1. Definição e notação

A fim de evitarmos ambiguidades, fixamos nessa seção a notação e as definições que usaremos no texto abaixo.

Definição 1. *Um* ***grafo*** *G é um par de conjuntos (V, E), em que E é um subconjunto de $\binom{V}{2}$. O conjunto V é chamado de conjunto de* ***vértices*** *de G, e o conjunto E é chamado conjunto das* ***arestas*** *de G.*

Seja G um grafo. Denotaremos por $\chi(G)$ o número cromático de G. Além disso, denotaremos por $\alpha(G)$ o tamanho de um maior conjunto independente em G. Por fim, escrevemos $\gamma(G)$ para o comprimento de um menor circuito (cintura) de G.

2. Resultados básicos em teoria dos grafos

Relembramos aqui alguns resultados básicos em teoria dos grafos, que serão usados nas próximas seções.

Proposição 2 (Lema do aperto-de-mão)**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo com m arestas. Para cada $v \in V$, seja também $d(v)$ o grau do vértice v. Então*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Demonstração. Basta notar que

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} \mathbf{1}\{e \text{ incide em } v\} = \sum_{e \in E} \sum_{v \in V} \mathbf{1}\{e \text{ incide em } v\} = \sum_{e \in E} 2 = 2m. \qquad \blacksquare$$

Proposição 3. *Seja G um grafo com n vértices. Então $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.*

Demonstração. Fixemos uma coloração mínima de G, i.e., uma coloração com $\chi(G)$ cores. Sejam agora $C_1, C_2, \ldots, C_{\chi(G)}$ as cores dessa coloração. Cada cor de G tem no máximo $\alpha(G)$ vértices. Segue que

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |C_i| \leq \chi(G)\alpha(G). \qquad \blacksquare$$

3. Uma ferramanta de teoria das probabilidades

Relembramos nessa seção uma desigualdade muito conhecida que será utilizada no que segue.

Proposição 4 (Desigualdade de Markov)**.** *Seja X uma variável aleatória não-negativa e $a > 0$. Então*

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

4. Um problema geométrico e uma solução probabilística

Todo grafo G pode ser representado no plano colocando um ponto para cada vértice, e ligando dois pontos por uma curva caso exista uma aresta com esses pontos. Ao fazer esse desenho, as curvas correspondentes às arestas podem acabar se cruzando. Podemos então definir o **número de cruzamentos** de G como o menor número de cruzamentos que um desenho de G pode ter. Cruzamentos entre mais que duas arestas num mesmo ponto não são permitidos. O número de cruzamentos de G é denotado por $\mathrm{cr}(G)$.

Uma problema natural a se pensar é o seguinte:

Problema 5. *Seja G um grafo arbitrário com n vértices e m arestas. O que podemos afirmar sobre* $\mathrm{cr}(G)$*?*

Uma representação planar de G com $\mathrm{cr}(G)$ cruzamentos será chamada de **desenho mínimo**. Grafos com $\mathrm{cr}(G) = 0$ são chamados **grafos planares**. Relembramos o seguinte fato básico sobre grafos planares, que será usado no que segue. A prova é simples e pode ser feita usando a fórmula de Euler.

Fato 6. *Um grafo planar de n vértices e m arestas satisfaz $m \leq 3n - 6$.* ∎

Em 1973, Erdős e Guy [4] fizeram a seguinte conjectura:

Conjectura 7. *Existe uma constante $c > 0$ para a qual vale o seguinte. Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices e m arestas, onde $m \geq 4n$. Então*

$$\mathrm{cr}(G) \geq c \cdot \frac{m^3}{n^2}.$$

De início, a conjectura foi provada independentemente por Leighton [6] e por Ajtai, Chvátal, Newborn e Szemerédi [2]. Posteriormente, uma demonstração muito elegante foi encontrada por Bernard Chazelle, Micha Sharir e Emo Welzl, utilizando o método probabilístico (com a constante c substituída por $1/64$).[1] Essa é a demonstração que apresentamos a seguir.

Antes, vamos precisar do seguinte lema.

