CONTEÚDO

1	Espa	aços de Sobolev	3
	1.1	Preliminares	3
	1.2	Motivação	7
	1.3	Espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$	7
	1.4	Aproximações	8
	1.5	Extensões	0
	1.6	Traços	4
	1.7	Desigualdades de Sobolev	9
		1.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev	9
		1.7.2 Desigualdade de Morrey	5
		1.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev	9
	1.8	Compacidade	2
2	Algu	ımas aplicações dos Espaços de Sobolev 5	7
	2.1	Preliminares	7
		2.1.1 Desigualdades	7
		2.1.2 Transformada de Fourier	8
		2.1.3 Semigrupo do calor	9
		2.1.4 Notação	1
	2.2	Propriedades das soluções de Leray	2
		2.2.1 Introdução e contexto histórico	2
		2.2.2 Resultados	3
	2.3	Problema de Dirichlet	9

2 CONTEÚDO

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os espaços de Sobolev desempenham um papel fundamental na análise funcional e nas equações diferenciais parciais, oferecendo uma estrutura adequada para o estudo de problemas envolvendo funções que podem não ser diferenciáveis no sentido clássico. Introduzidos como uma extensão dos conceitos de derivada e integrabilidade, esses espaços permitem trabalhar com soluções generalizadas, chamadas de soluções fracas, ampliando o escopo de problemas que podem ser tratados matematicamente. Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos dos espaços de Sobolev e suas principais propriedades elementares.

Vale ressaltar, que quando necessário, consideramos que as funções $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são definidas de forma que sejam nulas em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

1.1 Preliminares

Antes de começarmos de fato o estudo dos espaços de Sobolev precisamos, de algumas definições que serão usadas extensivamente nesse capítulo.

Definição 1.1. Seja $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Definimos o suporte de φ por

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega \, ; \, \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Além disso, se supp φ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto.

Note que $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp} \varphi$; então, $(\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}} \subseteq \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}$. Ou seja, se $x \notin \operatorname{supp} \varphi$, então $\varphi(x) = 0$. Por outro lado, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \Omega$, então, $\Omega^{\mathcal{C}} \subseteq (\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}}$. Se Ω é aberto, então $\partial \Omega \subseteq \Omega^{\mathcal{C}}$. Portanto, se Ω é aberto, φ se anula em $\partial \Omega$, já que

$$\partial \Omega \subseteq \Omega^{\mathcal{C}} \subseteq (\operatorname{supp} \varphi)^{\mathcal{C}} \subseteq \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}.$$

Definição 1.2. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . O espaço $\mathcal{C}^k(\Omega)$ é composto por todas funções $f:\Omega\to\mathbb{R}$ contínuas em que suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k também são contínuas. Se $f\in\mathcal{C}^k(\Omega)$, dizemos que f é de classe \mathcal{C}^k .

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é definido por

$$\mathcal{C}^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega).$$

A definição abaixo será amplamente utilizada nesse capítulo.

Definição 1.3. O conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω é definido por

$$C_c(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ contínua}; \text{supp } f \text{ \'e compacto} \}$$

Além disso, definimos

$$\mathcal{C}_{c}^{k}(\Omega) = \mathcal{C}_{c}(\Omega) \cap \mathcal{C}^{k}(\Omega),$$

que é o conjunto das funções $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k com suporte compacto.

Nesse texto, quanto não estiver explicito o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definição 1.4 (Espaços \mathcal{L}^p e \mathcal{L}^{∞}). O espaço $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, é composto pelas funções $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que

$$||f||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty.$$

O espaço $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$ é composto pelas funções $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensuráveis e limitadas em quase toda parte em Ω , e definimos sua norma por

$$||f||_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|; x \in \Omega\} = \inf\{M \geqslant 0; |f(x)| \leqslant M \text{ qtp em } \Omega\}$$

Definição 1.5. O conjunto das funções $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ localmente somáveis, isto é, integráveis em todo conjunto compacto de Ω é denotado por $\mathcal{L}^p_{loc}(\Omega)$.

Os resultados abaixos são de extrema importância no estudo de espaços de Sobolev e podem ser encontrados, em sua maioria, em um curso introdutório de medida e integração de Lebesgue (ver [2, 3, 8]).

Teorema 1.6 (Teorema da Convergência Dominada). Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Ver [3], p.p. 44.

Teorema 1.7. O espaço $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach¹

Demonstração. Ver [3], p.p. 59 $(1 \le p < \infty)$ e p.p. 61 $(p = \infty)$.

Teorema 1.8 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$, e $q \in \mathbb{R}$ é tal que p e q são expoentes conjugados². Então, $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e

$$||fg||_{\mathcal{L}^1(\Omega)} \leq ||f||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} ||g||_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [3], p.p. 56.

¹Espaço vetorial normado completo, i.e., toda sequência de Cauchy é convergente.

 $^{^{2}}p$ e q são ditos expoentes conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.1. PRELIMINARES 5

Uma generalização desse resultado será apresentada abaixo.e

Teorema 1.9 (Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam $0 < p_1, \ldots, p_N \le \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$ e $f = f_1 f_2 \cdots f_N$ onde $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}(\Omega)$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e

$$||f||_p \leqslant ||f_1||_{\mathcal{L}^{p_1}(\Omega)} \cdots ||f_N||_{\mathcal{L}^{p_N}(\Omega)}.$$

Demonstração. Segue por indução da desigualdade de Hölder

Teorema 1.10 (Desigualdade de Young). Sejm $A, B \geqslant 0, 1 \leqslant p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tal que p e q são expoentes conjuntados. Então

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$.

Demonstração. Ver [3], p.p. 56

Teorema 1.11. Se Ω é limitado e, $1 \leq p < q < \infty$. Então, $\mathcal{L}^q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ e

$$||f||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c||f||_{\mathcal{L}^q(\Omega)},$$

para toda $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ e c > 0 é uma constante que depende de p, q e Ω .

Demonstração. Ver [8], p.p. 186.

Teorema 1.12 (Integração por partes em \mathbb{R}^n). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região regular³e $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Então,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial \Omega} u v \nu_i \, dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx,$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário que aponta para fora em $\partial \Omega$.

Demonstração. Ver [6], p.p. 628.

Teorema 1.13 (Coordenadas polares em \mathbb{R}^n). Seja $f: B(y,s) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função integrável, então

$$\int_{B(y,s)} f \, dx = \int_0^s \int_{\partial B(y,r)} f \, dS dr,$$

onde B(y, s) é a bola aberta de raio s > 0 e centrada em y.

Demonstração. Ver [8], p.p. 78.

³i.e.,

Teorema 1.14. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ tal que $||u_n - u||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$, quando $n \to \infty$, para alguma função $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Então, existem uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ e uma função $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tais que

- (a) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ qtp⁴ em Ω ;
- **(b)** $|u_{n_k}(x)| \leq v(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, qtp em Ω .

Demonstração. Ver [4], p.p. 94.

Teorema 1.15 (Critério de compacidade de Arzelà-Ascoli). Seja (u_k) uma sequência de funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} tal que

$$|u_k(x)| \leq M$$
,

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde M > 0 é uma constante e (u_k) é uniformemente equicontínua⁵. Então, existem uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty} \subseteq (u_k)_{k=1}^{\infty}$ e uma função contínua u tal que $u_{k_j} \to u$, quando $j \to \infty$, uniformemente em conjuntos compactos de \mathbb{R}^n .

Demonstração. Ver [8], p.p 137.

Teorema 1.16 (Teorema de Fubini). Sejam $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu)$ e $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \nu)$ espaços de medida. Então, se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, a igualdade abaixo é válida:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu \times d\nu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\nu \right) \, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu \right) \, d\nu.$$

Demonstração. Ver [8], p.p. 68.

Uma outra forma de enunciar o Teorema de Fubini é a seguinte.

Teorema 1.17. Sejam $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ e $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, dX = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f \, dy dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f \, dx dy.$$

Essa versão do Teorema de Fubini é provada para integrais de Riemann, porém como em alguns casos as integrais de Riemann e Lebesgue coincidem, essas versões são equivalentes.

Teorema 1.18 (Mudança de variáveis). Seja $\Psi: A \to B$ um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n . Seja $f: B \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é integrável sobre B se, e somente se, $(f \circ \Psi)|\det D\Psi|$ é integrável sobre A. Neste caso,

$$\int_{B} f \, dx = \int_{A} (f \circ \Psi) |\det D\Psi| \, dy.$$

Demonstração. O capítulo 4 de [18] é destinado a demonstração desse teorema.

5

⁴Duas funções u e v são ditas iguais em quase toda parte (qtp) se u(x) = v(x) para todo $x \in X$, onde $X^{\mathcal{C}}$ tem medida nula.

1.2. MOTIVAÇÃO 7



Figura 1.1: Sergei Lvovich Sobolev (1908 – 1989)

1.2 Motivação

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ em } \Omega; \\ u = 0 \text{ sobre } \partial \Omega, \end{cases}$$
 (1.1)

onde $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Uma solução clássica para o problema acima é uma função $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfazendo (1.1). Por outro lado, multiplicando ambos os lados da primeira equação em (1.1) por uma função $\phi\in\mathcal{C}^\infty_C(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} -\phi \Delta u \, dx + \int_{\Omega} u \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx.$$

Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.12), a primeira integral acima pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} -\phi \Delta u \, dx = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \phi \frac{\partial^{2} u}{\partial x_{i}^{2}} \, dx = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\partial \Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_{i}} \nu_{i} \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_{i}} \frac{\partial u}{\partial x_{i}} \, dx \right).$$

Mas, como ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, inferimos

$$\int_{\Omega} -\phi \Delta u \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_{i}} \frac{\partial u}{\partial x_{i}} \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx.$$

Dito isso, dizemos que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{\Omega} u \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx,\tag{1.2}$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)^6$. Observe agora que, não precisamos mais que u seja de classe \mathcal{C}^2 já que a segunda derivada de u não é utilizada em (1.2). Na verdade, não precisamos nem que u seja contínua, apenas integrável em Ω . Na Seção 2.3, voltaremos a essa motivação para mostrar que para qualquer função $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca para (1.1). Essa solução é uma função que pertece ao espaço de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ (esse e outros espaços e suas propriedades serão estudadas ao longo desse trabalho).

1.3 Espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Nosso objetivo agora, é generalizar a noção de derivada para funções que não são diferenciáveis em um aberto Ω do \mathbb{R}^n e explorar algumas propriedades elementares.

⁶Nomenclatura: φ é chamada função teste.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, então se $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.12), temos que

 $\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial \Omega} u \phi \nu_i dS - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$

para todo $i=1,\ldots,n$. Como ϕ tem suporte compacto e Ω é um aberto, segue que ϕ se anula sobre $\partial\Omega$, como foi mostrado abaixo da definição de suporte. Portanto, a expressão acima se torna

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \qquad (1.3)$$

para todo $i=1,\ldots,n$. Ademais, se agora u for de classe \mathcal{C}^k em Ω , com $k\in\mathbb{N}$ e $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ um multi-índice de ordem $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k$, então

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha} u \, dx. \tag{1.4}$$

Essa expressão é válida, já que

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e podemos aplicar (1.3) $|\alpha|$ vezes.

Queremos descobrir se existe uma classe de funções tal que (1.4) ainda é válida, mesmo se u não for de classe \mathcal{C}^k . Note que o lado esquerdo de (1.4) está bem definido se $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$. O problema é que se u não é necessáriamente uma função de classe \mathcal{C}^k então o lado direito de (1.4) não está bem definido. Para resolver isso, perguntamos se existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tal que (1.4) é válida quando substituimos $D^{\alpha}u$ por v.

Essa pergunta motiva a definição abaixo.

Definição 1.19 (Derivada fraca). Sejam $u, v \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u, denotada por

$$v = D^{\alpha}u$$

dado que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha} u \, dx, \tag{1.5}$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$.

Isto é, se dado uma função u e existe uma função v que satisfaz (1.5) para toda ϕ função teste, dizemos que $D^{\alpha}u = v$ no sentido fraco. Caso contrário, se não existir uma função v que satisfaz (1.5), então u não possui a α -ésima derivada parcial fraca.

Observação: Aqui, utilizamos a notação dx ao invés de $d\mu$ na integral de Lebesgue como convenção para dar ênfase que estamos utilizando a medida de Lebesgue (e não uma medida qualquer). Além disso, se uma função é integrável a Riemann e a Lebesgue (utilizando a medida de Lebesgue), suas integrais coincidem.

Agora, vejamos alguns exemplos sobre a derivada fraca

Exemplo 1.20. A função $u: \Omega = (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$
 (1.6)

não é diferenciável no sentido usual, já que

$$\lim_{h \to 0^{-}} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{1+h-1}{h} = 1,$$

mas

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1-1}{h} = 0.$$

Porém, u possui derivada fraca dada pela função

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Com efeito, note que, para toda função $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_{c}(\Omega)$, temos que

$$\int_0^2 u\phi' \, dx = \int_0^1 x\phi' \, dx + \int_1^2 \phi' \, dx = x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi \, dx + \phi \Big|_1^2.$$

Como ϕ tem suporte compacto, $\phi(0) = \phi(2) = 0$. Assim,

$$\int_0^2 u\phi' \, dx = \phi(1) - \int_0^1 \phi \, dx - \phi(1) = -\int_0^1 \phi \, dx.$$

Por fim, basta escrever 0 como uma integral para obter

$$\int_0^2 u\phi' \, dx = -\left(\int_0^1 1\phi \, dx + \int_1^2 0\phi \, dx\right) = -\int_0^2 v\phi \, dx.$$

Portanto, v é a derivada de u no sentido fraco.

Exemplo 1.21. A função $u: \Omega = (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \le 1; \\ 2, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

não possuí derivada fraca. Mostremos que u' não existe no sentido fraco. Isto significa que não existe uma função $v \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} u\phi' \, dx = -\int_{\Omega} v\phi \, dx,$$

para toda função $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Com efeito, suponha, por absurdo, que existe tal v. Deste modo,

$$-\int_0^2 v\phi \, dx = \int_0^2 u\phi' \, dx = \int_0^1 x\phi' \, dx + 2\int_1^2 \phi' \, dx = -\int_0^1 \phi \, dx - \phi(1).$$

Seja (ϕ_n) uma sequência de funções suaves satisfazendo

$$0 \leqslant \phi_n \leqslant 1$$
, $\phi_n(1) = 1$, $\phi_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ se $x \ne 1$.

Isolando $\phi(1)$, substituindo ϕ por ϕ_n e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$1 = \lim \phi_n(1) = \lim \left[\int_0^2 v \phi_n \, dx - \int_0^1 \phi_n \, dx \right] = 0,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), pois $\phi_n \to 0$ qtp em Ω , quando $n \to \infty$ e $|\phi_n(x)| \leqslant 1$, para todo todo $x \in \Omega$ e $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$. Portanto, u não possui derivada fraca.

O primeiro resultado sobre a derivada fraca que queremos mostrar é sobre sua unicidade, para isso precisamos antes do seguinte lema.

Lema 1.22. Sejam $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. Então,

$$\int_{\Omega} u\phi = 0,$$

se, e somente se $u \equiv 0$ qtp em Ω .

Demonstração. Ver [4], p.p. 110.

Com o lema acima em mente, temos todas as ferramentas para mostrar a unicidade da derivda fraca.

Proposição 1.23. Seja α um multi-índice. Se v e \tilde{v} são ambas α -ésimas derivadas parciais fracas de uma função u. Então,

$$v = \tilde{v}$$
 qtp em Ω .

Demonstração. Sejam $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Com isso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_{c}(\Omega)$. Logo, pelo Lema 1.22, chegamos a

$$v - \tilde{v} = 0$$
 atp em Ω .

Portanto, $v = \tilde{v}$ qtp em Ω .

Vejamos um exemplo prático da Proposição 1.23.

Exemplo 1.24. Considere a função u do Exemplo 1.20, vimos que

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

é a derivada de u (dada em 1.6) no sentido fraco. Porém, a função

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{se } 1 \le x < 2. \end{cases}$$

também satisfaz a definição de derivada fraca de u. A primeira vista, temos a sensação de que essa função é um contra-exemplo para unicidade da derivada fraca, todavia v e \tilde{v} são iguais fora de um conjunto de medida nula. De fato,

$$(v - \tilde{v})(x) =$$

$$\begin{cases}
1, & \text{se } x = 1 \\
0, & \text{se } x \neq 1,
\end{cases}$$

Portanto, é verdade que

$$v = \tilde{v}$$
 qtp em $(0, 2)$.

pois {1} é finito, logo tem medida nula.⁷

Com a definição de derivada fraca estabelecida, podemos definir os espaços de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

⁷Todo conjunto enumerável (em particular finito) tem medida (de Lebesgue) nula.

Definição 1.25. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) ; D^{e_i} u \in \mathcal{L}^p(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \dots, n \},$$

onde $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ é o vetor com 1 na *i*-ésima cordenada e 0 caso contrário.

Existem duas formas de definir os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, com $k \in \mathbb{N}$, indutivamente, e pela derivada fraca.

Definição 1.26. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant n$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ por

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) ; D^{\alpha}u \in \mathcal{L}^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k \}.$$

Ou. de outra forma.

$$\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega) ; D^{\alpha}u \in \mathcal{W}^{k-1,p}(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| = 1 \},$$

onde $D^{\alpha}u$ é a α -ésima derivada parcial de u no sentido fraco.

Observação: Quando p=2, a notação $H^k(\Omega)$ é comumente utilizada para dar ênfase que o espaço $\mathcal{W}^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert⁸, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)},$$

onde

$$\langle D^{\alpha}u,D^{\alpha}v\rangle_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)}=\int_{\Omega}D^{\alpha}uD^{\alpha}v\,dx.$$

No próximo capítulo, estudaremos algumas aplicações dos espaços de Sobolev, e os espaços H^k serão utilizados.

Definição 1.27. O espaço $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ admite norma

$$||u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leqslant p < \infty$ e

$$||u||_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)}.$$

Observação: Dizemos que uma sequência (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ se

$$\lim \|u_n - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e denotamos por $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Além disso, dizemos que (u_n) converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}_{loc}(\Omega)$ se u_n converge para u em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$ para todo conjunto aberto Ω' compactamente contido em Ω , isto é $\Omega' \subseteq \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto. Essa inclusão será denotada por $\Omega' \subseteq \Omega$.

Ainda não temos todas as ferramentas necessárias para provar que as normas da definição anterior são de fato normas em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Isso será feito após o Teorema 1.29

⁸Espaço vetorial com produto interno completo.

sobre as propriedades da derivada fraca, que são necessárias para verificar que $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ satisfaz a definição de norma.

Um outro espaço importante é o espaço $\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$ ($H_0^k(\Omega)$ se p=2) que é definido como o fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Ou seja, dada uma função em $u\in\mathcal{W}_0^{k,p}(\Omega)$, existe uma sequência (u_n) em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, quando $n\to\infty$. O Teorema 1.40 mostra uma equivalência para as funções nesse espaço.

Observação: Essa não é a única forma de definir uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, a norma que definimos acima é equivalente, por exemplo, a norma

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)},$$

com $1 \leqslant p < \infty$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é equivalente a

$$\max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)}.$$

O próximo exemplo ilustra um caso em que uma função pode ou não possuir derivada fraca dependendo da dimensão n do espaço Euclidiano e do expoente de integração p.

Exemplo 1.28. Seja $\Omega = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 centrada na origem, e considere $u: \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \|x\|^{-\alpha},\tag{1.7}$$

onde $\alpha > 0$. Queremos verificar para quais valores de $\alpha > 0$, n e p a função u pertence ao espaço $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Primeiramente, note que u é suave fora de 0 com

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-\alpha x_i}{\|x\|^{\alpha+2}} \quad (x \neq 0),$$

logo, como

$$Du(x) = \left(\frac{-\alpha x_1}{\|x\|^{\alpha+2}}, \dots, \frac{-\alpha x_n}{\|x\|^{\alpha+2}}\right) \quad (x \neq 0),$$

seque que

$$||Du(x)|| = \frac{|\alpha|}{||x||^{\alpha+1}} \quad (x \neq 0).$$

Seja $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Por integração por partes (ver Teorema 1.12), temos que

$$\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = -\int_{\Omega \setminus B[0,\varepsilon]} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i \, dS \tag{1.8}$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ denota o vetor normal unitário que aponta para fora em $\partial B[0, \varepsilon]$ (bola fechada de raio $\varepsilon > 0$ centrada na origem). Agora se $\alpha + 1 < n$, $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. De fato, integrando $\|Du\|$ sobre Ω , concluímos que

$$\int_{\Omega} \|Du\| \, dx = |\alpha| \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} \, dx.$$

Transformando em coordenadas polares (ver Teorema 1.13), conseguimos simplificar essa integral da seguinte forma:

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dx = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{\|x\|^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \int_{\|x\|=r} \frac{1}{r^{\alpha+1}} dS dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr,$$

onde a integral de superficie acima, é igual a área da esfera n-dimensional de raio r dada por

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}r^{n-1},$$

onde Γ e a função gama (ver [1] para mais detalhes), a qual, por simplicidade, vamos denotar por $\sigma(n)r^{n-1}$. Dessa forma, chegamos a

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1}} \int_{\|x\|=r} dS dr = \sigma(n) \int_0^1 r^{n-\alpha-2} dr = \sigma(n) \left(\frac{1^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} - \frac{0^{n-\alpha-1}}{n-\alpha-1} \right).$$

Note que, se $n-\alpha-1<0$ então $0^{n-\alpha-1}=\infty$. Sendo assim, deduzimos que

$$\int_{\Omega} \|Du\| \, dx < \infty \iff \alpha + 1 < n.$$

Portanto, $||Du|| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ desde que $\alpha + 1 < n$. Nesse caso, inferimos, por (1.7), que

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i \, dS \right| \leqslant \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| |\phi| |\nu_i| \, dS \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} |u| \, dS \leqslant \|\phi\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \int_{\partial B[0,\varepsilon]} \varepsilon^{-\alpha} \, dS,$$

pois $|\nu_i| \leq ||\nu|| = 1$. Essa última integral pode ser calculada por meio de coordenadas polares de forma análoga ao que foi feito anteriormente, resultando em

$$\left| \int_{\partial B[0,\varepsilon]} u \phi \nu_i \, dS \right| \leqslant c \varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, por (1.8), deduzimos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, desde que $0 < \alpha < n-1$.

Além disso, $\|Du\| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha+1)p < n$, esse cálculo é feito de forma análoga ao que foi feito para verificar quando $\|Du\| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Consequentemente, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular, $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ quando $p \geqslant n$.

Agora, vamos explorar as propriedades elementares das derivadas fracas.

Teorema 1.29 (Propriedades da derivada fraca). Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice com $1 \leq |\alpha| \leq k$. Então,

- (a) $D^{\beta}(D^{\alpha}u) = D^{\alpha}(D^{\beta}u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos multi-índices α e β com $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$;
- **(b)** $D^{\alpha}u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$;
- (c) (Linearidade) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se que $\lambda u + v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^{\alpha}(\lambda u + v) = \lambda D^{\alpha} u + D^{\alpha} v;$$

- (d) se Ω' é um aberto de Ω , então $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$;
- (e) (Regra de Leibniz) se $\eta \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, então $\eta u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^{\alpha}(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} {\alpha \choose \sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u, \tag{1.9}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha - \sigma)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e $\sigma \leqslant \alpha$ significa $\sigma_i \leqslant \alpha_j$, para todo j = 1, ..., n.

Demonstração.

(a) Mostremos que $D^{\beta}D^{\alpha}u=D^{\alpha+\beta}u$ (a demonstração para $D^{\alpha}D^{\beta}u$ é análoga). Com efeito, é verdade que

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} D^{\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Note que a última igualdade é válida pelo fato de ϕ ser uma função infinitamente diferenciável e D^α e D^β serem derivadas parciais usuais. Dessa forma $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca, obtemos

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\beta} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha+\beta} u \, dx.$$

Portanto, $D^{\beta}D^{\alpha}u = D^{\alpha+\beta}u$ no sentido fraco.

- **(b)** Suponha que $D^{\alpha}u \notin \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, então existe um multi-índice β , com $|\beta| \leqslant k-|\alpha|$, tal que $D^{\beta}(D^{\alpha}u) \notin \mathcal{L}^{p}(\Omega)$. Pelo item anterior temos que $D^{\alpha+\beta}u \notin \mathcal{L}^{p}(\Omega)$, o que é uma contradição, pois por hipótese $D^{\gamma}u \in \mathcal{L}^{p}(\Omega)$ para todo multi-índice γ com $|\gamma| \leqslant k$ e, como $|\beta| \leqslant k-|\alpha|$, tem-se $|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leqslant k$ (para $\gamma = \alpha + \beta$). Portanto, $D^{\alpha}u \in \mathcal{W}^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.
 - (c) Note que

$$\int_{\Omega} (\lambda u + v) D^{\alpha} \phi \, dx = \int_{\Omega} \lambda u D^{\alpha} \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^{\alpha} \phi \, dx = \lambda \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^{\alpha} \phi \, dx.$$

Utilizando a definição de derivada fraca nas duas utlimas integrais acima, obtemos

$$\lambda \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx + \int_{\Omega} v D^{\alpha} \phi \, dx = \lambda (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha} u \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi D^{\alpha} v \, dx = \int_{\Omega} (\lambda D^{\alpha} u + D^{\alpha} v) \phi \, dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Portanto, $D^{\alpha}(\lambda u + v) = \lambda D^{\alpha}u + D^{\alpha}v$ no sentido fraco.

(d) Seja $\Omega' \subseteq \Omega$ um aberto, queremos verificar que $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$. De fato, basta verificar que as integrais

$$\int_{\Omega'} |u|^p dx \text{ e } \int_{\Omega'} |D^{\alpha}u|^p dx$$

são finitas, para todo α multi-índice com $|\alpha|\leqslant k$. De fato, é verdade que

$$\int_{\Omega'} |u|^p \, dx \leqslant \int_{\Omega} |u|^p \, dx < \infty,$$

е

$$\int_{\Omega'} |D^{\alpha}u|^{p} dx \leqslant \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^{p} dx < \infty,$$

para todo α multi-índice com $|\alpha| \leq k$, ambas pelo fato de $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Assim, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega')$.

(e) Para mostrar que (1.9) é válida, utilizaremos indução sobre $|\alpha|$.

