i \bar{u}_i$$

onde $\bar{u}_i$ está associada a B'_i e $\bar{u}_0 = u$. Deste modo, obtemos a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Com efeito

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D^\alpha \bar{u}\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i \bar{u}_i)\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})},$$

onde c é uma constante positiva que depende de p. Logo, utilizando a Regra de Leibniz (ver Teorema 1.28), inferimos

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\phi_i \bar{u}_i)\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\operatorname{supp} D^\sigma \phi_i \subseteq \operatorname{supp} \phi_i \subseteq B'_i$, então o suporte de $D^\sigma \phi_i$ também é compacto (pois B'_i é limitado), sendo assim $\max|D^\sigma \phi_i|$ existe em B'_i. Portanto, vale a desigualdade

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^\sigma \phi_i D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(B'_i)},$$

onde agora a constante c também depende de B'_i. Além disso,

$$c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_i\|^p_{\mathcal{L}^p(B'_i)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)}.$$

Por fim, utilizando (1.31), chegamos a

$$\|\bar{u}\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \sum_{i=0}^N \sum_{\sigma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \|\bar{u}_i\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(B'_i)} \leqslant c\|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c depende de B'_i, p e N. Portanto, deduzimos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.32}$$

Defina Ω' aberto de forma que $\bigcup_{i=0}^N B'_i \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\operatorname{supp} \bar{u} \subseteq \Omega'$. Defina também $\bar{E} : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $\bar{E}u = \bar{u}$. Temos que $\bar{E}$ é linear,

$$\|\bar{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e supp $\bar{E}u \subseteq \Omega'$. Sendo assim, definimos $E : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por

$$Eu = \lim \overline{u_k},$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ que converge para u (sabemos que essa sequência existe pois mostramos no Teorema 1.36 que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$). Podemos afirmar que o limite converge em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\overline{u_k} - \overline{u_\ell}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

Logo $(\overline{u_n})$ é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.30), deduzimos que $\lim \overline{u_k}$ existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned}\|Eu - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} &\leqslant \|Eu - \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|\overline{u_k} - u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \\ &\leqslant \|Eu - \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0\end{aligned}$$

pois $u_k \to u$ e $\overline{u_k} = u_k$ em Ω (ver (1.24)). Portanto, $Eu = u$ qtp em Ω, provando o item **(a)**.

Para verificar o ítem **(b)**, basta ver que, por definição, $\operatorname{supp} \overline{u_k} \subseteq \Omega'$. Dessa forma, $\operatorname{supp} Eu \subseteq \Omega'$.

Por fim, para mostrar o item **(c)**, note que E é um operador limitado, pois

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\lim \overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \lim \|\overline{u_k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|Eu\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

□

1.6 Traços

Em alguns casos, no estudo de equações diferenciais parciais, é necessário impor condições de contorno na fronteira de um domínio. Para isso, precisamos entender o que significa restringir uma função em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ à fronteira de Ω. Nesta seção, veremos como isso pode ser feito por meio do operador traço.

Teorema 1.38. Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Então, existe um operador linear limitado $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, tal que

(a) $Tu = u\big|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$;

(b) $\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde c depende apenas de p e Ω.

Demonstração. Incialmente suponha que $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Da mesma forma que foi feito no Teorema 1.37 considere $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e suponhamos que $\partial\Omega$ está contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de $\tilde{x}$. Sejam $B = B(\tilde{x}, r)$ (e defina B^+ e B^- como em (1.24)) e $\widehat{B} = B(\tilde{x}, r/2)$, e considere $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$ de forma que $\xi \geqslant 0$ em B e $\xi \equiv 1$ em $\widehat{B}$, e denote $\Gamma = \partial\Omega \cap \widehat{B}$ (ver Figura 1.11) e $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.11) (rever)

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n}\, dx = \int_{\partial B^+} \xi|u|^p\, \nu_n dx'$$

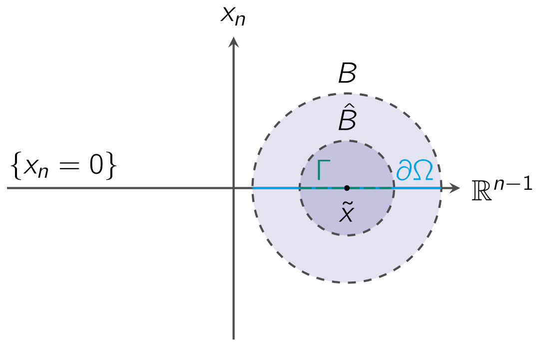

Figura 1.11

onde ν é o vetor normal unitário que aponta para baixo em ∂B^+, isto é $\nu = (0, \ldots, 0, -1)$. Sendo assim, $\nu_n = -1$ e

$$\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n}\, dx = -\int_{\partial B^+} \xi|u|^p\, dx',$$

pois $\operatorname{supp} \xi|u|^p \subseteq \operatorname{supp} \xi \subseteq B$. Dessa forma, como $\Gamma \subseteq \hat{B}$ e $\xi(x) = 1$ para todo $x \in \hat{B}$, concluimos que

$$\int_\Gamma |u|^p\, dx' = \int_\Gamma \xi|u|^p\, dx' \leqslant \int_{\partial B^+} \xi|u|^p\, dx' = -\int_{B^+} \frac{\partial(\xi|u|^p)}{\partial x_n}\, dx.$$

Calculando a derivada acima, obtemos

$$\int_\Gamma |u|^p\, dx' \leqslant -\int_{B^+} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_n}|u|^p + p|u|^{p-1}\operatorname{sgn} u\, \frac{\partial u}{\partial x_n}\xi\right] dx \leqslant c\int_{B^+} \left[|u|^p + |u|^{p-1}\|Du\|\right] dx$$

onde utilizamos o fato de ξ e suas derivadas parciais terem suporte compacto para a ultima desigualdade. Por fim utilizando a Desigualdade de Young

$$\int_\Gamma |u|^p\, dx' \leqslant c\int_{B^+} \left[|u|^p + \frac{|u|^{(p-1)p'}}{p'} + \frac{\|Du\|^p}{p}\right] dx \leqslant c\int_{B^+} |u|^p + \|Du\|^p\, dx. \tag{1.33}$$

Caso $\partial\Omega$ não esteja necessáriamente contido em $\{x_n = 0\}$ perto de $\tilde{x}$, considere o homeomorfismo Φ com inversa Ψ da demonstração do Teorema 1.37 (ver (1.26) e (1.27)) e defina $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.17), inferimos

$$\int_\Gamma |u'|^p\, dy' = \int_\Gamma |u \circ \Psi|\, dy' = \int_{\Psi(\Gamma)} |u|^p\, dx'$$

e

$$\int_{B^+} \left[|u'(y)|^p + \|Du'(y)\|^p\right] dy \leqslant c\int_{\Psi(B^+)} \left[|u(x)|^p + \|Du(x)\|^p\right] dx,$$

onde c é uma constante que depende de γ que surge devido a regra da cadeia. Dessa forma, por (1.33), podemos escrever

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))} = \int_{\Psi(\Gamma)} |u|^p\, dx' = \int_\Gamma |u'|^p\, dy' &\leqslant c\int_{B^+} \left[|u'|^p + \|Du'\|^p\right] dy \\ &\leqslant c\int_{\Psi(B^+)} \left[|u|^p + \|Du\|^p\right] dx = \|u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\Psi(B^+))}.\end{aligned}$$

Como $\Psi(B^+) \subseteq \Omega$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma))} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma quantidade finita de abertos (em $\partial\Omega$) $\Psi(\Gamma_i)$ tal que,

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \Psi(\Gamma_i)$$

e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_i))} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.34}$$

Considere uma partição da unidade $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ subordinada a cobertura $\{\Psi(\Gamma_i)\}_{i=1}^N$, e denote $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$.

Defina $\widetilde{T} : \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por $\widetilde{T}u = u|_{\partial\Omega}$. Dessa forma, podemos escrever por (1.34), que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}u\|^p_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |\widetilde{T}u|^p \, dx = \int_{\partial\Omega} |u|^p \, dx \leqslant c \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \phi_i^p |u|^p \, dx \\ = c \sum_{i=1}^N \int_{\Psi(\Gamma_i)} |u|^p \, dx \leqslant c\|u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

onde c é uma constante que depende de p e Ω. Isto mostra que $\widetilde{T}$ é um operador limitado. Por fim, defina $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por

$$Tu = \lim \widetilde{T}u_k,$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ que converge para $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Observe que

$$\|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|\lim \widetilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \lim \|\widetilde{T}u_k\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \leqslant c \lim \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Isto prova **(b)**.

Por fim, se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, então, pelo Teorema 1.36, temos que $u_k(x) \to u(x)$ uniformemente sobre $\overline{\Omega}$. Por outro lado, como $\|u_k|_{\partial\Omega} - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \to 0$ quando $k \to \infty$, então passando a uma subsequência (se necessário), temos, pelo Teorema 1.13 que $u_k(x) \to Tu(x)$ qtp em $\partial\Omega$. Mas como $\partial\Omega \subseteq \Omega$, segue que $Tu = u$ qtp em $\partial\Omega$, isto é, $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, provando **(a)**. □

Teorema 1.39 (Funções traço zero em $\mathcal{W}^{1,p}$)**.** Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por definição existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Como u_k tem suporte compacto em Ω então u_k se anula em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $Tu_k = 0$ sobre $\partial\Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e como $T : \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado, então

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = \|Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}.$$

Portanto $Tu = 0$ qtp sobre $\partial\Omega$ Reciprocamente, suponha que $Tu = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando partições da unidade e o homeomorfismo Φ que planifica $\partial\Omega$ como foi feito anteriormente, podemos supor

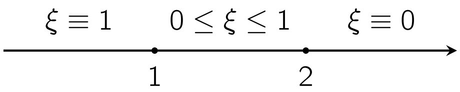

Figura 1.12: ξ definido em (1.38).

que

$$\begin{aligned} &u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+);\\ &u \text{ tem suporte compacto em } \overline{\mathbb{R}^n_+};\\ &Tu = 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

onde $\mathbb{R}^n_+$ denota o semiplano superior de $\mathbb{R}^n$. Como $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ então existe um sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \subseteq \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ (ver Teorema 1.36). Como $(u_k) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, então $Tu_k = u_k|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Assim por (1.36) e usando que T é limitado, temos que

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\partial\mathbb{R}^n)} = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \lim \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Isto é, $Tu_k \to 0$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Dito isso, seja $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geqslant 0$. Pelo teorema fundamental do cálculo, podemos escrever u_k da seguinte forma

$$u_k(x', x_n) = u_k(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t)\, dt$$

e, consequentemente,

$$|u_k(x', x_n)|^p \leqslant c\left(|u_k(x', 0)|^p + \left(\int_0^{x_n} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t)\right| dt\right)^p\right),$$

onde a constante c depende de p (aqui, utlizamos a desigualdade $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$). Integrando ambos os lados sobre $\mathbb{R}^{n-1}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p\, dx' &\leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p\, dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\|\, dt\right)^p dx'\right)\\ &\leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p\, dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \|Du_k(x', t)\|^p\, dt\right)\left(\int_0^{x_n} 1^{p'}\, dt\right)^{p/p'} dx'\right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8). Como $p/p' = p - 1$ (pois p e p' são expoentes conjugados), tem-se pelo Teorema de Fubini (ver Teorema 1.15) que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', x_n)|^p\, dx' \leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x', 0)|^p\, dx' + x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du_k(x', t)\|^p\, dx' dt\right).$$

Por fim, como $\|u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} \to 0$ quando $k \to \infty$, e utlizando o Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p\, dx' \leqslant c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \|Du(x', t)\|^p\, dx' dt. \tag{1.37}$$

Seja $\xi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\begin{aligned} &\xi \equiv 1 \text{ em } [0, 1]\\ &\xi \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \setminus [0, 2]\\ &0 \leqslant \xi \leqslant 1 \end{aligned} \tag{1.38}$$

(ver Figura 1.12) e defina $\xi_k(x) = \xi(kx_n)$ e $v_k(x) = u(x)(1 - \xi_k(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_n}(x) &= (1 - \xi_k(x))\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) - ku\xi'(kx_n) \text{ e} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x'}(x) &= (1 - \xi_k(x))\frac{\partial u}{\partial x'}(x). \end{aligned}$$

Consequentemente, as seguintes desigualdades valem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx &\leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\left\| \frac{\partial v_k}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \right)^p dx \\ &\leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\xi_k \left\| \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \xi_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| + k|u||\xi'| \right)^p dx, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de $(a + b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$, e c é uma constante que depende de p e n. Deste modo, chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \xi_k^p \|Du\|^p dx + ck^p \int_{\mathbb{R}^n_+} |\xi'|^p |u|^p dx. \tag{1.39}$$

Observe que $\operatorname{supp} \xi' \subseteq \operatorname{supp} \xi \subseteq [0, 2]$. Isto nos diz que $\xi'(kx_n) = 0$ quando $kx_n > 2$ ou $x_n > 2/k$. Logo podemos escrever a ultima desigualdade como

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}^n_+} \xi_k^p \|Du\|^p \, dx + ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \, dx' dx_n,$$

onde estimamos ξ' pelo seu máximo em $[0, 2]$. Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\xi(kx_n)|^p \|Du\|^p \, dx &= \int_0^{\frac{2}{k}} |\xi(kx_n)|^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p \, dx' dx_n \\ &\leqslant c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' dx_n \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, onde estimamos ξ pelo seu máximo em $[0, 2]$, e usamos que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ Além disso, utlizando (1.37), podemos ecrever

$$\begin{aligned} ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt &\leqslant ck^p \int_0^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds dt \\ &\leqslant c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du\|^p dx' ds \to 0, \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$. Portanto, por (1.39), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx \to 0,$$

isto é $\|Dv_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$ quando $k \to \infty$.