Lema 8. *Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Temos que*

$$\mathrm{cr}(G) + 3n - m \geq 6.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que, em qualquer desenho mínimo de G, as seguintes propriedades são satisfeitas:

i. Nenhuma aresta cruza a si mesma;
ii. Quaisquer duas arestas cruzam no máximo uma vez;
iii. Arestas que compartilham vértices não se cruzam;

Consideremos agora um desenho mínimo de G. Defina o grafo G', que é construído a partir de G do seguinte modo. Os vértices de G' são os vértices de G, juntamente com os pontos de cruzamento do desenho. As arestas de G' são as arestas de G, mas "quebradas" nos vértices de cruzamento. Tal grafo G' é planar, pois todos os cruzamentos de arestas foram substituídos por vértices. Além disso, as observações acima garantem que tal construção nos dá realmente um grafo como estabelecemos na Definição 1.

Observemos agora que G' tem $n + \mathrm{cr}(G)$ vértices, e tem $m + 2\,\mathrm{cr}(G)$ arestas, pois todo vértice novo tem grau 4. Podemos então aplicar o Lema 6. Obtemos:

$$m + 2\,\mathrm{cr}(G) \leq 3(n + \mathrm{cr}(G)) - 6,$$

o que nos dá

$$\mathrm{cr}(G) + 3n - m \geq 6.$$ ∎

Agora podemos apresentar a prova da conjectura.

[1] Vide [1, Capítulo 40].

Prova da Conjectura 7. Seja G_p um subgrafo induzido de G, cujos vértices são escolhidos de V cada um independetemente com probabilidade p. Sejam n_p e m_p as variáveis aleatórias que contam, respectivamente, o número de vértices e arestas de G. Fixemos agora um desenho mínimo de G, e definamos a variável aleatória X_p, que conta o número de cruzamentos de G_p nesse desenho de G. Como $X_p \geq \operatorname{cr}(G_p)$, obtemos do Lema 8 que $X_p + 3n_p - m_p \geq 6 \geq 0$. Portanto,

$$\mathbb{E}(X_p + 3n_p - m_p) \geq 0. \tag{1}$$

Agora note que $\mathbb{E}(n_p) = np$, pois cada um dos n vértices de G está em G_p com probabilidade p. Ademais, $\mathbb{E}(m_p) = p^2 m$, pois cada aresta de G aparece em G_p se e somente se os seus dois vértices estão em G_p. Por fim, $\mathbb{E}(X_p) = p^4 \operatorname{cr}(G)$, pois cada um dos quatro[2] vértices de um cruzamento devem estar em G_p

Deste modo, obtemos da desigualdade (1) usando a linearidade da esperança que

$$p^4 \operatorname{cr}(G) + 3np - p^2 m \geq 0.$$

Rearranjando a inequação, segue que

$$\operatorname{cr}(G) \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

Fazendo agora $p = \frac{4n}{m} \leq 1$ (por hipótese temos $m \geq 4n$), conseguimos finalmente que

$$\operatorname{cr}(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

■

5. Encontrando grafos com cintura e número cromático arbitrariamente grandes

Todo grafo que contém um k-clique tem número cromático pelo menos k. Mas será que é possível encontrar grafos com número cromático pelo menos k e que não possuem um k-clique? O próximo teorema nos garante que sim. Na verdade, conseguimos garantir que o grafo não só não contém um k-clique, como também não contém um circuito de tamanho até k.

Teorema 9. *Para todo $k \geq 2$, existe um grafo G com $\gamma(G) > k$ e $\chi(G) > k$.*

Demonstração. Iremos encontrar um grafo H de n vértices com $\alpha(H) < n/2k$ e com menos que $n/2$ circuitos de tamanho no máximo k. Então removeremos um vértice de cada circuito, e obteremos um grafo G com $\gamma(G) > k$, satisfazendo $|V(G)| > n/2$. Deste modo, teremos que $\alpha(G) \leq \alpha(H) < n/2k$ e, portanto, pela Proposição 3, que $\chi(G) > k$. Basta, portanto, encontrar um grafo H satisfazendo essa descrição.