Com efeito, para $|\alpha|=1$, como $\eta, \phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, temos que

$$D^{\alpha}(\eta\phi) = \phi D^{\alpha}\eta + \eta D^{\alpha}\phi.$$

Dessa forma,

$$\int_{\Omega} \eta u D^{\alpha} \phi \, dx = \int_{\Omega} u D^{\alpha} (\eta \phi) - \int_{\Omega} u \phi D^{\alpha} \eta \, dx.$$

Como η e ϕ têm suporte compacto, então $\eta\phi$ também tem. Dito isso, utilizando a definição de derivada fraca apenas na primeira integral do lado direito da igualdade acima, chegamos a

$$\int_{\Omega} \eta u D^{\alpha} \phi \, dx = -\int_{\Omega} \eta \phi D^{\alpha} u \, dx - \int_{\Omega} u \phi D^{\alpha} \eta \, dx = -\int_{\Omega} (\eta D^{\alpha} u + u D^{\alpha} \eta) \phi \, dx.$$

Portanto, $D^{\alpha}(\eta u) = \eta D^{\alpha} u + u D^{\alpha} \eta$ como queriamos mostrar.

Agora seja $m \in \mathbb{N}$ tal que m < k e suponha que (1.9) é válida para todo multi-índice α com $|\alpha| \le m$ e toda função teste η . Considere um multi-índice α com $|\alpha| = m + 1$. Então, α é da forma $\alpha = \beta + \gamma$ com $|\beta| = m$ e $|\gamma| = 1$. Deste modo, podemos escrever por (a) que

$$\int_{\Omega} \eta u D^{\alpha} \phi \, dx = \int_{\Omega} \eta u D^{\beta + \gamma} \phi \, dx = \int_{\Omega} \eta u D^{\beta} (D^{\gamma} \phi) \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^{\beta} (\eta u) D^{\gamma} \phi \, dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Como $|\beta| = m$ podemos utilizar a hipótese de indução em $D^{\beta}(\eta u)$ e a definição da γ -ésima derivada fraca. Assim, por **(c)**, deduzimos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^{\sigma} \eta D^{\beta - \sigma} u D^{\gamma} \phi \, dx = (-1)^{|\beta| + |\gamma|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^{\gamma} (D^{\sigma} \eta D^{\beta - \sigma} u) \right] \phi \, dx.$$

Além disso, como $|\gamma|=1$, podemos aplicar a regra de Leibniz novamente, obtendo

$$\int_{\Omega} \eta u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \le \beta} {\beta \choose \sigma} \left(D^{\rho} \eta D^{\alpha - \rho} u + D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u \right) \right] \phi \, dx, \tag{1.10}$$

onde $\rho = \sigma + \gamma$. Note que podemos escrever o somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \alpha} \binom{\alpha - \gamma}{\rho - \gamma} D^{\rho} \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant \beta} \binom{\alpha - \gamma}{\sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

o qual ainda pode ser expandido em quatro somatórios como abaixo:

$$\sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} {\alpha - \gamma \choose \rho - \gamma} D^{\rho} \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\beta < \rho \leqslant \alpha} {\alpha - \gamma \choose \rho - \gamma} D^{\rho} \eta D^{\alpha - \rho} u \\
+ \sum_{0 \leqslant \sigma < \gamma} {\alpha - \gamma \choose \sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} {\alpha - \gamma \choose \sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u.$$
(1.11)

Porém, note que $0 \leqslant \sigma < \gamma$ implica em $\sigma = 0$. Com efeito, $0 \leqslant \sigma$ significa que $0 \leqslant \sigma_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\sigma < \gamma$ significa que existe um $j = 1, \ldots, n$ tal que $\sigma_j < \gamma_j$. Como $|\gamma| = 1$, suponha, sem perda de generalidade, que $\gamma = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Dessa forma, para j = 1, concluímos que $0 \leqslant \sigma_1 < 1$. Como $\sigma_1 \in \mathbb{N}$ segue que $\sigma_1 = 0$. Por outro lado, para $i = 2, \ldots, n$, vale $0 \leqslant \sigma_i < 0$, que implica em $\sigma_i = 0$. Portanto $\sigma = 0$. Da mesma forma, $\beta < \rho \leqslant \alpha$ implica em $\rho = \alpha$. Assim, (1.11) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\eta D^{\alpha} u + \sum_{\gamma \leqslant \rho \leqslant \beta} {\alpha - \gamma \choose \rho - \gamma} D^{\rho} \eta D^{\alpha - \rho} u + \sum_{\gamma \leqslant \sigma \leqslant \beta} {\alpha - \gamma \choose \sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u + u D^{\alpha} \eta. \tag{1.12}$$

Por fim, a menos de uma mudança de variaveis, escrevemos (1.12) como

$$\sum_{\sigma \leqslant \alpha} {\alpha \choose \sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

pois

$$\begin{pmatrix} \alpha - \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha - \gamma \\ \sigma - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma \end{pmatrix}$$

е

$$\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha}{\alpha}.$$

Sendo assim, voltando para a igualdade (1.10), temos que

$$\int_{\Omega} \eta u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} {\alpha \choose \sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi \, dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, Portanto, inferimos que

$$D^{\alpha}(\eta u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} {\alpha \choose \sigma} D^{\sigma} \eta D^{\alpha - \sigma} u,$$

como queriamos mostrar.

Com os resultados obtidos, agora é possível verificar que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach. Comecemos verificando que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.30. $(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$, com $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço vetorial normado.

 $Demonstração. \ \ \ Inicialmente, \ \ considere \ \ que \ 1\leqslant p<\infty.$

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Com isso, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = 0 \iff \|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = 0 \iff D^{\alpha}u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0), \ u = D^{\alpha}u = 0$. Por outro lado, se u = 0, $D^{\alpha}u = 0$ para todo multi-índice α . Sendo assim, $\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Sendo assim, pelo Teorema 1.29, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^{p} &= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}(\lambda u)\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\lambda D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} \\ &= |\lambda|^{p} \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} = |\lambda|^{p} \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^{p}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ Pelos Teoremas 1.7 e 1.29, segue que

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}u+D^{\alpha}v\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \left(\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}+\|D^{\alpha}v\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}. \\ &\leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}v\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$||u+v||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leq ||u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} + ||v||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$.

Para o caso $p = \infty$, a demonstração é análoga.

1. Seja $u \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Com isso, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = 0 \iff \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = 0 \iff \|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = 0 \iff D^{\alpha}u = 0,$$

para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$, $u = D^{\alpha}u = 0$. Por outro lado, se u = 0, $D^{\alpha}u = 0$ para todo multi-índice α . Sendo assim, $||u||_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = 0$.

2. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Sendo assim, pelos Teoremas 1.7, 1.29, podemos escrever

$$\begin{split} \|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}(\lambda u)\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\lambda D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \\ &= |\lambda| \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}. \end{split}$$

Portanto, $\|\lambda u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$.

3. Sejam $u, v \in \mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$. Daí, pelo Teorema 1.29, segue que

$$\begin{split} \|u+v\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^{\alpha}u+D^{\alpha}v\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \\ &\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)}+\|D^{\alpha}v\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)}\right) \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)}+\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^{\alpha}v\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}+\|v\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}. \end{split}$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)$

Agora, mostremos a completude do espaço de Sobolev $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.31.
$$(\mathcal{W}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)})$$
, com $1 \leq p \leq \infty$, é completo.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u_n - u_m||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$. Note que, se $1 \le p < \infty$, tem-se

$$\|D^{\alpha}u_{n}-D^{\alpha}u_{m}\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}u_{n}-D^{\alpha}u_{m}\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} = \|u_{n}-u_{m}\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^{p} < \varepsilon^{p},$$

e se $p = \infty$,

$$\|D^{\alpha}u_{n}-D^{\alpha}u_{m}\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha}u_{n}-D^{\alpha}u_{m}\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = \|u_{n}-u_{m}\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$ e α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Ou seja, $(D^{\alpha}u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, para cada α multi-índice com $|\alpha| \leq k$. Lembrando que $\mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço completo (ver Teorema 1.7), podemos escrever

$$D^{\alpha}u_n \to u_{\alpha} \text{ em } \mathcal{L}^p(\Omega).$$
 (1.13)

Em particular, se $\alpha = (0, ..., 0)$, denotamos $D^{\alpha}u_n$ por u_n e u_{α} por u. Por fim, precisamos mostrar que

$$D^{\alpha}u=u_{\alpha}$$
.

Com efeito, pelo Teorema 1.14, utlizando a definição de derivada fraca e passando a uma subsequência (se necessário), obtemos

$$\begin{split} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx &= \int_{\Omega} (\lim u_n) D^{\alpha} \phi = \lim_{\Omega} u_n D^{\alpha} \phi \, dx = \lim_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u_n \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \lim_{\Omega} D^{\alpha} u_n \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_{\alpha} \phi \, dx, \end{split}$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ e mult-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Portanto, $D^\alpha u = u_\alpha$. Por fim, se $1 \leqslant p < \infty$,

$$||u_n-u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^{\alpha}u_n - D^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^{\alpha}u_n - u_{\alpha}||_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \to 0,$$

e se $p = \infty$,

$$||u_n - u||_{\mathcal{W}^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^{\alpha}u_n - D^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^{\alpha}u_n - u_{\alpha}||_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$ por (1.13). Consequentemente, $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ quando $n \to \infty$, com $1 \le p \le \infty$.

1.4 Aproximações

A definição de derivada fraca, em muitos casos, não é suficiente para mostrar propriedades mais profundas dos espaços de Sobolev. Uma forma de contornar esse problema é procurando formas de aproximar em $\mathcal{W}^{k,p}$ por uma sequência de funções suaves. Esse processo é conhecido como molificação ou regularização e é feito por meio de uma convolução da função a ser aproximada e uma função especial chamada função molificadora. Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados e exemplos da teoria de aproximação, que é de extrema importância no estudo de equações diferenciais parciais.

Um exemplo de função molificadora é

$$\eta(x) = \begin{cases}
c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{se } |x| < 1; \\
0, & \text{se } |x| \geqslant 1,
\end{cases}$$
(1.14)

conhecida como molificador de Friedrich, onde c > 0 é uma constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1.$$

De forma geral, uma função molificadora é uma função η de classe \mathcal{C}^{∞} com suporte compacto satifazendo:

- $\bullet \int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$
- $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon) = \delta(x)$, onde δ é a função delta de Dirac⁹.

Dada uma função molificadora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$
(1.15)

⁹i.e., $\delta(x) = 0$ se $x \neq 0$ e $\delta(0) = \infty$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Essa função η_{ε} é de classe \mathcal{C}^{∞} , supp $\eta_{\varepsilon} \subseteq B[0, \varepsilon]$ e, por mudança de variáveis

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\varepsilon} \, dx = 1. \tag{1.16}$$

Essa aplicação será utilizada para realizar as convoluções que aproximam as funções em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se u é uma função locamente integrável, definimos a molificação de u por $u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * u$, isto é,

$$u^{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x - y) u(y) = \int_{B[0,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(y) u(x - y) dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O primeiro teorema que vamos estudar demonstra algumas propriedades importantes sobre essas aproximações.

Teorema 1.32 (Aproximação local por funções suaves). Seja $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$, e defina

$$u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * u \text{ em } \Omega_{\varepsilon},$$

onde

$$\Omega_{\varepsilon} = \{ x \in \Omega : d(x, \partial \Omega) > \varepsilon \}.$$

Então,

- (a) $u^{\varepsilon} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$, para cada $\varepsilon > 0$;
- **(b)** $u^{\varepsilon} \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}_{loc}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração.

(a) Seja $g(x) = (x - y)/\varepsilon$. Logo, pela regra da cadeia, chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial x_{i}} \left[\eta_{\varepsilon}(x - y) \right] = \frac{1}{\varepsilon^{n}} \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left[\eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right]
= \frac{1}{\varepsilon^{n}} \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left[\eta \circ g(x) \right] = \frac{1}{\varepsilon^{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_{k}} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \frac{\partial g_{k}}{\partial x_{i}} (x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_{i}} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right),$$
(1.17)

para todo $i=1,\ldots,n$. Por outro lado, sejam $x\in\Omega_{\varepsilon},\ i=1,\ldots,n$ e h de forma que $x+he_i\in\Omega_{\varepsilon}$. Deste modo,

$$\frac{u^{\varepsilon}(x+he_{i})-u^{\varepsilon}(x)}{h}=\frac{1}{\varepsilon^{n}}\int_{\Omega}\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_{i}-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]u(y)\,dy. \tag{1.18}$$

Note que, novamente utilizando a regra da cadeia e (1.17), segue que

$$\frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] \to \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right), \tag{1.19}$$

quando $h \to 0$. Consequentemente, por (1.17), (1.18), (1.19) e pelo Teorema da converência dominada (ver Teorema 1.6), temos que

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial x_{i}} \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) u(y) \, dy = \int_{\Omega} \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_{i}} (x-y) u(y) \, dy = \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_{i}} * u(x).$$

Sendo assim, indutivamente, mostramos que $D^{\alpha}u^{\varepsilon}$ existe e

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon} = D^{\alpha}\eta_{\varepsilon} * u,$$

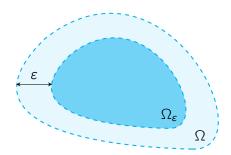


Figura 1.2: Representação visual dos conjuntos Ω_{ε} . Fonte: Autoral.

para todo multi-índice α O fato de u^{ε} ser de classe \mathcal{C}^{∞} segue do fato de η_{ε} ser de classe \mathcal{C}^{∞} (por definição) e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

(b) Afirmamos que a α -ésima derivada parcial de u^{ε} no sentido usual é igual a convulução de η_{ε} com a α -ésima derivada parcial fraca de u para todo α com $|\alpha| \leq k$, isto é,

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * D^{\alpha}u.$$

Com efeito, no item (a) vimos que $D^{\alpha}u^{\varepsilon}=D^{\alpha}\eta_{\varepsilon}*u$. Primeiramente, se g(x)=x-y, pela regra da cadeia, temos que

$$D_x^{e_i}\eta_{\varepsilon}(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_{\varepsilon} \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_k}(x-y) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_i}(x-y).$$

Por outro lado, se h(y) = x - y, obtemos, pela regra da cadeia novamente, que

$$D_{y}^{e_{i}}\eta_{\varepsilon}(x-y) = \frac{\partial}{\partial y_{i}}(\eta_{\varepsilon} \circ h)(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial y_{k}}(x-y)\frac{\partial h_{k}}{\partial y_{i}}(y) = -\frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial y_{i}}(x-y).$$

Dessa forma, ao menos de uma mudança de notação, chegamos a

$$D_x^{e_i}\eta_{\varepsilon}(x-y) = -D_y^{e_i}\eta_{\varepsilon}(x-y).$$

Repetindo esse cálculo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$D_x^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x-y).$$

Deste modo, podemos escrever

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} D_{x}^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x - y)u(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_{y}^{\alpha} \eta_{\varepsilon}(x - y)u(y) dy.$$

Fixando $x \in \Omega_{\varepsilon}$, a função $\phi_x(y) = \eta_{\varepsilon}(x-y)$ é suave e tem suporte compacto em Ω . Aplicando a definição de derivada fraca com função teste $\eta_{\varepsilon}(x-y)$, segue que

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon}(x) = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x-y)D^{\alpha}u(y) \, dy = \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x-y)D^{\alpha}u(y).$$

Portanto, deduzimos que

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * D^{\alpha}u = [D^{\alpha}u]^{\varepsilon}. \tag{1.20}$$

Além disso, afirmamos que dados abertos V,W tais que $V \subseteq W \subseteq \Omega$, uma função $v \in \mathcal{L}^p_{loc}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, inferimos

$$||v^{\varepsilon}||_{\mathcal{L}^{p}(V)} \leqslant ||v||_{\mathcal{L}^{p}(W)}. \tag{1.21}$$

Com efeito, se p = 1, note que

$$|v^{\varepsilon}(x)| = \left| \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y)v(y) \, dy \right| \leqslant \int_{B[x,\varepsilon]} |\eta_{\varepsilon}(x-y)| |v(y)| \, dy.$$

Integrando sobre V e utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.16), concluímos que

$$\int_{V} |v^{\varepsilon}(x)| dx \leqslant \int_{V} \int_{B[x,\varepsilon]} |v(y)| |\eta_{\varepsilon}(x-y)| dy dx \leqslant \int_{W} |v(y)| \int_{B[y,\varepsilon]} |\eta_{\varepsilon}(x-y)| dx dy.$$

Porém, $\int_{B[y,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y) dx = 1$ (ver 1.16), sendo assim, obtemos

$$||v^{\varepsilon}||_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant ||v||_{\mathcal{L}^1(W)}.$$

Se 1 , observe que

$$|v^{\varepsilon}(x)| = \left| \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y)v(y) \, dy \right| \leqslant \int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_{\varepsilon}^{1-\frac{1}{p}}(x-y)\eta_{\varepsilon}^{\frac{1}{p}}(x-y)v(y) \right| \, dy. \tag{1.22}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8) na última integral, segue que

$$\int_{B[x,\varepsilon]} \left| \eta_{\varepsilon}^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_{\varepsilon}^{\frac{1}{p}}(x-y) v(y) \right| dy \leqslant \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y) dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y) |v(y)|^{p} dy \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.23}$$

Lembrando que, $\int_{B[x,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y) \, dy = 1$ (ver 1.16), integrando as desigualdades (1.22) e (1.23) sobre V e utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.16), obtemos

$$\int_{V} |v^{\varepsilon}(x)|^{p} dx \leqslant \int_{V} \int_{B[x,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y) |v(y)|^{p} dy dx \leqslant \int_{W} |v(y)|^{p} \int_{B[y,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x-y) dx dy.$$

Isto é,

$$||v^{\varepsilon}||_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant ||v||_{\mathcal{L}^p(W)}.$$

Isto prova 1.21.

Por fim, seja $V \subseteq \Omega$ um aberto. Afirmamos que

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon} \to D^{\alpha}u \text{ em } \mathcal{L}^{p}(V),$$
 (1.24)

quando $\varepsilon \to 0$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. De fato, sejam W um aberto de forma que $V \in W \in \Omega$ e $\delta > 0$. Utilizando (1.21) com $v^{\varepsilon} = D^{\alpha}u^{\varepsilon}$ e $v = D^{\alpha}u$, e escolhendo $w \in \mathcal{C}(W)$ tal que

$$||D^{\alpha}u-w||_{\mathcal{L}^{p}(W)}<\delta,$$

(ver Teorema ??), temos

$$\begin{split} \|D^{\alpha}u^{\varepsilon} - D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} & \leq \|D^{\alpha}u^{\varepsilon} - w^{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} + \|w^{\varepsilon} - w\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} + \|w - D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} \\ & \leq \|D^{\alpha}u - w\|_{\mathcal{L}^{p}(W)} + \|w^{\varepsilon} - w\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} + \|w - D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(W)} \\ & \leq 2\delta + \|w^{\varepsilon} - w\|_{\mathcal{L}^{p}(V)}, \end{split}$$

para todo α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$. Como $w \in \mathcal{C}(W)$, então $w^{\varepsilon} \to w$ uniformemente¹⁰ em V quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, $D^{\alpha}u^{\varepsilon} \to D^{\alpha}u$ em $\mathcal{L}^{p}(V)$, quando $\varepsilon \to 0$, para todo α multi-índice com $|\alpha| \leqslant k$ (basta utilizar o Teorema da Convergência Dominada). Dessa forma,

$$||u^{\varepsilon} - u||_{\mathcal{W}^{k,p}(V)}^{p} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^{\alpha}u^{\varepsilon} - D^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{p}(V)}^{p} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, $u^{\varepsilon} \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(V)$, quando $\varepsilon \to 0$, para todo $V \in \Omega$, isto é,

$$u^{\varepsilon} \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}_{loc}(\Omega),$$

quando
$$\varepsilon \to 0$$
.

Agora apresentaremos dois exemplos em que podemos visualizar essas aproximações graficamente.

Exemplo 1.33. A função u(x) = |x| definida no intervalo aberto $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um exemplo clássico de função que não é diferenciável no sentido usual. É fácil verificar que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, dada uma função teste $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} u\phi' \, dx = \int_{-1}^{1} u\phi' \, dx = \int_{-1}^{0} u\phi' \, dx + \int_{0}^{1} u\phi' \, dx.$$

Utlizando integração por partes (ver Teorema 1.12), obtemos

$$\int_{\Omega} u\phi' \, dx = -\int_{-1}^{0} -\phi \, dx - \int_{0}^{1} \phi \, dx - x\phi \Big|_{-1}^{0} + x\phi \Big|_{0}^{1} = -\int_{-1}^{0} -\phi \, dx - \int_{0}^{1} \phi \, dx - \phi(-1) + \phi(1).$$

Porém, ϕ tem suporte compacto, logo; se anula em $\partial\Omega=\{-1,1\}$. Dito isso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} u \phi' \, dx = -\int_{-1}^{0} -\phi \, dx - \int_{0}^{1} \phi \, dx = -\int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x) \phi \, dx.$$

Portanto, é verdade que

$$u' = \operatorname{sqn}$$

no sentido fraco, onde

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Além disso, é verdade que

$$\int_{\Omega} |\operatorname{sgn}(x)|^p \, dx = \int_{-1}^1 1^p \, dx = \mu((-1,1)) = 2 < \infty,$$

onde μ é a medida de Lebesgue (ver [2] para mais detalhes). Assim, $u' \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e, portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Vamos utilizar a convolução para encontrar uma aproximação suave de u. Seja $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right), & \text{se } |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

$$|w_k(x) - w(x)| < \varepsilon$$
.

para todo $x \in k > K$.

¹⁰Uma sequência de funções (w_k) converge uniformemente para w, se, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ (que não pode depender de x) tal que

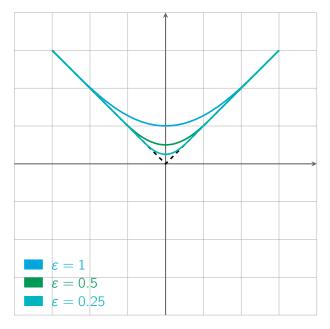


Figura 1.3: Aproximações suaves da função |x| (em preto) por meio da convolução com uma função molificadora η_{ε} com $\varepsilon = 1, 0.5, 0.25$.

Fonte: Autoral.

(ver Figura 1.4) onde c é determinado de forma que

$$\int_{[-1,1]} \eta \, dx = 1,$$

isto é,

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) \, dx\right)^{-1}.$$

Infelizmente, a função η não tem primitiva que pode ser expressa por meio de funções elementares, então é necessário utilizar um método numérico, ou expansão em Taylor para calcular a constante c. Também, definimos a função molificadora $\eta_{\varepsilon}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_{\varepsilon} \; dx = 1 \;\; \text{e} \;\; \text{supp} \, \eta = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Portanto, podemos utilizar essa função para aproximar u. Com efeito, basta realizar a convolução $\eta_{\varepsilon} * u$, isto é,

$$u^{\varepsilon}(x) = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \eta_{\varepsilon}(x) u(x-y) dy.$$

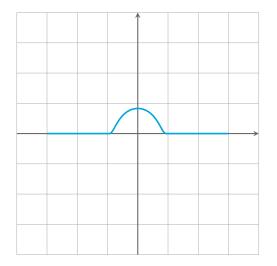
A Figura 1.3 foi feita utilizando um método numérico para resolver essa integral para diferentes valores de ε .

Exemplo 1.34. Seja $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. A função $u: \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}},$$

não possui derivada no sentido usual pelo fato de $|\cdot|$ não ser diferenciável. Por outro lado, u possui derivadas parciais fracas em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, quando 0 , dada por

$$D^{e_i}u(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}},$$



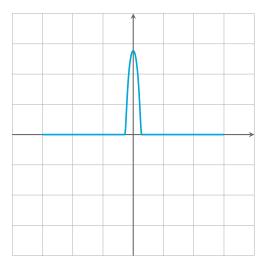


Figura 1.4: Funções η e η_{ε} com $\varepsilon=0.3$. Fonte: Autoral.

para todo i=1,2. Com efeito, vamos calcular a derivada parcial fraca em relação a i-ésima coordenada. Utilizando integração por partes (ver Teorema 1.12), obtemos

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi \, dx = \int_{\partial \Omega} u \phi \nu^i \, ds - \int_{\Omega} \phi D^{e_i} u \, dx, \tag{1.25}$$

onde $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário que aponta para fora em $\partial\Omega$. Para calcular $D^{e_i}u$ precisamos dividir o domínio Ω em Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 e Ω_4 , onde Ω_i é a restrição ao i-ésimo quadrante (ver Figura 1.5).

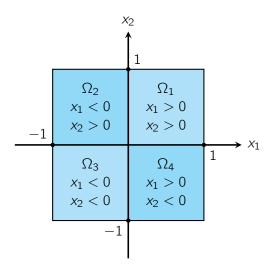


Figura 1.5: Domínio da função $u(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}}$. Fonte: Autoral

Note que, podemos escrever

$$u(x_{1}, x_{2}) = \begin{cases} x_{1}^{\frac{1}{2}} + x_{2}^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_{1}; \\ (-x_{1})^{\frac{1}{2}} + x_{2}^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_{2}; \\ (-x_{1})^{\frac{1}{2}} + (-x_{2})^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_{3}; \\ x_{1}^{\frac{1}{2}} + (-x_{2})^{\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_{4}. \end{cases}$$

$$(1.26)$$

Além disso, em cada Ω_i , a derivada parcial $D^{e_1}u$ existe no sentido usual, e é dada por

$$D^{e_1}u(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_1; \\ -\frac{1}{2}(-x_1)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_2; \\ -\frac{1}{2}(-x_1)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_3; \\ \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_4. \end{cases}$$
(1.27)

Dito isso, concluímos que

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_1} u \, dx = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_2} \frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_3} \frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx + \int_{\Omega_4} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx,$$

que podemos escrever como

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_1} u \, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \frac{1}{2} (-x_1)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{sgn}(x_1) |x_1|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx.$$

De forma análoga, inferimos que

$$D^{e_2}u(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_1; \\ \frac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_2; \\ -\frac{1}{2}(-x_2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_3; \\ -\frac{1}{2}(-x_2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{em } \Omega_4. \end{cases}$$
(1.28)

Sendo assim, deduzimos que

$$\int_{\Omega} \phi D^{e_2} u \, dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \frac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx - \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \frac{1}{2} (-x_2)^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{sgn}(x_2) |x_2|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx.$$

Por fim, como ϕ tem suporte compacto em Ω e Ω é aberto, ϕ se anula em $\partial\Omega$. Dessa forma

$$\int_{\partial\Omega} u\phi \nu^i\,ds=0.$$

Portanto, por (1.25), chegamos a

$$\int_{\Omega} u D^{e_i} \phi \, dx = -\int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \phi \, dx,$$

para todo i = 1, 2. Isto é,

$$D^{e_i}u(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x_i)|x_i|^{-\frac{1}{2}},$$

para todo i = 1, 2, como queriamos mostrar. Além disso, podemos escrever

$$\int_{\Omega} |D^{e_i} u(x_1, x_2)|^p dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_i) |x_i|^{-\frac{1}{2}} \right|^p dx_i dx_j = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i dx_j.$$

Utilizando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.16), encontramos

$$\int_{\Omega} |D^{e_i} u(x_1, x_2)|^p dx = \frac{1}{2^p} \int_{-1}^1 dx_j \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i = \frac{1}{2^{p-1}} \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x_i)|^p |x_i|^{-\frac{p}{2}} dx_i.$$

Dito isso, precisamos ver para quais valores de p essa integral é finita. Sendo assim

$$\int_{\Omega} |D^{e_i} u(x_1, x_2)|^p dx = \frac{1}{2^{p-2}} \int_0^1 x_i^{-\frac{p}{2}} dx = \frac{1}{2^{p-2}} \left[-\frac{1^{-\frac{p}{2}+1} - 0^{-\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2} - 1} \right].$$

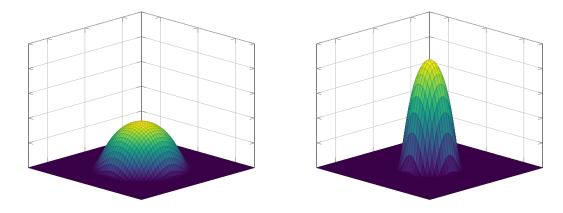


Figura 1.6: η e η_{ε} com ε = 0.5. Fonte: Autoral.

