

# Aplikovaná statistika (1)

Hana Skalská

Testování hypotéz: Úvodní část

**Analýza dat – typické úlohy**

**Test statistické hypotézy**

Formulace úlohy, příklady hypotéz

Chyby při testování hypotéz, souvislost mezi **chybami**

**Obecný postup provedení testu**

**Hypotézy pro jeden výběr - přehled**

Hypotéza o střední hodnotě

Rozhodovací oblast pro různé alternativy

Koncept  $p$  hodnoty a rozhodnutí o hypotéze

# Analýza dat

Analýza dat:

Pečlivě plánovaný rozhodovací proces, který využívá vhodné analytické nástroje.

Data + analytické nástroje + kritické uvažování

Typické úlohy:

- ✓ Sběr dat, popis dat, explorační analýzy (vytváření hypotéz)
- ✓ **Ověřování hypotéz (testování statistických hypotéz)**
- ✓ Sledování a analýza závislostí
- ✓ Modely sestavené na základě dat
- ✓ Učení na základě dat (např. klasifikace, predikce)
- ✓ Data mining – speciální typ aplikací

# Testy a hypotézy řešené v tomto kurzu

Formulace úlohy, chyby při testování hypotéz

Testy parametrické:

Test hypotézy o průměru (jeden, nebo dva výběry – nezávislé i závislé vzorky).

Test hypotézy o parametru binomického rozdělení (pro jeden, nebo dva nezávislé výběry).

Test shody o rozptylu (jeden, nebo dva výběry nezávislé).

ANOVA pro jeden faktor – test shody více než dvou průměrů (více než dva nezávislé vzorky).

Test neparametrický:

Analýza závislosti v kombinační (kontingenční) tabulce.

## **Další typy úloh v tomto kurzu a testy hypotéz**

Míry lineární závislosti pro dvě veličiny: Kovariance, koeficient korelace a test hypotézy

Lineární regrese pro jednu nezávisle proměnnou veličinu, odhad parametrů modelu a testy v regresi

Lineární regrese při více nezávisle proměnných veličinách, odhad parametrů modelu a testy v regresi

Časová řada, základní charakteristiky a jednorozměrný model časové řady (trend, sezónnost, cyklická a náhodná složka)

# Testování (ověřování) statistických hypotéz

**Cílem kurzu** je vysvětlení zásad testování hypotéz.

- Získat přehled o typech testů a jejich využití.
- Porozumět postupu testování.
- Podle zadání problému formulovat hypotézy, navrhnout vhodný test.
- Znat význam základních pojmů v úloze testování: Testové kritérium a jeho rozdělení, chyby testu, oblast zamítání, kritická hodnota.
- Rozhodnout o hypotéze a výsledek interpretovat (vysvětlit praktické využití výsledku testování).

## Praktický pohled na test hypotézy

Hypotéza je domněnka o (neznámých) populačních parametrech.

Test uvažuje hypotézu nulovou  $H_0$  a hypotézu alternativní  $H_1$ .

Oprávněnost (výběr) jedné z možností se ověří pomocí dat výběru.

Po provedení výběru a analýze výsledku získaného výběrem se testem rozhodne, zda výsledek výběru spíše podporuje alternativní, nebo nulovou hypotézu.

Zde prezentované postupy vycházejí ze statistických modelů rozdělení pravděpodobnosti testového kritéria, které je odvozené za předpokladu, že platí nulová hypotéza.

Jiné přístupy užívají tzv. Bayesovské metody.