Seja H um grafo com n vértices, em que cada possível aresta é adicionada com probabilidade p, com todos esses eventos independentes (o valor de p será escolhido depois). Seja $\alpha = \alpha(H)$ o tamanho de um maior conjunto independente de H. Para cada conjunto $R \subset V$ de r vértices, denote por A_R o evento de R ser independente. Temos que $\mathbb{P}[A_R] = (1-p)^{\binom{n}{r}}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\alpha \geq r] = \mathbb{P}\left[\bigcup_R A_R\right] \leq \sum_R \mathbb{P}[A_R] = \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} \\ \leq n^r \left((1-p)^{(r-1)/2}\right)^r \leq \left(ne^{-pr/2}e^{1/2}\right)^r. \end{aligned} \tag{2}$$

[2]O número *quatro* segue das observações feitas na prova do Lema 8.

Iremos agora tomar $r = \lceil n/2k \rceil$, e encontrar um p tal que $\mathbb{P}\left[\alpha \geq \lceil n/2k \rceil\right] \to 0$ quando n cresce. Para isso, seria bom se p satisfizesse

$$ne^{-pr/2} \leq n^{-1/2}$$

pois de (2) seguiria que $\mathbb{P}\left[\alpha \geq r\right] \leq (e/n)^{1/2}$, que converge para 0 quando $n \to \infty$. Mas, tomando logaritmos, vemos que essa condição é equivalente a $3 \log n \leq pr$. Como $r \geq n/2k$, essa última condição é satisfeita se $p \cdot n/2k \geq 3 \log n$, ou seja $pn \geq 6k \log n$. Note agora que, se tomarmos $p = n^{-k/(k+1)}$, obtemos $pn = n^{1/(k+1)}$, que é maior que $6k \log n$ para n suficientemente grande. Portanto, a escolha $p = n^{-k/(k+1)}$ basta para obtermos $\mathbb{P}\left[\alpha \geq \lceil n/2k \rceil\right] \to 0$.

Deste modo, com n suficiente grande, conseguimos que

$$\mathbb{P}\left[\alpha \geq \lceil n/2k \rceil\right] < 1/2. \tag{3}$$

Seja agora X a variável aleatória que conta o número de circuito de tamanho no máximo k em H. Observe que o número de possíveis circuitos num conjunto de i vértices, $3 \leq i \leq k$, é igual ao número de permutações cíclicas de i elementos, divido por 2 (ou seja, $(i-1)!/2$). Além disso, cada um desses possíveis circuitos acontece com probabilidade p^i. Dessa observação segue que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{k} \binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leq \frac{1}{2}(k-2) n^{\frac{k}{k+1}}.$$

A última desigualdade segue de $np = n^{1/(k+1)} \geq 1$.

Portanto, da desigualdade de Markov (Proposição 4) obtemos que

$$\mathbb{P}[X \geq n/2] \leq \frac{1}{2}(k-2) n^{\frac{k}{k+1}} \frac{2}{n} = (k-2) n^{-\frac{1}{k+1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Deste modo, para n suficientemente grande temos que

$$\mathbb{P}[X \geq n/2] < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Portanto, para n suficientemente grande, de (3) e (4) segue que existe um grafo H de n vértices, satisfazendo $\alpha(H) < n/2k$ e com menos que $n/2$ circuitos de tamanho no máximo k. Como observamos no início, isso é suficiente para terminar a prova. ■

6. O método probabilístico em problemas extremais

Aqui expomos duas aplicações clássicas do método probabilístico em problemas extremais, uma em teoria extremal dos grafos e a outra em teoria extremal dos conjuntos.

6.1. **Teorema de Turán.** O seguinte teorema trata de um problema em teoria extremal dos grafos.

Teorema 10 (Teorema de Turán). *Seja G um grafo que não contém p-cliques. Então o número de arestas de G satisfaz*

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Demonstração. Seja $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o conjunto dos vértics de G. Denote por d_i o grau do vértice v_i, e $\omega(G)$ o tamanho do maior clique de G. Afirmamos que

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d_i}.$$

Escolha agora uma permutação aleatória π dos vértices de G uniformemente ao acaso. Seja C_π o conjunto de todos os vértices v_i que são adjacentes a todos os vértices v_j tais que j precede i em π. Observe que C_π é um clique de G.