Por fim, pela definição de v_k, inferimos que

$$\|v_k - u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\mathbb{R}^n_+} |v_k - u|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \xi_k |u|^p \, dx.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, chegamos a

$$\|v_k - u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^{\frac{2}{k}} \xi(kx_n)^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p \, dx' dx_n \leqslant c \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^p \, dx' dx_n \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Dessa forma

$$\|v_k - u\|^p_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|v_k - u\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|Dv_k - Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0.$$

Defina $u_k = \eta_{\frac{1}{k}} * v_k$. Assim, $u_k \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$ para k suficientemente grande (ver Teorema 1.31) e

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|u_k - v_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} + \|v_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$. □

1.7 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços.

Dividiremos o estudo dessas desigualdades em dois casos, $1 \leqslant p < n$ e $n < p \leqslant \infty$. O caso $n = p$ não será apresentado nesse texto, aos interessados consultar [5] p.p. 275.

1.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja $1 \leqslant p < n$. Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo[10]

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.40}$$

onde c é uma constante positiva, $1 \leqslant q < \infty$ e $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, de forma que c e q não dependam de u.

Primeiramente, vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (1.40) é válida, o valor de q não é arbitrário, mas sim admite uma forma especifica. Para isso, seja $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ não nula e $\lambda > 0$. Sendo assim, definimos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (1.40) a u_λ, obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_\lambda\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.41}$$

Note que

$$\|u_\lambda\|^q_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^p \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$\begin{aligned} \|Du_\lambda\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |D(u(\lambda x))|^p \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p \, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p \, dy = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

[10] Lembrando que $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ representa o gradiente fraco, quando calculamos a norma do gradiente em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ estamos calculando a norma $\mathcal{L}^p$ da norma euclidiana do gradiente.

Utilizando essas duas igualdades acima em (1.41), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}}\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

a qual podemos reescrever como

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.42}$$

Observe que se $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}>0$, obtemos uma contradição quando $\lambda \to 0$, pois isso implicaria em $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}=0$, que só acontece se $u=0$ (o que é uma contradição). De forma análoga se $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$ obtemos uma contradição quando $\lambda \to \infty$. Sendo assim, para que a igualdade (1.40) seja válida, precisamos que

$$1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=0,$$

ou seja,

$$q=\frac{np}{n-p}.$$

Isso motiva a definição abaixo.

Definição 1.40. Se $1 \leqslant p < n$ o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^*=\frac{np}{n-p}.$$

Os cálculos no início da seção mostram que a desigualdade (1.40), somente é válida quando $q=p^*$. O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é verídica.

Teorema 1.41 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** Seja $1 \leqslant p < n$. Então, existe uma constante c, que depende apenas de p e n, tal que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.43}$$

para toda função $u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos dois casos

<u>Caso 1:</u> Considere que $p=1$

Como por hipótese, u tem suporte compacto, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\,dy_i,$$

e assim

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\right|\,dy_i \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)|\,dy_i.$$

Elevando ambos os lados a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de $i=1$ até n obtemos

$$|u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$ por X_i e integrando ambos os lados da desigualdade a cima, em relação a x_1, de $-\infty$ a ∞, chegamos a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.\end{aligned}$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1, então a sua integral é constante em relação a x_1. Sendo assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada (ver Teorema 1.9) e o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.15), a desigualdade acima se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

onde podemos reescrever a ultima integral da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} I_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 \text{ e } I_i = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dy_i \quad (i = 2, \dots, n).$$

Porém, I_2 é constante em relação a x_2 então

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant I_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini (ver Teoremas 1.9 e 1.15), inferimos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \leqslant & \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)|\, dy_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_2)|\, dx_1 dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)|\, dx_1 dx_2 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, chegamos a

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\, dx\right)^{\frac{n}{n-1}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{p^*}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|Du\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.44}$$

como queriamos mostrar.

Caso 2: Assuma que $1 < p < n$

Considere a função $|u|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido a seguir. Utilizando a desigualdade obtida no caso $p = 1$, podemos escrever

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[|u|^\gamma\right]^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)|\, dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|Du|\, dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8) na ultima integral obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Escolhendo γ de forma que $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\dfrac{p}{p-1}$, isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$$

nesse caso, $\dfrac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim, podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

finalizando a demonstração. □

Observação: Note que o suporte compato é necessário, como exemplo tome a função $u(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma $|Du| \equiv 0$. Consequentemente

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 0 \implies u \equiv 0,$$

que é uma contradição.

Teorema 1.42. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e, além disso

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde $c > 0$ é uma constante que depende apenas de n, p e Ω.

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.37, podemos considerar a extensão de u $Eu = \bar{u}$ tal que

$$\begin{aligned} &\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega \\ &\bar{u} \text{ tem suporte compacto} \\ &\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Como $\bar{u}$ tem suporte compacto, sabemos que existe uma sequência (u_k), dada por $\eta_{\frac{1}{k}} * \bar{u}$, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0 \tag{1.46}$$

e para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema 1.31). Pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.43), concluimos que

$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.47}$$

Note que
$$\|Du_k - D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$
quando $k \to \infty$. Isso mostra que (Du_k) é convergente (e portanto de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, por (1.47), observamos que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ que é um espaço completo. Logo, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema 1.13, a menos de uma subsequência $u_k(x) \to v(x)$ qtp em $\mathbb{R}^n$, quando $k \to \infty$. Análogamente, por (1.46) $u_k(x) \to \bar{u}(x)$ qtp em $\mathbb{R}^n$, quando $k \to \infty$ desde que $\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$, quando $k \to \infty$. Com isso $v(x) = \bar{u}(x)$ qtp em $\mathbb{R}^n$. Dessa forma
$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$
quando $k \to \infty$. A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev também implica em
$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$
para todo $k \in \mathbb{R}^n$. Passando ao limite, quando $k \to \infty$, obtemos
$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$
Essa desigualdade finaliza a demonstração, já que, por (1.45)
$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant \|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$
como queriamos mostrar. $\square$

O teorema acima mostra que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, esse tipo de resultado é conhecido como imersão ou mergulho.

Teorema 1.43. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < n$, então a desigualdade
$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$
é válida para $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, conseguimos uma sequência de funções (u_k) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, quando $k \to \infty$. Além disso, podemos estender cada u_k para ser 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Sendo assim, aplicamos a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.43) para obter
$$\|u_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du_k\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$
para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que $\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}, \|Du_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$, quando $k \to \infty$. Sendo assim, pelo Teorema 1.13, passando a uma subsequência (se necessário), chegamos a
$$u_k(x) \to u(x) \text{ qtp em } \Omega. \tag{1.48}$$
Por outro lado, pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.43), inferimos que
$$\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du_k - Du_\ell\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0,$$
quando $k, \ell \to \infty$, pois (Du_k) é convergente (em particular, de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, que é um espaço completo (ver Teorema 1.7). Dito isso, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ tal que $u_k \to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Novamente, utilizando o Teorema 1.13, passando a uma subsequência (se necessário), segue que,
$$u_k(x) \to v(x) \text{ qtp em } \Omega. \tag{1.49}$$

Logo, por (1.48) e (1.49), $v \equiv u$ qtp em Ω. Dessa forma

$$\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \to 0.$$

Passando ao limite, chegamos a

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}}(\Omega) \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Provando o caso em que $q = p^*$. Agora considere $1 \leqslant q < p^*$. Como Ω é limitado, temos, pelo Teorema 1.10 e por (1.43), que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q \leqslant p^*$. □

Um caso particular da desigualdade acima é a Desigualdade de Poincaré que será apresentada no resultado abaixo.

Corolário 1.44 (Desigualdade de Poincaré)**.** Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida onde c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração. Primeiramente considere $1 \leqslant p < n$. Por definição, $1 \leqslant p < p^*$, pelo Teorema 1.42, concluimos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Agora considere que $n \leqslant p < \infty$ e $1 \leqslant s < n$ tal que $p < s^*$ (isto é possível pois $s^* \to \infty$ se $s \to n^-$). Note que, pelo Teorema 1.10, podemos escrever

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

já que $1 \leqslant p < s^*$, $s < p$ e Ω é limitado Por fim, considere $p = \infty$. Pelo que foi visto acima, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}.$$

Passando ao limite quando $s \to n^-$, temos que $s^* \to \infty$. Dessa forma, $\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$. Portanto,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. □

O resultado acima nos diz que

$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega) \quad (1 \leqslant q \leqslant p^*) \ \text{ e } \ \mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{s^*}(\Omega) \quad (1 \leqslant s \leqslant \infty)$$

isto é o mesmo que dizer que $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $1 \leqslant q \leqslant p^*$, $\mathcal{W}^{1,s}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{s^*}(\Omega)$ com $1 \leqslant s \leqslant \infty$ e o operador inclusão ι (em cada um dos casos) é um operados linear limitado.

Além disso, podemos mostrar que a norma $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} := \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$, é equivalente a norma usual dos espaços de Sobolev $\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Com efeito,

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|Du\|^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Dessa forma, concluimos que

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$, são equivalentes.

1.7.2 Desigualdade de Morrey

A próxima classe de desigualdades, realiza uma conexão entre os espaços de Hölder (que veremos a definição a seguir) e os espaços de Sobolev

Definição 1.45. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita ser Hölder continua com expoente $\gamma \in (0, 1]$, quando

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c\|x - y\|^{\gamma},$$

para todo $x, y \in \Omega$. Além disso, denotamos o espaço dessas funções por $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 1.46. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, escrevemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \quad \text{e} \quad [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\gamma}} \right\},$$

para denotar a norma de u no espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com essas definições, estamos prontos para enunciar e demonstrar a Desigualdade de Morrey.

Teorema 1.47 (Desigualdade de Morrey)**.** Sejam $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $n < p \leqslant \infty$ e $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Então

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n.

Demonstração. Primeiramente, escolha uma bola $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Afirmamos que existe uma constante $c > 0$ dependendo apenas de n tal que[11]

$$⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|y - x\|^{n-1}}\, dy. \tag{1.50}$$

Com efeito, fixando $w \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$, e $0 < s < r$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da Regra da cadeia, que

$$|u(x + sw) - u(x)| = \left|\int_0^s \frac{du}{dt}(x + tw)\, dt\right| = \left|\int_0^s Du(x + tw) \cdot w\, dt\right| \leqslant \int_0^s \|Du(x + tw)\|\, dt,$$

onde utilizamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de $|w| = 1$. Logo, integrando ambos os lados sobre $\partial B(\mathbf{0}, 1)$ e aplicando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.15), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,1)} |u(x + sw) - u(x)|\, dS_w &\leqslant \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} \|Du(x + tw)\|\, dS_w dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} \|Du(x + tw)\| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}}\, dS_w dt.\end{aligned}$$

[11]A integral

$$⨍_{B(x,r)} f\, dy := \frac{1}{\sigma(n)r^n} \int_{B(x,r)} f\, dy$$

onde $\sigma(n)r^n$ é o volume da esfera n-dimensional, representa a média da função f sobre $B(x, r)$.

Seja $y = x + tw$, de forma que $t = \|x - y\|$. Assim, por meio de coordenadas polares e mudança de variáveis obtemos

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS_w \leqslant \int_0^s \int_{B(x,t)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dS_y dt = \int_{B(x,s)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy$$

e, como $s < r$, tem-se

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS_w \leqslant \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy.$$

Multiplicando a equação acima por s^{n-1} e integrando de 0 a r, com respeito a s, chegamos a

$$\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS ds \leqslant \int_0^r s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x + sw$, obtemos

$$\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} |u(y) - u(x)|\, dS ds \leqslant \left(\int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy \right) \left(\int_0^r s^{n-1} ds \right).$$

Utilizando coordenadas polares no lado esquerdo e resolvendo a última integral do lado direito, segue que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy.$$

Por fim, dividindo ambos os lados por $\sigma(n) r^n$ (volume da n-esfera de raio r), temos

$$⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant \frac{1}{n\sigma(n)} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy.$$

como era desejado.