# Značení

Parametr populace	Název parametru Název pro odhad, pokud je jiný než název parametru	Bodový odhad (z výběru)
$\mu$	Střední hodnota Odhad aritmetickým průměrem	$\bar{X}$
$\sigma$	Směrodatná odchylka	s
$\sigma^2$	Rozptyl	$s^2$
$\pi$	Pravděpodobnost výskytu jevu Odhad relativní četností	p
$\rho$	Koeficient korelace	r
$\beta$	Koeficient v regresi	b

## Příklady nulových hypotéz $H_0$

Hypotézy o populační střední hodnotě:

- Dávkovač kávy odměřuje do kelímku 5 g kávy,  $H_0: \mu = 5$ .
- Neznámá hodnota průměrných výdajů za telefonní mobilní hovory studenta(ky) FIM je  $H_0: \mu = 220$  Kč měsíčně.

Hypotéza o neznámých (populačních) středních hodnotách:

- Průměrný měsíční výdaj za telefonní mobilní hovory studentů FIM (mužů) je stejný, jako průměrný měsíční výdaj za telefonní hovory studentek FIM (žen)  $H_0: \mu_m = \mu_{\bar{z}}$

Příklady jednoduchých hypotéz mají tvar nulové hypotézy  $H_0$ .

$H_0$  uvažuje shodu neznámého populačního parametru s hypotetickou hodnotou. Vždy obsahuje relaci „=„

Není rozdíl mezi neznámými parametry dvou populací,

Není rozdíl mezi parametrem populace a hypotetickou hodnotou, apod.



## Hypotézy alternativní $H_1$

Alternativa (alternativní hypotéza)  $H_1$  je dvoustranná nebo jednostranná, tvoří doplněk k  $H_0$ .

V případě jednostranné  $H_1$  zahrne  $H_0$  kromě „=„ logicky také ostatní možnosti, které neuvažuje  $H_1$ .

Často je  $H_1$  hypotéza, která má potvrdit nové domněnky.

Například: Nový design jogurtu AB zvýší podíl výrobku na trhu v dané cenové kategorii. Dosavadní podíl na trhu je 32 %.

$$H_0: \pi = 32, H_1: \pi > 32$$

Poznámka:  $H_0$  zde automaticky zahrne též všechny případy, kdy podíl je menší než 32.

$H_1$  Zpravidla neobsahuje samotnou relaci rovnosti =

$H_1$  Nejčastěji obsahuje buď relaci  $<$  , nebo  $>$  , nebo  $\neq$

$H_1$  může být zamítnutá, nebo přijatá

$H_0$  může být buď zamítnutá, nebo nezamítnutá

## Test statistické hypotézy

Rozhodovací problém (zobecnění výsledku výběru).

$D = \{d_1, d_2\}$  je prostor rozhodnutí,

$\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$  je prostor možných výběrových výsledků  
vztažených k parametru  $\theta$ ,  $\bar{\omega} = \Omega - \omega$ .

Pokud  $\theta \in \omega$ , je výhodnější rozhodnutí  $d_1$

Jestliže  $\theta \in \bar{\omega}$ , je výhodnější rozhodnutí  $d_2$

Možnost  $\theta \in \omega$  označíme jako hypotézu  $H_0$  (nulovou hypotézu).

Možnost  $\theta \in \bar{\omega}$  označíme jako alternativní hypotézu  $H_1$  (nebo  $A$ ).

## Test statistické hypotézy (2)

$W(d, \theta)$  je ztrátová funkce definovaná na  $D \times \Omega$ , vyjadřuje ztrátu, která vznikne přijetím rozhodnutí  $d$ , když správná hodnota parametru je  $\theta$ .

Předpokládáme náhodný výběr  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , který má rozsah  $n$ .

Testujeme hypotézu  $H_0$  proti  $H_1$ .

K testu hypotézy použijeme statistiku  $g(\mathbf{x})$  - funkci výběru, která se nazývá **testové kritérium**.

Obor hodnot, kterých může  $g(\mathbf{x})$  nabývat, se rozdělí na disjunktní množiny:

**Kritický obor  $W_\alpha$**  (indexu  $\alpha$  bude vysvětlený)

**Doplňkový obor  $V$**

## Test statistické hypotézy (3)

$P_W(\theta)$  značí pravděpodobnost, že při pokuse (náhodném výběru  $\mathbf{x}$ ) získáme výsledek z  $W$  (hypotéza  $H_0$  bude zamítnutá), když parametr má ve skutečnosti hodnotu  $\theta$  (když  $H_0$  platí).