A probabilidade de v_i estar em C_π é $\frac{1}{n-d_i}$, pois v_i deve ser o primeiro de todos os $n - d_i$ vértices que não são adjacentes a v_i a aparecer em π. Portanto, se X_i é a variável indicadora da presença de v_i em C_π, temos que $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n-d_i}$ e

$$\mathbb{E}[|C_\pi|] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-d_i}. \tag{5}$$

Portanto, existe uma escolha de π para a qual C_π tem tamanho maior ou igual a $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-d_i}$. Como G é livre de p-cliques e C_π induz um clique em G, segue que

$$p - 1 \geq \omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-d_i}.$$

Agora, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n-d_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-d_i}}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (n-d_i) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-d_i} &= \left(n^2 - 2|E(G)|\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-d_i} \\ &\leq \left(n^2 - 2|E(G)|\right)(p-1). \end{aligned}$$

Rearranjando $n^2 \leq \left(n^2 - 2|E(G)|\right)(p-1)$, obtemos:

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$ ■

6.2. **Teorema de Sperner.** Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que não existem conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ satisfazendo $A \subset B$. Uma tal família é chamada uma **anticadeia**. É fácil ver que a família de todos os subconjuntos de tamanho k de $[n]$ é uma anticadeia. Tal família tem tamanho $\binom{n}{k}$. Em especial, podemos tomar $k = \lfloor n/2 \rfloor$. O seguinte Teorema nos diz que isso é o melhor que podemos fazer.

Teorema 11 (Teorema de Sperner)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma anticadeia de $[n]$. Então $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

Demonstração. Seja π uma permutação aleatória de $\{1, 2, \ldots, n\}$ escolhida uniformemente ao acaso. Seja também $S \in \mathcal{F}$. Se $\left\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{|S|}\right\} = S$, diremos que a permutação π **atinge** S.

Considere agora a variável aleatória

$$X = |\{i : \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i\} \in \mathcal{F}\}|.$$

Como $\mathcal{F}$ é uma anticadeia, temos que π só poderá atingir no máximo um conjunto de $\mathcal{F}$. Portanto, X só pode ser 0 ou 1. Segue que $\mathbb{E}[X] \leq 1$.

Fixe $S \in \mathcal{F}$, e defina $k := |S|$. Seja P_S a probabilidade de S ser atingido por π. Existem exatamente $k!\,(n-k)!$ permutações de $[n]$ que atingem S. Portanto, $P_S = \frac{k!(n-k)!}{n!} = 1/\binom{n}{k}$.

Da definição de esperança, obtemos que

$$1 \geq \mathbb{E}[X] = \sum_{S \in \mathcal{F}} P_S = \sum_{S \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{S \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

O resultado segue. ■

7. O método polinomial e duas aplicações em geometria combinatória

Essa seção trata de problemas interessantes em geometria que foram resolvidos com técnicas de álgebra linear em combinatória.

Muitas desigualdades em combinatória podem ser encontradas por meio do seguinte teorema.

Teorema 12. *Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores linearmente independentes que pertencem ao espaço gerado pelos vetores $u_1, u_2, \ldots, u_m$, então $n \leq m$.* ∎

Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e X um conjunto arbitrário, e considere $\mathbb{V}$ o espaço vetorial das funções de X em $\mathbb{F}$. Para aplicar o teorema acima nesse espaço, muitas vezes utilizamos o seguinte critério.

Proposição 13. *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções de X em $\mathbb{F}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos de $\mathbb{F}$. Se vale que*

$$f_i(a_j) \begin{cases} \neq 0, & \text{se } j = i \\ = 0, & \text{se } j \neq i, \end{cases}$$

então $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são linearmente independentes em $\mathbb{V}$.

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tais que $\sum \lambda_i f_i = 0$. Obtemos que $\sum \lambda_i f_i(a_j) = 0$ para todo j. Mas, por hipótese, $f_i(a_j) = 0$ para $i \neq j$. Logo, $\lambda_j f_j(a_j) = 0$ e $\lambda_j = 0$, pois $f_j(a_j) \neq 0$. Portanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. ∎

7.1. Um problema em teoria extremal dos conjuntos.

Essa seção trata do seguinte teorema, para o qual foi encontrada uma prova simples usando o método polinomial em [3].