Agora, fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Note que, podemos escrever

$$|u(x)| = \frac{|u(x)|}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} dy = ⨍_{B(x,1)} |u(x)|\, dy.$$

Dito isso, deduzimos que

$$|u(x)| \leqslant ⨍_{B(x,1)} |u(x) - u(y)|\, dy + ⨍_{B(x,1)} |u(y)|\, dy. \tag{1.51}$$

Observe que, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), inferimos

$$\begin{aligned} ⨍_{B(x,1)} |u(y)|\, dy &= \frac{1}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} |u(y)|\, dy \\ &\leqslant \frac{1}{\sigma(n)} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} 1^{p'}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{1.52}$$

onde p e p' são expoentes conjugados. Além disso, utilizando a desigualdade de Hölder novamente, chegamos a

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy \leqslant \left(\int_{B(x,1)} \|Du\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x-y\|^{(n-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

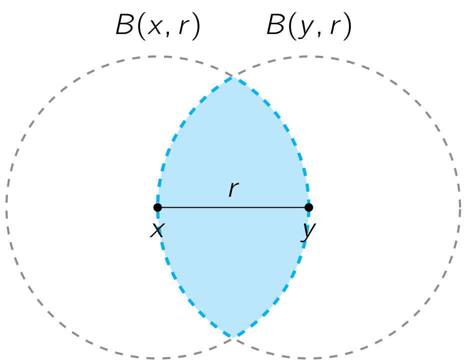

Figura 1.13: $B = B(x, r) \cap B(y, r)$.
Fonte: Autoral

onde p e p' são expoentes conjugados e a última integral é finita. De fato, utilizando coordenadas polares, concluimos que

$$\begin{aligned}\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x-y\|^{(n-1)p'}} &= \int_0^1 \int_{\partial B(x,r)} \frac{1}{r^{(n-1)p'}} dS dr \\ &= n\sigma(n) \int_0^1 r^{(n-1)(1-p')}\, dr = n\sigma(n)\frac{p-1}{p-n} < \infty,\end{aligned}$$

pois $n < p$. Dito isso, segue que

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\, dy \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.53}$$

Dessa forma, por (1.50), (1.51), (1.52) e (1.53), deduzimos que

$$|u(x)| \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como x é arbitrário, também obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.54}$$

Agora, considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ e denote $r = \|x-y\|$. Portando, seja $B = B(x, r) \cap B(y, r)$ (ver Figura 1.13), sendo assim

$$|u(x)-u(y)| = \fint_B |u(x)-u(y)|\, dz \leqslant \fint_B |u(x)-u(z)|\, dz + \fint_B |u(y)-u(z)|\, dz. \tag{1.55}$$

Calculando a primeira acima integral obtemos, por (1.51), que

$$\fint_B |u(x)-u(z)|\, dz \leqslant \fint_{B(x,r)} |u(z)-u(x)|\, dz \leqslant c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(z)\|}{\|z-x\|^{n-1}}\, dz.$$

Analogamente a (1.53), inferimos que

$$\fint_B |u(x)-u(z)|\, dz \leqslant cr^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da mesma forma, segue que

$$\fint_B |u(y)-u(z)|\, dz \leqslant cr^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Sendo assim, por (1.55), podemos escrever

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c\|x - y\|^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Isso mostra que

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\gamma}} \right\} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.56}$$

Portanto por (1.54) e (1.56)

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Definição 1.48. Dizemos que u^* é uma versão de uma função u se

$$u = u^* \text{ qtp em seu domínio}$$

Para demonstrar a próxima desigualdade de Sobolev, precisamos do seguinte resultado

Teorema 1.49. O espaço de Hölder $(\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})})$ é um espaço de Banach

Demonstração. Ver [10] p.p. 5. □

Teorema 1.50. Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Considere $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n < p \leqslant \infty$. Então u tem uma versão contínua $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, tal que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c é um constnte que depende de n, p e Ω.

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.37, podemos considerar a extensão de u, $Eu = \bar{u}$, tal que

$$\begin{aligned} &\bar{u} = u \text{ qtp em } \Omega \\ &\bar{u} \text{ tem suporte compacto} \\ &\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Além disso, como supp $\bar{u}$ é compcto, temos pelo Teorema 1.31, que existe uma sequência $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para k suficientemente grande, tal que

$$\|u_k - \bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0. \tag{1.58}$$

quando $k \to \infty$ Além disso, pelo Teorema 1.47, podemos escrever

$$\|u_k - u_l\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k - u_l\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ (pois é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$). Como $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.30), existe uma função $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \to 0. \tag{1.59}$$

Note que $u^* = \bar{u}$ qtp em $\mathbb{R}^n$ (análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 1.42) e $u = \bar{u}$ qtp em Ω (por (1.57)). Logo $u = u^*$ qtp em Ω, ou seja u^* é uma versão contínua de u. O Teorema 1.47 também implica em

$$\|u_k\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Passando ao limite, quando $k \to \infty$, chegamos por (1.58) e (1.59) a

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim, por (1.57) é verdade que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, concluimos que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

como era desejado. □

1.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev

Agora, vamos explorar algumas desigualdades em espaços de Sobolev com derivadas (fracas) de ordem superior.

Teorema 1.51. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp < n$, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω.

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant kp < n$ temos que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Como Ω é limitado e $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^1$, pelo Teorema 1.37 podemos considerar uma extenão $\overline{D^\beta u}$ de $D^\beta u$ com $|\beta| \leqslant k-1$. Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev obtemos

$$\|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D(\overline{D^\beta u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}$$

Dessa forma, como $\overline{D^\beta u} = D^\beta u$ qtp em Ω, podemos escrever

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \leqslant \|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{L}^{p*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D(\overline{D^\beta u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\overline{D^\beta u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

porém a extensão é um operador linear limitado, sendo assim, temos que $\|\bar{v}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ para todo $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Dito isso, inferimos que

$$\|D^\beta u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|D^\beta u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Dessa forma $u \in \mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$. De forma análoga temos que $u \in \mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Indutivamente, chegamos a $u \in \mathcal{W}^{0,q}(\Omega) = \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ e

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \geqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \geqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)} \geqslant \cdots \geqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{0,q}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Portanto

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

desde que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. □

Definição 1.52. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é formado pelas funções $u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Esse espaço é munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

Teorema 1.53. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$, e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se $kp > n$, então $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0,1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida, onde c depende apenas de k, p, n, γ e Ω.

Demonstração. Suponha que $\frac{n}{p}$ não é um inteiro. Então, como visto na demonstração do Teorema 1.51 temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ quando

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n}, \tag{1.60}$$

desde que $\ell p < n$. Além disso, ℓ é um inteiro tal que

$$\ell < \frac{n}{p} < \ell + 1, \tag{1.61}$$

isto é, $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Consequentemente, temos por (1.60) e (1.61), que

$$r = \frac{pn}{n - pl} > n \tag{1.62}$$

pois $n - pl > 0$. Além disso, $D^\alpha u \in \mathcal{W}^{1,r}(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leqslant k - \ell - 1$. Dito isso, pelo Teorema 1.37, seja $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de $D^\alpha u$. Assim pela Desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.47) $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} &\leqslant \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant c\|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.63}$$

pois $\overline{D^\alpha u} = D^\alpha u$ qtp em Ω, supp $\overline{D^\alpha u}$ é compacto e $\gamma = p + 1 - \frac{n}{p} = 1 - \frac{n}{r}$. Isso mostra que $D^\alpha u \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, pois $u \in \mathcal{W}^{k,\ell}(\Omega)$ Portanto, $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ e por (1.63), inferimos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} \left(\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \right) \\ &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} 2\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por fim, suponha que $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Seja $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Como anteriormente, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ desde que (1.60) seja satisfeito, onde

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} = n.$$

Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell$. Sejam $n < q < \infty$ e $1 \leqslant s = \frac{nq}{n+q} < n$. Dessa forma, $s^* = q$ e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.43) temos, considerando uma extensão $\overline{D^\alpha u} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} = \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} &\leqslant c\|D\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant c\|DD^\alpha u\|_{\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|DD^\alpha u\|_{\mathcal{L}^r(\Omega)} < \infty,\end{aligned}$$

para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-1$, pois $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$, $s < r$ e Ω é limitado. Por isso

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-1$. Isto nos diz que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-1 = k-\frac{n}{p}$. Como $n < q < \infty$, utilizando a Desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.47), encontramos

$$\|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} = \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} \leqslant \|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\overline{D^\alpha u}\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D^\alpha u\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\Omega)},$$

para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-2$. Assim, tomando $\gamma \in (0,1)$, $q = \frac{n}{1-\gamma}$ e $s_\gamma = \frac{np}{(1-\gamma)p+n}$ obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell-1,q}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,s_\gamma}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

pois $n < q < \infty$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{s_\gamma} - \frac{n/p}{n}$. $\square$

1.8 Compacidade

Nessa seção, vamos estudar um caso particular do mergulho visto no Teorema 1.42.

Definição 1.54. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos por $X \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} Y$ se para todo $x \in X$

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y, isto é, existe uma subsequência que converge em Y.

Observação: Se um mergulho satisfaz apenas a primeira propiedade, dizemos que X está continuamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 1.55 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Então

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega)$$

com $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q < p^*$

Demonstração. Seja $1 \leqslant q < p^*$ fixo. Como Ω é limitado, temos, pelo Teorema 1.10 que $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}$, e pelo Teorema 1.42, segue que $\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Logo, $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$, e

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Resta mostrar que se $(u_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ que converge em $\mathcal{L}^q(\Omega)$.

Como $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant M$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe que, pelo Teorema 1.37, temos que existe uma sequência $(\bar{u}_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\bar{u}_k = u_k$ qtp em Ω, $\bar{u}_k$ tem suporte compacto e $\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Dessa forma, inferimos

$$\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant cM,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $(\bar{u}_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é limitada. Com isso

$$\sup_k \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.64}$$

Primeiramente, vamos estudar as funções suavizadas $\bar{u}_k^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * \bar{u}_k$, onde η_{ε} é a função molificadora vista na Seção 1.4. Também podemos supor que para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ as funções $\bar{u}_k^{\varepsilon}$ tem suporte em um aberto limitado V. Afirmamos que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \to 0$$

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$. Com efeito, considere $v_k \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $v_k^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * v_k$. Dessa forma

$$v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_{\varepsilon}(\tau) v_k(x-\tau)\, d\tau - v_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) v_k(x-\tau)\, d\tau - v_k(x)$$

Fazendo a substituição $\tau = \varepsilon y$ e lembrando que $\int_{B(0,1)} \eta(y)\, dy = 1$, obtemos

$$v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y)\left(v_k(x-\varepsilon y) - v_k(x)\right) dy = \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} v_k(x - \varepsilon t y)\, dt dy.$$

Para calcular essa derivada, seja $g(t) = x - \varepsilon t y$. Pela Regra da Cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}(v_k \circ g) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(g(t))\, g_j'(t) = -\varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(g(t))\, y_j = -\varepsilon D v_k(x - \varepsilon t y)\cdot y$$

Sendo assim

$$v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x) = -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 D v_k(x - \varepsilon t y)\cdot y\, dt dy.$$

Daí, passando o módulo em ambos os lados e Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x)| \leqslant \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|D v_k(x - \varepsilon t y)\|\, dt dy,$$

e integrando ambos os lados sobre V

$$\begin{aligned}\int_V |v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x)|\, dx &\leqslant \int_V \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \|D v_k(x - \varepsilon t y)\|\, dt dy dx\\ &\leqslant \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V \|D v_k(x - \varepsilon t y)\|\, dx dt dy \leqslant \varepsilon \int_V \|D v_k(z)\|\, dz.\end{aligned}$$

Isto é

$$\|v_k^{\varepsilon} - v_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon \|D v_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \tag{1.65}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\bar{u}_k \in \mathcal{W}^{1,p}(V)$, então existe uma sequência $(v_\ell^k) \subseteq \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, dada por, $v_\ell^k = \eta_{\frac{1}{\ell}} * \bar{u}_k$, tal que

$$\|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} \to 0,$$

quando $\ell \to \infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, concluimos que

$$\|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant c\|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant c\|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0, \tag{1.66}$$

e de forma análoga

$$\|Dv_\ell^k - D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant c\|Dv_\ell^k - D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant c\|v_\ell^k - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0, \tag{1.67}$$

ambos limites tomados quando $k \to \infty$. Dessa forma, inferimos

$$\|v_\ell^{k\varepsilon} - u_k^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(V)} = \|\eta_\varepsilon * v_\ell^k - \eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(V)} = \|\eta_\varepsilon * (v_\ell^k - u_k)\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \|v_\ell^k - u_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \to 0, \tag{1.68}$$

quando $k \to \infty$, onde a ultima desigualdade vem de (1.18). Por (1.65), segue que

$$\|v_\ell^{k\varepsilon} - v_\ell^k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon\|Dv_\ell^k\|_{\mathcal{L}^1(V)},$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Passando o limite quando $k \to \infty$, obtemos por (1.66), (1.67) e (1.68) que

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon\|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, concluimos que

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon\|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon c\|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \varepsilon c\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} \leqslant \varepsilon c M,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \to 0, \tag{1.69}$$

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$. Como $1 \leqslant q < p^*$, podemos utilizar a Desigualdade de Interpolação das normas $\mathcal{L}^p$

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

onde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$ e $0 < \theta < 1$. Ademais, por (1.64) e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, $\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$ é finito. De fato

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta} \leqslant c\|D\bar{u}_k^\varepsilon - D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)}^{1-\theta} \leqslant c\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}^{1-\theta} \leqslant c\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}^{1-\theta} < \infty.$$

Assim por (1.69)

$$\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant c\|\bar{u}_k^\varepsilon - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^\theta \to 0,$$

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$. Como era desejado.