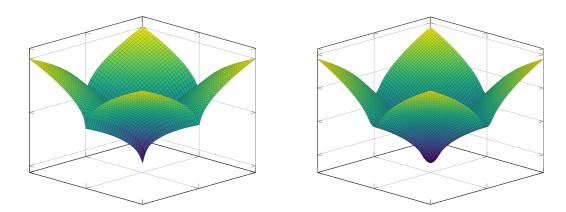


Figura 1.7: À esquerda, a função $u(x_1,x_2)=|x_1|^{\frac{1}{2}}+|x_2|^{\frac{1}{2}}$ e à direita sua aproximação suave u^{ε} com $\varepsilon=0.25$.

Fonte: Autoral.

Note que, $0^{-\frac{p}{2}+1} < \infty$ quando p < 2. Portanto, $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ desde que $0 . Agora defina <math>\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\eta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} c \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \text{se } \|x\| < 1; \\ 0, & \text{se } \|x\| \geqslant 1, \end{array} \right.$$

(ver Figura 1.6) e η_{ε} da mesma forma que foi feita no exemplo anterior. Novamente utilizaremos a convolução para encontrar uma aproximação suave para u, dada por

$$u^{\varepsilon}(x_1,x_2) = \int_{\Omega} \eta(x_1,x_2) u(x_1-y_1,x_2-y_2) dy.$$

Utilizando um método numérico para integrais duplas, podemos encontrar uma solução aproximada para u^{ε} . A Figura 1.7 mostra o gráfico de u, onde é possível ver os pontos onde a função não é diferenciável, e a sua aproximação suave u^{ε} .

Agora, mostraremos que $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ é um conjunto denso em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Teorema 1.35 (Meyers-Serrin). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega),$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \tag{1.29}$$

onde $\Omega_i = \{x \in \Omega \, ; \, d(x,\partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. De fato, se $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, então $x \in \Omega_{i_0}$ para algum $i_0 \in \mathbb{N}$, em particular, $x \in \Omega$ pois $\Omega_i \subseteq \Omega$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $x \in \Omega$, então $d(x,\partial\Omega) > 0$, então existe algum $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x,\partial\Omega) > \frac{1}{i_0}$; logo, $x \in \Omega_{i_0}$. Dessa forma, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Portanto, vale (1.29).

Defina $\Omega_i' = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i+1}}$. Além disso, escolha qualquer aberto $\Omega_0' \in \Omega$ de forma que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i'$$

e seja $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma partição da unidade suave subordinada à cobertura aberta¹¹ $\{\Omega_i'\}_{i=0}^{\infty}$, isto é,

$$0\leqslant \phi_i\leqslant 1$$
 com $\phi_i\in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_i')$ e $\sum_{i=0}^\infty \phi_i=1$ em $\Omega.$

Como, por hipótese, $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, temos, pelo Teorema 1.29, que

$$\phi_i u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$$
.

Além disso, supp $(\phi_i u) \subseteq \Omega_i'$. Fixando $\delta > 0$, escolha um $\varepsilon_i > 0$ de forma que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * \phi_i u \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ satisfaça

$$\|u^i - \phi_i u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \frac{\delta}{2^{i+1}} \text{ e supp } u^i \subseteq \Omega_i'',$$

 $com \ \Omega_i'' = \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega_i} \supseteq \Omega_i'.$

Seja $v=\sum_{i=1}^\infty u^i\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Como

$$u = u \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \phi_i u,$$

então, para cada $V \subseteq \Omega$, inferimos que

$$\|v-u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)}\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\|u^i-\phi_iu\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^{i+1}}=\frac{\delta}{2}.$$

Passando ao supremo sobre os conjuntos $V \in \Omega$, obtemos

$$||v-u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Isto mostra que u pertence ao fecho de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Logo é equivalente a existir uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$.

A definição abaixo é necessária para o próximo resultado de densidade.

¹¹i.e.,

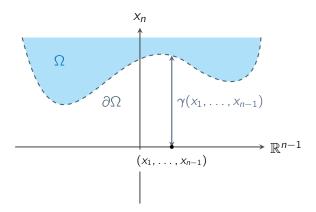


Figura 1.8: Função γ da Definição 1.36 Fonte: Autoral. Baseada em [6] p.p. 626.

Definição 1.36. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que sua fronteira $\partial \Omega$ é de classe \mathcal{C}^k se para cada ponto $\tilde{x} \in \partial \Omega$ existe um raio r > 0 e uma função de classe \mathcal{C}^k $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que, fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, obtemos

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{x \in B[\tilde{x}, r]; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

De forma análoga, $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^{∞} se é de classe \mathcal{C}^{k} para todo $k\in\mathbb{N}$.

Com essa definição, conseguimos mostrar que $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$

Teorema 1.37. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } \mathcal{W}^{k,p}(\Omega).$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial \Omega$, como Ω tem fronteira de classe C^1 , existe um raio r > 0 e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\Omega \cap B[\tilde{x}, r] = \{ x \in B[\tilde{x}, r] ; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \}.$$
 (1.30)

Definimos $V=\Omega\cap B[\tilde{x}, \sqrt[n]{2}]$ (ver Figura 1.9). Além disso, definimos para cada $\varepsilon>0$, $\lambda>0$ e $x\in V$

$$x^{\varepsilon} = x + \lambda \varepsilon e_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda \varepsilon), \tag{1.31}$$

onde $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Observe que, para um $\lambda>0$ suficientemente grande e $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, a bola $B[x^{\varepsilon},\varepsilon]$ está contída em $\Omega\cap B[\tilde{x},r]$ para todo $x\in V$. De fato, por definição, dado $x\in V$ temos que $x\in \Omega$ e $\|x-\tilde{x}\|\leqslant \frac{r}{2}$. Note que $x^{\varepsilon}\in \Omega\cap B(\tilde{x},r)$ para todo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno e $\lambda>0$ suficientemente grande. Com efeito, como $x\in V$, então, $x\in \Omega\cap B[\tilde{x},r]$, por 1.30. Assim,

$$x_n^{\varepsilon} = x_n + \lambda \varepsilon > x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

e, por (1.31), deduzimos que

$$\|x^{\varepsilon} - \tilde{x}\| = \|x + \lambda \varepsilon e_n - \tilde{x}\| \le \|x - \tilde{x}\| + \|\lambda \varepsilon e_n\| \le \frac{r}{2} + \lambda \varepsilon < r,$$

fornecido que $0 < \varepsilon < f_{2\lambda}$. Logo, $x^{\varepsilon} \in \Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (pois Ω é aberto e $x \in \Omega$). Por isso, $B[x^{\varepsilon}, \varepsilon] \subseteq \Omega \cap B[\tilde{x}, r]$, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário (já que $\Omega \cap B(\tilde{x}, r)$ é aberto).

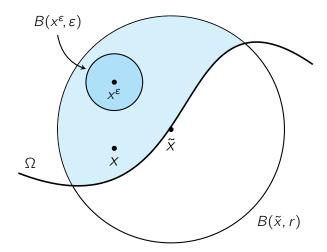


Figura 1.9: Fonte: Autoral. Baseada em [6] p.p. 253

Agora, definimos $u_{\varepsilon}(x) = u(x^{\varepsilon})$, para todo $x \in V$, e $v^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * u_{\varepsilon}$. Assim, pelo Teorema 1.32, $v^{\varepsilon} \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{V})$ (lembre que $\lambda > 0$ e grande e $\varepsilon > 0$ é pequeno). Dito isso, afirmamos que

$$||v^{\varepsilon}-u||_{\mathcal{W}^{k,p}(V)}\to 0,$$

quando arepsilon o 0. De fato, seja lpha um multi-índice com $|lpha| \leqslant k$, então

$$\|D^{\alpha}v^{\varepsilon} - D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} \leqslant \|D^{\alpha}v^{\varepsilon} - D^{\alpha}u_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} + \|D^{\alpha}u_{\varepsilon} - D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(V)}.$$

A segunda norma do lado direito da desigualdade acima vaí a 0, quando $\varepsilon \to 0$, pois a translação é contínua na norma do espaço \mathcal{L}^p e

$$||D^{\alpha}v^{\varepsilon} - D^{\alpha}u_{\varepsilon}||_{\mathcal{L}^{p}(V)} = ||D^{\alpha}(\eta_{\varepsilon} * u_{\varepsilon}) - D^{\alpha}u_{\varepsilon}||_{\mathcal{L}^{p}(V)} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$ (ver Teorema 1.32). Ou seja, é verdade que

$$\begin{split} \|v^{\varepsilon} - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V)} &= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha} v^{\varepsilon} - D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} \\ &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha} v^{\varepsilon} - D^{\alpha} u_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} + \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^{\alpha} u_{\varepsilon} - D^{\alpha} u\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} \to 0, \end{split}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Note que todos os cálculos foram feitos em uma vizinhança de um ponto $\tilde{x} \in \partial \Omega$. Dito isso, como $\partial \Omega$ é compacto (pois, Ω é limitado), pelo Teorema de Heine-Borel¹², podemos encontrar uma quantidade finita de pontos $\tilde{x}_i \in \partial \Omega$, raios $r_i > 0$, conjuntos $V_i = \Omega \cap B[\tilde{x}_i, r_i/2]$ e funções v_i^{ε} , com $i = 1, \ldots, N \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_i^{\varepsilon} - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_i)} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, e

$$\partial\Omega\subseteq\bigcup_{i=1}^N B(\tilde{x}_i, r/2).$$

Além disso, considere um aberto $V_0 \subseteq \Omega$ tal que $\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^N V_i$, e pelo Teorema 1.35, encontramos $v_0^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(V_0) \cap \mathcal{W}^{k,p}(V_0)$ com $\|v_0^\varepsilon - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_0)} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade subordinada aos conjuntos $\{V_i\}_{i=0}^N$ em Ω . Defina

$$v^{\varepsilon} = \sum_{i=0}^{N} \phi_i v_i^{\varepsilon} \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega}),$$

¹²Toda cobertura aberta de um conjunto compacto admite uma subcobertura finita.

e observando que $u=\sum_{i=0}^N \phi_i u$ (pois $\sum_{i=0}^N \phi_i =1$), obtemos

$$\|D^{\alpha}v^{\varepsilon}-D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}\leqslant \sum_{i=0}^{N}\|D^{\alpha}(\phi_{i}v_{i}^{\varepsilon})-D^{\alpha}(\phi_{i}u)\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}.$$

Utilizando a regra de Leibniz (ver Teorema 1.29), segue que

$$\|D^{\alpha}v^{\varepsilon} - D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma \leq \alpha} {\alpha \choose \sigma} \|D^{\sigma}\phi_{i} [D^{\alpha-\sigma}(v_{i}^{\varepsilon} - u)]\|_{\mathcal{L}^{p}(V_{i})}$$
$$\leq c \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma \leq \alpha} {\alpha \choose \sigma} \|D^{\alpha-\sigma}(v_{i}^{\varepsilon} - u)\|_{\mathcal{L}^{p}(V_{i})},$$

onde utilizamos o fato de ϕ_i (e consequentemente $D^{\sigma}\phi_i$) ter suporte compacto e ser suave na última desigualdade acima. Ademais, como $|\alpha - \sigma| \leq k$, temos que

$$\|D^{\alpha}v^{\varepsilon} - D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)} \leqslant c \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma \leqslant \alpha} {\alpha \choose \sigma} \|v_{i}^{\varepsilon} - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_{i})} \leqslant c \sum_{i=0}^{N} \|v_{i}^{\varepsilon} - u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(V_{i})} \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Por fim, definindo $u_n := v^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, chegamos a

$$||u_n-u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}\to 0,$$

quando $n \to \infty$, como era desejado.

1.5 Extensões

Em alguns casos é mais viável trabalhar com funções definidas no espaço Euclidiano inteiro ao invés de funções definida em um aberto específico. Nessa seção, veremos uma forma de estender funções em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ para aplicações em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por meio de um operador linear.

Teorema 1.38. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e Ω' um aberto tal que $\Omega \subseteq \Omega'$. Então, existe um operador linear limitado $E: \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que para cada $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, tem-se que

- (a) Eu = u qtp em Ω ;
- **(b)** supp $Eu \subseteq \Omega'$;
- (c) $||Eu||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante c depende apenas de p, Ω e Ω' .

Demonstração. Seja $\tilde{x} \in \partial \Omega$ e considere inicialmente que $\partial \Omega$ esteja contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Dessa forma, podemos supor que existe uma bola $B = B(\tilde{x}, r)$ tal que

$$B^{+} = B \cap \{x_{n} > 0\} \subseteq \overline{\Omega};$$

$$B^{-} = B \cap \{x_{n} \le 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n} \setminus \Omega.$$
(1.32)

Além disso, assuma que $u \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in B^+; \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}), & \text{se } x \in B^-, \end{cases}$$
(1.33)

1.5. EXTENSÕES 31

a qual chamamos de reflexão de ordem superior da função u de B^+ a B^- . Afirmamos que $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(B)$. Com efeito, denotando $u^- = \bar{u}\big|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}\big|_{B^+}$, podemos ver que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = \frac{\partial u^+}{\partial x_n}$$
 em $\{x_n = 0\}$.

De fato, pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n})=3\frac{\partial u}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n-1},-x_{n})-2\frac{\partial u}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n-1},\frac{x_{n}}{2}),$$

quando $x_n = 0$, obtemos

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n-1},0)=3\frac{\partial u}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n-1},0)-2\frac{\partial u}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n-1},0)=\frac{\partial u}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n-1},0)=\frac{\partial u^{+}}{\partial x_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n-1},0)$$

Também é verdade que

$$u^+ = u^- \text{ e } \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \text{ em } \{x_n = 0\},$$

para todo $i=1,2,\ldots,n-1$ (ver 1.32). Portanto, $D^{\alpha}u^{-}=D^{\alpha}u^{+}$ em $\{x_{n}=0\}$ com $|\alpha|\leqslant 1$. Sendo assim, $\bar{u}\in\mathcal{C}^{1}(B)$, pois fora de $\{x_{n}=0\}$, as componentes de \bar{u} já eram de classe \mathcal{C}^{∞} , então apenas restava verificar que em $B^{+}\cap B^{-}=B\cap\{x_{n}=0\}$ as componentes em B^{+} e B^{-} se igualavam, implicando a continuidade \bar{u} e suas derivadas.

Agora, desejamos mostrar que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)},$$
 (1.34)

onde c é uma constante¹³ positiva que não depende de u. De fato, sabemos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \|D^{\alpha}\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(B)}^p = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \left[\int_B |D^{\alpha}\bar{u}|^p \, dx \right].$$

Como $B = B^+ \cup B^-$, e denotando (x_1, \dots, x_{n-1}) por x' podemos reescrever o último somatório acima da seguinte forma:

$$\sum_{|\alpha| \le 1} \left[\int_{B} |D^{\alpha} \bar{u}|^{p} dx \right] = \sum_{|\alpha| \le 1} \left[\int_{B^{+}} |D^{\alpha} u(x)|^{p} dx + \int_{B^{-}} |4D^{\alpha} [u(x', -\frac{x_{n}}{2})] - 3D^{\alpha} [u(x', -x_{n})]|^{p} dx \right]$$

$$\leq \sum_{|\alpha|\leq 1} \left[\int_{B^+} |D^{\alpha} u(x)|^p dx + 3 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^{\alpha} u(x', -x_n)|^p dx + 4 \cdot 2^p \int_{B^-} |D^{\alpha} u(x', -x_n)|^p dx \right],$$

onde usamos o fato de que

$$(a+b)^p \le (2\max\{a,b\})^p = 2^p \max\{a,b\}^p \le 2^p (a^p + b^p),$$

para todo $a,b\geqslant 0$. Porém, $-x_n,-\frac{x_n}{2}\geqslant 0$, então podemos considerar, através de uma mudança de variáveis $(y_i=x_i$ para todo $i=1,\ldots,n-1$ e $y_n=-x_n)$, que as integrais sobre B^- são integrais sobre B^+ , para encontrar

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}^{p} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B} |D^{\alpha}\bar{u}|^{p} dx \right] \leqslant c \sum_{|\alpha| \leq 1} \left[\int_{B^{+}} |D^{\alpha}u|^{p} dx \right] = c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^{+})}^{p}.$$

¹³Durante essa e outras demonstrações, mesmo se o valor da constante c mudar, ainda continuaremos denotando por c, então por exemplo $c + 2^p$, c(1 + n), etc, ainda serão denotados por c.

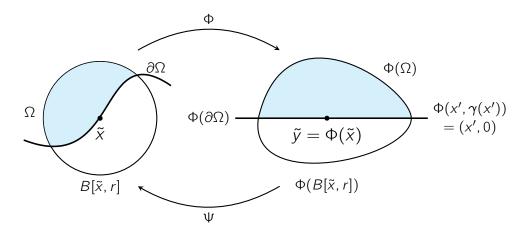


Figura 1.10: Representação gráfica do homemorfismo Φ. Fonte: Autoral. Baseada em [6] p.p. 256.

Portanto,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)}\leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$

Por outro lado, se $\partial\Omega$ não está necessáriamente contido no plano $\{x_n=0\}$ perto de \tilde{x} , temos que existe um homeomorfismo Φ , com inversa Ψ , que planifica $\partial\Omega$ perto de \tilde{x} (ver Figura 1.10), basta usar a função γ de classe \mathcal{C}^1 da Definição 1.36 e definir Φ por

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, ..., x_{n-1})). \tag{1.35}$$

De forma análoga, definimos Ψ por

$$\Psi(y) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})). \tag{1.36}$$

Dete modo, é fácil ver que $\Psi^{-1} = \Phi$ e que Φ e Ψ são de classe \mathcal{C}^1 (por definição). Sendo assim, seja $y = \Phi(x)$ (ou seja, $x = \Psi(y)$) e definimos $u' \equiv u \circ \Psi$. Logo, como foi feito anteriormente (u' é de classe \mathcal{C}^1), podemos escolher uma bola $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\tilde{y}, r)$ e definimos \bar{u}' de forma que $\bar{u}' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{B})$ e

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \le c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)}.$$
 (1.37)

Seja $B' = \Psi(B)$, assim conseguimos obter uma extensão \bar{u} de u para B' com

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')}\leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato, para $\bar{u}\equiv \bar{u}'\circ\Phi$ (i.e., $\bar{u}'=\bar{\circ}\psi$), obtemos, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.18), que

$$\|D^{\alpha}\bar{u}'\|_{\mathcal{L}^{p}(B)}^{p} = \int_{B} |D^{\alpha}\bar{u}'(y)|^{p} dy = \int_{B} |D^{\alpha}\bar{u}(\Psi(y))|^{p} dy = \int_{B'} |D^{\alpha}\bar{u}(x)|^{p} dx = \|D^{\alpha}\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p}(B')}^{p}.$$

Dessa forma, passando ao somatório, quando $|\alpha| \leq 1$, chegamos a

$$\|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')}.\tag{1.38}$$

Além disso, é verdade que

$$\begin{split} \|D^{\alpha}u'\|_{\mathcal{L}^{p}(B^{+})}^{p} &= \int_{B^{+}} |D^{\alpha}u'(y)|^{p} dy = \int_{B^{+}} |D^{\alpha}u(\Psi(y))|^{p} dy \\ &= \int_{\Psi(B^{+})} |D^{\alpha}u(x)|^{p} dx \leqslant \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^{p} dx = \|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p}, \end{split}$$

1.5. EXTENSÕES 33

para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq 1$. Consequentemente, podemos escrever

$$||u'||_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \le ||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$
 (1.39)

Portanto, por (1.37), (1.38) e (1.39), obtemos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B')} = \|\bar{u}'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B)} \leqslant c\|u'\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B^+)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},\tag{1.40}$$

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega\subseteq\bigcup_{x\in\partial\Omega}B'_x$, onde B'_x é aberto para cada $x\in\partial\Omega$, pois $B'_x=\Psi(B(\tilde{y},r))$, e a imagem de um conjunto aberto por um homeomorfismo também é aberto. Pelo Teorema de Heine-Borel, existem pontos $x_i\in\partial\Omega$, abertos B'_i e extensões \bar{u}_i de u em B'_i , com $i=1,\ldots,N$, de forma que $\partial\Omega\subseteq\bigcup_{i=1}^N B'_i$. Por outro lado, considere um aberto $B'_0\in\Omega$ tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} B_i'$$
.

Seja $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ uma partição da unidade suave subordinada aos abertos $\{B_i'\}_{i=0}^N$ e defina

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^{N} \phi_i \bar{u}_i, \tag{1.41}$$

onde \bar{u}_i está associada a B_i' e $\bar{u}_0 = u$ (pois $\sum_{i=0}^N \phi_i = 1$). Deste modo, obtemos a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.\tag{1.42}$$

Com efeito,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \|D^{\alpha}\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \sum_{i=0}^N \|D^{\alpha}(\phi_i\bar{u}_i)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})}^p,$$

Logo, utilizando a regra de Leibniz (ver Teorema 1.29), inferimos

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^{p} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma \leqslant \alpha} {\alpha \choose \sigma} \|D^{\sigma} \phi_{i} D^{\alpha-\sigma} \bar{u}_{i}\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^n)}^{p}.$$

Como supp $D^{\sigma}\phi_i \subseteq \text{supp }\phi_i \subseteq B'_i$, então o suporte de $D^{\sigma}\phi_i$ também é compacto (pois B'_i é limitado), sendo assim max $|D^{\sigma}\phi_i|$ existe em B'_i . Portanto, vale a desigualdade

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p} \leqslant c \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma \leqslant \alpha} {\alpha \choose \sigma} \|D^{\alpha-\sigma}\bar{u}_{i}\|_{\mathcal{L}^{p}(B_{i}')}^{p} \leqslant c \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma \leqslant \alpha} {\alpha \choose \sigma} \|\bar{u}_{i}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B_{i}')}^{p},$$

onde c é uma constante que depende de B_i' . Por fim, utilizando (1.40) e Teorema de Mudança de Variaveis (ver 1.18), chegamos a

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^{p} \leqslant c \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\sigma \leq \alpha} {\alpha \choose \sigma} \|\bar{u}_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(B_i')}^{p} \leqslant c \|u_i\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^{p} \leqslant c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^{p},$$

onde c depende de B'_i , p e N. Portanto, deduzimos que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$
 (1.43)

Isto prova (1.42)

Como, por hipótese, $\Omega \subseteq \Omega'$, então supp $\bar{u} \subseteq \Omega'$, (pois supp $\phi_i \subseteq B_i'$). Diminuindo B_i' se necessário. Defina também $\bar{E} : \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ dada por $\bar{E}u = \bar{u}$. Temos que \bar{E} é linear,

$$\|\bar{E}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

e supp $\bar{E}u = \text{supp } \bar{u} \subseteq \Omega'$. Sendo assim, definimos $E: \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ por

$$Eu = \lim \bar{u}_k$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ que converge para u em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ (sabemos que essa sequência existe pois mostramos no Teorema 1.37 que $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$). Podemos afirmar que o limite existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, já que, por (1.43), vale

$$\|\bar{u}_k - \bar{u}_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k - u_\ell\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $k, \ell \to \infty$. Logo (\bar{u}_k) é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.31), deduzimos que lim \bar{u}_k existe em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é verdade que

$$||Eu - u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leq ||Eu - \bar{u}_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + ||\bar{u}_k - u_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} + ||u_k - u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$$

$$\leq ||Eu - \bar{u}_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + ||u_k - u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$, pois $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, quando $k \to \infty$ e $\bar{u}_k = u_k$ em Ω . Portanto, Eu = u qtp em Ω , provando o item (a).

Para verificar o ítem **(b)**, lembre que, por (1.43), supp $\bar{u}_k \subseteq \Omega'$. Dessa forma, supp $Eu \subseteq \Omega'$, já que

$$\{\lim u_k = Eu \neq 0\} \subseteq \{\bar{u}_k \neq 0\} \implies \sup Eu \subseteq \sup \bar{u}_k \subseteq \Omega'$$

Por fim, para mostrar o item (c), note que E é um operador limitado, pois

$$||Eu||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = ||\lim \bar{u}_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \lim ||\bar{u}_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \lim ||u_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c ||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$||Eu||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

1.6 Traços

Em alguns casos, no estudo de equações diferenciais parciais, é necessário impor condições de contorno na fronteira de um domínio. Para isso, precisamos entender o que significa restringir uma função em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ à fronteira de Ω . Nesta seção, veremos como isso pode ser feito por meio do operador traço.

Teorema 1.39. Seja Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então, existe um operador linear limitado $\mathcal{T}: \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que

- (a) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$;
- **(b)** $||Tu||_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \le c||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde *c* depende apenas de *p* e Ω .