Teorema 14 (Frankl-Wilson 1981)**.** *Seja p um número primo e X um conjunto de n elementos. Seja também $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X, de $2p-1$ elementos cada, tal que quaisquer dois conjuntos de $\mathcal{F}$ não se intersectam em exatamente $p-1$ elementos. Então segue que*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p-1}.$$

Demonstração. Para todo $A \in \mathcal{F}$, seja $\mathbf{c}_A \in \{0,1\}^n$ o vetor característico de A. Defina também para todo $A \in \mathcal{F}$ a função $f_A \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{Z}_p$, descrita do seguinte modo:

$$f_A(\mathbf{x}) := \prod_{s=0}^{p-2} \left(\left(\sum_{i \in A} x_i \right) - s \right) \pmod{p},$$

onde $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$.

Fixemos agora $A, B \in \mathcal{F}$ arbitrários. Se $\mathbf{x} = \mathbf{c}_B$, então $\sum_{i \in A} x_i = |A \cap B|$. Disto segue a seguinte igualdade:

$$f_A(\mathbf{c}_B) = \prod_{s=0}^{p-2} (|A \cap B| - s) \pmod{p}. \tag{6}$$

Logo, se $A \neq B$, da hipótese do teorema temos que $|A \cap B| \neq p-1 \pmod{p}$. Ou seja, $|A \cap B| \pmod{p} \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$, e algum dos fatores de (6) é igual a 0. Portanto, $f_A(\mathbf{c}_B) = 0$. Por outro lado, $|A \cap A| = 2p-1 = p-1 \pmod{p}$. Segue $f_A(\mathbf{c}_A) \neq 0$. Portanto, pela Proposição 13, segue que os f_A são linearmente independentes, e o espaço gerado por eles tem dimensão $|\mathcal{F}|$.

Seja $\mathbb{V}$ o espaço vetorial das funções de $\{0,1\}^n$ em $\mathbb{Z}_p$. Observe que cada polinômio p nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ também determina um elemento de $\mathbb{V}$, a saber, a função cujo valor é obtido avaliando-se p nos pontos de $\{0,1\}^n$.

Em particular, os polinômios x_i^2 e x_i definem o mesmo elemento de $\mathbb{V}$, pois $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$. Portanto, todo polinômio em $x_1, x_2, \ldots, x_n$, como elemento de $\mathbb{V}$, é equivalente a uma combinação linear de monômios multilineares. Em especial, como cada f_A é um polinômio de grau no máximo $p-1$, temos que f_A pode ser representado em $\mathbb{V}$ como uma combinação linear de monômios multilineares de grau no máximo $p-1$.

Deste modo, o espaço gerado pelas funções f_A está contido no espaço gerado pelas funções representadas por todos os monômios multilineares em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de grau no máximo $p-1$. Mas a quantidade de tais monômios equivale ao número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com no máximo $p-1$ elementos, i.e., $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p-1}$. Portanto, pelo Teorema 12, segue que

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p-1}. \qquad \blacksquare$$

Sabemos que existem exatamente $\binom{n}{2p-1}$ subconjuntos de X de tamanho $2p-1$. A importância desse teorema está no fato de que, simplesmente ao proibirmos intersecções de tamanho $p-1$, limitamos significativamente o tamanho de $\mathcal{F}$. Mais precisamente, o seguinte corolário nos mostra que $\binom{n}{2p-1}$ pode ser exponencialmente maior que $|\mathcal{F}|$.