Agora, afirmamos que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a sequência $(\bar{u}_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\bar{u}_k^\varepsilon(x)| \leqslant \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|\bar{u}_k(y)|\, dy \leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \frac{c}{\varepsilon^n} < \infty, \tag{1.70}$$

onde por (1.64) c não depende de k. De forma análoga, mostramos que

$$\|D\bar{u}_k^\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \tag{1.71}$$

Isso prova que $(\bar{u}_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(V)$ é uniformemente limitada pois mostramos que $\|\bar{u}_k^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant M$ onde $M > 0$ não depende de k. Ademais, $(\bar{u}_k^\varepsilon)_{k=1}^\infty$ é equicontínua pois, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\delta < \tilde{\varepsilon}/L$ tal que, pela Desigualdade do Valor Médio

$$\|x - y\| \leqslant \delta \implies |\bar{u}_k^\varepsilon(x) - \bar{u}_k^\varepsilon(y)| \leqslant L\|x - y\| < L\delta < \tilde{\varepsilon}.$$

onde $L = \sup_{x\in V} \|D\bar{u}_k(x)\|$, que existe por (1.64) e (1.71) e não depende de k e x.

Por fim, afirmamos que existe uma subsequência $(\bar{u}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(\bar{u}_k)_{k=1}^{\infty}$, tal que

$$\lim_{j,\ell\to 0} \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} = 0.$$

Com efeito, sabemos que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \to 0,$$

uniformemente, quando $\varepsilon \to 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon_0} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \frac{\delta}{3},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\operatorname{supp} \bar{u}_k, \operatorname{supp} \bar{u}_k^{\varepsilon_0} \subseteq V$. Além disso, provamos que $(\bar{u}_k^{\varepsilon_0})_{k=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada e equicontínua. Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (ver Teorema 1.14), existe uma subsequência $(\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0})_{j=1}^{\infty}$ de $(\bar{u}_k^{\varepsilon_0})_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente sobre V (fora de V $\bar{u}_k$ é nula). Em particular, esta subsequência é de Cauchy sobre V. Portanto

$$|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}(x)| \to 0,$$

uniformemente quando $j, \ell \to \infty$, para todo $x \in V$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), temos que

$$\lim_{j,\ell\to\infty} \|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)}^q = \lim_{j,\ell\to\infty} \int_V |\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}(x)|^q \, dx = 0,$$

pois $|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}(x)|^q \leqslant 2cM\varepsilon^{-n}\|\eta\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{L}^1(V)$. Consequentemente, para $j, \ell > 0$ suficientemente grande, concluimos que

$$\|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \frac{\delta}{3}.$$

Dessa forma

$$\|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\| \leqslant \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \|u_{k_j}^{\varepsilon_0} - u_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \delta,$$

para $j, \ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grantes. Isto nos diz que $(\bar{u}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$. Dito isso

$$\|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} = \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

quando $j, \ell \to \infty$. Como $\mathcal{L}^q(\Omega)$ é um espaço completo, então $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente em $\mathcal{L}^q(\Omega)$ como era desejado. $\square$

CAPÍTULO DOIS

ALGUMAS APLICAÇÕES DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

2.1 Preliminares

2.1.1 Desigualdades

O primeiro preliminar para esse capítulo é a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, iremos apresentar o caso geral abaixo, mas utilizaremos apenas alguns casos particulares que serão mencionados após o teorema.

Teorema 2.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)**.** Sejam $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\ell, k \in \mathbb{N}$, com $\ell < k$, e satisfazendo uma das hipóteses abaixo

$$\begin{cases} r = 1 \\ \dfrac{\ell}{k} \leqslant \theta \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 < r < \infty \\ k - \ell - \dfrac{n}{r} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\ell}{k} \leqslant \theta < 1. \end{cases}$$

Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$\|D^\ell u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D^k u\|^{\theta}_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O artigo [6] é destinado a demonstração dessa desigualdade. □

A desigualdade de Ladyzhenskaya é um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg apresentada acima. Mais precisamente, quando $\ell = 0$, $k = 1$, $p = 4$, $q = r = 2$ e $\theta = \frac{3}{4}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}\|Du\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.1}$$

Outras formas da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg que serão utilizadas são as seguintes:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\|u\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{2.2}$$

onde $\ell = 0$, $k = 2$, $p = \infty$, $q = r = 2$ e $\theta = \frac{3}{4}$, e

$$\|Du\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|u\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{2.3}$$

onde $\ell = 1$, $k = p = q = r = 2$ e $\theta = \frac{1}{2}$.

2.1.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta indispensável para o estudo de Equações Diferenciais Parciais. Aqui apresentaremos as definições básicas e algumas propriedades elementares que serão utlizadas ao decorrer do texto.

Definição 2.2. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\omega} f(x)\, dx,$$

e a transformada inversa de f por

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\omega} f(\omega)\, d\omega.$$

Como $|e^{\pm ix\cdot\omega}| = 1$ e $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ as integrais acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou $\omega \in \mathbb{R}^n$ no caso da transformada inversa).

Teorema 2.3 (Identidade de Planchael)**.** Sejam $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{f}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Ver [5] p.p. 183. □

O teorema abaixo explora as propriedades elementares da transformada de Fourier.

Teorema 2.4 (Propiedades da transformada de Fourier)**.** Sejam $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Então, são válidas as seguintes igualdades

(a) $\widehat{\lambda u + v} = \lambda \hat{u} + \hat{v}$;

(b) $\langle u, v\rangle = \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle$;

(c) $\widehat{D^\alpha u} = (i\omega)^\alpha \hat{u}$, para todo multi-índice α tal que $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$;[1]

(d) $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}\hat{v}$.

Demonstração. Ver [5] p.p. 185. □

Os exemplos abaixo serão úteis para definir um operador que será utilizado extensivamente nesse capítulo

Exemplo 2.5 (Transformada da derivada temporal)**.** Considere uma função $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere sua derivada temporal. Dessa forma, podemos escrever

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx = \frac{\partial u}{\partial t}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x} u(x,t)\, dx\right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t},$$

onde a penultima igualdade é válida pois $e^{-i\omega\cdot x}$ não depende de t.

Exemplo 2.6 (Derivada do Laplaciano)**.** Lembrando que dada uma função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o Laplaciano

[1] Se $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice então $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1}\omega_2^{\alpha_2}\cdots\omega_n^{\alpha_n}$.

de u é dado por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Dito isso, utlizando a transformada da derivada vista no item **(c)** do Teorema 2.4, podemos escrever

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}} = -\omega_j^2 \hat{u}.$$

Dessa forma

$$\widehat{\Delta u} = -(\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2)\hat{u} = -\|\omega\|^2 \hat{u}.$$

2.1.3 Semigrupo do calor

Agora, introduziremos o conceito de semigrupo, que será utlizado para explorar propriedades das soluções de Leray

Definição 2.7. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados $(T(t))_{t>0}$, onde $T : \mathbb{R}_+ \to X$, é um semigrupo se

1. $T(0) = I_X$, onde $I_X : X \to X$ é o operador identidade;
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s > 0$.

Nesse trabalho, será importante conhecer o semigrupo do calor, que provem da solução da equação do calor

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \tag{2.4}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \tag{2.5}$$

Para encontrar a solução do sistema acima, utlizaremos a transformada de Fourier. Dito isso, aplicando a transformada de Fourier em (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_t - \nu \|\omega\|^2 \mathbf{u} = 0 \quad & t > 0 \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} \quad & t = 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, temporariamente ignoramos as variaveis espaciais e trabalhamos apenas no domínino do tempo, sendo assim basta resolver a Equação Diferencial Ordinária acima e depois aplicar a transformada de Fourier inversa. Com efeito, esta EDO tem solução dada por

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} e^{-\nu t \|\omega\|^2}.$$

Dessa forma podemos aplicar a transformada de Fourier inversa para obter

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} * F}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tag{2.6}$$

onde F é a transformada de Fourier inversa de $e^{-\nu t \|\omega\|^2}$. Ou seja

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega \cdot x} e^{-\nu t \|\omega\|^2} \, d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} \, d\omega_k. \tag{2.7}$$

Para resolver essa integral, primeiramente precisamos completar o quadrado no expoente. Dito isso

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t\omega_k^2}\, d\omega_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\nu t\omega_k^2 + ix_k\omega_k + \frac{x_k^2}{4\nu t} - \frac{x_k^2}{4\nu t}\right) d\omega_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_k^2}{4\nu t}\right) \exp\left(-\left(\sqrt{\nu t}\omega_k - \frac{ix_k}{2\sqrt{\nu\tau}}\right)^2\right) d\omega_k.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $s_k = \sqrt{\nu t}\omega_k - \frac{ix_k}{2\nu t}$ obtemos $ds_k = \sqrt{\nu t}\, d\omega_k$ e, consequentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t\omega_k^2}\, d\omega_k = \frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-x_k^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_k^2}\, ds_k = \left(\frac{\pi}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}}. \tag{2.8}$$

Sendo assim, por (2.7) e (2.8), chegamos a

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} = \frac{1}{(2\nu t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}.$$

Portanto, por (2.6), concluímos que

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\nu t}} \mathbf{v}(y)\, dy.$$

O semigrupo do calor, denotado por $e^{\nu\Delta\tau}$, com $\tau > 0$, é uma família de operadores dada por

$$e^{\nu\Delta\tau}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} * E(\cdot,\tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}},$$

onde $E(x,\tau) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$. O resto dessa subseção será destinado a estudar algumas propriedades que serão utlizadas neste trabalho.

Proposição 2.8 (Priopriedades do semigrupo do calor)**.** Considere o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta\tau}$ então são válidas

(a) $e^{\nu\Delta\tau}(\lambda u + v) = \lambda e^{\nu\Delta\tau}u + e^{\nu\Delta\tau}v$;

(b) $D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}u) = e^{\nu\Delta\tau}(D^\alpha u)$;

(c) $\widehat{e^{\nu\Delta\tau}u} = \hat{u}e^{-\nu\tau\|\omega\|^2}$.

Demonstração. **(a)** segue do fato da convolução ser um operador linear, e **(b)** é análogo ao que foi mostrado no Teorema 1.31. O item **(c)** segue do Teorema 2.4 **(d)**, já que

$$e^{\nu\Delta\tau}u = \frac{u * E(\cdot,\tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}},$$

segue que

$$\widehat{e^{\nu\Delta\tau}u} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}\hat{E}(\cdot,\tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.9}$$

Sendo assim, resta calcular a transformada de Fourier de $E(x,\tau) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$. Com efeito, denotando $\frac{1}{4\nu\tau}$ por c, obtemos

$$\hat{E}(\omega,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - cx_k^2}\, dx_k. \tag{2.10}$$

De forma análoga ao que foi feito quando resolvemos a equação do calor, podemos completar o quadrado no expoente. Dessa forma, concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - c x_k^2}\, dx_k = e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(x_k + \frac{i\omega_k}{2c}\right)^2}\, dx_k.$$

Fazendo a substituição $s_k = x_k - \frac{i\omega_k}{2c}$, obtemos $ds_k = dx_k$. Logo, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - c x_k^2}\, dx_k = e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c s_k^2}\, ds_k = \left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}}.$$

Sendo assim, por (2.10) e lembrando que $c = \frac{1}{4\nu\tau}$, segue que

$$\hat{E}(\omega,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} (4\pi\nu\tau)^{\frac{1}{2}} e^{-\nu\tau\omega_k^2} = \frac{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\nu\tau\|\omega\|^2},$$

e por (2.9), concluimos que

$$\widehat{e^{\nu\Delta\tau} u} = \hat{u} e^{-\nu\tau\|\omega\|^2}.$$

□

Proposição 2.9. Sejam $1 \leqslant r \leqslant 2$ e $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, com $n \in \mathbb{N}$, então

$$\|D^\alpha\big(e^{\nu\Delta\tau} u\big)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(n,k)(\nu\tau)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)-\frac{k}{2}} \|u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.11}$$

onde $k = |\alpha|$.

Demonstração. Ver [16] p.p. 32. □

2.1.4 Notação

Introduziremos a notação que será utliizada ao decorrer do texto.

Letras em negrito representam vetores n-dimensionais $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ (na maioria dos casos $n = 3$), A k-ésima derivada parcial é denotada por D_k (ou D^{e_k}), enquanto D^k representa o gradiente k-dimensional. Também vale ressaltar a definição da norma $\mathcal{L}^p$ das funções vetoriais

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|D\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|D_j u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e mais geralmente,

$$\|D^k\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|D_{j_1}\cdots D_{j_k} u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, a norma em $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|u_i(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

2.2 Propriedades das soluções de Leray

2.2.1 Introdução e contexto histórico

Em 1934, no artigo *"Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplassement l'espace"* (ver [12]) Leray construiu soluções fracas de energia finita[2]

$$\mathbf{u}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^\infty\big([0,\infty), \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\big) \cap \mathcal{C}_w\left([0,\infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right) \cap \mathcal{L}^2\big([0,\infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)^3 \tag{2.12}$$

para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u} \\ &\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ &\mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0 \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $\nu > 0$ é constante. Estas soluções são tais que $\|\mathbf{u}(\cdot,t) - \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$, quando $t \to 0^+$, e satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.14}$$

para todo $t > 0$. A unicidade desas soluções ainda é um problema em aberto, porém, no mesmo artigo Leray mostrou que existe um instante de tempo T_{**} tal que a solução $\mathbf{u}$ se torna suave em $\mathbb{R}^3 \times [T_{**},\infty)$ e $\mathbf{u}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}\big([T_{**},\infty), H^k(\mathbb{R}^3)\big)^4$ para cada $k \geqslant 0$. Um problema importante que foi deixado em aberto por Leray no final de seu artigo diz a respeito do decaimento de energia em L^2 da solução. Matematicamente, isto é entender o que acontece com $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ quando $t \to \infty$. Leray suspeitava que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t \to \infty$. Uma demonstração para esse fato será apresentada no Teorema 2.15.