Chyba  $\alpha$  nazvaná „chyba prvního druhu“ je náhodná veličina, její pravděpodobnost je  $P_{W_\alpha}(\theta) \leq \alpha$  pro všechna  $\theta \in \omega$ .

Pokud  $g(\mathbf{x}) \in W_\alpha$ , zamítáme  $H_0$  (přijímáme  $H_1$ ).

Jestliže  $g(\mathbf{x}) \notin W_\alpha$ , potom  $H_0$  nezamítáme.

Oblast  $W_\alpha$  odpovídá rozhodnutí „zamítnout  $H_0$ “.

# Chyby při testování hypotéz

Chyba I. druhu: zamítnutí  $H_0$  která platí

Pravděpodobnost chyby I. druhu = hladina významnosti  $\alpha$

Hladina významnosti: podmíněná pravděpodobnost chyby I. druhu  $P(\text{nesprávného zamítnutí } H_0)$ , pro kterou platí

$$P(g(x) \in W_\alpha | H_0) \leq \alpha$$

Čti: Když platí  $H_0$ , potom pravděpodobnost, že hodnota  $g(x)$  bude patřit do oblasti zamítání  $W_\alpha$  nejvýš rovna  $\alpha$ .  $W_\alpha$  je oblast zamítání  $H_0$  (závisí na zvoleném  $\alpha$ ).

Chyba II. druhu: přijetí  $H_0$ , která ve skutečnosti neplatí

Pravděpodobnost chyby 2. druhu:

$$\beta = P(g(x) \in V | H_1) = P(\text{přijetí } H_0 | H_0 \text{ neplatí})$$

Síla testu:  $1 - \beta = P(g(x) \in W_\alpha | H_1)$

# Chyby při testování hypotéz

<div>Skutečnost</div> <div>Rozhodnutí</div>	H <sub>0</sub> platí	H <sub>0</sub> neplatí (platí H <sub>1</sub> )
H <sub>0</sub> přijmout Hodnota TK je obsažená ve V	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost $\geq 1 - \alpha$	Chyba II. druhu Pravděpodobnost $= \beta$
H <sub>0</sub> zamítnout Hodnota TK je obsažená ve W <sub><math>\alpha</math></sub>	Chyba I. druhu Pravděpodobnost $\leq \alpha$	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost $= 1 - \beta$

TK = testové kritérium (náhodná veličina). Hodnota funkce  $g(\mathbf{x})$  závisí na hodnotách, zjištěných na prvcích náhodného výběru.

## Chyby při testování hypotéz

$$P(\text{TK} \in W_\alpha | H_0) \leq \alpha \longrightarrow P(\text{zamítnutí } H_0 | H_0 \text{ platí}) \leq \alpha$$

- **Chyba I. druhu:** Nesprávné zamítnutí nulové hypotézy má pravděpodobnost  $\alpha$ , kterou volíme.

Test je konstruovaný vždy tak, že pravděpodobnost chyby I. druhu nepřekročí  $\alpha$ , pokud by platila  $H_0$ .

- **Chyba II. druhu** je spojena s nesprávným přijetím nulové hypotézy.

Tuto chybu lze vypočítat pro určitou jednoduchou alternativu. Velikost tohoto rizika nevolíme, často její pravděpodobnost neznáme. Proto místo přijetí  $H_0$  proto  $H_0$  nezamítáme.