1.6. TRAÇOS 35

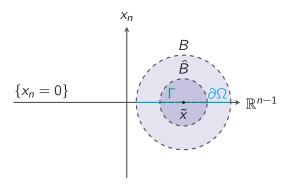


Figura 1.11

Demonstração. Incialmente suponha que $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Da mesma forma que foi feito no Teorema 1.38, considere $\tilde{x} \in \partial \Omega$ e suponhamos que $\partial \Omega$ está contido no plano $\{x_n = 0\}$ perto de \tilde{x} . Sejam $B = B(\tilde{x}, r)$ (e defina B^+ e B^- como em (1.32)) e $\hat{B} = B(\tilde{x}, r'/2)$, e considere $\xi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(B)$ de forma que $\xi \geqslant 0$ em B e $\xi \equiv 1$ em \hat{B} , e denote $\Gamma_{\tilde{x}} = \partial \Omega \cap \hat{B}$ (ver Figura 1.11) e $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que, utilizando integração por partes (ver Teorema 1.12), obtemos

$$\int_{B^+} \frac{\partial (\xi |u|^p)}{\partial x_n} dx = \int_{\partial B^+} \xi |u|^p \nu_n dx'$$

onde ν é o vetor normal unitário que aponta para baixo em ∂B^+ (pois, o pontos de ∂B^+ que não estão em $\partial \Omega$ estão em ∂B e, consequentemente, ξ os anula.), isto é $\nu=(0,\ldots,0,-1)$. Sendo assim, $\nu_n=-1$ e

$$\int_{B^+} \frac{\partial (\xi |u|^p)}{\partial x_n} dx = -\int_{\partial B^+} \xi |u|^p dx'.$$

Dessa forma, como $\Gamma_{\tilde{x}} \subseteq \hat{B}$ e $\xi(x) = 1$ para todo $x \in \hat{B}$, concluímos que

$$\int_{\Gamma_n} |u|^p dx' = \int_{\Gamma_n} \xi |u|^p dx' \leqslant \int_{\partial B^+} \xi |u|^p dx' = -\int_{B^+} \frac{\partial (\xi |u|^p)}{\partial x_n} dx.$$

Calculando a derivada acima, obtemos

$$\int_{\Gamma_{\tilde{x}}} |u|^p \ dx' \leqslant -\int_{B^+} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_n} |u|^p + p|u|^{p-1} \mathrm{sgn} \ u \ \frac{\partial u}{\partial x_n} \xi \right] \ dx \leqslant c \int_{B^+} \left[|u|^p + |u|^{p-1} \|Du\| \right] \ dx,$$

onde utilizamos o fato de ξ e suas derivadas parciais terem suporte compacto para a última desigualdade. Por fim utilizando a Desigualdade de Young, resulta em

$$\int_{\Gamma_{\bar{x}}} |u|^p \, dx' \leqslant c \int_{B^+} \left[|u|^p + \frac{|u|^{(p-1)p'}}{p'} + \frac{\|Du\|^p}{p} \right] dx \leqslant c \int_{B^+} |u|^p + \|Du\|^p \, dx, \tag{1.44}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Caso $\partial\Omega$ não esteja necessariamente contido em $\{x_n=0\}$ perto de \tilde{x} , considere o homeomorfismo Φ com inversa Ψ da demonstração do Teorema 1.38 (ver (1.35) e (1.36)) e defina $u'\equiv u\circ\Psi$ (i.e., $u=u'\circ\Phi$). Logo, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teorema 1.18), inferimos

$$\int_{\Gamma_{\bar{y}}} |u'|^p \, dy' = \int_{\Gamma_{\bar{y}}} |u \circ \Psi| \, dy' = \int_{\Psi(\Gamma_{\bar{y}})} |u|^p \, dx'$$

e $\int_{B^+} \left[|u'(y)|^p + \|Du'(y)\|^p \right] dy \leqslant c \int_{W(B^+)} \left[|u(x)|^p + \|Du(x)\|^p \right] dx,$

onde c é uma constante que depende de γ que surge devido a regra da cadeia. Dessa forma, por (1.44) e pelo Teorema de Mudança de Variáveis (ver 1.18), podemos escrever

$$||u||_{\mathcal{L}^{p}(\Psi(\Gamma_{\bar{x}}))}^{p} = \int_{\Psi(\Gamma_{\bar{x}})} |u|^{p} dx' = \int_{\Gamma_{\bar{x}}} |u'|^{p} dy' \leqslant c \int_{B^{+}} \left[|u'|^{p} + ||Du'||^{p} \right] dy$$

$$\leqslant c \int_{\Psi(B^{+})} \left[|u|^{p} + ||Du||^{p} \right] dx = ||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Psi(B^{+}))}^{p}.$$

Como $\Psi(B^+) \subseteq \Omega$, obtemos

$$||u||_{\mathcal{L}^p(\Psi(\Gamma_{\tilde{x}}))} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto (pois Ω é limitado) e $\partial\Omega\subseteq\bigcup_{\tilde{x}\in\partial\Omega}\Psi(\Gamma_{\tilde{x}})$ (lembre que $\Gamma_{\tilde{x}}$ é um aberto em $\partial\Omega$ e que Ψ é um homeomorfismo) , pelo Teorema de Heine-Borel, existe uma quantidade finita de abertos (em $\partial\Omega$) $\Psi(\Gamma_i)$ tal que,

$$\partial\Omega\subseteq\bigcup_{i=1}^N\Psi(\Gamma_i)$$

е

$$||u||_{\mathcal{L}^{p}(\Psi(\Gamma_{i}))} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.45}$$

Considere uma partição da unidade $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ subordinada a cobertura $\{\Psi(\Gamma_i)\}_{i=1}^N$, e denote $u = \sum_{i=1}^N \phi_i u$ (pois $\sum_{i=1}^N \phi_i$).

Defina $\widetilde{T}: \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por $\widetilde{T}u = u|_{\partial\Omega}$. Observe, que por definição, T é linear. Dessa forma, podemos escrever, por (1.45), que

$$\|\widetilde{T}u\|_{\mathcal{L}^{p}(\partial\Omega)}^{p} = \int_{\partial\Omega} |\widetilde{T}u|^{p} dx = \int_{\partial\Omega} |u|^{p} dx \leqslant c \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \phi_{i}^{p} |u|^{p} dx$$

$$= c \sum_{i=1}^{N} \int_{\Psi(\Gamma_{i})} |u|^{p} dx = c \sum_{i=1}^{N} \|u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Psi(\Gamma_{i}))}^{p} \leqslant c \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}^{p},$$

$$(1.46)$$

onde c é uma constante que depende de p e Ω . Isto mostra que \widetilde{T} é um operador limitado. Por fim, defina $T: \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ por (1.46)

$$Tu = \lim \widetilde{T}u_k \text{ em } \mathcal{L}^p(\partial\Omega),$$

onde (u_k) é uma sequência de funções em $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ que converge para u em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ (essa sequência existe pelo Teorema 1.37). Primeiramente, veja que T é linear por definição. Observe também que, por $(\ref{eq:convergence})$

$$||Tu||_{\mathcal{L}^{p}(\partial\Omega)} = ||\operatorname{lim}\widetilde{T}u_{k}||_{\mathcal{L}^{p}(\partial\Omega)} = |\operatorname{lim}||\widetilde{T}u_{k}||_{\mathcal{L}^{p}(\partial\Omega)} \leqslant c \operatorname{lim}||u_{k}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Isto prova **(b)**.

Por fim, se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, então, pelo Teorema 1.37, temos que $u_k \to u$ uniformemente sobre $\overline{\Omega}$, quando $k \to \infty$. Por outro lado, como

$$||u_k|_{\partial\Omega} - Tu||_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = ||\widetilde{T}u_k - Tu||_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$, então passando a uma subsequência (se necessário), temos, pelo Teorema 1.14 que $u_k \to Tu$ qtp em $\partial\Omega$. Mas como $\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega}$, segue que Tu = u qtp em $\partial\Omega$ (por unicidade do limite), isto é, $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, provando o item **(a)**.

O teorema a seguir é uma caracterização do espaço de Sobolev $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, por meio do operador traço.

1.6. TRAÇOS 37

Teorema 1.40 (Funções traço zero em $\mathcal{W}^{1,p}$). Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então,

$$u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por definição, existe uma sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$||u_k-u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}\to 0,$$

quando $k \to \infty$. Como u_k tem suporte compacto e é suave em Ω , então u_k se anula em $\partial\Omega$ (pois T é linear) para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $Tu_k = 0$ sobre $\partial\Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e como $T: \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado, então

$$0 = \lim ||Tu_k - Tu||_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)} = ||Tu||_{\mathcal{L}^p(\partial\Omega)}.$$

Portanto Tu = 0 qtp sobre $\partial \Omega$.

Reciprocamente, suponha que Tu=0 em $\partial\Omega$. Utilizando partições da unidade e o homeomorfismo Φ que planifica $\partial\Omega$, como foi feito anteriormente (ver 1.35), podemos supor que

$$u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+);$$

 u tem suporte compacto em $\overline{\mathbb{R}^n_+};$ (1.47)
 $Tu = 0$ em $\partial \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1},$

onde \mathbb{R}^n_+ denota o semiplano superior de \mathbb{R}^n . Como $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ então existe um sequência de funções $(u_k) \subseteq \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \subseteq \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ quando $k \to \infty$ (ver Teorema 1.37). Como $(u_k) \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)$, então $Tu_k = u_k|_{\partial \mathbb{R}^n_+} = u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Assim, por (1.47) e usando que T é limitado, temos que

$$0 = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^{p}(\partial \mathbb{R}^n)} = \lim \|Tu_k - Tu\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n-1})} = \lim \|Tu_k\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{1.48}$$

Isto é, $Tu_k = u_k|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})$, quando $k \to \infty$.

Dito isso, seja $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geqslant 0$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever u_k da seguinte forma:

$$u_k(x',x_n) = u_k(x',0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x',t) dt$$

e, consequentemente,

$$|u_k(x',x_n)|^p \leqslant c \left(|u_k(x',0)|^p + \left(\int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x',t) \right| dt \right)^p \right),$$

onde a constante c depende de p (aqui, utlizamos a desigualdade $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p+b^p)$). Integrando ambos os lados sobre \mathbb{R}^{n-1} , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x',x_n)|^p dx' \leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x',0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} ||Du_k(x',t)|| dt \right)^p dx' \right)$$

$$\leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x',0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} ||Du_k(x',t)||^p dt \right) \left(\int_0^{x_n} 1^{p'} dt \right)^{p/p'} dx' \right),$$

onde utilizamos a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Como p/p' = p - 1, tem-se, pelo Teorema de Fubini (ver Teorema 1.16), que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x',x_n)|^p dx' \leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_k(x',0)|^p dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du_k(x',t)\|^p dx' dt \right).$$

$$\xi \equiv 1 \qquad 0 \le \xi \le 1 \qquad \xi \equiv 0$$

Figura 1.12: ξ definido em (1.50).

Por fim, como

$$||u_k|_{\mathbb{R}^{n-1}}||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} = ||Tu_k||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} \to 0,$$

quando $k \to \infty$ (ver **??**), e utlizando o Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), concluímos. passando ao limite na desigualdade anterior, quando $k \to \infty$, que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leqslant c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x', t)\|^p dx' dt, \tag{1.49}$$

pois $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, quando $k \to \infty$, o que implica em $u_k \to u$ e $Du_k \to Du$ em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$, quando $k \to \infty$.

Seja $\xi \in \mathcal{C}^{\infty}_{c}(\mathbb{R}_{+})$ tal que

$$\xi \equiv 1 \text{ em } [0,1];$$

 $\xi \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \setminus [0,2];$ (1.50)
 $0 \leqslant \xi \leqslant 1,$

(ver Figura 1.12) e defina $\xi_k(x) = \xi(kx_n)$ e $v_k(x) = u(x)(1 - \xi_k(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$ e $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_n}(x) = (1 - \xi_k(x)) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) - ku\xi'(kx_n) \text{ e}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x'}(x) = (1 - \xi_k(x)) \frac{\partial u}{\partial x'}(x).$$

Consequentemente, as seguintes desigualdades valem:

$$\int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} \|Dv_{k} - Du\|^{p} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} \left(\left\| \frac{\partial v_{k}}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \left| \frac{\partial v_{k}}{\partial x_{n}} - \frac{\partial u}{\partial x_{n}} \right| \right)^{p} dx$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} \left(\xi_{k} \left\| \frac{\partial u}{\partial x'} \right\| + \xi_{k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{n}} \right| + k|u||\xi'| \right)^{p} dx,$$

onde c é uma constante que depende de p e n. Deste modo, chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} \|Dv_{k} - Du\|^{p} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} \xi_{k}^{p} \|Du\|^{p} dx + ck^{p} \int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} |\xi'|^{p} |u|^{p} dx, \tag{1.51}$$

onde utilizamos o fato de $(a+b)^p \leqslant 2^p (a^p + b^p)$. Observe que supp $\xi' \subseteq \text{supp } \xi \subseteq [0,2]$. Isto nos diz que $\xi'(kx_n) = 0$ quando $kx_n > 2$ ou $x_n > 2/k$. Logo, podemos escrever a última desigualdade como

$$\int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} \|Dv_{k} - Du\|^{p} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} \xi_{k}^{p} \|Du\|^{p} dx + ck^{p} \int_{0}^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^{p} dx' dx_{n}, \tag{1.52}$$

onde estimamos ξ' pelo seu máximo em [0, 2]. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^{n}_{+}} |\xi(kx_{n})|^{p} ||Du||^{p} dx = \int_{0}^{\frac{2}{k}} |\xi(kx_{n})|^{p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ||Du||^{p} dx' dx_{n}
\leq c \int_{0}^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ||Du||^{p} dx' dx_{n} \longrightarrow 0,$$
(1.53)

quando $k \to \infty$, onde estimamos ξ pelo seu máximo em [0,2] e usamos que $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ Além disso, utilizando (1.49), podemos ecrever

$$ck^{p} \int_{0}^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^{p} dx' dt \leqslant ck^{p} \int_{0}^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_{0}^{t} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x',s)\|^{p} dx' ds dt$$

$$\leqslant ck^{p} \int_{0}^{\frac{2}{k}} t^{p-1} \int_{0}^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x',s)\| dx' ds dt$$

$$\leqslant c \int_{0}^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|Du(x',s)\|^{p} dx' ds \longrightarrow 0,$$
(1.54)

quando $k \to \infty$, pois $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Portanto, por (1.51) (1.53) e (1.54), deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \|Dv_k - Du\|^p \, dx \to 0,$$

isto é $||Dv_k - Du||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0$ quando $k \to \infty$.

Por fim, pela definição de v_k , inferimos que

$$\|v_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)}^p = \int_{\mathbb{R}^n_+} |v_k - u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} \xi_k^p |u|^p dx.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, chegamos a

$$\|v_{k}-u\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n}_{+})}^{p}=\int_{0}^{\frac{2}{k}}\xi(kx_{n})^{p}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x)|^{p}dx'dx_{n}\leqslant c\int_{0}^{\frac{2}{k}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x)|^{p}dx'dx_{n}\to 0, \quad (1.55)$$

quando $k \to \infty$. Dessa forma,

$$||v_k - u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}^p \leqslant ||v_k - u||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)}^p + ||Dv_k - Du||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)}^p \to 0.$$

Defina $u_k = \eta_{\frac{1}{k}} * v_k$. Assim, $u_k \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)$, para k suficientemente grande (ver Teorema 1.32) e

$$||u_k - u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||u_k - v_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} + ||v_k - u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$ (ver 1.55). Portanto, $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

1.7 Desigualdades de Sobolev

Nosso objetivo nessa seção é descobrir formas de incorporar espaços de Sobolev em outros espaços.

Dividiremos o estudo dessas desigualdades em dois casos: $1 \le p < n$ e n . O caso <math>p = n não será apresentado nesse texto, aos interessados consultar [6], p.p. 275.

1.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Seja $1 \le p < n$. Queremos saber se é possível obter uma desigualdade do tipo¹⁴

$$||u||_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},\tag{1.56}$$

¹⁴Lembrando que $D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ representa o gradiente fraco, quando calculamos a norma do gradiente em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ estamos calculando a norma \mathcal{L}^p da norma Euclidiana do gradiente.

onde c é uma constante positiva, $1\leqslant q<\infty$ e $u\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ é não nula, de forma que c e q não dependam de u.

Primeiramente, vamos mostrar que se uma desigualdade do tipo (1.56) é válida, o valor de q não é arbitrário, mas sim admite uma forma especifica. Para isso, seja $u \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ não nula e $\lambda > 0$. Sendo assim, definimos

$$u_{\lambda}(x) := u(\lambda x).$$

Aplicando (1.56) a u_{λ} , obtemos

$$||u_{\lambda}||_{\mathcal{L}^{q}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c||Du_{\lambda}||_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}. \tag{1.57}$$

Note que, pelo Teorema de Mudança de Variáveis (1.18), podemos escrever

$$\|u_{\lambda}\|_{\mathcal{L}^{q}(\mathbb{R}^{n})}^{q} = \int_{\mathbb{R}^{n}} |u_{\lambda}|^{q} dx = \int_{\mathbb{R}^{n}} |u(\lambda x)|^{p} dx = \frac{1}{\lambda^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} |u(y)|^{q} dy = \frac{1}{\lambda^{n}} \|u\|_{\mathcal{L}^{q}(\mathbb{R}^{n})}^{q}$$

е

$$\begin{aligned} \|Du_{\lambda}\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p} &= \int_{\mathbb{R}^{n}} |Du_{\lambda}|^{p} dx = \int_{\mathbb{R}^{n}} |D(u(\lambda x))|^{p} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n}} |\lambda Du(\lambda x)|^{p} dx = \frac{\lambda^{p}}{\lambda^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} |Du(y)|^{p} dy = \frac{\lambda^{p}}{\lambda^{n}} \|Du\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p}. \end{aligned}$$

Utilizando essas duas igualdades acima em (1.57), observamos que

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

a qual podemos reescrever como

$$||u||_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}||Du||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$
(1.58)

Observe que se $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}>0$, obtemos uma contradição quando $\lambda\to 0$, pois isso implicaria em $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)}=0$, que só acontece se u=0 (o que é uma contradição). De forma análoga se $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$ obtemos uma contradição quando $\lambda\to\infty$. Sendo assim, para que a igualdade (1.56) seja válida, precisamos que

 $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0,$

ou seja,

$$q = \frac{np}{n-p}$$
.

Isso motiva a definição abaixo.

Definição 1.41. Se $1 \le p < n$ o expoente conjugado de Sobolev de p é dado por

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Os cálculos no início da seção mostram que a desigualdade (1.56), somente é válida quando $q = p^*$. O resultado abaixo mostra que de fato a desigualdade é verídica.

Teorema 1.42 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Seja $1 \le p < n$. Então, existe uma constante c, que depende apenas de p e n, tal que

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},\tag{1.59}$$

para toda função $u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consideremos dois casos

<u>Caso 1:</u> Considere que p=1 (ou seja, $p^*=\frac{n}{n-1}$)

Como, por hipótese, u tem suporte compacto, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \, dy_i,$$

e assim,

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \right| dy_i \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\| dy_i.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima a $\frac{1}{n-1}$ e passando ao produtório de 1 até n, obtemos

$$|u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Denotando $(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$ por X_i e integrando ambos os lados da desigualdade acima, em relação a x_1 , de $-\infty$ a ∞ , chegamos a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_{1} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_{i})| dy_{i} \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_{1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_{1})| dy_{1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_{i})| dy_{i} \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_{1}.$$

Porém, $Du(X_1)$ não depende de x_1 , então a sua integral é constante em relação a x_1 . Sendo assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada (ver Teorema 1.9) e o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.16), a desigualdade acima se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora integrando a desigualdade acima em relação a x_2 de $-\infty$ a ∞ , obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Por conseguinte, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} I_2^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_1)| \, dy_1 \in I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(X_i)| \, dx_1 dy_i \quad (i = 2, ..., n).$$

Porém, l_2 é constante em relação a x_2 , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx_1 dx_2 \leqslant I_2^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} I_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2.$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada e o Teorema de Fubini (ver Teoremas 1.9 e 1.16), inferimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_1)\| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_2)\| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|Du(X_i)\| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Indutivamente, repetindo esse processo de integração, chegamos a

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx$$

$$\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} ||Du|| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} ||Du|| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} = ||Du||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)}^{p^*}.$$

Ou seja,

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||Du||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)},\tag{1.60}$$

como queriamos mostrar.

Caso 2: Assuma que 1 .

Considere a função $|u|^{\gamma}$, com $\gamma > 1$ a ser escolhido a seguir. Utilizando a desigualdade obtida no caso p = 1, podemos escrever

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma_n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[|u|^{\gamma}\right]^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|D(|u|^{\gamma})\| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} \|Du\| dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8) na última integral, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma_n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|Du\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$
 (1.61)

Escolhendo γ de forma que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1}$, isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

Nesse caso, $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Sendo assim, por (1.61) podemos escrever

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = ||Du||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

finalizando a demonstração.

Observação: Note que o suporte compato é necessário, como exemplo tome a função u(x)=1, para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Dessa forma $\|Du\|\equiv 0$. Consequentemente,

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 0 \implies u \equiv 0,$$

que é uma contradição.

Agora, mostraremos que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, sobre certas condições de $p \in \Omega$.

Teorema 1.43. Sejam Ω um aberto limitado, com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Então. $u \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ e, além disso,

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c > 0 é uma constante que depende apenas de n, $p \in \Omega$.

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.38, podemos considerar a extensão de $u Eu = \bar{u}$ tal que

$$\bar{u}=u$$
 qtp em Ω ;
 \bar{u} tem suporte compacto; (1.62)
 $\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$

Como \bar{u} tem suporte compacto, sabemos que existe uma sequência (u_k) , dada por $\eta_{\frac{1}{k}}*\bar{u}$, tal que

$$||u_k - \bar{u}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0, \tag{1.63}$$

quando $k \to \infty$, e para k grande $u_k \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema 1.32). Pela Desigaldade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.59), concluímos que

$$||u_k - u_\ell||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||Du_k - Du_\ell||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},\tag{1.64}$$

para $k, \ell \in \mathbb{N}$. Note que, por (1.63), temos que

$$||Du_k - D\bar{u}||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||u_k - \bar{u}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0, \tag{1.65}$$

quando $k \to \infty$. Isso mostra que (Du_k) é convergente (e portanto, de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, por (1.64), observamos que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, o qual é um espaço completo (ver Teorema 1.7). Logo, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, pelo Teorema 1.14, a menos de uma subsequência $u_k(x) \to v(x)$ qtp em \mathbb{R}^n , quando $k \to \infty$. Analogamente, por (1.63) $u_k(x) \to \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n , quando $k \to \infty$, desde que

$$||u_k - \bar{u}||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} \le ||u_k - \bar{u}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$
 (1.66)

quando $k \to \infty$. Com isso, $v(x) = \bar{u}(x)$ qtp em \mathbb{R}^n . Dessa forma,

$$||u_k-\bar{u}||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\to 0,$$

quando $k \to \infty$. A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev também implica em

$$||u_k||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||Du_k||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Passando ao limite, quando $k \to \infty$, obtemos, por (1.65) e (1.66), que

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|D\bar{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Essa desigualdade finaliza a demonstração, já que, por (1.62), vale

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = ||\bar{u}||_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant ||\bar{u}||_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||D\bar{u}||_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||\bar{u}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

como queriamos mostrar.

Agora, vamos provar uma desigualdade de Sobolev que generaliza a famosa desigualdade de Poincaré.

Teorema 1.44. Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < n$, então a desigualdade

$$||u||_{\mathcal{L}^{q}(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)} \tag{1.67}$$

é válida para $1 \le q \le p^*$ e c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração.

Caso 1: Assuma $q = p^*$.

Como $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, conseguimos uma sequência de funções (u_k) em $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, quando $k \to \infty$. Além disso, podemos estender cada u_k para ser 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Sendo assim, aplicamos a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.59) para obter

$$||u_k||_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \leqslant c||Du_k||_{\mathcal{L}^p(\Omega)},\tag{1.68}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\|u_k - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0$, quando $k \to \infty$, segue que $\|u_k - u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$ e $\|Du_k - Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0$, quando $k \to \infty$. Sendo assim, pelo Teorema 1.14, passando a uma subsequência (se necessário), chegamos a

$$u_k(x) \to u(x)$$
 qtp em Ω . (1.69)

Por outro lado, pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.59), inferimos que

$$||u_k - u_\ell||_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c||Du_k - Du_\ell||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \to 0,$$

quando $k, \ell \to \infty$, pois (Du_k) é convergente (em particular, de Cauchy) em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, que é um espaço completo (ver Teorema 1.7). Dito isso, existe $v \in \mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$ tal que $u_k \to v$ em $\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$. Novamente, utilizando o Teorema 1.14, passando a uma subsequência (se necessário), segue que

$$u_k(x) \to v(x)$$
 qtp em Ω . (1.70)

Logo, por (1.69) e (1.70), $v \equiv u$ qtp em Ω . Dessa forma,

$$||u_k - u||_{\mathcal{L}^{p*}(\Omega)} \to 0$$
,

quando $k \to \infty$. Passando ao limite em (1.68), quando $k \to \infty$, chegamos a

$$||u||_{\mathcal{L}^{p^*}}(\Omega) \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}.$$

Provando o caso em que $q = p^*$.

Caso 2: Assuma que $1 < q < p^*$.

Como Ω é limitado, temos, pelo Teorema 1.11 e por (1.59), que

$$||u||_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c||u||_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Portanto, a designaldade (1.67) é válida para todo $1 \le p < n$ e $1 \le q \le p^*$.

Um caso particular da desigualdade (1.67) é a Desigualdade de Poincaré que será apresentada no resultado abaixo.

Corolário 1.45 (Desigualdade de Poincaré). Sejam Ω um aberto limitado e $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, a desigualdade

$$||u||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

é válida, onde c é uma constante que depende de p, q e n.

Demonstração. Primeiramente considere $1 \le p < n$. Por definição, $1 \le p < p^*$. Além disso, pelo Teorema 1.43, concluímos que

$$||u||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Agora considere que $n \le p < \infty$, e $1 \le s < n$ tal que $p < s^*$ (isto é possível pois $s^* \to \infty$ se $s \to n^-$). Note que, pelo Teorema 1.11, podemos escrever

$$||u||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant ||u||_{\mathcal{L}^{s^*}(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^s(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^p(\Omega)},$$

já que $1 \leqslant p < s^*$, s < p e Ω é limitado. Por fim, considere $p = \infty$. Pelo que foi visto acima, temos que

$$||u||_{\mathcal{L}^{q^*}(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)},$$

para todo $1 \leqslant q < n$. Passando ao limite, quando $q \to n^-$, temos que $q^* \to \infty$ e, consequentemente, $\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)}$. Portanto,

$$||u||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant c||Du||_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Podemos mostrar que $\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}:=\|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$ é uma norma em $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma usual dos espaços de Sobolev $\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Com efeito, pelo Corolário 1.45, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} + \|Du\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} + \|Du\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)}^{p} \leqslant c\|Du\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathcal{W}_{0}^{1,p}(\Omega)}.$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Por outro lado, é verdade que

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

para todo $u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)}$ são equivalentes em $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Além disso, pelo Teorema 1.44 e pelo Corolário 1.45, podemos gescrever

$$\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega) \quad (1 \leqslant q \leqslant p^*) \ \ \mathbf{e} \ \ \mathcal{W}_0^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{s^*}(\Omega) \quad (1 \leqslant s \leqslant \infty).$$

Isto é o mesmo que dizer que $\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e $1 \leqslant p < n$, $\mathcal{W}^{1,s}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{s^*}(\Omega)$ com $1 \leqslant s \leqslant \infty$ e o operador inclusão i (em cada um dos casos) é um operador linear limitado.

1.7.2 Desigualdade de Morrey

A próxima classe de desigualdades realiza uma conexão entre os espaços de Hölder (que veremos a definição a seguir) e os espaços de Sobolev.