Uma outra forma de estudar propriedades das soluções das equações de Navier-Stokes é a partir das soluções $\mathbf{v}(\cdot,t)$ do problema linearizado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \nu\Delta\mathbf{v}; \\ \mathbf{v}(\cdot,t_0) &= \mathbf{u}(\cdot,t_0), \end{aligned}$$

com $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Aqui,

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)$$

onde $e^{\nu\Delta(t-t_0)}$ é o semigrupo do calor visto no preliminares. Com essas soluções é possível estudar algumas estimativas de decaimento como

$$\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

[2] i.e., $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \infty$.

[3] As definições desses espaços são dadas abaixo:

- $\mathcal{L}^\infty\big([0,\infty), \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\big)$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot,t) : [0,\infty) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ e $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \infty$.
- $\mathcal{C}_w\left([0,\infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\right)$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot,t) : [0,\infty) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ fracamente contínuas.
- $\mathcal{L}^2\big([0,\infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot,t) : [0,\infty) \to \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_0^\infty \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}\,dt < \infty.$$

[4] i.e., $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^k(K)} < \infty$, onde $K \subseteq [T_{**},\infty)$ é compacto.

$$t^{\frac{n}{4}}\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$ Uma outra pertunta importante (que não será trabalhada aqui) é sobre o erro ou diferença da solução de Leray e da solução do problema linearizado. Essa pergunta foi respondida por Weigner (em [20]) onde foi provado que

$$t^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}(\cdot,t) - e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t \to \infty$.

2.2.2 Resultados

Tomando uma função molificadora $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ e sua versão escalada η_δ (vista no Capítulo 1, Seção 1.4) definimos $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \eta_\delta * \mathbf{u}_0$, introduzimos $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ como a solução única do problema regularizado

$$\begin{aligned} &\partial_t \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta = \nu\Delta \mathbf{u}_\delta; \\ &\mathbf{u}_\delta(\cdot,0) = \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_\delta = \eta_\delta * \mathbf{u}_\delta$. Em seu artigo, Leray mostrou que existe uma sequência apropriada $\delta' \to 0$ tal que conseguimos a convergência fraca[5] em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{u}_{\delta'} \rightharpoonup \mathbf{u}, \tag{2.16}$$

para todo $t \geqslant 0$, onde $\mathbf{u}(\cdot,t)$ apresentada em (2.12) é contínua no instante $t=0$. Além disso, a desigualdade de energia (2.14) é satisfeita para todo $t \geqslant 0$ e em particular

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,dt \leqslant \frac{1}{2\nu}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.17}$$

Outros resultados importantes se referem à projeção de Helmholtz[6] de $-\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)$ em $\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ isto é, o campo $\mathbf{Q}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot,t) := -\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t) - \nabla p(\cdot,t), \tag{2.18}$$

para todo $t > 0$. A seguir, estudaremos algumas estimativas para $\mathbf{Q}(\cdot,t)$.

Proposição 2.10. Para quase todo $s > 0$ (e para todo $s \geqslant T_{**}$), tem-se

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > s$, onde c é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, dada por

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\omega\cdot x} f(x)\,dx.$$

Dada $\mathbf{v}(\cdot,s) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, obtemos pelo Teorema 2.3 que

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)]\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu\|\omega\|^2(t-s)}\|\hat{\mathbf{v}}(\omega,s)\|^2\,d\omega,$$

[5] Dado um espaço de Banach X, dizemos que uma sequência $(x_n) \subseteq X$ converge fracamente para $x \in X$ ($x_n \rightharpoonup x$) se $f(x_n) \to f(x)$, para todo $f \in X'$, onde X' é o espaço de todos funcionais lineares limitados de X em $\mathbb{R}$.

[6] A projeção de Helmholtz é uma forma de escrever um campo vetorial F como $F = G + H$, onde G, H são campos vetoriais tais que $\nabla \cdot G = 0$ e $H = \nabla\Phi$ para alguma função $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

onde utlizamos o resultado sobre a transformada de Fourier do semigrupo do calor (ver Teorema 2.8 **(c)**). Além disso, $\|\hat{\mathbf{v}}(\omega,s)\|^2 \leqslant \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_\infty = \sup\{\|\hat{\mathbf{v}}(\omega,s)\| \,;\omega \in \mathbb{R}^3\}$. Logo

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-s)\|\omega\|^2} d\omega,$$

onde a integral do lado direito é uma Gaussiana, cujo resultado é $c\nu^{-\frac{3}{2}}(t-s)^{-\frac{3}{2}}$. Portanto, podemos escrever

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_\infty. \tag{2.19}$$

O resultado que queremos, é uma aplicação direta de (2.19) com $\mathbf{v}(\cdot,s) = \mathbf{Q}(\cdot,s)$, o restante da demonstração será dedicado a estimativa do valor de $\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot,s)\|_\infty$.

Note que utilizando a derivada da transformada de Fourier, temos que $\mathcal{F}[D^\alpha f] = (i\omega)^\alpha \hat{f}$, sendo assim se $\alpha = e_j$ para algum $j = 1,2,3$, $\mathcal{F}[D^{e_j} f] = i\omega_j \hat{f}$. Dito isso,

$$\mathcal{F}[\nabla p(\cdot,s)] = i\hat{p}(\omega,s)\omega,$$

e $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$ pois, por (2.18) e (2.13), $\mathbf{Q} = \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u}$ e

$$\nabla\cdot\mathbf{Q} = (\nabla\cdot\mathbf{u})_t - \nu\Delta(\nabla\cdot\mathbf{u}) = 0,$$

já que $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, dessa forma

$$0 = \widehat{\nabla\cdot\mathbf{Q}} = \sum_{j=1}^{3} \widehat{\frac{\partial Q_j}{\partial x_j}} = \sum_{j=1}^{3} i\omega_j \hat{\mathbf{Q}},$$

ou seja, $\omega\cdot\hat{\mathbf{Q}} = 0$. Além disso, pela definição de $\mathbf{Q}(\cdot,s)$ temos que

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s) + \mathcal{F}[\nabla p(\cdot,s)](\omega) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)](\omega).$$

Com isso, fazendo o produto interno por $\hat{\mathbf{Q}}$ em ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)\cdot\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s) + i\hat{p}(\omega,s)\omega\cdot\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)](\omega)\cdot\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)$$

Deste modo, pela desigualde de Cauchy-Schwarz, podemos escrever,

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)\|^2 \leqslant \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|\|\hat{\mathbf{Q}}\|.$$

Ou seja,

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega,s)\| \leqslant \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)](\omega)\|.$$

Isso nos diz que

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot,s)\|_\infty \leqslant \|\mathcal{F}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}](\cdot,s)\|_\infty. \tag{2.20}$$

Por outro lado, para $i = 1,2,3$, é verdade que

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla u_i(\cdot,s)](\omega)| \leqslant \sum_{j=1}^{3} |\mathcal{F}[u_j(\cdot,s)D_j\, u_i(\cdot,s)](\omega)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{3} \|u_j(\cdot,s)D_j\, u_i(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}^3$. Por fim, novamente utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) e a definição das normas, chegamos a

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla u_i(\cdot,s)](\omega)| \leqslant c\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_j(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Isto mostra que

$$\|\mathcal{F}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}](\cdot,s)\|_\infty \leqslant c\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.21}$$

Dito isso, por (2.19), (2.20) e (2.21), inferimos que

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

como queriamos mostrar. $\square$

Repetindo o argumento utilizado na demonstração acima para as soluções do problema regularizado (2.15), obtemos

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{2.22}$$

onde c é uma constante positíva e

$$\mathbf{Q}_\delta(\cdot,s) = -\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}_\delta(\cdot,s) - \nabla p_\delta(\cdot,s).$$

Observação: Vale ressaltar que as soluções do probblema regularizado também satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}_\delta(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \leqslant \|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.23}$$

para todo $t > 0$.

Proposição 2.11. Para quase todo $s > 0$ (e todo $s \geqslant T_{**}$), tem-se

$$\|D^\alpha\big(e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\big)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > s$, onde $k = |\alpha|$ e $c(k)$ depende apenas de k.

Demonstração. Por (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}\|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &= \|D^\alpha\big[e^{\nu\Delta(t-s)/2}[e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\big]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\leqslant c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}(t-s)^{-\frac{k}{2}}\|e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

e pela Proposição 2.10, podemos escrever

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

□

Proposição 2.12. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (2.13). Então existe $t_{**} > T_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução $\mathbf{u}$) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma funçao monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**},\infty)$. (rever)

Demonstração. Sejam $t_0 \geqslant T_{**}$ e $t > t_0$. Aplicando a k-ésima derivada parcial D_k à $\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u}$, fazendo o produto escalar com $D_k\mathbf{u}$, integrando em $\mathbb{R}^3\times[t_0,t]$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\mathbf{u}_t\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx &+ \int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx\\ &+\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\nabla p\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx = \nu\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\Delta\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx\end{aligned} \tag{2.24}$$

Vamos analisar cada integral separadamente. Note que $D_k\mathbf{u}_t\cdot D_k\mathbf{u} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|D_k\mathbf{u}\|^2$. Dessa forma

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{t_0}^t D_k\mathbf{u}_t\cdot D_k\mathbf{u}\,dsdx = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|D_k\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 - \|D_k\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2\,dx.$$

Note que expandindo a segunda integral e utilizando integração por partes[7] temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = \sum_{i=1}^3\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} D_k u_i(D_iu_j)D_ku_j\,dx = -\sum_{i=1}^3\sum_{i=1}^3\int_{\mathbb{R}^3} u_jD_i(D_ku_iD_ku_j)\,dx$$

[7] explicar pq não tem termo de fronteira, não lembro da explicação

e utilizando a regra do produto na última integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j\,dx - \sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j\,dx$$

porém a primeira integral do lado direito é igual a zero pois

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k D_i u_i D_k u_j\,dx &= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k\left(\sum_{i=1}^{3} D_i u_i\right) D_k u_j\,dx\\ &= \sum_{j-1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k(\nabla\cdot\mathbf{u}) D_k u_j = 0\end{aligned}$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j\,dx.$$

A terceira integral é igual a zero, já que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k\nabla p\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_k D_j p D_k u_j\,dx = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j D_k p D_k u_j\,dx$$

utlizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k\nabla p\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_j D_k u_j\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_k\left(\sum_{j=1}^{3} D_j u_j\right)dx = 0$$

pois novamente $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. Por fim, a ultima integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u}\,dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k u_i D_k u_i$$

novamente utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k\mathbf{u}\cdot D_k\mathbf{u}\,dx &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_j D_k u_i)(D_j D_k u_i)\\ &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(D_j D_k u_i)^2\,dx = -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_j D_k\mathbf{u}\|^2\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k D\mathbf{u}\|^2\,dx\end{aligned}$$

Dito isso, voltando para (2.24) e somando em $1 \leqslant k \leqslant 3$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 - \|D_k\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2\,dx + \nu\sum_{k=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3}\|D_k D\mathbf{u}\|^2\,dxds&\\ = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j\,dxds.&\end{aligned}$$

Lembrando da definição das normas vistas nos preliminares, multiplicando ambos os lados por 2 e reorganizando os termos, podemos reescrever a equaçao acima como:

$$\begin{aligned}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t}\|D^2\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds&\\ = \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} u_i D_k u_j D_j D_k u_i\,dxds.&\end{aligned}$$

(posso começar a correção daqui) Utilizando a Desigualdade de Hölder e a definição das normas, temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a aqui precisa detalhar, a gente fez mas não consegui entender pelas fotos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_\infty \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds$$

que pela Desigualdade de Gagliardo-Nireneberg (2.2) em $\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_\infty$ é menor ou igual a

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Em particular temos

$$\begin{aligned}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &+ 2\nu\int_{t_0}^{t} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \\ &\leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t} \left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\right]^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned} \tag{2.25}$$

para todo $t \geqslant t_0$. Daí, seja $t_0 > t_*$ tal que por (2.14) $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2$. Dessa forma, segue que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2 \tag{2.26}$$

para todo $s > t_0$. Com efeito, suponha que (2.26) é falso, dessa forma, existiria $t_1 > t_0$ tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \nu^2$ para todo $t_0 \leqslant s < t_1$ com $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \nu^2$. Tomando $t = t_1$ em (2.25) temos que $\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. De fato

$$\begin{aligned}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &+ 2\nu\int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \\ &\leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\int_{t_0}^{t_1} \left[\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\right]^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

como $s \in [t_0, t_1]$ temos que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \nu^2$ obtemos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

que resulta em $\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ como desejado. Então

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \nu^2$$

o que é uma contradição. Dessa forma (2.26) é válido. De (2.25) e (2.26) temos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\gamma\int_{t_0}^{t} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant \|D\mathbf{u}(\cdot,t_2)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $t \geqslant t_2 \geqslant t_0$, onde $\gamma = \nu - \|\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} > 0$ é uma constante. Tomando $t_{**} = t_0$, finalizamos a demonstração. □

A proposição abaixo utiliza a solução do problema linearizado para estabelecer uma estimativa importante

Proposição 2.13. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ solução de Leray para (2.13). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 > 0$ tem-se

$$\|D^\alpha \mathbf{v}(\cdot,t) - D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{5}{4}+\frac{k}{2}\right)}\|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}(t-\tilde{t}_0)^{-\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}\right)}$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_0)$ e $k = |\alpha|$.

