5.3 APROXIMACION DE FUNCIONES MEDIANTE POLINOMIOS POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS.

En la Sección 5.2 se estudió el problema de la aproximación de un conjunto de datos experimentales mediante una función. Según se presentó en la introducción de este capítulo, el otro problema de aproximación se refiere a la aproximación de funciones.

Una idea básica en el Análisis Numérico es la de utilizar funciones sencillas, entre las cuales se destacan los polinomios, para aproximar una función dada f. Ya se han estudiado ciertos tipos de polinomios de aproximación al considerar la fórmula de Taylor. El problema que se planteó al tratar ese tema fue determinar un polinomio de aproximación P de grado no mayor que n tal que en un punto dado su valor y el de sus derivadas hasta el orden n inclusive coincidan con los de la función dada f. Se demostró que si una función f admite derivadas continuas hasta el orden $n+1$ en un entorno de un punto a, existe un único polinomio P de grado menor o igual que n que satisface las $n+1$ condiciones

$$P(a)=f(a), \quad P'(a)=f'(a), \quad . \; . \; . \quad , \quad P^{(n)}(a)=f^{(n)}(a),$$

y que el polinomio P, llamado polinomio de Taylor, está dado por

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a_0)^n .$$

También fue discutido el error que se comete al aproximar los valores de $f(x)$ por los de $P(x)$ en puntos x de un entorno del punto a. Pudo apreciarse que éste es un método muy conveniente para una aproximación local, ya que produce errores tanto más pequeños cuanto más cercanos son los valores de x al valor a, pero que no es adecuado para una buena aproximación global, es decir en un intervalo dado.

Existen varios otros métodos para aproximar una función dada f mediante polinomios, dependiendo de las exigencias que se imponen a la aproximación. Por ejemplo, a diferencia de la aproximación mediante polinomios de Taylor, que según se dijo prioriza los valores en las cercanías del punto a, puede desearse un polinomio que asuma los mismos valores que f en cierta cantidad de puntos distintos. Más precisamente, dados los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puede pretenderse determinar un polinomio P de grado mínimo que verifique las condiciones

$$P(x_0)=f(x_0), \quad P(x_1)=f(x_1), \quad . \; . \; . \quad , \quad P(x_n)=f(x_n). \tag{5.1}$$

Con el objeto de satisfacer estas $n+1$ exigencias, se propone un polinomio de grado menor o igual que n, esto es

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \; . \; . \; . \; + c_n x^n,$$

en el cual los $n+1$ coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$, deberán satisfacer las $n+1$ condiciones (5.1). Esto lleva a un planteo igual al visto en la sección 5.1, al tratarse el tema de interpolación para el caso de un conjunto finito de datos. La deducción efectuada oportunamente mostró que existe un único polinomio que resuelve el problema cuyo grado es no mayor que n, que es llamado polinomio de interpolación.

En los puntos especificados $x_0, x_1, \ldots, x_n$, el polinomio de interpolación asume valores exactamente iguales a los valores de la función aproximada, pero para que la aproximación sea razonablemente buena en los restantes puntos de un intervalo, se requiere un número relativamente grande de puntos, y consiguientemente un grado alto del polinomio de interpolación. Esto hace que en muchos casos el uso de este método no sea adecuado.

Otro método corriente de aproximación de una función mediante polinomios es el llamado método de aproximación por mínimos cuadrados. En este método se supone que la función f a aproximar está definida y es integrable en un intervalo acotado y cerrado $[a, b]$, y se requiere encontrar un polinomio de grado no mayor que n tal que resulte mínimo el error cuadrático en el intervalo, definido por

$$\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx. \tag{5.2}$$

Para determinar un polinomio de aproximación de mínimos cuadrados, es decir que produzca un mínimo para la expresión (5.2), consideramos

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ . \ . \ . + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k ,$$

y denotamos con

$$E(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \int_a^b \Big[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \Big]^2 dx.$$

El problema consiste en determinar los valores de los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$, de modo que la función de $n+1$ variables $E = E(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, denominada error cuadrático asuma su valor mínimo. La función E es una función polinómica de grado dos, por lo cual es continua, admite derivadas parciales continuas, y además es no negativa y no acotada. Por lo tanto, si existe un único punto estacionario para la misma, en ese punto el error cuadrático alcanzará su valor mínimo.