Definição 1.46. Uma função $u:\Omega\to\mathbb{R}$ é dita ser Hölder contínua, com expoente $\gamma\in(0,1]$, quando

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c||x - y||^{\gamma},$$

para todo $x, y \in \Omega$. Além disso, denotamos o espaço dessas funções por $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 1.47. Se $u: \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, escrevemos

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = ||u||_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \quad \text{e} \quad [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\gamma}} \right\},$$

para denotar a norma de u no espaço de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com essas definições, estamos prontos para enunciar e demonstrar a Desigualdade de Morrey.

Teorema 1.48 (Designaldade de Morrey). Sejam $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $n e <math>\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Então,

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde c é uma constante que depende apenas de p e n.

Demonstração. Primeiramente, escolha uma bola $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Afirmamos que existe uma constante c > 0 dependendo apenas de n tal que¹⁵

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, dy \leqslant c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|y - x\|^{n-1}} \, dy.$$
(1.71)

Com efeito, fixando $w \in \partial B(0,1)$ e 0 < s < r, segue, do Teorema Fundamental do Cálculo e da Regra da cadeia, que

$$|u(x+sw)-u(x)| = \left|\int_0^s \frac{du}{dt}(x+tw)\,dt\right| = \left|\int_0^s Du(x+tw)\cdot w\,dt\right| \leqslant \int_0^s \|Du(x+tw)\|\,dt,$$

onde utilizamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de ||w|| = 1. Logo, integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre $\partial B(0,1)$ e aplicando o Teorema de Fubini (ver Teorema 1.16), obtemos

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)| \, dS_w \leqslant \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} ||Du(x+tw)|| \, dS_w dt$$

$$= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} ||Du(x+tw)|| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} \, dS_w dt.$$

Seja y = x + tw, de forma que t = ||x - y||. Assim, por meio de coordenadas polares e mudança de variáveis (ver Teoremas 1.13 e 1.18) obtemos

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)| \, dS_w \leqslant \int_0^s \int_{B(x,t)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} \, dS_y dt = \int_{B(x,s)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} \, dy$$

e, como s < r, tem-se

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)| \, dS_w \leqslant \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} \, dy.$$

$$\oint_{B(x,r)} f \, dy := \frac{1}{\sigma(n)r^n} \int_{B(x,r)} f \, dy$$

onde $\sigma(n)r^n$ é o volume da esfera *n*-dimensional, representa a média da função *f* sobre B(x, r).

¹⁵A integral

Multiplicando a equação acima por s^{n-1} e integrando de 0 a r, com respeito a s, chegamos a

$$\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)| \, dS_w ds \leqslant \int_0^r s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} \, dy ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis y = x + sw, obtemos

$$\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} |u(y)-u(x)| \, dS_y ds \leqslant \left(\int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} \, dy\right) \left(\int_0^r s^{n-1} ds\right).$$

Utilizando coordenadas polares (ver Teorema 1.13) no lado esquerdo e resolvendo a última integral do lado direito da desigualdade acima, segue que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, dy \leqslant \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} \, dy.$$

Por fim, dividindo ambos os lados por $\sigma(n)r^n$ (volume da *n*-esfera de raio *r*), temos

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, dy \leqslant \frac{1}{n\sigma(n)} \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} \, dy.$$

Isso prova (1.71)

Agora, fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Note que, podemos escrever

$$|u(x)| = \frac{|u(x)|}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} dy = \int_{B(x,1)} |u(x)| dy.$$

Dito isso, deduzimos que

$$|u(x)| \le \int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| \, dy + \int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy. \tag{1.72}$$

Observe que, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), inferimos

$$\int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy = \frac{1}{\sigma(n)} \int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy \\
\leqslant \frac{1}{\sigma(n)} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} 1^{p'} \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c \|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.73}$$

onde p e p' são expoentes conjugados. Além disso, utilizando a desigualdade de Hölder novamente, chegamos a

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} \, dy \leqslant \left(\int_{B(x,1)} \|Du\|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x-y\|^{(n-1)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{1.74}$$

onde p e p' são expoentes conjugados e a última integral é finita. De fato, utilizando coordenadas polares (ver Teorema 1.13), concluímos que

$$\int_{B(x,1)} \frac{dy}{\|x - y\|^{(n-1)p'}} = \int_0^1 \int_{\partial B(x,r)} \frac{1}{r^{(n-1)p'}} dS dr$$

$$= n\sigma(n) \int_0^1 r^{(n-1)(1-p')} dr = n\sigma(n) \frac{p-1}{p-n} < \infty,$$

pois n < p. Dito isso, por (1.74), segue que

$$\int_{B(x,1)} \frac{\|Du(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} \, dy \leqslant c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.75}$$

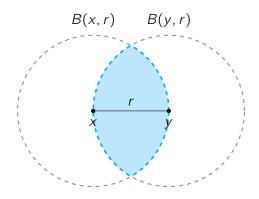


Figura 1.13: $B = B(x, r) \cap B(y, r)$. Fonte: Autoral

Dessa forma, por (1.71), (1.72), (1.73) e (1.75), deduzimos que

$$|u(x)| \leqslant c ||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como x é arbitrário, também obtemos

$$||u||_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$
 (1.76)

Agora, considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ e denote $r = \|x - y\|$. Portando, seja $B = B(x, r) \cap B(y, r)$ (ver Figura 1.13), sendo assim

$$|u(x) - u(y)| = \int_{B} |u(x) - u(y)| \, dz \leqslant \int_{B} |u(x) - u(z)| \, dz + \int_{B} |u(y) - u(z)| \, dz. \tag{1.77}$$

Calculando a primeira integral acima, obtemos, por (1.71), que

$$\int_{B} |u(x) - u(z)| \, dz \leqslant \int_{B(x,r)} |u(z) - u(x)| \, dz \leqslant c \int_{B(x,r)} \frac{\|Du(z)\|}{\|z - x\|^{n-1}} \, dz.$$

Analogamente a (1.75), inferimos que

$$\int_{B} |u(x) - u(z)| \, dz \leqslant cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}.$$

Da mesma forma, seque que

$$\int_{B} |u(y) - u(z)| \, dz \leqslant cr^{1-\frac{n}{p}} ||Du||_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}.$$

Sendo assim, por (1.77), podemos escrever

$$|u(x) - u(y)| \le c||x - y||^{1 - \frac{n}{p}} ||Du||_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}.$$

Isso mostra que

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\gamma}} \right\} \leqslant c \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$
 (1.78)

Portanto, por (1.76) e (1.78), concluímos que

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Para demonstrar a próxima desigualdade de Sobolev, precisamos do seguinte resultado

Teorema 1.49. O espaço de Hölder $(\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [11], p.p. 5.

Teorema 1.50. Seja Ω um aberto limitado, com $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 . Considere $u\in\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ com $n< p\leqslant \infty$. Então, u tem uma versão (coincide com u qtp em Ω) contínua $u^*\in\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, com $\gamma=1-\frac{n}{p}$, tal que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

onde c é um constante que depende de n, p e Ω .

Demonstração. Utilizando o Teorema 1.38, podemos considerar a extensão de u, $Eu = \bar{u}$, tal que

$$\bar{u} = u$$
 qtp em Ω ;
 \bar{u} tem suporte compacto; (1.79)
 $\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$.

Além disso, como supp \bar{u} é compacto, temos, pelo Teorema 1.32, que existe uma sequência $(u_k) \subseteq \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, para k suficientemente grande, tal que

$$||u_k - \bar{u}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0, \tag{1.80}$$

quando $k \to \infty$ Além disso, pelo Teorema 1.48, podemos escrever

$$||u_k-u_I||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c||u_k-u_I||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Isto nos diz que (u_k) é de Cauchy em $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ (pois é de Cauchy em $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$). Como $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ é completo (ver Teorema 1.49), existe uma função $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$||u_k - u^*||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$
 (1.81)

quando $k \to \infty$ Note que $u^* = \bar{u}$ qtp em \mathbb{R}^n (análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 1.43) (por (??) e (??)) e $u = \bar{u}$ qtp em Ω (por (1.79)). Logo, $u = u^*$ qtp em Ω , ou seja, u^* é uma versão contínua de u. O Teorema 1.48 também implica em

$$||u_k||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||u_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Passando ao limite, quando $k \to \infty$, chegamos, por (1.80) e (1.81), a

$$||u^*||_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c||\bar{u}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por fim, por (1.79), é verdade que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, concluímos que

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)},$$

como era desejado.

1.7.3 Desigualdades gerais de Sobolev

Agora, vamos explorar algumas desigualdades em espaços de Sobolev com derivadas (fracas) de ordem superior.

Teorema 1.51. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se kp < n, então $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Além disso, a desigualdade

$$||u||_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$$

é valida, onde c depende apenas de k, p, n e Ω .

Demonstração. Como $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq kp < n$, temos que $D^{\alpha}u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k$. Como Ω é limitado e $\partial\Omega$ é de classe \mathcal{C}^1 , pelo Teorema 1.38, podemos considerar uma extenão $\overline{D^{\beta}u}$ de $D^{\beta}u$ com $|\beta| \leq k-1$. Utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.59), obtemos

$$\|\overline{D^{\beta}u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D(\overline{D^{\beta}u})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dessa forma, como $\overline{D^{\beta}u} = D^{\beta}u$ qtp em Ω , podemos escrever

$$\|D^{\beta}u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} = \|\overline{D^{\beta}u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant \|\overline{D^{\beta}u}\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|D(\overline{D^{\beta}u})\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\overline{D^{\beta}u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Porém a extensão acima é um operador linear limitado. Mais precisamente, temos que $\|\bar{v}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c\|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$, para todo $v \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Dito isso, inferimos que

$$\|D^{\beta}u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|D^{\beta}u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}.$$

Dessa forma, $u \in \mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)$ e $\|u\|_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}$. De forma análoga, inferimos que $u \in \mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)$, onde

$$\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Indutivamente, chegamos a $u \in \mathcal{W}^{0,q}(\Omega) = \mathcal{L}^q(\Omega)$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, e

$$||u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \geqslant c||u||_{\mathcal{W}^{k-1,p^*}(\Omega)} \geqslant c||u||_{\mathcal{W}^{k-2,p^{**}}(\Omega)} \geqslant \cdots \geqslant c||u||_{\mathcal{W}^{0,q}(\Omega)} = c||u||_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Portanto,

$$||u||_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

desde que $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{k}{a}$.

Vejamos agora uma generalização dos espaços de Hölder $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Definição 1.52. O espaço de Hölder $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é formado pelas funções $u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Esse espaço é munido da norma

$$||u||_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^{\alpha}u||_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^{\alpha}u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

O próximo resultado estabelece uma relação entre os espaços de Hölder definidos acima e os espaços de Sobolev.

Teorema 1.53. Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 , e $u \in \mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$. Se kp > n, então $u \in \mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ e

$$\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$$

se $\frac{n}{p}$ não é um inteiro e $\gamma \in (0,1)$ se $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Além disso a desigualdade

$$||u||_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)} \tag{1.82}$$

é valida, onde c depende apenas de $k, p, n, \gamma \in \Omega$.

Demonstração. Suponha que $\frac{n}{p}$ não é um inteiro (isto é, $\gamma = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}$). Então, como visto na demonstração do Teorema 1.51, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ quando

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n},\tag{1.83}$$

desde que $\ell p < n$ (veja que $r = p^{\ell \text{ vezes}}$). Sendo assim, ℓ é um inteiro tal que

$$\ell < \frac{n}{p} < \ell + 1,\tag{1.84}$$

isto é, $\ell = \left \lfloor \frac{n}{p} \right \rfloor$. Consequentemente, temos por (1.83) e (1.84), que

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} > n,\tag{1.85}$$

pois n-pl>0. Além disso, $D^{\alpha}u\in\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)$, para todo $|\alpha|\leqslant k-\ell-1$. Dito isso, pelo Teorema 1.38, seja $\overline{D^{\alpha}u}\in\mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ uma extensão de $D^{\alpha}u$. Assim, pela Desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.48), podemos escrever

$$\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|\overline{D^{\alpha}u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \|\overline{D^{\alpha}u}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c\|\overline{D^{\alpha}u}\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{W}^{1,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)}.$$

$$(1.86)$$

pois $\overline{D^{\alpha}u}=D^{\alpha}u$ qtp em Ω , supp $\overline{D^{\alpha}u}$ é compacto e $\gamma=p+1-\frac{n}{p}=1-\frac{n}{r}$. Portanto, por (1.86), inferimos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})} &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} \left(\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [D^{\alpha}u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \right) \\ &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} 2\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k-\ell-1} c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

(ver demonstração do Teorema 1.51). Isto prova (1.82.)

Por fim, suponha que $\frac{n}{p}$ é um inteiro. Seja $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Como anteriormente, temos que $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$ (pois Ω é limitado), desde que (1.83) seja satisfeito, onde

$$r = \frac{pn}{n - p\ell} = n \geqslant p.$$

pois $\frac{n}{p}$ é um inteiro positivo. Isto nos diz que $D^{\alpha}u \in \mathcal{L}^{r}(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k-\ell$. Sejam $n < q < \infty$ e $1 \leq s = \frac{nq}{n+q} < n$. Dessa forma, $s^* = q$ e pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.59) e por um argumento de densidade, temos, considerando uma extensão $\overline{D^{\alpha}u} \in \mathcal{L}^{q}(\mathbb{R}^{n})$, que

$$||D^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{q}(\Omega)} = ||\overline{D^{\alpha}u}||_{\mathcal{L}^{q}(\Omega)} \leqslant ||\overline{D^{\alpha}u}||_{\mathcal{L}^{q}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c||D\overline{D^{\alpha}u}||_{\mathcal{L}^{s}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c||DD^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{s}(\Omega)} \leqslant c||DD^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{r}(\Omega)} < \infty,$$

para todo $|\alpha| \leq k - \ell - 1$, pois $u \in \mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)$, $s < r \in \Omega$ é limitado. Por isso,

$$||D^{\alpha}u||_{\mathcal{L}^{q}(\Omega)} \leq c||u||_{\mathcal{W}^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq c||u||_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-1$. Isto nos diz que $D^{\alpha}u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leqslant k-\ell-1 = k-\frac{n}{p}$. Como $n < q < \infty$, utilizando a Desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.48), encontramos

$$\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} = \|\overline{D^{\alpha}u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} \leqslant \|\overline{D^{\alpha}u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{q}}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c\|\overline{D^{\alpha}u}\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c\|D^{\alpha}u\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\Omega)},$$

para todo $|\alpha| \leqslant k - \ell - 2$ (por um argumento de densidade). Assim, tomando qualquer $\gamma \in (0, 1)$, $q = \frac{n}{1-\gamma}$ e $s_{\gamma} = \frac{np}{(1-\gamma)p+n}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k-\ell-1,\gamma}(\overline{\Omega})}\leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k-\ell-1,q}(\Omega)}=c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,\frac{n}{p},q}(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,s_{\gamma}}(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)},$$

pois $n < q < \infty$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{s_{\gamma}} - \frac{n/p}{n}$ (como na demonstração do Teorema 1.51, já que $q = s_{\gamma}^{\frac{n/p \text{ vezes}}{*}}$). \square

1.8 Compacidade

Nessa seção, vamos estudar mergulhos compactos dos espaços de Sobolev em espaços de Lebesgue. Para isso, precisamos entender entender a diferença entre um mergulho contínuo, como os que foram trabalhados na seção anterior, e um mergulho compacto.

Definição 1.54. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está compactamente mergulhado em Y e denotamos $X \hookrightarrow Y$, se para todo $x \in X$, tem-se

$$||x||_Y \leqslant c||x||_X$$

e se toda sequência limitada em X é precompacta em Y, isto é, existe uma subsequência que converge em Y.

Observação: Se um mergulho satisfaz apenas a primeira propiedade, dizemos que X está continuamente mergulhado em Y e denotamos por $X \hookrightarrow Y$. Na seção anterior vimos os seguintes mergulhos contínuos.

- $\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, com $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e $1 \leqslant p < n$, pelo Teorema 1.44;
- $\mathcal{W}^{1,p}_0(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)$, com $1\leqslant s\leqslant\infty$, pelo Corolário 1.45;
- $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$, com kp < n e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{k}{n}$, pelo Teorema 1.51;
- $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-\ell-1\gamma}(\overline{\Omega})$, com kp > n e $\ell = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, pelo Teorema 1.53.

Teorema 1.55 (Teorema de Rellich-Kondrachov). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 . Então,

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \stackrel{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega),$$

com $1 \leqslant p < n$ e $1 \leqslant q < p^*$.

1.8. COMPACIDADE 53

Demonstração. Seja $1 \leqslant q < p^*$ fixo. Como Ω é limitado, temos, pelo Teorema 1.11, que $\|u\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)}$ e, pelo Teorema 1.43, segue que $\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Logo, $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ e

$$||u||_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant c||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}.$$

Resta mostrar que se $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência $(u_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ que converge em $\mathcal{L}^q(\Omega)$.

Como $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ é limitada, existe M>0 tal que $\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}\leqslant M$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Observe que, pelo Teorema 1.38, temos que existe uma sequência $(\bar{u}_k)_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que, para todo $k\in\mathbb{N}, \ \bar{u}_k=u_k$ qtp em $\Omega, \ \bar{u}_k$ tem suporte compacto e $\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}$. Dessa forma, inferimos

$$\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant cM,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $(\bar{u}_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é limitada. Com isso

$$\sup_{k} \|\bar{u}_{k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant cM. \tag{1.87}$$

Primeiramente, vamos estudar as funções suavizadas $\bar{u}_k^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * \bar{u}_k$ (para $\varepsilon > 0$), onde η_{ε} é a função molificadora vista na Seção 1.4. Também podemos supor que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, as funções \bar{u}_k^{ε} tem suporte em um aberto limitado V. Afirmamos que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \to 0$$
,

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$. Com efeito, considere $v_k \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $v_k^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * v_k$ (para $\varepsilon > 0$). Dessa forma, podemos escrever

$$v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_{\varepsilon}(\tau) v_k(x-\tau) d\tau - v_k(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) v_k(x-\tau) d\tau - v_k(x).$$

Fazendo a substituição $\tau=\varepsilon y$ e lembrando que $\int_{B(0,1)}\eta(y)\,dy=1$, obtemos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(v_k(x - \varepsilon y) - v_k(x) \right) dy = \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} v_k(x - \varepsilon t y) dt dy.$$

Para calcular a derivada acima, defina $g(t) = x - \varepsilon ty$. Pela regra da cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}(v_k \circ g)(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(g(t)) g_j'(t) = -\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(g(t)) y_j = -\varepsilon D v_k(x - \varepsilon t y) \cdot y$$

Sendo assim, é verdade que

$$v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x) = -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Dv_k(x - \varepsilon t y) \cdot y \, dt dy.$$

Logo, passando ao módulo em ambos os lados da igualdade acima e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos que

$$|v_k^{\varepsilon}(x) - v_k(x)| \le \varepsilon \int_{B(0.1)} \eta(y) \int_0^1 \|Dv_k(x - \varepsilon ty)\| dt dy.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre V, e aplicando o Teorema de Fubini e o Teorema de Mudança de Variáveis (ver Teoremas 1.16 e 1.18), chegamos a

$$\int_{V} |v_{k}^{\varepsilon}(x) - v_{k}(x)| dx \leq \int_{V} \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_{0}^{1} \|Dv_{k}(x - \varepsilon ty)\| dt dy dx$$

$$\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_{0}^{1} \int_{V} \|Dv_{k}(x - \varepsilon ty)\| dx dt dy \leq \varepsilon \int_{V} \|Dv_{k}(z)\| dz,$$

(basta escolher $z = x - \varepsilon t y$). Isto é,

$$\|v_k^{\varepsilon} - v_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon \|Dv_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \tag{1.88}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\bar{u}_k \in \mathcal{W}^{1,p}(V)$ (pois $\bar{u}_k \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$), então existe uma sequência $(v_\ell^k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(V)$, dada por $v_\ell^k = \eta_{\frac{1}{4}} * \bar{u}_k$, tal que

$$\|v_{\ell}^k-\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}\to 0,$$

quando $\ell \to \infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, como $p \geqslant 1$ e V é limitado (ver Teorema 1.11) concluímos que

$$\|v_{\ell}^{k} - \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} \leqslant c\|v_{\ell}^{k} - \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} \leqslant c\|v_{\ell}^{k} - \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0, \tag{1.89}$$

e, de forma análoga,

$$\|Dv_{\ell}^{k} - D\bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} \leq c\|Dv_{\ell}^{k} - D\bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} \leq c\|v_{\ell}^{k} - \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \to 0, \tag{1.90}$$

ambos limites tomados quando $\ell \to \infty$. Dessa forma, inferimos, por (1.90), que

$$\|v_{\ell}^{k\varepsilon} - \bar{u}_{k}^{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} = \|\eta_{\varepsilon} * v_{\ell}^{k} - \eta_{\varepsilon} * \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} = \|\eta_{\varepsilon} * (v_{\ell}^{k} - \bar{u}_{k})\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} \leqslant \|v_{\ell}^{k} - \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} \to 0, (1.91)$$

quando $\ell \to \infty$, onde a última desigualdade vem de (1.21). Por (1.88), segue que

$$\|v_{\ell}^{k\varepsilon} - v_{\ell}^{k}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} \leq \varepsilon \|Dv_{\ell}^{k}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)},$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N}$. Passando ao limite quando $\ell \to \infty$, obtemos por (1.89), (1.90) e (1.91), que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon \|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, concluímos que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon \|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \leqslant \varepsilon c \|D\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^p(V)} \leqslant \varepsilon c \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} \leqslant \varepsilon c M,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ (pois $p \ge 1$ e V é limitado (ver Teorema 1.11)). Consequentemente,

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)} \to 0, \tag{1.92}$$

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$.

Como $1 \leqslant q < p^*$, podemos utilizar a Desigualdade de Interpolação (ver Teorema) para obter

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^{\theta} \|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

onde $\frac{1}{q}=\theta+\frac{(1-\theta)}{p^*}$ e $0<\theta<1$. Ademais, por (1.87), pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (1.59) e por um argumento de densidade, deduzimos que $\|\bar{u}_k^{\varepsilon}-\bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^{p^*}(V)}^{1-\theta}$ é finito para todo $k\in\mathbb{N}$. De fato, é verdade que

$$\|\bar{u}_{k}^{\varepsilon} - \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{p^{*}}(V)}^{1-\theta} \leq c\|D\bar{u}_{k}^{\varepsilon} - D\bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{p}(V)}^{1-\theta} \\ \leq c\|\bar{u}_{k}^{\varepsilon} - \bar{u}_{k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}^{1-\theta} \leq c\left[\|\bar{u}_{k}^{\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)} + \|\bar{u}_{k}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(V)}\right]^{1-\theta} < cM$$
(1.93)

Assim por (1.92)

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant c \|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^1(V)}^{\theta} \to 0,$$

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$.

1.8. COMPACIDADE 55

Agora, afirmamos que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a sequência $(\bar{u}_k^{\varepsilon})_{k=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada e equicontínua. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se pelo Teorema ??, que

$$|\bar{u}_{k}^{\varepsilon}(x)| \leqslant \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_{\varepsilon}(x-y) |\bar{u}_{k}(y)| \, dy \leqslant \|\eta_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{n})} \|\bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{1}(V)} \leqslant \frac{c}{\varepsilon^{n}} \|\eta\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{n})} \|\bar{u}_{k}\|_{\mathcal{L}^{p}(V)} \leqslant \frac{cM}{\varepsilon^{n}} < \infty,$$

$$(1.94)$$

onde por (1.87) c não depende de k (lembre que supp $\bar{u}_k \subseteq V$, $p \geqslant 1$ e V é limitado). De forma análoga, mostramos que

 $||D\bar{u}_k^{\varepsilon}(x)|| \leqslant \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \tag{1.95}$

Deste modo, $(\bar{u}_k^{\varepsilon})_{k=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada pois, mostramos que $\|\bar{u}_k^{\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant M$ onde M>0 não depende de k. Ademais, $(\bar{u}_k^{\varepsilon})_{k=1}^{\infty}$ é equicontínua, pois, dado $\tilde{\varepsilon}>0$ existe $\delta<\tilde{\varepsilon}/L$ tal que, pela Desigualdade do Valor Médio, encontramos

$$\|x-y\|<\delta \implies |\bar{u}_k^\varepsilon(x)-\bar{u}_k^\varepsilon(y)|\leqslant L\|x-y\|< L\delta<\tilde{\varepsilon},$$

onde $L = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D\bar{u}_k(x)\|$, o qual existe por (1.87) e (1.95) e não depende de k e x.

Por fim, afirmamos que existe uma subsequência $(\bar{u}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(\bar{u}_k)_{k=1}^{\infty}$, tal que

$$\|\bar{u}_{k_i}-\bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)}\to 0,$$

quando $j, \ell \to \infty$. Com efeito, sabemos que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \to 0$$
,

uniformemente em k, quando $\varepsilon \to 0$ (ver (1.93)). Logo, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|\bar{u}_k^{\varepsilon_0} - \bar{u}_k\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \frac{\delta}{3},\tag{1.96}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, supp \bar{u}_k , supp $\bar{u}_k^{\varepsilon_0} \subseteq V$. Além disso, provamos que $(\bar{u}_k^{\varepsilon_0})_{k=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada e equicontínua. Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (ver Teorema 1.15), existe uma subsequência $(\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0})_{j=1}^{\infty}$ de $(\bar{u}_k^{\varepsilon_0})_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformente sobre V (fora de V, \bar{u}_k é nula). Em particular, esta subsequência é de Cauchy sobre V. Portanto,

$$|\bar{u}_{k_i}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}(x)| \to 0$$
,

uniformemente em V, quando $j,\ell\to\infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.6), temos que

$$\lim_{j,\ell\to\infty} \|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)}^q = \lim_{j,\ell\to\infty} \int_V |\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}(x)|^q dx = 0,$$

pois $|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}(x) - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}(x)|^q \leqslant 2cM\varepsilon_0^{-n}\|\eta\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{L}^1(V)$ (lembre que V é limitado). Consequentemente, para $j,\ell>0$ suficientemente grandes, concluímos que

$$\|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \frac{\delta}{3}.\tag{1.97}$$

Dessa forma, por (1.96) e (1.97), podemos escrever

$$\|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \|\bar{u}_{k_j} - \bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \|\bar{u}_{k_j}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}^q(V)} + \|\bar{u}_{k_\ell}^{\varepsilon_0} - \bar{u}_{k_\ell}\|_{\mathcal{L}^q(V)} \leqslant \delta,$$

para $j, \ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes. Isto nos diz que $(\bar{u}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ (pois supp $\bar{u}_{k_i} \subseteq V$). Dito isso, chegamos a

$$||u_{k_i} - u_{k_\ell}||_{\mathcal{L}^q(\Omega)} = ||\bar{u}_{k_i} - \bar{u}_{k_\ell}||_{\mathcal{L}^q(\Omega)} \leqslant ||\bar{u}_{k_i} - \bar{u}_{k_\ell}||_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

quando $j, \ell \to \infty$. Como $\mathcal{L}^q(\Omega)$ é um espaço completo (ver Teorema 1.7), então $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente em $\mathcal{L}^q(\Omega)$, como era desejado.