Demonstração. Primeiramente, reescrevemos $\mathbf{v}(\cdot,t)$ como

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0)\right] + e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0),$$

onde $t > t_0$ e $\mathbf{u}_\delta(\cdot,t)$ é dada em (2.15). Ademais, temos que

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0) = e^{\nu\Delta t_0}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot,s)\,ds. \tag{2.27}$$

Com efeito, considere a equação

$$\partial_s \mathbf{u}_\delta = \mathbf{Q}_\delta + \nu\Delta\mathbf{u}_\delta,$$

onde $\mathbf{Q}_\delta = -\bar{\mathbf{u}}_\delta \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta - \nabla p_\delta$. Aplique o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta(t_0-s)}$ em ambos os lados e integre sobre $[0,t_0]$, para obter

$$\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\partial_s\mathbf{u}_\delta\,ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta\,ds + \nu\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta\,ds. \tag{2.28}$$

Além disso, note que

$$\partial_s\left[e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{u}_\delta\right] = -\nu e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta + e^{\nu\Delta(t_0-s)}\partial_s\mathbf{u}_\delta$$

ou seja,

$$e^{\nu\Delta(t_0-s)}\partial_s\mathbf{u}_\delta = \partial_s\left[e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{u}_\delta\right] + \nu e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta.$$

Dessa forma, (2.28) se torna

$$\int_0^{t_0}\partial_s\left[e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{u}_\delta\right]ds + \nu\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta\,ds = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta\,ds + \nu\int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_\delta\,ds$$

isto é,

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0) - e^{\nu\Delta t_0}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{Q}_\delta\,ds,$$

por (2.13). Isto prova (2.27). Dito isso, é verdade que

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0)\right] + e^{\nu\Delta t}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot,s)\,ds,$$

para todo $t > t_0$. De forma análoga, deduzimos que

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,\tilde{t}_0)\right] + e^{\nu\Delta t}\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot,s)\,ds.$$

para todo $t > \tilde{t}_0$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} D^\alpha\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) - D^\alpha\mathbf{v}(\cdot,t) = {} & D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,\tilde{t}_0)\right]\right) \\ & - D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot,t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot,t_0)\right]\right) + D^\alpha\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot,s)\,ds. \end{aligned}$$

Agora, considere que $K \subseteq \mathbb{R}^3$ é um compacto qualquer. Portanto, para cada $t > \tilde{t}_0$ e $\delta > 0$, infere-se

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D^\alpha \left[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\right]\|_{\mathcal{L}^2(K)}\, ds, \tag{2.29}$$

onde

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\delta}(t) = &\left\|D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)\right]\right)\right\|_{\mathcal{L}^2(K)} \\ &+ \left\|D^\alpha\left(e^{\nu\Delta(t-t_0)}\left[\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)\right]\right)\right\|_{\mathcal{L}^2(K)}. \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 2.11 e (2.22), temos que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} &\leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{k}{2}} \|e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \\ &\leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-\tilde{t}_0)^{-\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observe que a integral pode ser simplificada, já que $s \leqslant \tilde{t}_0$ implica em $(t-s)^{-\frac{3}{4}} \leqslant (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}}$ e pela desigualdade de energia (2.23) $\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Sendo assim, podemos escrever

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds. \tag{2.31}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder e novamente pela desigualdade de energia (2.23), segue que

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_\delta\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}}{(2\nu)^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.32}$$

Portanto, por (2.31) e (2.32), obtemos

$$\|D^\alpha \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - D^\alpha \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{5}{4}\right)}(t-\tilde{t}_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Tomando $\delta = \delta'$ (ver (2.16)), temos que $J_{\alpha,\delta}(t) \to 0$, quando $\delta \to 0$, pois, dados $\sigma, \tau > 0$, é verdade que

$$\|D^\alpha(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)])\|_{\mathcal{L}^2(K)} \to 0,$$

quando $\delta \to 0$. De fato, denotando $\Phi_\delta(\cdot, \tau) = D^\alpha\left(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)]\right)$, tem-se

$$\Phi_\delta(\cdot, \tau) = H_\alpha(\cdot, \tau) * [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)],$$

onde $H_\alpha(\cdot, \tau) = D^\alpha E(\cdot, \tau) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$, com $E(x, \tau) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$, não depende de δ. Como $\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma) \rightharpoonup 0$, segue que $\Phi_\delta(x, \tau) \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$, quando $\delta \to 0$. Por outro lado, as seguintes estimativas valem pela desigualdade de Hölder e mudança de variáveis

$$\begin{aligned} |\Phi_\delta(x, t)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x-y, \tau)[\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)]|\, dy \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^3} |H_\alpha(x-y, \tau)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(y, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(y, \sigma)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|H_\alpha(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \sigma)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

utilizando a desigualdade triangular e (2.23) obtemos

$$|\Phi_\delta(x,\tau)| \leqslant 2\|H_\alpha(\cdot,\tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (pois $2\|H_\alpha(\cdot,\tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante em relação a x e K é limitado, logo pertence a $\mathcal{L}^1(K)$), segue que $\|\Phi_\delta(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \to 0$, quando $\delta \to 0$ (pelo fato de K ser compacto). Dito isso, fazendo $\delta \to 0$ em (2.30) inferimos que

$$\|D^\alpha\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) - D^\alpha\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{5}{4}\right)}\|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}(t-\tilde{t}_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)},$$

para todo $t_0 > \tilde{t}_0$. Tomando o supremo de todos $K \subseteq \mathbb{R}^3$ compactos, obtemos a desigualdade desejada. □

O restante dessa seção será destinado a estudar estimativas de decaimento de energia das soluções de Leray

Teorema 2.14. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (2.13), então,

$$t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} o instante de tempo encontrado na Proposição 2.12. Suponha que a afirmação é falsa, nesse caso existem uma sequência crescente $t_\ell \to \infty$ (com $t_\ell \geqslant t_{**}$ e $t_\ell \geqslant 2t_{\ell-1}$ para todo ℓ) e um $\varepsilon > 0$ fixo tais que,

$$t_\ell\|D\mathbf{u}(\cdot,t_\ell)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \geqslant \varepsilon$$

para todo ℓ. Em particular, é verdade, pela Proposição 2.12

$$\int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds \geqslant (t_\ell - t_{\ell-1})\|D\mathbf{u}(\cdot,t_\ell)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \geqslant \frac{1}{2}t_\ell\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^2} \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$, o que contradiz a desigualdade de energia (2.17), pois

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\,ds < \infty,$$

e passando ao limite quando $\ell \to \infty$, encontramos $\varepsilon \leqslant 0$. Portanto, a afirmação do teorema é válida. □

O teorema abaixo foi conjecturado por Leray no final do seu artigo (ver [12]), e foi somente resolvido 50 anos depois por Kato (ver [9]). Uma simples demonstração será apresentada abaixo utilizando conceitos que já eram conhecidos em 1934.

Teorema 2.15 (Solução do problema clássico de Leray)**.** Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (2.13), então,

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} como definido na Proposição 2.12. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $t_0 \geqslant t_{**}$ suficientemente grande tal que pelo Teorema 2.14, podemos inferir

$$t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon \tag{2.33}$$

para todo $t \geqslant t_0$. Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$ (ver Seção 2.2.1) obtemos, de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.13, que

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\, ds,$$

para todo $t \geqslant t_0$ Dito isso, utlizando a Proposição 2.10, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t} \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \\ &\leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de energia (2.14), concluimos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds,$$

para todo $t \geqslant t_0$. Por (2.33), deduzimos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, \varepsilon \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds.$$

Note que

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds \leqslant c,$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Sendo assim, é verdade que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + c\varepsilon\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.3, sabemos que

$$\begin{aligned}\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &= \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\omega, t_0)]\|^2\, d\omega = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2} \|\hat{\mathbf{u}}(\omega, t_0)\|^2\, d\omega.\end{aligned}$$

Como $e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2}\|\hat{\mathbf{u}}(\omega, t_0)\|^2 \leqslant \|\hat{\mathbf{u}}(\omega, t_0)\|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, então, pelo Teorema da Convergência Dominada, inferimos

$$\|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$. Dito isso, concluimos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant (1 + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)})\, \varepsilon,$$

para todo $t > 0$ suficientemente grande. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$. □

Note que os Teoremas 2.14 e 2.15 juntos mostram que temos o decaimento de energia na norma do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$, já que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Mais precisamente

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + t^{-1}\big[t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big]^2 \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

A demonstração do lema abaixo é bastante extensa, porém é de extrema importância para o último teorema dessa seção.

Lema 2.16. Para cada $k \geqslant 0$, denotando $U_k(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$, tem-se

$$U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty)).$$

Demonstração. O caso $k = 0$ segue da desigualdade de energia (2.14), que

$$U_0(t) = t^0 \|D^0 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t > 0$ (em particular, para todo $t \geqslant T_{**}$). Logo, $U_0 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$.

O caso $k = 1$ também já foi provado anteriormente. Com efeito pelo Teorema 2.14, temos que $U_1(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso é suficiente para mostrar que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ pois $|U_1(t)| \leqslant 1$ para todo t suficientemente grande.

Dito isso, resta provar a afirmaçao para $k \geqslant 2$. De forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.13, dado $t_0 \geqslant T_{**}$ podemos escrever $\mathbf{u}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)\, ds,$$

para todo $t \geqslant t_0$. Dessa forma, para cada multi-índice α, temos que

$$\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds, \tag{2.34}$$

para todo $t \geqslant t_0$ Defina $U^\alpha(t) := t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|$ com $k = |\alpha|$. De (2.34) segue que

$$U^\alpha(t) \leqslant I_1(\alpha, t) + I_2(\alpha, t) + J_\alpha(t),$$

onde

$$I_1(\alpha, t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

$$I_2(\alpha, t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds,$$

$$J_\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} \|D^\alpha [e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds,$$

com $t' = \frac{t_0 + t}{2}$. Conseguimos estimar $I_1(\alpha, t)$ de forma direta. Com efeito, por (2.11) e pela desigualdade de energia (2.14), inferimos que

$$|I_1(\alpha, t)| \leqslant c(k, \nu) \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} \leqslant c(k, \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}}.$$

Porém, note que

$$(t - t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(1 + \frac{t_0}{t - t_0} \right)^{\frac{k}{2}} \leqslant (1 + t_0)^{\frac{k}{2}}. \tag{2.35}$$

pois $\frac{t_0}{t - t_0} \leqslant t_0$ para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Dessa forma

$$|I_1(\alpha, t)| \leqslant c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0), \tag{2.36}$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Por outro lado utlizando a Proposição 2.11, deduzimos

$$\begin{aligned} |I_2(\alpha, t)| &\leqslant c(k, \nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} (t - s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \\ &\leqslant c(k, \nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} (t - s)^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, s^{-\frac{1}{2}} \left[s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right] ds. \end{aligned}$$

Sabemos que $U_1 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**},\infty))$, assim, existe uma constante M_1 tal que

$$|U_1(s)| = s^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant M_1 \text{ qtp em } [T_{**},\infty). \tag{2.37}$$

Dessa forma, também utlizando a desigualdade de energia (2.14) e o fato de $s \leqslant t'$ (o que implica em $t^{\frac{k}{2}}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)} \leqslant c(k)(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}$), concluimos que

$$|I_2(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu)M_1\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(t-t_0)^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t'} s^{-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Sendo assim, por (2.35), chegamos a

$$|I_2(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu)\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t+t_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado

$$(t-t_0)^{-\frac{3}{4}}(t+t_0)^{\frac{1}{2}} = (t-t_0)^{-\frac{1}{4}}(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}(t+t_0)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{t+t_0}{t-t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (2t_0+1)^{\frac{1}{2}}.$$

para todo $t \geqslant t_0+1$. Por isso, podemos escrever

$$|I_2(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu,t_0,M_1,\mathbf{u}_0). \tag{2.38}$$

para todo $t \geqslant t_0+1$. Assim, obtemos

$$U^\alpha(t) \leqslant c(k,\nu,t_0,M_1,\mathbf{u}_0) + J_\alpha(t), \tag{2.39}$$

para todo $t \geqslant t_0+1$ Logo, ainda resta estimar $J_\alpha(t)$, porem não conseguimos estimar $J_\alpha(t)$ de forma geral para todo α, então faremos essa estimativa para o caso em que $|\alpha| = 2$ e depois utilizaremos indução para mostrar uma estimativa de forma geral. Com efeito, considerando $D^\alpha = D_iD_j$ (consequentemente denotando $J_\alpha(t)$ por $J_{ij}(t)$) temos por (2.11) que

$$J_{i\ell}(t) = t\int_{t'}^{t}\|D_i[e^{\nu\Delta(t-t_0)}D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(\nu)\,t\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\,ds.$$