## Čím je ovlivněná chyba II. druhu


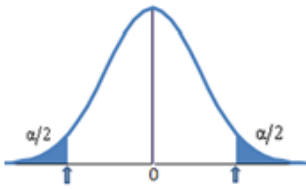

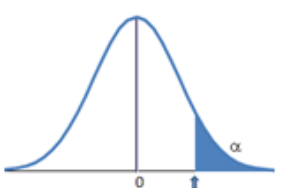
- Chyba II. druhu se zvětšuje, když se zmenšuje (zvolená) chyba I. druhu při stejném rozsahu výběru.

Nedoporučuje se proto volit  $\alpha$  příliš malé. Většinou uvažujeme chybu  $\alpha = 0,05$  nebo  $\alpha = 0,01$ .

- Chyba II. druhu se snižuje, pokud variabilita znaku je menší (při menší populační variabilitě studované veličiny). Variabilita je vlastnost dat.
- Chyba II. druhu klesá, pokud se zvětšuje rozsah souboru (při nezměněné hodnotě chyby  $\alpha$ ).



# Oblasti zamítání pro různě formulované alternativní hypotézy

<p>Příklad: Hypotézy o střední hodnotě</p>	<p>Oblast zamítání <math>H_0</math> je zvýrazněna stínováním  Hladina významnosti = <math>\alpha</math>  Kritická hodnota je označena šipkou </p>
<p><math>H_0 : \mu = \mu_0</math>  <math>H_1 : \mu \neq \mu_0</math>  Oboustranná alternativa</p>	
<p><math>H_0 : \mu = \mu_0</math>  <math>H_1 : \mu &lt; \mu_0</math>  Levostranná alternativa</p>	
<p><math>H_0 : \mu = \mu_0</math>  <math>H_1 : \mu &gt; \mu_0</math>  Pravostranná alternativa</p>	

Při stejné volbě hladiny významnosti  $\alpha$  jsou různě vymezeny oblasti zamítání  $H_0$ .  
Křivka naznačuje tvar rozdělení testového kritéria. Tvar rozdělení je daný v testu.

## Kritická oblast

Kritická oblast je vymezená kritickou hodnotou (hodnotami).

Kritická oblast závisí na:

- ✓ Zvoleném testu.
- ✓ Zvolené hladině významnosti.
- ✓ Volbě alternativní hypotézy (oboustranná, jednostranná, pravostranná).
- ✓ Tvaru rozdělení testového kritéria při platnosti  $H_0$ .

Tvar rozdělení testového kritéria závisí na testovaném parametru, na rozsahu výběru, na rozdělení sledované veličiny v populaci.

## Shrnutí důležitých pojmů

**Nulová hypotéza  $H_0$ :** Tvrzení o neznámých parametrech (není rozdíl, neliší se, nezávislost, apod.).

**Alternativní hypotéza  $H_1$ :** Doplněk  $H_0$  (nebo její negace).

**Kritický obor:** Množina hodnot testového kritéria, kdy zamítáme  $H_0$ .

Kritický obor je určený výsledkem výběru a tvarem rozdělení testového kritéria.

**Kritická hodnota:** Určuje rozdělení množiny hodnot testového kritéria na oblasti  $W_\alpha$  a  $V$ .

**Chyba prvního druhu:** Nesprávné zamítnutí  $H_0$ .

**Chyba druhého druhu:** Nesprávné přijetí  $H_0$ .

**Hladina významnosti:** Pravděpodobnost chyby I. druhu.

## Postup testování hypotéz

- Formulace hypotézy  $H_0$  (nulové) a  $H_1$  (alternativní).
- Volba hladiny významnosti (chyby  $\alpha$ ).
- Provedení výběru.
- Volba vhodného testu (dle typu veličiny, hypotézy, rozsahu výběru, výsledku ověření předpokladů).
- Výpočet testového kritéria (TK), výpočet vychází z hodnot výběru (TK je výběrová statistika, náhodná veličina).
- Vymezení oblasti  $W_\alpha$  pro zamítání  $H_0$  na hladině  $\alpha$ .
- Rozhodnutí o hypotéze na základě TK a  $W_\alpha$ .
- Interpretace výsledku.