Corolário 15. *Seja $\mathcal{F}$ uma família como no Teorema 14, com $n = 4p$. Então*

$$\frac{\binom{n}{2p-1}}{|\mathcal{F}|} \geq 1.1^n.$$

Demonstração. Primeiramente, note que $\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k}$. Além disso, para $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, afirmamos que $\frac{k}{n-k+1} \leq \frac{1}{3}$. De fato, temos que $4k \leq 4(p-1) = 4p-4 = n-4 \leq n+1$. Portanto, $3k \leq n-k+1$ e $\frac{k}{n-k+1} \leq \frac{1}{3}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p-2} + \cdots + \binom{n}{0} &\leq \frac{1}{3}\binom{n}{p} + \frac{1}{3^2}\binom{n}{p} + \cdots + \frac{1}{3^p}\binom{n}{p} \\
&\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^p}\right)\binom{n}{p} \\
&\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right)\binom{n}{p} \\
&= \frac{1}{2}\binom{n}{p}.
\end{aligned}$$

Portanto, $|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2}\binom{4p}{p}$. Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{2p-1}}{|\mathcal{F}|} \geq \frac{\binom{4p}{2p-1}}{\frac{1}{2}\binom{4p}{p}} &\geq 2 \cdot \frac{(3p)!\,p!}{(2p-1)!\,(2p+1)!} = 2 \cdot \frac{(3p)(3p-1)(3p-2)\cdots(2p+2)}{(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots(p+1)} \\
&\geq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{p} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n/4} \geq 1.1^n.
\end{aligned}$$

pois $1.5^{1/4} \geq 1.1$. $\blacksquare$

7.2. **Conjectura de Borsuk.** Para $X \subset \mathbb{R}^d$, definimos o **diâmetro** de X do seguinte modo:

$$\operatorname{diam}(X) := \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X\}.$$

Se os conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset X$ formam uma partição de X tal que $\operatorname{diam}(X_i) < \operatorname{diam}(X)$ para todo i, então dizemos que essa partição **reduz o diâmetro** de X e tem **tamanho** igual a m.

Em 1933, Borsuk perguntou se é sempre possível encontrar uma partição de tamanho $d+1$ que reduz o diâmetro de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ de diâmetro finito. A conjectura ficou aberta até 1993, quando foi provada falsa por um argumento combinatório simples.

Um jeito diferente de entender o Corolário 15 nos diz que, se particionarmos o conjunto $\mathcal{A} = \binom{[n]}{2p-1}$ em menos que 1.1^n classes, então pelo menos uma das classes conterá subconjuntos $A, B \subset \mathcal{A}$ tais que $|A \cap B| = p-1$. Essa é a ideia principal do contra-exemplo.

Teorema 16. *Para todo primo p, existe um conjunto em $\mathbb{R}^{n^2}$, com $n = 4p$, tal que toda partição de tamanho menor que 1.1^n não reduz o diâmetro.*

Demonstração. Defina para todo $A \subseteq \mathcal{A}$ o vetor $\mathbf{u}_A \in \mathbb{R}^n$, cuja i-ésima componente é $+1$ se $i \in A$, e -1 caso contrário. Defina também $\mathbf{q}_A \in \mathbb{R}^{n^2}$, o vetor cujas coordenadas são todas as n^2 entradas de $\mathbf{u}_A \mathbf{u}_A^T$, e $Q_{\mathcal{A}} := \{\mathbf{q}_A : A \subseteq \mathcal{A}\}$.

Note que $\langle \mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B \rangle = \langle \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B \rangle^2$, para todo $A, B \subseteq \mathcal{A}$. Além disso, se $|A \cap B| = s$, é uma conta simples verificar que $\langle \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B \rangle = 4(s - p + 1)$. Portanto, $\langle \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B \rangle = 0$ se, e somente, $|A \cap B| = p - 1$. Segue que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_A - \mathbf{q}_B\|^2 &= \langle \mathbf{q}_A, \mathbf{q}_A \rangle + \langle \mathbf{q}_B, \mathbf{q}_B \rangle - 2\langle \mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_A \rangle^2 + \langle \mathbf{u}_B, \mathbf{u}_B \rangle^2 - 2\langle \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B \rangle^2 \\ &= 2n^2 - 2\langle \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B \rangle^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\mathbf{q}_A - \mathbf{q}_B\|$ é maximizado quando $\langle \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B \rangle = 0$, que sabemos acontecer somente quando $|A \cap B| = p - 1$. Ou seja, o diâmetro de $Q_{\mathcal{A}}$ é atingido pelos vetores $\mathbf{q}_A$ e $\mathbf{q}_B$ correspondentes a conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ com $|A \cap B| = p - 1$. Deste modo, o Teorema 14 nos diz que qualquer partição de $Q_{\mathcal{A}}$ com tamanho menor que 1.1^n não reduzirá o diâmetro. Isso termina a prova. ∎