Para estimar $\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$ Note que $D_\ell\mathbf{Q} = -D_\ell[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}] - D_\ell\nabla p = -D_\ell[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}] - \nabla q_\ell$ onde $q_\ell = D_\ell p$. Aplicando o divergente nessa equação, temos que

$$-\Delta q_\ell = \operatorname{div}(D_\ell[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}]).$$

Aplicando a teoria de Calderon-Zygmund, temos para cada $1 < r < \infty$

$$\|\nabla q_\ell(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(r,n)\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]\|$$

o que implica em

$$\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(r,n)\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}.$$

No nosso, caso temos

$$\|D_\ell\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$$

Dito isso, cheamos a

$$\begin{aligned} J_{i\ell}(t) &\leqslant c(\nu)\,t\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|D_\ell[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\,ds \\ &\leqslant c(\nu)\,t\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\left(\|D_\ell\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla D_\ell\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\right)ds. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu)\, t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \Big(\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \Big)\, ds,$$

e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1), podemos escrever

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu)\, t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \Big(\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{5}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \\ \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \Big)\, ds.$$

Reescrevendo a desigualdade acima, concluimos que

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu)\, t \int_{t'}^{t} s^{-\frac{11}{8}} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \Big(\big(s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big)^{\frac{5}{4}} \big(s \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big)^{\frac{3}{4}} \\ + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \big(s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big)^{\frac{3}{4}} \big(s \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\big) \Big)\, ds.$$

Fazendo as substituições adequadas, por (2.37), segue que

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu)\, t M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}}\, ds \\ + c(\nu)\, t M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds.$$

Utilizando a desigualdade de Young ($ab \leqslant a^p p^{-1} + b^q q^{-1}$ onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$ com $a = 1$, $b = U_2(s)^{\frac{3}{4}}$, $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$), temos que

$$U_2(s)^{\frac{3}{4}} \leqslant 1 + U_2(s). \tag{2.40}$$

Dessa forma

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu, M_1)\, t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}}\, ds + \Big(c(\nu, M_1)\, t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \\ + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)\, t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \Big) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds.$$

Para simplificar a expressão acima, note que

$$t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} = t(t+t_0)^{-1}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} = \frac{t}{t+t_0}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \leqslant (t+t_0)^{-\frac{3}{8}}$$

e também

$$(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}(t-t_0)^{\frac{1}{8}} = (t+t_0)^{-\frac{1}{4}}(t+t_0)^{-\frac{1}{8}}(t-t_0)^{\frac{1}{8}} = (t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{t-t_0}{t+t_0}\right)^{-\frac{1}{4}} \leqslant (t+t_0)^{-\frac{1}{4}}.$$

Dito isso

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu, M_1)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds, \tag{2.41}$$

para todo i, ℓ e $t \geqslant t_0 + 1$. Dessa forma, por (2.36), (2.38) e (2.41), inferimos

$$U_2(t) \leqslant c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds, \tag{2.42}$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Considere agora, $t_2, \mathbf{M}_2$ dados por

$$t_2 := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_2 := \sup\{U_2(s) : t_0 \leqslant s \leqslant t_2\}.$$

Afirmamos que

$$U_2(t) \leqslant 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)\, \mathbf{M}_2 \tag{2.43}$$

para todo $t \geqslant t_2$. De fato, definindo $\mathbf{U}_2(t) := \sup\{U_2(s) : t_2 \leqslant s \leqslant t\}$. Se $t' \geqslant t_2$, então por (2.42) deduzimos que

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leqslant c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)\, \mathbf{U}_2(t)(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t - s)^{-\frac{7}{8}}\, ds \\ &\leqslant c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 8c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_2(t). \end{aligned}$$

Porém, como $t \geqslant t_2$, temos, pela definição de t_2 que,

$$t + t_0 > t_2 > 2^{16} c_{**}^4.$$

Isso implica em $2^{16} c_{**}^4 < t + t_0$ e elevando ambos os lados a $1/4$ obtemos $16c_{**} < (t + t_0)^{\frac{1}{4}}$ que podemos reescrever como $8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} < 1/2$. Dito isso, podemos escrever

$$U_2(t) < c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

Por outro lado, se $t' < t_2$, podemos reescrever (2.42) como

$$U_2(t) \leqslant c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \left(\int_{t'}^{t_2} (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds + \int_{t_2}^{t} (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)\, ds \right).$$

Observe que em $[t', t_2]$, é verdade que $U_2(s) \leqslant \mathbf{M}_2 \leqslant \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$, por outro lado em $[t_2, t]$, temos que $U_2(s) \leqslant \mathbf{U}_2(s) \leqslant \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} U_2(t) &\leqslant c_* + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}}\, \mathbf{M}_2 \int_{t'}^{t} (t - s)^{-\frac{7}{8}}\, ds + c_{**}(t + t_0)^{-\frac{3}{8}}\, \mathbf{U}_2(t) \int_{t'}^{t} (t - s)^{-\frac{7}{8}}\, ds \\ &\leqslant c_* + 8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}}\, \mathbf{M}_2 + 8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_2(t). \end{aligned}$$

Como $(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} \leqslant 1$ e $8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} < \frac{1}{2}$, segue que

$$U_2(t) \leqslant c_* + c_{**}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t).$$

para todo $t \geqslant t_2$. Com isso,

$$U_2(s) \leqslant c_* + 8c_{**}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(s) \leqslant c_* + 8c_{**}\mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(t)$$

para todo $s \in [t_2, t]$. Pasando ao supremo em $[t_0, t]$, inferimos

$$\mathbf{U}_2(t) \leqslant c_* + 8c_{**}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{U}_2(t)$$

para todo $t \geqslant t_2$. Isto prova (2.43). Ou seja, mostramos que $U_2(t)$ é limitado por uma constante que não depende de t em $[t_2, \infty)$. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([t_2, \infty])$. Porém, sabemos que em $[T_{**}, \infty)$. Em particular em $[T_{**}, t_2]$, $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave (ver [12]), o que implica em U_2 ser suave em um compacto, consequentemente limitada. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^\infty([T_{**}, \infty))$ como era desejado. Assim, mostrado o caso $k = 2$.

Suponha que $U_\ell \in \mathcal{L}^\infty([T_{**},\infty))$ para todo $\ell < k$. Vamos mostrar que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**},\infty))$.amos mostrar que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**},\infty))$. Dito isso seja α um multi-índice de ordem k. Denotando D^α por $D_i D^\gamma$ (onde γ é um multi-índice de ordem $k-1$), temos, de forma análoga ao que foi feito no caso $k=2$, que

$$J_\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant c(\nu)\, t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma \mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Além disso por Calderon-Zygmund

$$\|D^\gamma \mathbf{Q}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(r,n)\|D^\gamma[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)},$$

para cada $1<r<\infty$ e qualquer multi-índice γ. Dessa forma, encontramos

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu)\, t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\gamma[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Utilizando a regra de Leibniz (ver Teorema 1.28), obtemos

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \sum_{\sigma\leqslant\gamma} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\sigma \mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla D^{\gamma-\sigma}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)},$$

e utlizando a Desigualdade de Hölder, concluimos que

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^3)} \|D^{k-\ell}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Destoe modo, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1), segue que

$$J_\alpha(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^{k-\ell}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Escrevendo $J_\alpha(t)$ como a soma $J_1(t)+J_2(t)+J_3(t)$ onde

$$J_1(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

$$J_2(t) = c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^\ell \mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^{k-\ell}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

$$J_3(t) = c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{k-1}\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|^{\frac{3}{4}}_{\mathcal{L}^2} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds.$$

Como sabemos que $\|D^q\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = s^{-\frac{q}{2}}U_q(s) \leqslant s^{-\frac{q}{2}}M_q$, para todo $q<k$ (por hipótee de indução) e $\|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = s^{-\frac{k}{2}}U_k(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leqslant c(\nu)\, M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)}\, U_k(s)\, ds \\ &\leqslant c(\nu,k) M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s)\, ds, \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde utilizamos o fato de

$$\begin{aligned} s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)} \leqslant c(k)(t+t_0)^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)} &\leqslant c(k)\, t^{\frac{k}{2}} (t+t_0)^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)} \\ &= c(k)\left(\frac{t}{t+t_0}\right)^{\frac{k}{2}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \leqslant c(k)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

para a última desigualdade. Análogamente para $J_2(t)$, deduzimos que

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leqslant c(\nu)\sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell}\, t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)}\, ds \\ &\leqslant c(\nu,k)\sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell}\,(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}}\, ds \\ &\leqslant c(\nu,k)\sum_{\ell=1}^{k-2} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell}\,(t+t_0)^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

e para $J_3(t)$

$$\begin{aligned} J_3(t) &\leqslant c(\nu) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}}\, t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)} U_k(s)^{\frac{3}{4}}\, ds \\ &\leqslant c(\nu,k) M_1 M_{k-1}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s)^{\frac{3}{4}}\, ds. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Lembrando que $U_k(s)^{\frac{3}{4}} \leqslant 1 + U_k(s)$ (análogo a 2.40), segue, por (2.39), (2.44), (2.45) e (2.46), que

$$U^\alpha(t) \leqslant c(k,\nu,t_0,\mathbf{u}_0,M_1,\ldots,M_{k-1}) + c(k,\nu,\mathbf{u}_0,M_1)(t+t_0) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s)\, ds,$$

onde $U^\alpha(t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Portanto

$$U_k(t) \leqslant c_*(k,\nu,t_0,\mathbf{u}_0,M_1,\ldots,M_{k-1}) + c_{**}(k,\nu,\mathbf{u}_0,M_1)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s)\, ds,$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. De forma análoga ao caso $k=2$, definimos t_k e $\mathbf{M}_k$ por

$$t_k := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_k := \sup\{U_k(s)\,;\, t_0 \leqslant s \leqslant t_k\}.$$

Sendo assim, afirmamos novamente que

$$U_k(t) \leqslant 2c_*(k,\nu,t_0,\mathbf{u}_0,M_1,\ldots,M_{k-1}) + 16 c_{**}(k,\nu,\mathbf{u}_0,M_1)\mathbf{M}_k,$$

para todo $t \geqslant t_k$. Essa demonstração é exatamente a mesma que foi feita para o caso $k=2$. Ou seja, temos que U_k é limitada por uma constante que não depende de t em $[t_k,\infty)$, como U_k é limitada em $[T_{**},\infty)$, segue que $U_k \in \mathcal{L}^\infty([T_{**},\infty))$, como era desejado. □

O teorema abaixo é uma generalização dos Teoremas 2.14 e 2.15.

Teorema 2.17. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (2.13), então para todo $k \geqslant 0$ tem-se

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^k \mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Os Teoremas 2.15 e 2.14 mostram os casos $k=0$ e $k=1$ respectivamente. Sendo assim, considere $k \geqslant 2$ e $t_0 \geqslant T_{**}$. Lembrando que

$$\begin{aligned} \|D^k \mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} &\leqslant \|D^k[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t'} \|D^k[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds + \int_{t'}^{t} \|D^k[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds. \end{aligned}$$

Na demonstração do Lema 2.16, vimos que dado um multi-índice α com $|\alpha| = k$, podemos escrever

$$|I_1(\alpha, t)| = t^{\frac{k}{2}} \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c(k,\nu)\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \left(1 + \frac{t_0}{t-t_0}\right)^{\frac{k}{2}} \to 0, \quad (2.47)$$

quando $t \to \infty$. Por outro lado, vimos tambem que

$$|I_2(\alpha, t)| = \int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \leqslant c(k,\nu)\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t+t_0)^{\frac{1}{2}},$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| = k$. Note que, quando $t \to \infty$, o termo $(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ decai na ordem de $t^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}$, enquanto $(t+t_0)^{\frac{1}{2}}$ cresce na ordem de $t^{\frac{1}{2}}$. Logo inferimos que

$$(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t+t_0)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

quando $t \to \infty$, desde que

$$\frac{k}{2} + \frac{3}{4} > \frac{1}{2}, \quad (2.48)$$

que é verdadeiro pois (2.48) implica em $k > -\frac{1}{2}$ (que é válido pois $k \geqslant 2$). Dessa forma, concluimos que

$$\int_{t_0}^{t'} \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\, ds \to 0, \quad (2.49)$$

quando $t \to \infty$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} J_\alpha(t) &= t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} \|D^\alpha[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant c(k,\nu)\left(\sum_{\ell=1}^{k} M_\ell^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell}\right)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \to 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

quando $t \to \infty$. Logo, por (2.47), (2.49) e (2.50), dado um multi-índice α com $|\alpha| = k$, temos que

$$t^{\frac{k}{2}}\|D^\alpha \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$. Portanto

$$t^{\frac{k}{2}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\sum_{\ell_1=1}^{3} \cdots \sum_{\ell_k=1}^{3} t^{\frac{k}{2}}\|D_{\ell_1}\cdots D_{\ell_k}\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

quando $t \to \infty$ pois, $D_{\ell_1}\cdots D_{\ell_k} = D^\alpha$ para algum multi-índice α com $|\alpha| = k$. □

O teorema acima mostra o decaimento de energia das soluções de Leray na norma do espaço $H^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{W}^{k,2}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\ell=0}^{k} \|D^\ell\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Mais precisamente

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\ell=0}^{k} \left[t^{-\frac{\ell}{2}}t^{\frac{\ell}{2}}\|D^\ell\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}\right]^2 = \sum_{\ell=0}^{k} t^{-\ell}\left[t^{\frac{\ell}{2}}\|D^\ell\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}\right]^2 \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

2.3 Problema de Dirichlet

Nessa seção, retornamos ao problema visto na motivação do capítulo anterior.