Vimos no Teorema 1.55 que $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \stackrel{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^q(\Omega)$, para todo $1 \leqslant q < p^*$ (se Ω é limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1). Como $p^* > p$, então, $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \stackrel{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^p(\Omega)$, com $1 \leqslant p < n$ (se Ω é limitada e $\partial \Omega$ é de classe \mathcal{C}^1). Na verdade, temos que

$$\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \stackrel{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{L}^p(\Omega)$$
,

para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Com efeito, se $n , então, pela desigualdade de Morrey (ver Teorema 1.48), temos que, dada uma função <math>u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, podemos escrever

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\bar{u} \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é uma extensão de u. Logo,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\bar{u}(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|}{\|x - y\|^{\gamma}} \right\} \leqslant c \|\bar{u}\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

isso implica em

$$|\bar{u}(x)| \leqslant c ||u||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leqslant c ||x - y||^{\gamma} ||\bar{u}||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $x,y\in\mathbb{R}^n$. Assim sendo, seja $(u_k)\subseteq\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada, isto é, $\|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)}\leqslant c$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Logo,

$$\|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|u_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)} \leqslant c,$$

onde $\bar{u}_k \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é uma extensão de u_k , para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|\bar{u}_k(x)| \leqslant c \|\bar{u}_k\|_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e

$$|\bar{u}_k(x) - \bar{u}_k(y)| \le c||x - y||^{\gamma} ||u_k||_{\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c||x - y||^{\gamma},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (ver Teorema 1.15), existe $(\bar{u}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ subsequência de $(\bar{u}_k)_{k=1}^{\infty}$, tal que

ALGUMAS APLICAÇÕES DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

2.1 Preliminares

2.1.1 Desigualdades

O primeiro preliminar para esse capítulo é a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, iremos apresentar o caso geral abaixo, mas utilizaremos apenas alguns casos particulares que serão mencionados após o teorema.

Teorema 2.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). Sejam $1 \leqslant q \leqslant \infty$, ℓ , $k \in \mathbb{N}$, com $\ell < k$, e satisfazendo uma das hipóteses abaixo

$$\begin{cases} r = 1 \\ \frac{\ell}{k} \leqslant \theta \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 < r < \infty \\ k - \ell - \frac{n}{r} \in \mathbb{N} \\ \frac{\ell}{k} \leqslant \theta < 1. \end{cases}$$

Além disso, se

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{n} \right) + \frac{1 - \theta}{a},$$

então existe uma constante positiva c que não depende de u tal que

$$||D^{\ell}u||_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c||D^{k}u||_{\mathcal{L}^{r}(\mathbb{R}^{n})}^{\theta}||u||_{\mathcal{L}^{q}(\mathbb{R}^{n})}^{1-\theta}$$

para toda função $u \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{W}^{k,r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O artigo [7] é destinado a demonstração dessa desigualdade.

A desigualdade de Ladyzhenskaya é um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg apresentada acima. Mais precisamente, quando $\ell=0$, k=1, p=4, q=r=2 e $\theta=\frac{3}{4}$, obtemos

$$||u||_{\mathcal{L}^{4}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c||u||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})}^{\frac{1}{4}} ||Du||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})}^{\frac{3}{4}}.$$
 (2.1)

Outras formas da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg que serão utilizadas são as seguintes:

$$||u||_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{3})} \leq c||u||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{4}} ||D^{2}u||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{3}{4}}, \tag{2.2}$$

onde $\ell = 0$, k = 2, $p = \infty$, q = r = 2 e $\theta = \frac{3}{4}$, e

$$||Du||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant ||u||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{2}} ||D^{2}u||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

onde $\ell = 1$, k = p = q = r = 2 e $\theta = \frac{1}{2}$.

2.1.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta indispensável para o estudo de Equações Diferenciais Parciais. Aqui apresentaremos as definições básicas e algumas propriedades elementares que serão utlizadas ao decorrer do texto.

Definição 2.2. Seja $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \omega} f(x) \, dx,$$

e a transformada inversa de f por

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \omega} f(\omega) d\omega.$$

Como $|e^{\pm ix \cdot \omega}| = 1$ e $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ as integrais acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou $\omega \in \mathbb{R}^n$ no caso da transformada inversa).

Teorema 2.3 (Identidade de Planchael). Sejam $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$||f||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})} = ||\hat{f}||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})} = ||\check{f}||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})}.$$

Demonstração. Ver [6] p.p. 183.

O teorema abaixo explora as propriedades elementares da transformada de Fourier.

Teorema 2.4 (Propiedades da transformada de Fourier). Sejam $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Então, são válidas as seguintes igualdades

- (a) $\widehat{\lambda u + v} = \lambda \hat{u} + \hat{v}$;
- **(b)** $\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$;
- (c) $\widehat{D^{\alpha}u} = (i\omega)^{\alpha}\widehat{u}$, para todo multi-índice α tal que $D^{\alpha}u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$;
- **(d)** $\widehat{u*v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v}.$

Demonstração. Ver [6] p.p. 185.

Os exemplos abaixo serão úteis para definir um operador que será utilizado extensivamente nesse capítulo

Exemplo 2.5 (Transformada da derivada temporal). Considere uma função $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere sua derivada temporal. Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \, dx = \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} u(x,t) \, dx \right] = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t},$$

onde a penúltima igualdade é válida pois $e^{-i\omega \cdot x}$ não depende de t.

Exemplo 2.6 (Derivada do Laplaciano). Lembrando que dada uma função $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o Laplaciano

¹Se $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice então $\omega^{\alpha} = \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \cdots \omega_n^{\alpha_n}$.

2.1. PRELIMINARES 59

de u é dado por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Dito isso, utlizando a transformada da derivada vista no item (c) do Teorema 2.4, podemos escrever

$$\frac{\widehat{\partial^2 u}}{\partial x_j^2} = -\omega_j^2 \hat{u}.$$

Dessa forma

$$\widehat{\Delta u} = -(\omega_1^2 + \dots + \omega_n^2)\widehat{u} = -\|\omega\|^2\widehat{u}.$$

2.1.3 Semigrupo do calor

Agora, introduziremos o conceito de semigrupo, que será utilizado para explorar propriedades das soluções de Leray

Definição 2.7. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados $(T(t))_{t>0}$, onde $T: \mathbb{R}_+ \to X$, é um semigrupo se

- 1. $T(0) = I_X$, onde $I_X : X \to X$ é o operador identidade;
- 2. T(t+s) = T(t)T(s), para todo t, s > 0.

Nesse trabalho, será importante conhecer o semigrupo do calor, que provem da solução da equação do calor

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$
 (2.4)

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \ \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \tag{2.5}$$

Para encontrar a solução do sistema acima, utilizaremos a transformada de Fourier. Dito isso, aplicando a transformada de Fourier em (2.4) e (2.5), obtemos

$$\hat{\mathbf{u}}_t - \nu \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \mathbf{u} = 0 \quad t > 0$$
$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{y}} \quad t = 0.$$

Nesse caso, temporariamente ignoramos as variaveis espaciais e trabalhamos apenas no domínino do tempo, sendo assim basta resolver a Equação Diferencial Ordinária acima e depois aplicar a transformada de Fourier inversa. Com efeito, esta EDO tem solução dada por

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}} e^{-\nu t \|\boldsymbol{\omega}\|^2}$$

Dessa forma podemos aplicar a transformada de Fourier inversa para obter

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} * F}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \tag{2.6}$$

onde F é a transformada de Fourier inversa de $e^{-\nu t \|\omega\|^2}$. Ou seja

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega \cdot x} e^{-\nu t \|\omega\|^2} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k.$$
 (2.7)

Para resolver essa integral, primeiramente precisamos completar o quadrado no expoente. Dito isso

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\nu t \omega_k^2 + i x_k \omega_k + \frac{x_k^2}{4\nu t} - \frac{x_k^2}{4\nu t}\right) d\omega_k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_k^2}{4\nu t}\right) \exp\left(-\left(\sqrt{\nu t}\omega_k - \frac{i x_k}{2\sqrt{\nu \tau}}\right)^2\right) d\omega_k.$$

Fazendo a substituição $s_k=\sqrt{\nu t}\omega_k-\frac{ix_k}{2\nu t}$ obtemos $ds_k=\sqrt{\nu t}\,d\omega_k$ e, consequentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k x_k - \nu t \omega_k^2} d\omega_k = \frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-x_k^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_k^2} ds_k = \left(\frac{\pi}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}}.$$
 (2.8)

Sendo assim, por (2.7) e (2.8), chegamos a

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_k^2}{4\nu t}} = \frac{1}{(2\nu t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu t}}.$$

Portanto, por (2.6), concluímos que

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\nu t}} \mathbf{v}(y) \, dy.$$

O semigrupo do calor, denotado por $e^{\nu\Delta\tau}$, com $\tau>0$, é uma família de operadores dada por

$$e^{\nu\Delta\tau}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}*E(\cdot,\tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}},$$

onde $E(x,\tau)=e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$. O resto dessa subseção será destinado a estudar algumas propriedades que serão utilizadas neste trabalho.

Proposição 2.8 (Priopriedades do semigrupo do calor). Considere o semigrupo do calor $e^{\nu\Delta\tau}$ então são válidas

(a)
$$e^{\nu \Delta \tau}(\lambda u + v) = \lambda e^{\nu \Delta \tau} u + e^{\nu \Delta \tau} v$$
;

(b)
$$D^{\alpha}(e^{\nu\Delta\tau}u) = e^{\nu\Delta\tau}(D^{\alpha}u);$$

(c)
$$\widehat{e^{\nu\Delta\tau}u} = \widehat{u}e^{-\nu\tau\|\omega\|^2}$$
.

Demonstração. (a) segue do fato da convolução ser um operador linear, e (b) é análogo ao que foi mostrado no Teorema 1.32. O item (c) segue do Teorema 2.4 (d), já que

$$e^{\nu\Delta\tau}u=\frac{u*E(\cdot,\tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}},$$

segue que

$$\widehat{e^{\nu\Delta\tau}u} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{u}\widehat{E}(\cdot,\tau)}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}.$$
(2.9)

Sendo assim, resta calcular a transformada de Fourier de $E(x,\tau)=e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}}$. Com efeito, denotando $\frac{1}{4\nu\tau}$ por c, obtemos

$$\hat{E}(\omega,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\nu\tau}} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - cx_k^2} dx_k.$$
 (2.10)

2.1. PRELIMINARES 61

De forma análoga ao que foi feito quando resolvemos a equação do calor, podemos completar o quadrado no expoente. Dessa forma, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - cx_k^2} dx_k = e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(x_k + \frac{i\omega_k}{2c}\right)^2} dx_k.$$

Fazendo a substituição $s_k=x_k-\frac{i\omega_k}{2c}$, obtemos $ds_k=dx_k$. Logo, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x_k - c x_k^2} \, dx_k = e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c s_k^2} \, ds_k = \left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega_k^2}{4c}}.$$

Sendo assim, por (2.10) e lembrando que $c = \frac{1}{4\nu\tau}$, segue que

$$\hat{E}(\omega,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^{n} (4\pi\nu\tau)^{\frac{1}{2}} e^{-\nu\tau\omega_k^2} = \frac{(4\pi\nu\tau)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\nu\tau\|\omega\|^2},$$

e por (2.9), concluímos que

$$\widehat{e^{\nu\Delta\tau}u} = \hat{u}e^{-\nu\tau\|\omega\|^2}.$$

Proposição 2.9. Sejam $1 \leqslant r \leqslant 2$ e $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, com $n \in \mathbb{N}$, então

$$\|D^{\alpha}(e^{\nu\Delta\tau}u)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})} \leq c(n,k)(\nu\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}}\|u\|_{\mathcal{L}^{r}(\mathbb{R}^{n})},\tag{2.11}$$

onde $k = |\alpha|$.

Demonstração. Ver [17] p.p. 32.

2.1.4 Notação

Introduziremos a notação que será utliizada ao decorrer do texto.

Letras em negrito representam vetores n-dimensionais $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ (na maioria dos casos n=3), A k-ésima derivada parcial é denotada por D_k (ou D^{e_k}), enquanto D^k representa o gradiente k-dimensional. Também vale ressaltar a definição da norma \mathcal{L}^p das funções vetoriais

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_{i}\|_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|D\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \|D_j u_i\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e mais geralmente,

$$||D^{k}\mathbf{u}||_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})} = \left(\sum_{j_{1}=1}^{n} \cdots \sum_{j_{k}=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ||D_{j_{1}} \cdots D_{j_{k}} u_{i}||_{\mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, a norma em $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)} = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

2.2 Propriedades das soluções de Leray

2.2.1 Introdução e contexto histórico

Em 1934, no artigo "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplassement l'espace" (ver [13]) Leray construiu soluções fracas de energia finita²

$$\mathbf{u}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^{\infty}([0,\infty), \mathcal{L}^{2}_{\sigma}(\mathbb{R}^{3})) \cap \mathcal{C}_{w}([0,\infty), \mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})) \cap \mathcal{L}^{2}([0,\infty), \dot{H}^{1}(\mathbb{R}^{3}))^{3}$$

$$(2.12)$$

para as equações de Navier-Stokes em \mathbb{R}^3

$$\mathbf{u}_{t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \rho = \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_{0} \in \mathcal{L}_{\sigma}^{2}(\mathbb{R}^{3})$$
(2.13)

onde $\nu > 0$ é constante. Estas soluções são tais que $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$, quando $t \to 0^+$, e satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} \leq \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + 2\nu \int_{0}^{t} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} ds \leq \|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}. \tag{2.14}$$

para todo t>0. A unicidade desas soluções ainda é um problema em aberto, porém, no mesmo artigo Leray mostrou que existe um instante de tempo T_{**} tal que a solução \mathbf{u} se torna suave em $\mathbb{R}^3 \times [T_{**}, \infty)$ e $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([T_{**}, \infty), H^k(\mathbb{R}^3))^4$ para cada $k \geqslant 0$. Um problema importante que foi deixado em aberto por Leray no final de seu artigo diz a respeito do decaimento de energia em L^2 da solução. Matematicamente, isto é entender o que acontece com $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ quando $t \to \infty$. Leray suspeitava que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

quando $t \to \infty$. Uma demonstração para esse fato será apresentada no Teorema 2.15.

Uma outra forma de estudar propriedades das soluções das equações de Navier-Stokes é a partir das soluções $\mathbf{v}(\cdot,t)$ do problema linearizado

$$\mathbf{v}_t = \nu \Delta \mathbf{v};$$
 $\mathbf{v}(\cdot, t_0) = \mathbf{u}(\cdot, t_0),$

com $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Aqui,

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)$$

onde $e^{\nu\Delta(t-t_0)}$ é o semigrupo do calor visto no preliminares. Com essas soluções é possível estudar algumas estimativas de decaimento como

$$\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

- $L^{\infty}([0,\infty),L^{2}_{\sigma}(\mathbb{R}^{3}))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot,t):[0,\infty)\to L^{2}(\mathbb{R}^{3})$ tal que $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ e $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{L^{2}(\mathbb{R}^{3})}<\infty$.
- · $C_w([0,\infty),L^2(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot,t):[0,\infty)\to L^2(\mathbb{R}^3)$ fracamente contínuas.
- · $L^2([0,\infty),\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ é o espaço das funções $\mathbf{u}(\cdot,t):[0,\infty)\to\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_0^\infty \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)}^2 dt < \infty.$$

²i.e., $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \infty$.

³As definições desses espaços são dadas abaixo:

⁴i.e., $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^k(K)} < \infty$, onde $K \subseteq [T_{**},\infty)$ é compacto.

$$t^{\frac{n}{4}}\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

quando $t \to \infty$ Uma outra pertunta importante (que não será trabalhada aqui) é sobre o erro ou diferença da solução de Leray e da solução do problema linearizado. Essa pergunta foi respondida por Weigner (em [21]) onde foi provado que

$$t^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}(\cdot,t)-e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\to 0$$

quando $t \to \infty$.

2.2.2 Resultados

Tomando uma função molificadora $\eta \in \mathcal{C}^{\infty}_{c}(\mathbb{R}^{3})$ e sua versão escalada η_{δ} (vista no Capítulo 1, Seção 1.4) definimos $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \eta_{\delta} * \mathbf{u}_{0}$, introduzimos \mathbf{u}_{δ} , $p_{\delta} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{3} \times [0,\infty))$ como a solução única do problema regularizado

$$\partial_{t}\mathbf{u}_{\delta} + \bar{\mathbf{u}}_{\delta} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\delta} + \nabla p_{\delta} = \nu \Delta \mathbf{u}_{\delta}; \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, 0) = \bar{\mathbf{u}}_{0, \delta},$$
(2.15)

onde $\bar{\mathbf{u}}_{\delta} = \eta_{\delta} * \mathbf{u}_{\delta}$. Em seu artigo, Leray mostrou que existe uma sequência apropriada $\delta' \to 0$ tal que conseguimos a convergência fraca⁵ em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{u}_{\delta'} \rightharpoonup \mathbf{u},$$
 (2.16)

para todo $t \ge 0$, onde $\mathbf{u}(\cdot, t)$ apresentada em (2.12) é contínua no instante t = 0. Além disso, a designaldade de energia (2.14) é satisfeita para todo $t \ge 0$ e em particular

$$\int_{0}^{\infty} \|D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} dt \leqslant \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}. \tag{2.17}$$

Outros resultados importantes se referem à projeção de Helmholtz⁶ de $-\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)$ em $\mathcal{L}^2_{\sigma}(\mathbb{R}^3)$ isto é, o campo $\mathbf{Q}(\cdot,t)\in\mathcal{L}^2_{\sigma}(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathbf{Q}(\cdot,t) := -\mathbf{u}(\cdot,t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot,t) - \nabla p(\cdot,t), \tag{2.18}$$

para todo t > 0. A seguir, estudaremos algumas estimativas para $\mathbf{Q}(\cdot, t)$.

Proposição 2.10. Para quase todo s > 0 (e para todo $s \ge T_{**}$), tem-se

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})},$$

para todo t > s, onde c é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, dada por

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\omega \cdot x} f(x) \, dx.$$

Dada $\mathbf{v}(\cdot,s)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, obtemos pelo Teorema 2.3 que

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} = \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} = \int_{\mathbb{R}^{3}} e^{-2\nu\|\omega\|^{2}(t-s)}\|\hat{\mathbf{v}}(\omega,s)\|^{2} d\omega,$$

⁵Dado um espaço de Banach X, dizemos que uma sequência $(x_n) \subseteq X$ converge fracamente para $x \in X$ $(x_n \rightharpoonup x)$ se $f(x_n) \rightarrow f(x)$, para todo $f \in X'$, onde X' é o espaço de todos funcionais lineares limitados de X em \mathbb{R} .

⁶A projeção de Helmholtz é uma forma de escrever um campo vetorial F como F = G + H, onde G, H são campos vetoriais tais que $\nabla \cdot G = 0$ e $H = \nabla \Phi$ para alguma função $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

onde utlizamos o resultado sobre a transformada de Fourier do semigrupo do calor (ver Teorema 2.8 **(c)**). Além disso, $\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|^2 \le \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_{\infty} = \sup\{\|\hat{\mathbf{v}}(\omega, s)\|; \omega \in \mathbb{R}^3\}$. Logo

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leqslant \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-s)\|\omega\|^2} d\omega,$$

onde a integral do lado direito é uma Gaussiana, cujo resultado é $c\nu^{-\frac{3}{2}}(t-s)^{-\frac{3}{2}}$. Portanto, podemos escrever

 $\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{v}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\hat{\mathbf{v}}(\cdot,s)\|_{\infty}.$ (2.19)

O resultado que queremos, é uma aplicação direta de (2.19) com $\mathbf{v}(\cdot, s) = \mathbf{Q}(\cdot, s)$, o restante da demonstração será dedicado a estimativa do valor de $\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_{\infty}$.

Note que utilizando a derivada da transformada de Fourier, temos que $\mathcal{F}[D^{\alpha}f] = (i\omega)^{\alpha}\hat{f}$, sendo assim se $\alpha = e_i$ para algum j = 1, 2, 3, $\mathcal{F}[D^{e_j}f] = i\omega_i\hat{f}$. Dito isso,

$$\mathcal{F}[\nabla p(\cdot,s)] = i\hat{p}(\omega,s)\omega,$$

e $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$ pois, por (2.18) e (2.13), $\mathbf{Q} = \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u}$ e

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = (\nabla \cdot \mathbf{u})_t - \nu \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

já que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, dessa forma

$$0 = \widehat{\nabla \cdot \mathbf{Q}} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\widehat{\partial Q}_{j}}{\partial x_{j}} = \sum_{j=1}^{3} i \omega_{j} \hat{\mathbf{Q}},$$

ou seja, $\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}} = 0$. Além disso, pela definição de $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ temos que

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + \mathcal{F}[\nabla p(\cdot, s)](\omega) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega).$$

Com isso, fazendo o produto interno por $\hat{\mathbf{Q}}$ em ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) + i\hat{p}(\omega, s)\omega \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s) = -\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega) \cdot \hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)$$

Deste modo, pela desigualde de Cauchy-Schwarz, podemos escrever,

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)\|^2 \leqslant \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)]\| \|\hat{\mathbf{Q}}\|.$$

Ou seja,

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\omega, s)\| \leq \|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](\omega)\|.$$

Isso nos diz que

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot,s)\|_{\infty} \leqslant \|\mathcal{F}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}](\cdot,s)\|_{\infty}. \tag{2.20}$$

Por outro lado, para i = 1, 2, 3, é verdade que

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla u_i(\cdot,s)](\omega)|\leqslant \sum_{j=1}^3|\mathcal{F}[u_j(\cdot,s)D_j\,u_i(\cdot,s)](\omega)|\leqslant (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^3\|u_j(\cdot,s)D_j\,u_i(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}^3$. Por fim, novamente utilizando a Desigualdade de Hölder (Cauchy-Schwarz) e a definição das normas, chegamos a

$$|\mathcal{F}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla u_i(\cdot,s)](\omega)|\leqslant c\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_i(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Isto mostra que

$$\|\mathcal{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_{\infty} \leqslant c \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}. \tag{2.21}$$

Dito isso, por (2.19), (2.20) e (2.21), inferimos que

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})},$$

como queriamos mostrar.

Repetindo o argumento utilizado na demonstração acima para as soluções do problema regularizado (2.15), obtemos

$$\|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_{\delta}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c\nu^{-\frac{3}{4}}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\|D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})},\tag{2.22}$$

onde c é uma constante positíva e

$$\mathbf{Q}_{\delta}(\cdot,s) = -\bar{\mathbf{u}}_{\delta}(\cdot,s) \cdot \nabla \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s) - \nabla p_{\delta}(\cdot,s).$$

Observação: Vale ressaltar que as soluções do probblema regularizado também satisfazem a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + 2\nu \int_{0}^{t} \|D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} ds \leq \|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}.$$
 (2.23)

para todo t > 0.

Proposição 2.11. Para quase todo s > 0 (e todo $s \ge T_{**}$), tem-se

$$\|D^{\alpha}(e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s))\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})},$$

para todo t > s, onde $k = |\alpha|$ e c(k) depende apenas de k.

Demonstração. Por (2.11) obtemos

$$||D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} = ||D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)/2}[e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot,s)]]||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}$$

$$\leq c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}(t-s)^{-\frac{k}{2}}||e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})},$$

e pela Proposição 2.10, podemos escrever

$$\|D[e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}.$$

Proposição 2.12. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (2.13). Então existe $t_{**} > \mathcal{T}_{**}$ (com t_{**} dependendo da solução \mathbf{u}) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma funçao monotonicamente decrescente de t no intervalo $[t_{**},\infty)$. (rever)

Demonstração. Sejam $t_0 \geqslant T_{**}$ e $t > t_0$. Aplicando a k-ésima derivada parcial D_k à $\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}$, fazendo o produto escalar com $D_k \mathbf{u}$, integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{3}} \int_{t_{0}}^{t} D_{k} \mathbf{u}_{t} \cdot D_{k} \mathbf{u} \, ds dx + \int_{\mathbb{R}^{3}} \int_{t_{0}}^{t} D_{k} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_{k} \mathbf{u} \, ds dx
+ \int_{\mathbb{R}^{3}} \int_{t_{0}}^{t} D_{k} \nabla p \cdot D_{k} \mathbf{u} \, ds dx = \nu \int_{\mathbb{R}^{3}} \int_{t_{0}}^{t} D_{k} \Delta \mathbf{u} \cdot D_{k} \mathbf{u} \, ds dx$$
(2.24)

Vamos analisar cada integral separadamente. Note que $D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_k \mathbf{u}\|^2$. Dessa forma

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_k \mathbf{u}_t \cdot D_k \mathbf{u} \, ds dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, s)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 - \|D_k \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 \, dx.$$

Note que expandindo a segunda integral e utilizando integração por partes⁷ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{i=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k u_i(D_i u_j) D_k u_j \, dx = -\sum_{i=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_i(D_k u_i D_k u_j) \, dx$$

⁷explicar po não tem termo de fronteira, não lembro da explicação

e utilizando a regra do produto na última integral

$$\int_{\mathbb{R}^{3}} D_{k}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_{k} \mathbf{u} \, dx = -\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} u_{j} D_{k} D_{i} u_{i} D_{k} u_{j} \, dx - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} u_{j} D_{k} u_{i} D_{i} D_{k} u_{j} \, dx$$

porém a primeira integral do lado direito é igual a zero pois

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} u_{j} D_{k} D_{i} u_{i} D_{k} u_{j} dx = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} u_{j} D_{k} \left(\sum_{i=1}^{3} D_{i} u_{i} \right) D_{k} u_{j} dx$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} u_{j} D_{k} (\nabla \cdot \mathbf{u}) D_{k} u_{j} = 0$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_j D_k u_i D_i D_k u_j \, dx.$$

A terceira integral é igual a zero, já que

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k D_j p D_k u_j \, dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j D_k p D_k u_j \, dx$$

utlizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \nabla p \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = -\sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_j D_k u_j \, dx = -\int_{\mathbb{R}^3} D_k p D_k \left(\sum_{j=1}^3 D_j u_j \right) \, dx = 0$$

pois novamente $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por fim, a última integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k \mathbf{u} \cdot D_k \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} D_j^2 D_k u_i D_k u_i$$

novamente utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{3}} \Delta D_{k} \mathbf{u} \cdot D_{k} \mathbf{u} \, dx = -\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} (D_{j} D_{k} u_{i}) (D_{j} D_{k} u_{i})$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} (D_{j} D_{k} u_{i})^{2} \, dx = -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} \|D_{j} D_{k} \mathbf{u}\|^{2} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^{3}} \|D_{k} D \mathbf{u}\|^{2} \, dx$$

Dito isso, voltando para (2.24) e somando em $1 \le k \le 3$, segue que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^{3}} \|D_{k} \mathbf{u}(\cdot, t)\|^{2} - \|D_{k} \mathbf{u}(\cdot, t_{0})\|^{2} dx + \nu \sum_{k=1}^{3} \int_{t_{0}}^{t} \int_{\mathbb{R}^{3}} \|D_{k} D \mathbf{u}\|^{2} dx ds$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \int_{t_{0}}^{t} \int_{\mathbb{R}^{3}} u_{j} D_{k} u_{i} D_{i} D_{k} u_{j} dx ds.$$

Lembrando da definição das normas vistas nos preliminares, multiplicando ambos os lados por 2 e reorganizando os termos, podemos reescrever a equação acima como:

$$||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + 2\nu \int_{t_{0}}^{t} ||D^{2}\mathbf{u}(\cdot,t)||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} ds$$

$$= ||D\mathbf{u}(\cdot,t_{0})||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + 2\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \int_{t_{0}}^{t} \int_{\mathbb{R}^{3}} u_{i}D_{k}u_{j}D_{j}D_{k}u_{i} dxds.$$

(posso começar a correção daqui) Utilizando a Desigualdade de Hölder e a definição das normas, temos que o lado direito da equação acima é menor ou igual a aqui precisa detalhar, a gente fez mas não consegui entender pelas fotos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}+2\int_{t_{0}}^{t}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\infty}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\|D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}ds$$

que pela Desigualdade de Gagliardo-Nireneberg (2.2) em $\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\infty}$ é menor ou igual a

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}+2\int_{t_{0}}^{t}\|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{2}}\|D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}ds.$$

Em particular temos

$$||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + 2\nu \int_{t_{0}}^{t} ||D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} ds$$

$$\leq ||D\mathbf{u}(\cdot,t_{0})||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + 2\int_{t_{0}}^{t} \left[||\mathbf{u}_{0}||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ||D\mathbf{u}(\cdot,s)||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \right]^{\frac{1}{2}} ||D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)||_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}$$

$$(2.25)$$

para todo $t \geqslant t_0$. Daí, seja $t_0 > t_*$ tal que por (2.14) $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2$. Dessa forma, segue que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} < \nu^2$$
 (2.26)

para todo $s > t_0$. Com efeito, suponha que (2.26) é falso, dessa forma, existiria $t_1 > t_0$ tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$ para todo $t_0 \leq s < t_1$ com $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \nu^2$. Tomando $t = t_1$ em (2.25) temos que $\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. De fato

$$\begin{split} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_{1})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + 2\nu \int_{t_{0}}^{t_{1}} \|D^{2}\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} ds \\ & \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_{0})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + 2\int_{t_{0}}^{t_{1}} \left[\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \right]^{\frac{1}{2}} \|D^{2}\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} \end{split}$$

como $s \in [t_0, t_1]$ temos que $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \nu^2$ obtemos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{t_1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

que resulta em $\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ como desejado. Então

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leq \nu^2$$

o que é uma contradição. Dessa forma (2.26) é válido. De (2.25) e (2.26) temos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + 2\gamma \int_{t_{0}}^{t} \|D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot,t_{2})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}$$

para todo $t\geqslant t_2\geqslant t_0$, onde $\gamma=\nu-\|\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}>0$ é uma constante. Tomando $t_{**}=t_0$, finalizamos a demonstração.