Para n suficientemente grande, teremos $1.1^n > n^2 + 1$. Portanto, se tomarmos um primo p suficientemente grande, e aplicarmos o Teorema 16, obteremos um contra-exemplo para a Conjectura de Borsuk no espaço $\mathbb{R}^d$, onde $d = n^2$.

7.3. **Um problema de dissecção.** Em 1944, Hugo Hadwiger formulou o seguinte problema.

Problema 17. *Qual o menor número k tal que $\mathbb{R}^n$ pode ser particionado em k subconjuntos $\mathbb{R}^n = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ tais que quaisquer dois pontos com distância unitária não estão no mesmo S_i?*

O problema pode ser reformulado em linguagem de grafos, como segue.

Problema 18. *Seja G um grafo cujo conjunto de vértices é todo o $\mathbb{R}^n$, e tal que dois pontos são ligados por uma aresta se a distância entre eles é igual a 1. Qual é o número cromático de G?*

O número cromático desse grafo é muito difícil de determinar, e está em aberto até mesmo para o plano. Mas em 1972, Larman e Rogers [5] provaram que $\chi(G) \leq (2\sqrt{2} + o(1))^n$, e conjecturaram que a ordem de crescimento de $\chi(G)$ era de fato exponencial. Em 1981, Frankl e Wilson provaram essa conjectura, usando os mesmos métodos desta seção.

Teorema 19. *Seja p um primo. Para $n = 4p$, o número cromático do $\mathbb{R}^n$ é pelo menos 1.1^n.*

Demonstração. Considere outra vez a família $\mathcal{A}$ de todos os subconjuntos de $2p-1$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, defina $\mathbf{v}_A := \frac{1}{\sqrt{2p}}\mathbf{c}_A$, onde $\mathbf{c}_A \in \{0,1\}^n$ é o vetor característico de A. Defina G_p o subgrafo de G cujos vértices são os vetores $\mathbf{v}_A$, para $A \in \mathcal{A}$.

Observe que se $A, B \in \mathcal{A}$, e $s = |A \cap B|$, então $\|\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B\|^2 = |A \setminus B| + |B \setminus A| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 2(2p-1-s)$. Deste modo, se $s = p-1$, obtemos $\|\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B\| = \sqrt{2p}$. Como $\|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B\| = \frac{1}{\sqrt{2p}}\|\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B\|$, segue que $\|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B\| = 1$ se, e somente se, $|A \cap B| = p-1$.

Isto quer dizer que vértices independentes de G_p correspondem a conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $|A \cap B| \neq p-1$. Portanto, pelo Corolário 15, temos que $\alpha(G_p) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{p}$. Segue da Proposição 3 que

$$\chi(G_p) \geq \frac{|\mathcal{A}|}{\frac{1}{2}\binom{n}{p}} = \frac{\binom{4p}{2p-1}}{\frac{1}{2}\binom{4p}{p}} \geq 1.1^n.$$

A última desigualdade provamos no Corolário 15. ∎

Referências

1. Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, fifth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.
2. M. Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn, and E. Szemerédi, *Crossing-free subgraphs*, Theory and practice of combinatorics, North-Holland Math. Stud., vol. 60, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 9–12. MR 806962
3. N. Alon, L. Babai, and H. Suzuki, *Multilinear polynomials and Frankl–Ray-Chaudhuri–Wilson type intersection theorems*, J. Combin. Theory Ser. A **58** (1991), no. 2, 165–180. MR 1129114
4. P. Erdős and R. K. Guy, *Crossing number problems*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 52–58. MR 0382006
5. D. G. Larman and C. A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika **19** (1972), 1–24. MR 0319055
6. Frank Thomson Leighton, *Complexity issues in VLSI: Optimal layouts for the shuffle-exchange graph and other networks*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1983.