O ponto principal dessa seção é o Teorema de Lax-Milgram, que será utilizado para mostrar a existência de soluções fracas para o problema de Dirichet. Para demonstrá-lo, será necessário apresentar alguns resultados de análise funcional

Teorema 2.18. Seja f um operador linear limitado, então,

(a) f é continuo;

(b) $\ker f$ é fechado.

Demonstração. Ver [11] p.p. 97, 98. □

Teorema 2.19. Se E é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, então

$$H = E \oplus E^{\perp}.$$

Demonstração. Ver [18] p.p. 129. □

O Teorema da representação de Hilbert é o resultado mais importante para a demonstração do Teorema de Lax-Milgram, esste será enunciado e demonstrado abaixo.

Teorema 2.20 (Teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert)**.** Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle\,,$$

para todo $u \in H$. Além disso $\|f\| = \|v\|$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos a existencia de $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle\,,$$

para todo $u \in H$. Seja $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado não nulo (se $f \equiv 0$, basta escolher $v = 0$), então existe $z \in H$ tal que $f(z) \neq 0$. Como f é linear, z deve ser não nulo. Ou seja, $\ker f \neq H$. Como f é limitado segue, pelo Teorema 2.18 **(b)**, que $\ker f$ é fechado, sendo assim pelo Teorema 2.19, $H = \ker f \oplus \ker f^{\perp}$. Portanto, $\ker f^{\perp} \neq \{0\}$ (pois caso contrário $\ker f = H$). Dito isso, seja $w \in \ker f^{\perp}$ não nulo, então, para cada $u \in H$, $f(u)w - f(w)u \in \ker f$ já que,

$$f(f(u)w - f(w)u) = f(u)f(w) - f(w)f(u) = 0.$$

Dessa forma

$$0 = \langle f(u)w - f(w)u, w\rangle = f(u)\langle w, w\rangle - f(w)\langle u, w\rangle\,,$$

ou seja

$$f(u) = \left\langle u, \frac{f(w)}{\|w\|^2}w \right\rangle.$$

Escolhendo $v := \dfrac{f(w)}{\|w\|^2}w \in H$ (note que v não depende de u), temos que existe $v \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v\rangle$ para todo $u \in H$.

Para mostrar que v é único, suponha que exista $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$ para todo $u \in H$. Dito isso

$$\langle u, v \rangle = f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle ,$$

para todo $u \in H$. Logo é verdade que

$$\langle u, v - \tilde{v} \rangle = 0,$$

para todo $u \in H$, Em particular se $u = v - \tilde{v} \in H$, temos $\|v - \tilde{v}\|^2 = 0$, ou seja, $v = \tilde{v}$. Portanto v é único.

Por fim, resta mostrar que $\|f\| = \|v\|$. Com efeito, note que $f(v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$. Ou seja

$$\|v\|^2 = f(v) \leqslant |f(v)| \leqslant \|f\|\|v\|.$$

Como v é não nulo, temos $\|v\| \leqslant \|f\|$. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schawarz, inferimos

$$|f(u)| = |\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\|\|v\|,$$

o que implica em $\|f\| \leqslant \|v\|$. Portanto, vale a igualdade:

$$\|f\| = \|v\|.$$

□

Teorema 2.21 (Teorema de Lax-Milgram)**.** Sejam H um espaço de Hilbert, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear tal que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

1. $|B(u, v)| \leqslant \alpha\|u\|\|v\|$ para todo $u, v \in H$, i.e., a forma bilinear é limitada;
2. $\beta\|u\|^2 \leqslant B(u, u)$ para todo $u \in H$, i.e., a forma bilinear é coerciva,

e $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então, existe um único $v \in H$ tal que

$$B(u, v) = f(u),$$

para todo $u \in H$.

Demonstração. Essa demonstração sera dividida em seis passos

<u>Passo 1:</u> Mostremos que existe uma aplicação $A : H \to H$ tal que $B(u, v) = \langle u, Av \rangle$, para todo $u, v \in H$.

Para cada $v \in H$ defina $g_v : H \to \mathbb{R}$ por

$$g_v(u) = B(u, v).$$

para todo $u \in H$. Claramente g_v é linear (pois B é uma forma bilinear). Além disso, g_v é limitada, já que

$$|g_v(u)| = |B(u, v)| \leqslant \alpha\|u\|\|v\|,$$

para todo $u \in H$, onde utilizamos o fato de B ser limitada (ver item 1). Sendo assim,

$$\|g_v\| \leqslant \alpha\|v\|.$$

Logo, g_v é limitada. Dessa forma, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema 2.20), existe um único $w_v \in H$ tal que

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle ,$$

para todo $u \in H$. Agora, seja $A : H \to H$ dado por $Av = w_v$. Dessa forma, podemos escrever

$$B(u,v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle = \langle u, Av \rangle . \tag{2.51}$$

para todo $u, v \in H$.

Passo 2: Afirmamos que A é um operador linear e limitado.

Sejam $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim, por (2.51), obtemos

$$\langle u, A(\lambda x + y) \rangle = B(u, \lambda x + y) = \lambda B(u,x) + B(u,y) = \lambda \langle u, Ax \rangle + \langle u, Ay \rangle = \langle u, \lambda Ax + Ay \rangle ,$$

para tudo $u \in H$, pois B é uma forma bilinear. Com isso $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$, para todo $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, A é linear. Além disso, dado $v \in H$, inferimos por (2.51) que

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = B(Av, v) \leqslant |B(Av, v)| \leqslant \alpha \|Av\| \|v\|,$$

onde utlizamos o fato de B ser uma forma bilinear limitada (ver item 1). Deste modo, a seguinte desigualdade é válida:

$$\|Av\| \leqslant \alpha \|v\|.$$

para todo $v \in H$. Portanto A é limitado.

Passo 3: É verdade que A é injetivo e ImA é fechado.

Sabemos que existe $\beta > 0$ tal que $\beta\|u\|^2 \leqslant |B(u,u)|$ para todo $u \in H$ (ver item 2). Dessa forma, por (2.51), concluimos que

$$\beta\|u\|^2 \leqslant |B(u,u)| = |\langle u, Au \rangle| \leqslant \|u\|\|Au\|,$$

para todo $u \in H$, ou seja

$$\beta\|u\| \leqslant \|Au\|, \tag{2.52}$$

para todo $u \in H$. Seja $u \in \ker A$, então $Au = 0$, daí por (2.52)

$$\beta\|u\| \leqslant \|Au\| = 0,$$

o que implica em $u = 0$. Portanto A é injetiva.

Além disso, seja $(Au_k) \subseteq \mathrm{Im}A$ tal que $Au_k \to v \in H$, quando $k \to \infty$. Mostremos que $v \in \mathrm{Im}A$. Com efeito, (Au_k) é de cauchy (porque converge). Dito isso, por (2.52)

$$\beta\|u_k - u_\ell\| \leqslant \|Au_k - Au_\ell\| \to 0.$$

Ou seja, $(u_k) \subseteq H$ é de Cauchy. Como H é completo, existe $u_0 \in H$ tal que $u_n \to u_0$. Como A é limitado, consequentemente, é continuo (ver Teorema 2.18 **(a)**), temos que $Au_k \to Au_0$, quando $k \to \infty$. Pela unicidade do limite, deduzimos que $v = Av_0 \in \mathrm{Im}A$. Portanto, Im$A$ é fechado.

Passo 4: Vamos mostrar que A é sobrejetivo.

Sabemos que $H = \mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Im}A^\perp$ (pois ImA é fechado). Mostremos que $\mathrm{Im}A^\perp = \{0\}$. Com efeito, se $w \in \mathrm{Im}A^\perp$, temos pelo item 2, e por (2.51) que

$$\beta\|w\|^2 \leqslant B(w,w) \leqslant |B(w,w)| = |\langle w, Aw \rangle| = 0,$$

pois $Aw \in \mathrm{Im}A$ e $w \in \mathrm{Im}A^\perp$. Logo, $w = 0$, o que implica em $H = \mathrm{Im}A$. Portanto, A é sobrejetiva.

Passo 5: É verdade que existe $v \in H$ tal que $f(u) = B(u,v)$ para todo $u \in H$.

Como f é um funcional linear limitado em H, temos, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema 2.20), que existe $z \in H$, tal que $f(u) = \langle u, z \rangle$, para todo $u \in H$. Como A é uma bijeção, existe um único $v \in H$ tal que $z = Av$. Dessa forma, podemos escrever

$$f(u) = \langle u, z \rangle = \langle u, Av \rangle = B(u,v), \tag{2.53}$$

para todo $u \in H$.

Passo 6: Vamos mostrar que v em (2.53) é único.

Suponha que existe $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = B(u, \tilde{v})$ para todo $u \in H$. Dessa forma, as igualdades abaixo são válidas

$$B(u, v) = f(u) = B(u, \tilde{v}).$$

para todo $u \in H$. Por isso, pela linearidade de B, segue que $B(u, v - \tilde{v}) = 0$ para todo $u \in H$. Dito isso, pelo item 2, chegamos a

$$\beta \|v - \tilde{v}\|^2 \leqslant |B(v - \tilde{v}, v - \tilde{v})| = 0.$$

Sendo assim, $v = \tilde{v}$. Portanto, v é único. □

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram (Existência de soluções fracas)**.** Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.54}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Na motivação, vimos que u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_\Omega Du \cdot D\phi \, dx + \int_\Omega u\phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Porem, pela densidade das funções teste em $H_0^1(\Omega)$ (pois $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$), podemos dizer que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet, se esta satisfaz a igualdade:

$$\int_\Omega Du \cdot Dv \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$[8].

Defina a forma $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$B(u, v) = \int_\Omega Du \cdot Dv \, dx + \int_\Omega uv \, dx,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$, e o funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(v) = \int_\Omega fv \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Note que B é uma forma bilinear limitada e coerciva. Com efeito, a bilinearidade de B segue do fato do gradiente fraco D e a integral serem operadores lineares. Além disso, é verdade que

$$B(u, u) = \int_\Omega Du \cdot Du \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx = \int_\Omega \|Du\|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^2 \, dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo, B é coercivo e, utilizando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), segue que

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leqslant \int_\Omega |Du \cdot Dv| \, dx + \int_\Omega |uv| \, dx \\ &\leqslant \int_\Omega \|Du\|\|Dv\| \, dx + \int_\Omega |u||v| \, dx \leqslant \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|Dv\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

[8] Vale ressaltar que $H_0^1(\Omega) = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Mais precisamente, pelo Teorema 1.30, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Porém, sabemos que $\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}, \|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Dito isso, obtemos

$$|B(u,v)| \leqslant c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Logo, B é limitado.

Por fim, temos que φ é um funcional linear limitado. De fato, a linearidade de φ segue da distributividade do produto e da linearidade da integral. Por outro lado,

$$|\varphi(v)| \leqslant \int_\Omega |f||v|\,dx \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} < \infty$, pois por hípotese, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.21), existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = \varphi(v),$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, u é a única solução fraca para o problema de Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

[1] Sheldon Axler. *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer, 2024.

[2] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.

[3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[4] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE DO BRASIL, 2016.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.

[6] Alberto Fiorenza, Maria Rosaria Formica, Tomáš Roskovec e Filip Soudský. *Detailed proof of classical Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality with historical remarks*. 2018.

[7] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 1999.

[8] Giovanni P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems*. 2nd. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.

[9] Tosio Kato. «Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions». Em: *Mathematische Zeitschrift* 187.4 (1984), pp. 471–480.

[10] Irina A. Kmit. *Hölder Spaces*. 2021.

[11] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley, 1989.

[12] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.

[13] Jean Leray e Robert Terrell. *On the motion of a viscous liquid filling space*. 2016. arXiv: `1604.02484 [math.HO]`.

[14] Elon Lages Lima. *Curso de Análise vol. 2*. 12ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020.

[15] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. 6ª edição. IMPA, 2020.

[16] Jens Lorenz e Paulo R. Zingano. *The Navier-Stokes equations for Incompressible Flows: solution properties at potential blow-up times*. 2015.

[17] James R. Munkres. *Analysis on Manifolds*. CRC Press, 1991.

[18] César R. de Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. 1ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018, p. 257.

[19] C.W. Oseen. *Hydrodynamik*. Mahtematik in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.

[20] Michael Wiegner. «Decay Results for Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations on Rn». Em: *Journal of The London Mathematical Society-second Series* 35 (1987), pp. 303–313.

[21] Paulo R. Zingano. *Two problems in Partial Differential Equations (in Portuguese)*. 2018.