Los puntos estacionarios de la función E son los que verifican el sistema

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0, \quad \text{para cada } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Como

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^k f(x)\, dx + \int_a^b \Big[\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \Big]^2 dx ,$$

se tiene
$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = -2\int_a^b x^j f(x)\,dx + 2\sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^{j+k}\,dx\,.$$

En consecuencia, para determinar los coeficientes del polinomio P_n de aproximación de mínimos cuadrados se deberá resolver el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = -2\int_a^b x^j f(x)\,dx + 2\sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = 0\,, \quad j=0,1,\ldots,n. \qquad (5.2)$$

en las $n+1$ incógnitas $c_0, c_1, \ldots, c_n$. El sistema (5.2) puede escribirse en la forma

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx\,, \qquad j=0,1,\ldots,n. \qquad (5.3)$$

Puede demostrarse que si la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$, este sistema normal de ecuaciones lineales tiene una única $(n+1)$-upla solución. Esa $(n+1)$-upla proporciona los coeficientes del polinomio que hace mínimo el error cuadrático, resolviendo el problema. ◀

EJEMPLO 5.1 Hallar el polinomio de aproximación de mínimos cuadrados de segundo grado para la función $f(x) = \operatorname{sen}\pi x$ en el intervalo $[0, 1]$.

Llamando con $P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ al polinomio de aproximación a determinar, el sistema normal de ecuaciones que resulta para P_2 es

$$\left\{\begin{array}{l} c_0\int_0^1 1\,dx + c_1\int_0^1 x\,dx + c_2\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen}\pi x\,dx \\ c_0\int_0^1 x\,dx + c_1\int_0^1 x^2\,dx + c_2\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x\operatorname{sen}\pi x\,dx \\ c_0\int_0^1 x^2\,dx + c_1\int_0^1 x^3\,dx + c_2\int_0^1 x^4\,dx = \int_0^1 x^2\operatorname{sen}\pi x\,dx \end{array}\right.$$

Efectuando el cálculo de las integrales, y algunas operaciones aritméticas, resulta el sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6\pi c_0 &+& 3\pi c_1 &+& 2\pi c_2 &=& 12 \\ 6\pi c_0 &+& 4\pi c_1 &+& 3\pi c_2 &=& 12 \\ 20\pi^3 c_0 &+& 15\pi^3 c_1 &+& 12\pi^3 c_2 &=& 60\pi^2 - 240 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtienen los valores de los coeficientes