A proposição abaixo utiliza a solução do problema linearizado para estabelecer uma estimativa importante

Proposição 2.13. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ solução de Leray para (2.13). Dados $\tilde{t}_0 > t_0 > 0$ tem-se

$$\|D^{\alpha}\mathbf{v}(\cdot,t) - D^{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{5}{4} + \frac{k}{2}\right)}\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}(\tilde{t}_{0} - t_{0})^{\frac{1}{2}}(t - \tilde{t}_{0})^{-\left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2}\right)}$$

para todo
$$t > \tilde{t}_0$$
, onde $\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)}\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_0)$ e $k = |\alpha|$.

Demonstração. Primeiramente, reescrevemos $\mathbf{v}(\cdot,t)$ como

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \left[\mathbf{u}(\cdot,t_0) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,t_0) \right] + e^{\nu\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,t_0),$$

onde $t > t_0$ e $\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, t)$ é dada em (2.15). Ademais, temos que

$$\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,t_0) = e^{\nu \Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu \Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_{\delta}(\cdot,s) \, ds. \tag{2.27}$$

Com efeito, considere a equação

$$\partial_{s}\mathbf{u}_{\delta}=\mathbf{Q}_{\delta}+\nu\Delta\mathbf{u}_{\delta}$$

onde $\mathbf{Q}_{\delta} = -\bar{\mathbf{u}}_{\delta} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\delta} - \nabla p_{\delta}$. Aplique o semigrupo do calor $e^{\nu \Delta(t_0 - s)}$ em ambos os lados e integre sobre $[0, t_0]$, para obter

$$\int_{0}^{t_{0}} e^{\nu \Delta(t_{0}-s)} \partial_{s} \mathbf{u}_{\delta} ds = \int_{0}^{t_{0}} e^{\nu \Delta(t_{0}-s)} \mathbf{Q}_{\delta} ds + \nu \int_{0}^{t_{0}} e^{\nu \Delta(t_{0}-s)} \Delta \mathbf{u}_{\delta} ds.$$
 (2.28)

Além disso, note que

$$\partial_{s} \left[e^{\nu \Delta(t_{0} - s)} \mathbf{u}_{\delta} \right] = -\nu e^{\nu \Delta(t_{0} - s)} \Delta \mathbf{u}_{\delta} + e^{\nu \Delta(t_{0} - s)} \partial_{s} \mathbf{u}_{\delta}$$

ou seja,

$$e^{\nu\Delta(t_0-s)}\partial_s\mathbf{u}_{\delta} = \partial_s\left[e^{\nu\Delta(t_0-s)}\mathbf{u}_{\delta}\right] + \nu e^{\nu\Delta(t_0-s)}\Delta\mathbf{u}_{\delta}.$$

Dessa forma, (2.28) se torna

$$\int_0^{t_0} \partial_s \left[e^{\nu \Delta(t_0 - s)} \mathbf{u}_\delta \right] \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu \Delta(t_0 - s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds = \int_0^{t_0} e^{\nu \Delta(t_0 - s)} \mathbf{Q}_\delta \, ds + \nu \int_0^{t_0} e^{\nu \Delta(t_0 - s)} \Delta \mathbf{u}_\delta \, ds$$
 isto é,

$$\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,t_0) - e^{\nu \Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} = \int_0^{t_0} e^{\nu \Delta (t_0-s)} \mathbf{Q}_{\delta} ds,$$

por (2.13). Isto prova (2.27). Dito isso, é verdade que

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)} \left[\mathbf{u}(\cdot,t_0) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,t_0) \right] + e^{\nu\Delta t} \mathbf{\bar{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_{\delta}(\cdot,s) \, ds,$$

para todo $t>t_{0}$. De forma análoga, deduzimos que

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_0)} \left[\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_0) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,\tilde{t}_0) \right] + e^{\nu\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\nu\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_{\delta}(\cdot,s) \, ds.$$

para todo $t > \tilde{t}_0$. Dessa forma, podemos escrever

$$D^{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) - D^{\alpha}\mathbf{v}(\cdot,t) = D^{\alpha}\left(e^{\nu\Delta(t-\tilde{t}_{0})}\left[\mathbf{u}(\cdot,\tilde{t}_{0}) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,\tilde{t}_{0})\right]\right)$$
$$-D^{\alpha}\left(e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\left[\mathbf{u}(\cdot,t_{0}) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,t_{0})\right]\right) + D^{\alpha}\int_{t_{0}}^{\tilde{t}_{0}}e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_{\delta}(\cdot,s)\,ds.$$

Agora, considere que $K\subseteq\mathbb{R}^3$ é um compacto qualquer. Portanto, para cada $t>\tilde{t}_0$ e $\delta>0$, infere-se

$$\|D^{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) - D^{\alpha}\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(K)} \leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + \int_{t_{0}}^{\tilde{t}_{0}} \|D^{\alpha}\left[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}_{\delta}(\cdot,s)\right]\|_{\mathcal{L}^{2}(K)} ds, \tag{2.29}$$

onde

$$\begin{split} J_{\alpha,\delta}(t) &= \big\| D^{\alpha} \big(e^{\nu \Delta(t-\tilde{t}_0)} \big[\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, \tilde{t}_0) \big] \big) \big\|_{\mathcal{L}^2(K)} \\ &+ \big\| D^{\alpha} \big(e^{\nu \Delta(t-t_0)} \big[\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, t_0) \big] \big) \big\|_{\mathcal{L}^2(K)}. \end{split}$$

Utilizando a Proposição 2.11 e (2.22), temos que

$$\|D^{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t)-D^{\alpha}\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathcal{K})}\leqslant J_{\alpha,\delta}(t)+c(k)\nu^{-\frac{k}{2}}\int_{t_{0}}^{\tilde{t}_{0}}(t-s)^{-\frac{k}{2}}\|e^{\nu\Delta(t-s)/2}\mathbf{Q}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\,ds$$

$$\leq J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)}(t - \tilde{t}_0)^{-\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t - s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$
 (2.30)

Observe que a integral pode ser simplificada, já que $s \leqslant \tilde{t}_0$ implica em $(t-s)^{-\frac{3}{4}} \leqslant (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}}$ e pela desigualdade de energia (2.23) $\|\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$. Sendo assim, podemos escrever

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leq (t-\tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$
(2.31)

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder e novamente pela desigualdade de energia (2.23), seque que

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leqslant \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|D\mathbf{u}_{\delta}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{(\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}}}{(2\nu)^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$
(2.32)

Portanto, por (2.31) e (2.32), obtemos

$$\|D^{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) - D^{\alpha}\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(K)} \leqslant J_{\alpha,\delta}(t) + c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{5}{4}\right)}(t-\tilde{t}_{0})^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)}(\tilde{t}_{0}-t_{0})^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}.$$

Tomando $\delta = \delta'$ (ver (2.16)), temos que $J_{\alpha,\delta}(t) \to 0$, quando $\delta \to 0$, pois, dados $\sigma, \tau > 0$, é verdade que

$$\|D^{\alpha}(e^{\nu\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot,\sigma)-\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,\sigma)])\|_{\mathcal{L}^{2}(K)}\to 0,$$

quando $\delta \to 0$. De fato, denotando $\Phi_{\delta}(\cdot, \tau) = D^{\alpha}(e^{\nu \Delta \tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, \sigma)])$, tem-se

$$\Phi_{\delta}(\cdot, \tau) = H_{\alpha}(\cdot, \tau) * [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot, \sigma)],$$

onde $H_{\alpha}(\cdot,\tau)=D^{\alpha}E(\cdot,\tau)\in\mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}^{3})\cap\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{3})$, com $E(x,\tau)=e^{-\frac{\|x\|^{2}}{4\nu\tau}}$, não depende de δ . Como $\mathbf{u}(\cdot,\sigma)-\mathbf{u}_{\delta}(\cdot,\sigma)\rightharpoonup 0$, segue que $\Phi_{\delta}(x,\tau)\to 0$ para cada $x\in\mathbb{R}^{3}$, quando $\delta\to 0$. Por outro lado, as seguintes estimativas valem pela desigualdade de Hölder e mudança de variáveis

$$\begin{aligned} |\Phi_{\delta}(x,t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^{3}} |H_{\alpha}(x-y,\tau)[\mathbf{u}(y,\sigma) - \mathbf{u}_{\delta}(y,\sigma)]| \, dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{3}} |H_{\alpha}(x-y,\tau)|^{2} \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{3}} |\mathbf{u}(y,\sigma) - \mathbf{u}_{\delta}(y,\sigma)|^{2} \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|H_{\alpha}(\cdot,\tau)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \|\mathbf{u}(\cdot,\sigma) - \mathbf{u}_{\delta}(\cdot,\sigma)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}. \end{aligned}$$

utilizando a desigualdade triangular e (2.23) obtemos

$$|\Phi_{\delta}(x,\tau)| \leqslant 2\|H_{\alpha}(\cdot,\tau)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (pois $2\|H_{\alpha}(\cdot,\tau)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$ é constante em relação a x e K é limitado, logo pertence a $\mathcal{L}^1(K)$), segue que $\|\Phi_{\delta}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(K)} \to 0$, quando $\delta \to 0$ (pelo fato de K ser compacto). Dito isso, fazendo $\delta \to 0$ em (2.30) inferimos que

$$\|D^{\alpha}\tilde{\mathbf{v}}(\cdot,t) - D^{\alpha}\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathcal{K})} \leqslant c(k)\nu^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{5}{4}\right)}\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2}(\tilde{t}_{0} - t_{0})^{\frac{1}{2}}(t - \tilde{t}_{0})^{-\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)},$$

para todo $t_0 > \tilde{t}_0$. Tomando o supremo de todos $K \subseteq \mathbb{R}^3$ compactos, obtemos a desigualdade desejada.

O restante dessa seção será destinado a estudar estimativas de decaimento de energia das soluções de Leray

Teorema 2.14. Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.13), então,

$$t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} o instante de tempo encontrado na Proposição 2.12. Suponha que a afirmação é falsa, nesse caso existem uma sequência crescente $t_{\ell} \to \infty$ (com $t_{\ell} \geqslant t_{**}$ e $t_{\ell} \geqslant 2t_{\ell-1}$ para todo ℓ) e um $\varepsilon > 0$ fixo tais que,

$$t_{\ell} \| D\mathbf{u}(\cdot, t_{\ell}) \|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} \geqslant \varepsilon$$

para todo ℓ. Em particular, é verdade, pela Proposição 2.12

$$\int_{t_{\ell-1}}^{t_{\ell}} \| D\mathbf{u}(\cdot,s) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \, ds \geqslant (t_{\ell} - t_{\ell-1}) \| D\mathbf{u}(\cdot,t_{\ell}) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geqslant \frac{1}{2} t_{\ell} \| D\mathbf{u}(\cdot,t) \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^2} \geqslant \frac{1}{2} \varepsilon,$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$, o que contradiz a desigualdade de energia (2.17), pois

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds < \infty,$$

e passando ao limite quando $\ell \to \infty$, encontramos $\varepsilon \leqslant 0$. Portanto, a afirmação do teorema é válida.

O teorema abaixo foi conjecturado por Leray no final do seu artigo (ver [13]), e foi somente resolvido 50 anos depois por Kato (ver [10]). Uma simples demonstração será apresentada abaixo utilizando conceitos que já eram conhecidos em 1934.

Teorema 2.15 (Solução do problema clássico de Leray). Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray para (2.13), então,

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$
,

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Seja t_{**} como definido na Proposição 2.12. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $t_0 \geqslant t_{**}$ suficientemente grande tal que pelo Teorema 2.14, podemos inferir

$$t^{\frac{1}{2}} \| D\mathbf{u}(\cdot, t) \|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant \varepsilon \tag{2.33}$$

para todo $t \ge t_0$. Como $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave em $[t_0, \infty)$ (ver Seção 2.2.1) obtemos, de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.13, que

$$\mathbf{u}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\,ds,$$

para todo $t\geqslant t_0$ Dito isso, utlizando a Proposição 2.10, podemos escrever

$$\begin{split} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} & \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + \int_{t_{0}}^{t} \|e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds \\ & \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + c\nu^{-\frac{3}{4}} \int_{t_{0}}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds. \end{split}$$

Pela desigualdade de energia (2.14), concluímos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \int_{t_{0}}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}}\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds,$$

para todo $t \ge t_0$. Por (2.33), deduzimos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant \|e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \varepsilon \int_{t_{0}}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}}s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Note que

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} \, ds \leqslant c,$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Sendo assim, é verdade que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leq \|e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + c\varepsilon\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.3, sabemos que

$$\begin{split} \|e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathcal{F}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\omega,t_0)]\|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2} \|\hat{\mathbf{u}}(\omega,t_0)\|^2 d\omega. \end{split}$$

Como $e^{-2\nu(t-t_0)\|\omega\|^2}\|\hat{\mathbf{u}}(\omega,t_0)\|^2 \leq \|\hat{\mathbf{u}}(\omega,t_0)\|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$, então, pelo Teorema da Convergência Dominada, inferimos

$$\|e^{
u\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} o 0$$
,

quando $t \to \infty$. Dito isso, concluímos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant (1+c\nu^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)})\varepsilon,$$

para todo t>0 suficientemente grande. Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, isso mostra que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$
,

guando
$$t \to \infty$$
.

Note que os Teoremas 2.14 e 2.15 juntos mostram que temos o decaimento de energia na norma do espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$, já que $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2$. Mais precisamente

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^{1}(\mathbb{R}^{3})}^{2} = \|\mathbf{u}(\cdot,t_{0})\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} + t^{-1} \left[t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}\right]^{2} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

A demonstração do lema abaixo é bastante extensa, porém é de extrema importância para o último teorema dessa seção.

Lema 2.16. Para cada $k\geqslant 0$, denotando $U_k(t):=t^{\frac{k}{2}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}$, tem-se

$$U_k \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**}, \infty)).$$

Demonstração. O caso k = 0 segue da desigualdade de energia (2.14), que

$$U_0(t) = t^0 \|D^0 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo t>0 (em particular, para todo $t\geqslant T_{**}$). Logo, $U_0\in\mathcal{L}^\infty([T_{**},\infty))$.

O caso k=1 também já foi provado anteriormente. Com efeito pelo Teorema 2.14, temos que $U_1(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso é suficiente para mostrar que $U_1 \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**},\infty))$ pois $|U_1(t)| \leqslant 1$ para todo t suficientemente grande.

Dito isso, resta provar a afirmação para $k \geqslant 2$. De forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.13, dado $t_0 \geqslant T_{**}$ podemos escrever $\mathbf{u}(\cdot, t)$ como

$$\mathbf{u}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0) + \int_{t_0}^t e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)\,ds,$$

para todo $t \geqslant t_0$. Dessa forma, para cada multi-índice α , temos que

$$\|D^{\alpha}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leq \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + \int_{t_{0}}^{t} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds, \quad (2.34)$$

para todo $t\geqslant t_0$ Defina $U^{\alpha}(t):=t^{\frac{k}{2}}\|D^{\alpha}\mathbf{u}(\cdot,t)\|$ com $k=|\alpha|$. De (2.34) segue que

$$U^{\alpha}(t) \leqslant I_1(\alpha, t) + I_2(\alpha, t) + J_{\alpha}(t),$$

onde

$$I_1(\alpha,t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot,t_0)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

$$I_2(\alpha,t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t_0}^{t'} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

$$J_{\alpha}(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

com $t' = \frac{t_0 + t}{2}$. Conseguimos estimar $I_1(\alpha, t)$ de forma direta. Com efeito, por (2.11) e pela desigualdade de energia (2.14), inferimos que

$$|I_1(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu) \|\mathbf{u}(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t-t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}} \leqslant c(k,\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t-t_0)^{-\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}}.$$

Porém, note que

$$(t-t_0)^{-\frac{k}{2}}t^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t-t_0}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(1 + \frac{t_0}{t-t_0}\right)^{\frac{k}{2}} \leqslant (1+t_0)^{\frac{k}{2}}.$$
 (2.35)

pois $\frac{t_0}{t-t_0}\leqslant t_0$ para todo $t\geqslant t_0+1$. Dessa forma

$$|I_1(\alpha, t)| \le c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0),$$
 (2.36)

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Por outro lado utlizando a Proposição 2.11, deduzimos

$$\begin{aligned} |I_{2}(\alpha,t)| &\leqslant c(k,\nu)t^{\frac{k}{2}} \int_{t_{0}}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds \\ &\leqslant c(k,\nu)t^{\frac{k}{2}} \int_{t_{0}}^{t'} (t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} s^{-\frac{1}{2}} \left[s^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \right] ds. \end{aligned}$$

Sabemos que $U_1 \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**}, \infty))$, assim, existe uma constante M_1 tal que

$$|U_1(s)| = s^{\frac{1}{2}} ||D\mathbf{u}(\cdot, s)||_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant M_1 \text{ qtp em } [T_{**}, \infty).$$
 (2.37)

Dessa forma, também utlizando a desigualdade de energia (2.14) e o fato de $s \le t'$ (o que implica em $t^{\frac{k}{2}}(t-s)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)} \le c(k)(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}$), concluímos que

$$|I_2(\alpha,t)| \leqslant c(k,\nu) M_1 \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t-t_0)^{-\frac{3}{4}} \int_{t_0}^{t'} s^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Sendo assim, por (2.35), chegamos a

$$|I_2(\alpha,t)| \leq c(k,\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t-t_0)^{-(\frac{k}{2}+\frac{3}{4})} (t+t_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado

$$(t-t_0)^{-\frac{3}{4}}(t+t_0)^{\frac{1}{2}}=(t-t_0)^{-\frac{1}{4}}(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}(t+t_0)^{\frac{1}{2}}\leqslant \left(\frac{t+t_0}{t-t_0}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant (2t_0+1)^{\frac{1}{2}}.$$

para todo $t \ge t_0 + 1$. Por isso, podemos escrever

$$|I_2(\alpha, t)| \le c(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0).$$
 (2.38)

para todo $t \ge t_0 + 1$. Assim, obtemos

$$U^{\alpha}(t) \leqslant c(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + J_{\alpha}(t),$$
 (2.39)

para todo $t \geqslant t_0+1$ Logo, ainda resta estimar $J_{\alpha}(t)$, porem não conseguimos estimar $J_{\alpha}(t)$ de forma geral para todo α , então faremos essa estimativa para o caso em que $|\alpha|=2$ e depois utilizaremos indução para mostrar uma estimativa de forma geral. Com efeito, considerando $D^{\alpha}=D_iD_i$ (consequentemente denotando $J_{\alpha}(t)$ por $J_{ij}(t)$) temos por (2.11) que

$$J_{i\ell}(t) = t \int_{t'}^{t} \|D_{i}[e^{\nu\Delta(t-t_{0})}D_{\ell}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c(\nu) t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_{\ell}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})} ds.$$

Para estimar $\|D_{\ell}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)}$ Note que $D_{\ell}\mathbf{Q} = -D_{\ell}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}] - D_{\ell}\nabla p = -D_{\ell}[\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}] - \nabla q_{\ell}$ onde $q_{\ell} = D_{\ell}p$. Aplicando o divergente nessa equação, temos que

$$-\Delta q_{\ell} = \operatorname{div}(D_{\ell}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]).$$

Aplicando a teoria de Calderon-Zygmund, temos para cada $1 < r < \infty$

$$\|\nabla q_{\ell}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{r}(\mathbb{R}^{n})} \leq c(r,n)\|D_{\ell}[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]\|$$

o que implica em

$$||D_{\ell}\mathbf{Q}(\cdot,t)||_{\mathcal{L}^{r}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c(r,n)||D_{\ell}[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]||_{\mathcal{L}^{r}(\mathbb{R}^{n})}.$$

No nosso, caso temos

$$\|D_{\ell}\mathbf{Q}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c\|D_{\ell}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})}$$

Dito isso, cheamos a

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu) t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D_{\ell}[\mathbf{u}(\cdot,s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})} ds$$

$$\leqslant c(\nu) t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\|D_{\ell}\mathbf{u}(\cdot,s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})} + \|\mathbf{u}(\cdot,s) \cdot \nabla D_{\ell}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})} \right) ds.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu) t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \Big(\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{4}(\mathbb{R}^{3})} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{4}(\mathbb{R}^{3})} \|D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \Big) ds,$$

e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1), podemos escrever

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu) t \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \Big(\|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{5}{4}} \|D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{3}{4}} \|D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} \Big) ds.$$

Reescrevendo a desigualdade acima, concluímos que

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu) t \int_{t'}^{t} s^{-\frac{11}{8}} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \left(\left(s^{\frac{1}{2}} \| D\mathbf{u}(\cdot,s) \|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \right)^{\frac{5}{4}} \left(s \| D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s) \|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \right)^{\frac{3}{4}} + \| \mathbf{u}(\cdot,s) \|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \left(s^{\frac{1}{2}} \| D\mathbf{u}(\cdot,s) \|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \right)^{\frac{3}{4}} \left(s \| D^{2}\mathbf{u}(\cdot,s) \|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \right) \right) ds.$$

Fazendo as substituições adequadas, por (2.37), segue que

$$J_{i\ell}(t) \leq c(\nu) t M_1^{\frac{5}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s)^{\frac{3}{4}} ds$$
$$+ c(\nu) t M_1^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} (t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Utilizando a desigualdade de Young ($ab \leqslant a^p p^{-1} + b^q q^{-1}$ onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$ com a = 1, $b = U_2(s)^{\frac{3}{4}}$, p = 4 e $q = \frac{4}{3}$), temos que

$$U_2(s)^{\frac{3}{4}} \leqslant 1 + U_2(s). \tag{2.40}$$

Dessa forma

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu, M_1) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds + \left(c(\nu, M_1) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}}\right) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) ds.$$

Para simplificar a expressão acima, note que

$$t(t+t_0)^{-\frac{11}{8}} = t(t+t_0)^{-1}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} = \frac{t}{t+t_0}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \leqslant (t+t_0)^{-\frac{3}{8}}$$

e também

$$(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}(t-t_0)^{\frac{1}{8}} = (t+t_0)^{-\frac{1}{4}}(t+t_0)^{-\frac{1}{8}}(t-t_0)^{\frac{1}{8}} = (t+t_0)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{t-t_0}{t+t_0}\right)^{-\frac{1}{4}} \leqslant (t+t_0)^{-\frac{1}{4}}.$$

Dito isso

$$J_{i\ell}(t) \leqslant c(\nu, M_1)(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} + c(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) \, ds, \tag{2.41}$$

para todo i, ℓ e $t \geqslant t_0 + 1$. Dessa forma, por (2.36), (2.38) e (2.41), inferimos

$$U_2(t) \leqslant c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0)(t + t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t - s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) \, ds, \tag{2.42}$$

para todo $t \geqslant t_0 + 1$. Considere agora, t_2 , \mathbf{M}_2 dados por

$$t_2 := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4$$
 e $\mathbf{M}_2 := \sup\{U_2(s) : t_0 \le s \le t_2\}.$

Afirmamos que

$$U_2(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + 16c_{**}(\nu, M_1, \mathbf{u}_0) \mathbf{M}_2$$
 (2.43)

para todo $t \ge t_2$. De fato, definindo $\mathbf{U}_2(t) := \sup\{U_2(s) : t_2 \le s \le t\}$. Se $t' \ge t_2$, então por (2.42) deduzimos que

$$U_{2}(t) \leqslant c_{*}(k, \nu, t_{0}, M_{1}, \mathbf{u}_{0}) + c_{**}(\nu, M_{1}, \mathbf{u}_{0}) \mathbf{U}_{2}(t)(t + t_{0})^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t - s)^{-\frac{7}{8}} ds$$

$$\leqslant c_{*}(k, \nu, t_{0}, M_{1}, \mathbf{u}_{0}) + 8c_{**}(\nu, M_{1}, \mathbf{u}_{0})(t + t_{0})^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_{2}(t).$$

Porém, como $t \geqslant t_2$, temos, pela definição de t_2 que,

$$t + t_0 > t_2 > 2^{16} c_{**}^4$$
.