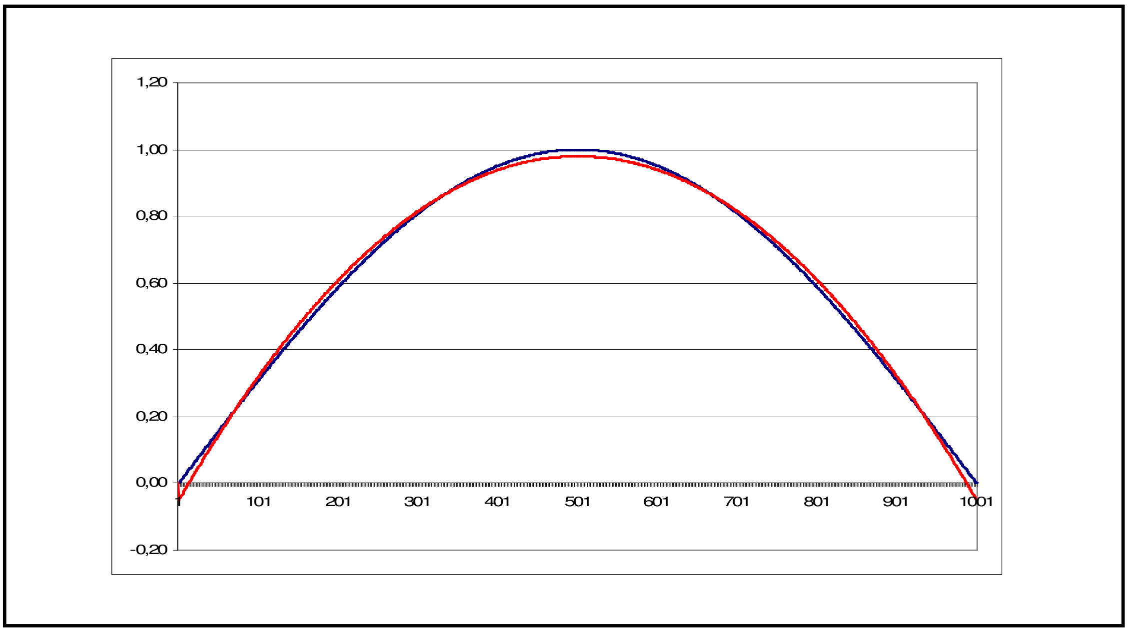
$$c_0 = (12\pi^2 - 120)/\pi^3 \cong -0{,}0504655 \qquad c_1 = -c_2 = (720 - 60\pi^2)/\pi^3 \cong 4{,}1225116$$

En consecuencia, el polinomio de aproximación de mínimos cuadrados de segundo grado para la función $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ en el intervalo $[0, 1]$ es

$$P_2(x) = -0{,}0504655 + 4{,}1225116\,x - 4{,}1225116\,x^2 .$$

En la Figura 5.2 están representadas la gráfica de la función f en trazo azul, y la gráfica del polinomio de aproximación P_2 en trazo rojo. ◀

FIGURA 5.1



El ejemplo 5.1 permite advertir las dificultades de cálculo que se presentan para obtener un polinomio de aproximación de mínimos cuadrados. El número de operaciones que deben efectuarse aumenta rápidamente con el grado del polinomio de aproximación, ya que para el caso de un polinomio de grado n deberá resolverse un sistema de de $n+1$ ecuaciones lineales con las $n+1$ incógnitas $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Los coeficientes del sistema serán de la forma

$$\int_a^b x^{j+k}\,dx = (b^{j+k+1} - a^{j+k+1})/(j+k+1)\,,$$

y en consecuencia la resolución numérica del sistema se torna bastante engorrosa. La matriz de coeficientes del sistema es llamada matriz de Hilbert, y por ser una matriz mal condicionada es un típico ejemplo para mostrar la influencia de los errores por redondeo.

Otra desventaja con respecto a otros métodos es análoga a la que se presenta en el tratamiento de los polinomios de Lagrange, y consiste en que los cálculos que se hubieran efectuado para obtener el polinomio de aproximación de mínimos cuadrados de grado n no permiten reducir los cálculos que deben efectuarse para determinar el polinomio de grado $n+1$, es decir el polinomio siguiente de grado una unidad mayor.

En lo que sigue, se tratarán técnicas que permiten obtener aproximaciones por mínimos cuadrados y que son de gran utilidad no sólo para el caso polinomial, sino en otros casos, como el de aproximación mediante polinomios trigonométricos que es de gran importancia en las aplicaciones.

Las técnicas a estudiar resultan de gran eficiencia para simplificar los cálculos a efectuar, ya que una vez obtenida la aproximación T_n resulta sencillo determinar la aproximación T_{n+1}. Estas consideraciones son válidas, como se dijo antes, también en el caso trigonométrico. Con el objeto de estudiar estas técnicas se procede a introducir conceptos introductorios del análisis lineal.