Isso implica em $2^{16}c_{**}^4 < t + t_0$ e elevando ambos os lados a 1/4 obtemos $16c_{**} < (t + t_0)^{\frac{1}{4}}$ que podemos reescrever como $8c_{**}(t + t_0)^{-\frac{1}{4}} < 1/2$. Dito isso, podemos escrever

$$U_2(t) < c_*(k, \nu, t_0, M_1, \mathbf{u}_0) + \frac{1}{2}\mathbf{U}_2(t).$$

Por outro lado, se $t' < t_2$, podemos reescrever (2.42) como

$$U_2(t) \leqslant c_* + c_{**}(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \left(\int_{t'}^{t_2} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) \, ds + \int_{t_2}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_2(s) \, ds \right).$$

Observe que em $[t', t_2]$, é verdade que $U_2(s) \leq \mathbf{M}_2 \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$, por outro lado em $[t_2, t]$, temos que $U_2(s) \leq \mathbf{U}_2(s) \leq \mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(s)$. Dessa forma

$$U_{2}(t) \leqslant c_{*} + c_{**}(t+t_{0})^{-\frac{3}{8}} \mathbf{M}_{2} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds + c_{**}(t+t_{0})^{-\frac{3}{8}} \mathbf{U}_{2}(t) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds$$

$$\leqslant c_{*} + 8c_{**}(t+t_{0})^{-\frac{1}{4}} \mathbf{M}_{2} + 8c_{**}(t+t_{0})^{-\frac{1}{4}} \mathbf{U}_{2}(t).$$

Como $(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} \leqslant 1$ e $8c_{**}(t+t_0)^{-\frac{1}{4}} < \frac{1}{2}$, segue que

$$U_2(t) \leqslant c_* + c_{**}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{U}_2(t).$$

para todo $t \ge t_2$. Com isso,

$$U_2(s) \leqslant c_* + 8c_{**}\mathbf{M}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{U}_2(s) \leqslant c_* + 8c_{**}\mathbf{M}_2 + \mathbf{U}_2(t)$$

para todo $s \in [t_2, t]$. Pasando ao supremo em $[t_0, t]$, inferimos

$$\mathbf{U}_{2}(t) \leqslant c_{*} + 8c_{**}\mathbf{M}_{2} + \frac{1}{2}\mathbf{U}_{2}(t)$$

para todo $t \geqslant t_2$. Isto prova (2.43). Ou seja, mostramos que $U_2(t)$ é limitado por uma constante que não depende de t em $[t_2, \infty)$. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^{\infty}([t_2, \infty])$. Porém, sabemos que em $[T_{**}, \infty)$. Em particular em $[T_{**}, t_2]$, $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave (ver [13]), o que implica em U_2 ser suave em um compacto, consequentemente limitada. Portanto $U_2 \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**}, \infty))$ como era desejado. Assim, mostrado o caso k=2.

Suponha que $U_{\ell} \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**}, \infty))$ para todo $\ell < k$. Vamos mostrar que $U_k \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**}, \infty))$. amos mostrar que $U_k \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**}, \infty))$. Dito isso seja α um multi-índice de ordem k. Denotando D^{α} por $D_i D^{\gamma}$ (onde γ é um multi-índice de ordem k-1), temos, de forma análoga ao que foi feito no caso k=2, que

$$J_{\alpha}(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} \|D^{\alpha}[e^{\nu \Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds \leqslant c(\nu) t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{\gamma} \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})} ds.$$

Além disso por Calderon-Zygmund

$$\|D^{\gamma}\mathbf{Q}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{r}(\mathbb{R}^{n})} \leqslant c(r,n)\|D^{\gamma}[\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,t)]\|_{\mathcal{L}^{r}(\mathbb{R}^{n})},$$

para cada $1 < r < \infty$ e qualquer multi-índice γ . Dessa forma, encontramos

$$J_{\alpha}(t)\leqslant c(\nu)\,t^{\frac{k}{2}}\int_{t'}^{t}(t-s)^{-\frac{7}{8}}\|D^{\gamma}[\mathbf{u}(\cdot,s)\cdot\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})}\,ds.$$

Utilizando a regra de Leibniz (ver Teorema 1.29), obtemos

$$J_{\alpha}(t) \leqslant c(\nu)t^{\frac{k}{2}} \sum_{\sigma \leqslant \gamma} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{\sigma} \mathbf{u}(\cdot,s) \cdot \nabla D^{\gamma-\sigma} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^{3})},$$

e utlizando a Desigualdade de Hölder, concluímos que

$$J_{\alpha}(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{\ell} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{4}(\mathbb{R}^{3})} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds.$$

Destoe modo, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.1), segue que

$$J_{\alpha}(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\ell=0}^{k-1} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{\ell} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} ds.$$

Escrevendo $J_{lpha}(t)$ como a soma $J_{1}(t)+J_{2}(t)+J_{3}(t)$ onde

$$J_1(t) = c(\nu)t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

$$J_2(t) = c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{\ell} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^{\ell+1} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D^{k-\ell} \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

$$J_3(t) = c(\nu)t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} \|D^{k-1}\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^k\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2}^{\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds.$$

Como sabemos que $\|D^q \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = s^{-\frac{q}{2}} U_q(s) \leqslant s^{-\frac{q}{2}} M_q$, para todo q < k (por hipótee de indução) e $\|D^k \mathbf{u}(\cdot,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} = s^{-\frac{k}{2}} U_k(s)$, obtemos

$$J_{1}(t) \leqslant c(\nu) M_{1}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8}+\frac{k}{2}\right)} U_{k}(s) ds$$

$$\leqslant c(\nu, k) M_{1}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{\frac{1}{4}} (t+t_{0})^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_{k}(s) ds,$$

$$(2.44)$$

onde utilizamos o fato de

$$s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} \leqslant c(k)(t+t_0)^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} \leqslant c(k) t^{\frac{k}{2}} (t+t_0)^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)}$$

$$= c(k) \left(\frac{t}{t+t_0}\right)^{\frac{k}{2}} (t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \leqslant c(k)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}}$$

para a última desigualdade. Análogamente para $J_2(t)$, deduzimos que

$$J_{2}(t) \leqslant c(\nu) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_{\ell}^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} ds$$

$$\leqslant c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_{\ell}^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t+t_{0})^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} ds$$

$$\leqslant c(\nu, k) \sum_{\ell=1}^{k-2} M_{\ell}^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell} (t+t_{0})^{-\frac{1}{4}},$$

$$(2.45)$$

e para $J_3(t)$

$$J_{3}(t) \leqslant c(\nu) M_{1} M_{k-1}^{\frac{1}{4}} t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} s^{-\left(\frac{3}{8} + \frac{k}{2}\right)} U_{k}(s)^{\frac{3}{4}} ds$$

$$\leqslant c(\nu, k) M_{1} M_{k-1}^{\frac{1}{4}} (t+t_{0})^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_{k}(s)^{\frac{3}{4}} ds.$$
(2.46)

Lembrando que $U_k(s)^{\frac{3}{4}} \leq 1 + U_k(s)$ (análogo a 2.40), segue, por (2.39), (2.44), (2.45) e (2.46), que

$$U^{\alpha}(t) \leqslant c(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + c(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds,$$

onde $U^{\alpha}(t) = t^{\frac{k}{2}} \|D^{\alpha}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}$. Portanto

$$U_k(t) \leqslant c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)(t+t_0)^{-\frac{3}{8}} \int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{7}{8}} U_k(s) ds,$$

para todo $t\geqslant t_0+1$. De forma análoga ao caso k=2, definimos t_k e \mathbf{M}_k por

$$t_k := 1 + t_0 + 2^{16} c_{**}^4 \text{ e } \mathbf{M}_k := \sup\{U_k(s); t_0 \leqslant s \leqslant t_k\}.$$

Sendo assim, afirmamos novamente que

$$U_k(t) \leq 2c_*(k, \nu, t_0, \mathbf{u}_0, M_1, \dots, M_{k-1}) + 16c_{**}(k, \nu, \mathbf{u}_0, M_1)\mathbf{M}_k$$

para todo $t \geqslant t_k$. Essa demonstração é exatamente a mesma que foi feita para o caso k=2. Ou seja, temos que U_k é limitada por uma constante que não depende de t em $[t_k, \infty)$, como U_k é limitada em $[T_{**}, \infty)$, segue que $U_k \in \mathcal{L}^{\infty}([T_{**}, \infty))$, como era desejado.

O teorema abaixo é uma generalização dos Teoremas 2.14 e 2.15.

Teorema 2.17. Seja $\mathbf{u}(\cdot,t)$ uma solução de Leray para (2.13), então para todo $k \ge 0$ tem-se

$$t^{\frac{k}{2}}\|D^k\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração. Os Teoremas 2.15 e 2.14 mostram os casos k=0 e k=1 respectivamente. Sendo assim, considere $k\geqslant 2$ e $t_0\geqslant T_{**}$. Lembrando que

$$\begin{split} \|D^{k}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} & \leq \|D^{k}[e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \\ & + \int_{t_{0}}^{t'} \|D^{k}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \, ds + \int_{t'}^{t} \|D^{k}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \, ds. \end{split}$$

Na demonstração do Lema 2.16, vimos que dado um multi-índice α com $|\alpha|=k$, podemos escrever

$$|I_{1}(\alpha,t)| = t^{\frac{k}{2}} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-t_{0})}\mathbf{u}(\cdot,t_{0})]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \leqslant c(k,\nu) \|\mathbf{u}_{0}\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})} \left(1 + \frac{t_{0}}{t-t_{0}}\right)^{\frac{k}{2}} \to 0, \quad (2.47)$$

quando $t \to \infty$. Por outro lado, vimos tambem que

$$|I_2(\alpha,t)| = \int_{t_0}^{t'} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \leqslant c(k,\nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} (t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)} (t+t_0)^{\frac{1}{2}},$$

para todo multi-índice α com $|\alpha|=k$. Note que, quando $t\to\infty$, o termo $(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ decai na ordem de $t^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}$, enquanto $(t+t_0)^{\frac{1}{2}}$ cresce na ordem de $t^{\frac{1}{2}}$. Logo inferimos que

$$(t-t_0)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}\right)}(t+t_0)^{\frac{1}{2}}\to 0$$

quando $t \to \infty$, desde que

$$\frac{k}{2} + \frac{3}{4} > \frac{1}{2},\tag{2.48}$$

que é verdadeiro pois (2.48) implica em $k > -\frac{1}{2}$ (que é válido pois $k \ge 2$). Dessa forma, concluímos que

$$\int_{t_0}^{t'} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)} ds \to 0, \tag{2.49}$$

quando $t \to \infty$. Por fim, temos que

$$J_{\alpha}(t) = t^{\frac{k}{2}} \int_{t'}^{t} \|D^{\alpha}[e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)]\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}$$

$$\leq c(k,\nu) \left(\sum_{\ell=1}^{k} M_{\ell}^{\frac{1}{4}} M_{\ell+1}^{\frac{3}{4}} M_{k-\ell}\right) (t+t_{0})^{-\frac{1}{4}} \to 0$$
(2.50)

quando $t \to \infty$. Logo, por (2.47), (2.49) e (2.50), dado um multi-índice α com $|\alpha|=k$, temos que

$$t^{\frac{k}{2}}\|D^{\alpha}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}\to 0,$$

quando $t \to \infty$. Portanto

$$t^{\frac{k}{2}} \|D^{k} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{2}} = \left(\sum_{\ell_{1}=1}^{3} \cdots \sum_{\ell_{k}=1}^{3} t^{\frac{k}{2}} \|D_{\ell_{1}} \cdots D_{\ell_{k}} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{3})}^{2} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

quando $t \to \infty$ pois, $D_{\ell_1} \cdots D_{\ell_k} = D^{\alpha}$ para algum multi-índice α com $|\alpha| = k$.

O teorema acima mostra o decaimento de energia das soluções de Leray na norma do espaço $H^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{W}^{k,2}(\mathbb{R}^n)$, já que

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\ell=0}^k \|D^{\ell}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Mais precisamente

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{H^{k}(\mathbb{R}^{n})} = \sum_{\ell=0}^{k} \left[t^{-\frac{\ell}{2}} t^{\frac{\ell}{2}} \|D^{\ell}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})} \right]^{2} = \sum_{\ell=0}^{k} t^{-\ell} \left[t^{\frac{\ell}{2}} \|D^{\ell}\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{L}^{2}(\mathbb{R}^{n})} \right]^{2} \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

2.3 Problema de Dirichlet

Nessa seção, retornamos ao problema visto na motivação do capítulo anterior.

O ponto principal dessa seção é o Teorema de Lax-Milgram, que será utilizado para mostrar a existência de soluções fracas para o problema de Dirichet. Para demonstrá-lo, será necessário apresentar alguns resultados de análise funcional

Teorema 2.18. Seja f um operador linear limitado, então,

- (a) f é continuo;
- **(b)** ker *f* é fechado.

Demonstração. Ver [12] p.p. 97, 98.

Teorema 2.19. Se E é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, então

$$H = E \oplus E^{\perp}$$
.

Demonstração. Ver [19] p.p. 129.

O Teorema da representação de Hilbert é o resultado mais importante para a demonstração do Teorema de Lax-Milgram, esste será enunciado e demonstrado abaixo.

Teorema 2.20 (Teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert). Sejam H um espaço de Hilbert e $f: H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle$$
,

para todo $u \in H$. Além disso ||f|| = ||v||.

Demonstração. Primeiramente, mostremos a existencia de $v \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle$$
,

para todo $u \in H$. Seja $f: H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado não nulo (se $f \equiv 0$, basta escolher v = 0), então existe $z \in H$ tal que $f(z) \neq 0$. Como f é linear, z deve ser não nulo. Ou seja, $\ker f \neq H$. Como f é limitado segue, pelo Teorema 2.18 **(b)**, que $\ker f$ é fechado, sendo assim pelo Teorema 2.19, $H = \ker f \oplus \ker f^{\perp}$. Portanto, $\ker f^{\perp} \neq \{0\}$ (pois caso contrário $\ker f = H$). Dito isso, seja $w \in \ker f^{\perp}$ não nulo, então, para cada $u \in H$, $f(u)w - f(w)u \in \ker f$ já que,

$$f(f(u)w - f(w)u) = f(u)f(w) - f(w)f(u) = 0.$$

Dessa forma

$$0 = \langle f(u)w - f(w)u, w \rangle = f(u) \langle w, w \rangle - f(w) \langle u, w \rangle,$$

ou seja

$$f(u) = \left\langle u, \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \right\rangle.$$

Escolhendo $v := \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \in H$ (note que v não depende de u), temos que existe $v \in H$ tal que $f(u) = \langle u, v \rangle$ para todo $u \in H$.

Para mostrar que v é único, suponha que exista $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$ para todo $u \in H$. Dito isso

$$\langle u, v \rangle = f(u) = \langle u, \tilde{v} \rangle$$
,

para todo $u \in H$. Logo é verdade que

$$\langle u, v - \tilde{v} \rangle = 0,$$

para todo $u \in H$, Em particular se $u = v - \tilde{v} \in H$, temos $||v - \tilde{v}||^2 = 0$, ou seja, $v = \tilde{v}$. Portanto v é único.

Por fim, resta mostrar que ||f|| = ||v||. Com efeito, note que $f(v) = \langle v, v \rangle = ||v||^2$. Ou seja

$$||v||^2 = f(v) \le |f(v)| \le ||f|| ||v||.$$

Como v é não nulo, temos $\|v\| \leqslant \|f\|$. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schawarz, inferimos

$$|f(u)| = |\langle u, v \rangle| \leqslant ||u|| ||v||,$$

o que implica em $||f|| \le ||v||$. Portanto, vale a igualdade:

$$||f|| = ||v||.$$

Teorema 2.21 (Teorema de Lax-Milgram). Sejam H um espaço de Hilbert, $B: H \times H \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear tal que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

- 1. $|B(u, v)| \le \alpha ||u|| ||v||$ para todo $u, v \in H$, i.e., a forma bilinear é limitada;
- 2. $\beta \|u\|^2 \leqslant B(u, u)$ para todo $u \in H$, i.e., a forma bilinear é coerciva,

e $f: H \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então, existe um único $v \in H$ tal que

$$B(u, v) = f(u),$$

para todo $u \in H$.

Demonstração. Essa demonstração sera dividida em seis passos

Passo 1: Mostremos que existe uma aplicação $A: H \to H$ tal que $B(u, v) = \langle u, Av \rangle$, para todo $u, v \in H$.

Para cada $v \in H$ defina $g_v : H \to \mathbb{R}$ por

$$g_{v}(u) = B(u, v).$$

para todo $u \in H$. Claramente g_v é linear (pois B é uma forma bilinear). Além disso, g_v é limitada, já que

$$|g_{v}(u)| = |B(u, v)| \le \alpha ||u|| ||v||,$$

para todo $u \in H$, onde utilizamos o fato de B ser limitada (ver item 1). Sendo assim,

$$||q_v|| \leq \alpha ||v||$$
.

Logo, g_v é limitada. Dessa forma, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema 2.20), existe um único $w_v \in H$ tal que

$$B(u, v) = q_v(u) = \langle u, w_v \rangle$$

para todo $u \in H$. Agora, seja $A: H \to H$ dado por $Av = w_v$. Dessa forma, podemos escrever

$$B(u, v) = g_v(u) = \langle u, w_v \rangle = \langle u, Av \rangle. \tag{2.51}$$

para todo $u, v \in H$.

Passo 2: Afirmamos que A é um operador linear e limitado.

Sejam $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim, por (2.51), obtemos

$$\langle u, A(\lambda x + y) \rangle = B(u, \lambda x + y) = \lambda B(u, x) + B(u, y) = \lambda \langle u, Ax \rangle + \langle u, Ay \rangle = \langle u, \lambda Ax + Ay \rangle$$

para tudo $u \in H$, pois B é uma forma bilinear. Com isso $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$, para todo $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, A é linear. Além disso, dado $v \in H$, inferimos por (2.51) que

$$||Av||^2 = \langle Av, Av \rangle = B(Av, v) \leqslant |B(Av, v)| \leqslant \alpha ||Av|| ||v||,$$

onde utilizamos o fato de B ser uma forma bilinear limitada (ver item 1). Deste modo, a seguinte desigualdade é válida:

$$||Av|| \leq \alpha ||v||$$
.

para todo $v \in H$. Portanto A é limitado.

Passo 3: É verdade que A é injetivo e ImA é fechado.

Sabemos que existe $\beta > 0$ tal que $\beta \|u\|^2 \le |B(u,u)|$ para todo $u \in H$ (ver item 2). Dessa forma, por (2.51), concluímos que

$$\beta ||u||^2 \leqslant |B(u,u)| = |\langle u, Au \rangle| \leqslant ||u|| ||Au||,$$

para todo $u \in H$, ou seja

$$\beta \|u\| \leqslant \|Au\|,\tag{2.52}$$

para todo $u \in H$. Seja $u \in \ker A$, então Au = 0, daí por (2.52)

$$\beta \|u\| \leqslant \|Au\| = 0$$
,

o que implica em u = 0. Portanto A é injetiva.

Além disso, seja $(Au_k) \subseteq \operatorname{Im} A$ tal que $Au_k \to v \in H$, quando $k \to \infty$. Mostremos que $v \in \operatorname{Im} A$. Com efeito, (Au_k) é de cauchy (porque converge). Dito isso, por (2.52)

$$\beta \|u_k - u_\ell\| \leqslant \|Au_k - Au_\ell\| \to 0.$$

Ou seja, $(u_k) \subseteq H$ é de Cauchy. Como H é completo, existe $u_0 \in H$ tal que $u_n \to u_0$. Como A é limitado, consequentemente, é continuo (ver Teorema 2.18 **(a)**), temos que $Au_k \to Au_0$, quando $k \to \infty$. Pela unicidade do limite, deduzimos que $v = Av_0 \in ImA$. Portanto, ImA é fechado.

Passo 4: Vamos mostrar que A é sobrejetivo.

Sabemos que $H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} A^{\perp}$ (pois $\operatorname{Im} A$ é fechado). Mostremos que $\operatorname{Im} A^{\perp} = \{0\}$. Com efeito, se $w \in \operatorname{Im} A^{\perp}$, temos pelo item 2, e por (2.51) que

$$\beta ||w||^2 \leqslant B(w, w) \leqslant |B(w, w)| = |\langle w, Aw \rangle| = 0,$$

pois $Aw \in ImA$ e $w \in ImA^{\perp}$. Logo, w = 0, o que implica em H = ImA. Portanto, A é sobrejetiva.

Passo 5: É verdade que existe $v \in H$ tal que f(u) = B(u, v) para todo $u \in H$.

Como f é um funcional linear limitado em H, temos, pelo Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema 2.20), que existe $z \in H$, tal que $f(u) = \langle u, z \rangle$, para todo $u \in H$. Como A é uma bijeção, existe um único $v \in H$ tal que z = Av. Dessa forma, podemos escrever

$$f(u) = \langle u, z \rangle = \langle u, Av \rangle = B(u, v), \tag{2.53}$$

para todo $u \in H$.

Passo 6: Vamos mostrar que v em (2.53) é único.

Suponha que existe $\tilde{v} \in H$ tal que $f(u) = B(u, \tilde{v})$ para todo $u \in H$. Dessa forma, as igualdades abaixo são válidas

$$B(u, v) = f(u) = B(u, \tilde{v}).$$

para todo $u \in H$. Por isso, pela linearidade de B, segue que $B(u, v - \tilde{v}) = 0$ para todo $u \in H$. Dito isso, pelo item 2, chegamos a

$$\beta \|v - \tilde{v}\|^2 \le |B(v - \tilde{v}, v - \tilde{v})| = 0.$$

Sendo assim, $v = \tilde{v}$. Portanto, v é único.

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram (Existência de soluções fracas). Considere o problema de Dirichlet

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega$$

$$u = 0 \text{ sobre } \partial \Omega.$$
 (2.54)

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Na motivação, vimos que u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet se satisfaz

$$\int_{\Omega} Du \cdot D\phi \, dx + \int_{\Omega} u\phi \, dx = \int_{\Omega} f\phi \, dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_{c}(\Omega)$. Porém, pela densidade das funções teste em $H^{1}_{0}(\Omega)$ (pois $H^{1}_{0}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}^{\infty}_{c}(\Omega)$ em $H^{1}(\Omega)$), podemos dizer que u é uma solução fraca do problema de Dirichlet, se esta satisfaz a igualdade:

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)^8$.

Defina a forma $B: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$B(u,v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$, e o funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

para todo $v \in H^1_0(\Omega)$. Note que B é uma forma bilinear limitada e coerciva. Com efeito, a bilinearidade de B segue do fato do gradiente fraco D e a integral serem operadores lineares. Além disso, é verdade que

$$B(u,u) = \int_{\Omega} Du \cdot Du \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} \|Du\|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Logo, B é coercivo e, utilizando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.8), segue que

$$|B(u,v)| \leq \int_{\Omega} |Du \cdot Dv| \, dx + \int_{\Omega} |uv| \, dx$$

$$\leq \int_{\Omega} ||Du|| ||Dv|| \, dx + \int_{\Omega} |u||v| \, dx \leq ||Du||_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)} ||Dv||_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)} + ||u||_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)} ||v||_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)}.$$

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le 1} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx.$$

Mais precisamente, pelo Teorema 1.31, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

 $^{^8}$ Vale ressaltar que $H^1_0(\Omega)=\mathcal{W}^{1,2}_0(\Omega)$ é um espaço com produto interno

Porém, sabemos que $\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$, $\|Du\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1_0(\Omega)}$. Dito isso, obtemos

$$|B(u, v)| \leqslant c ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $u, v \in H^1_0(\Omega)$. Logo, B é limitado.

Por fim, temos que φ é um funcional linear limitado. De fato, a linearidade de φ segue da distributividade do produto e da linearidade da integral. Por outro lado,

$$|\varphi(v)| \leqslant \int_{\Omega} |f||v| \, dx \leqslant ||f||_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)} ||v||_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)} \leqslant ||f||_{\mathcal{L}^{2}(\Omega)} ||v||_{H_{0}^{1}(\Omega)},$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde $||f||_{\mathcal{L}^2(\Omega)} < \infty$, pois por hípotese, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.21), existe um único $u \in H^1_0(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = \varphi(v)$$
,

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, u é a única solução fraca para o problema de Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Emil Artin. The Gamma Function. New York: Holt, Rinehart e Winston, 1964.
- [2] Sheldon Axler. Measure, Integration and Real Analysis. Springer, 2024.
- [3] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, 1995.
- [4] Haim Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 2010.
- [5] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. Análise Numérica. CENGAGE DO BRASIL, 2016.
- [6] Lawrence C. Evans. Partial Differential Equations. AMS, 2010.
- [7] Alberto Fiorenza, Maria Rosaria Formica, Tomáš Roskovec e Filip Soudský. *Detailed proof of classical Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality with historical remarks.* 2018.
- [8] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 1999.
- [9] Giovanni P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Steady-State Problems.* 2nd. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.
- [10] Tosio Kato. «Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions». Em: *Mathematische Zeitschrift* 187.4 (1984), pp. 471–480.
- [11] Irina A. Kmit. Hölder Spaces. 2021.
- [12] Erwin Kreyszig. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: Wiley, 1989.
- [13] Jean Leray. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». Em: *Acta Mathematica* 63 (1934), pp. 193–248.
- [14] Jean Leray e Robert Terrell. On the motion of a viscous liquid filling space. 2016. arXiv: 1604.02484 [math.HO].
- [15] Elon Lages Lima. *Curso de Análise vol. 2.* 12^a ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2020.
- [16] Elon Lages Lima. Espaços Métricos. 6ª edição. IMPA, 2020.
- [17] Jens Lorenz e Paulo R. Zingano. *The Navier-Stokes equations for Incompressible Flows:* solution properties at potential blow-up times. 2015.
- [18] James R. Munkres. Analysis on Manifolds. CRC Press, 1991.
- [19] César R. de Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. 1^a ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018, p. 257.
- [20] C.W. Oseen. *Hydrodynamik*. Mahtematik in Monographien und Lehrbüchern. Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.
- [21] Michael Wiegner. «Decay Results for Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations on Rn». Em: *Journal of The London Mathematical Society-second Series* 35 (1987), pp. 303–313.
- [22] Paulo R. Zingano. Two problems in Partial Differential Equations (in Portuguese). 2018.