

## SISTEMA ELECTRICO TRIFASICO

### 1- INTRODUCCION

Los Sistemas Eléctricos de Potencia están compuestos por distintas etapas bien definidas, denominadas **generación, transmisión, distribución y consumo**. Estas etapas están interconectadas entre sí configurando la **RED O SISTEMA ELECTRICO TRIFASICO.**

#### 1.1 VENTAJAS

Este tipo de red presenta ventajas en:

##### **GENERACION:**

Presenta mejor aprovechamiento de los materiales de los circuitos magnéticos (Fe) y eléctricos conductores (Cu).

##### **TRANSMISION Y DISTRIBUCION:**

Permite la posibilidad de variar los niveles de tensión, mediante la utilización de transformadores.

Ahorro de material en los conductores eléctricos.

##### **CONSUMO:**

Presenta versatilidad en los niveles de tensiones disponibles.

Presenta un Flujo de Potencia estable.

Los Motores presentan una cupla o par estable.

Las cargas o impedancias pueden conectarse en distintas configuraciones y a su vez, con distintas características (**equilibrada o desequilibrada**)

### 2. OBJETIVO

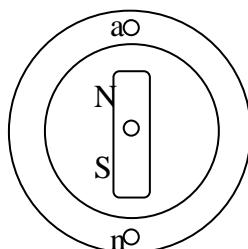
- **Presentar** como se **genera** un **sistema de tensiones trifásicas** compuesto por un grupo de 3 tensiones alternas de igual frecuencia y módulo, pero diferentes en ángulo de fase.
- **Presentar** cuáles son las **características en frecuencia, módulo y ángulo de fase** de los sistemas de tensiones. (**secuencia**)
- **Presentar** cuáles son las características de los **sistemas de tensiones**, cuando actúan simultáneamente e interconectados. (**relación entre tensiones simples y compuestas**)
- **Presentar** como se **conectan los sistemas de tensiones**, entre sí.
- **Presentar** los **tipos de cargas trifásicas** (impedancias), sus características y su forma de conexión. (**cargas equilibradas y desequilibradas, conexión estrella y triángulo**)
- **Presentar** los **sistemas de corrientes trifásicas**, que resultan como respuestas a la conexión de las cargas trifásicas a un sistema de tensiones trifásica.
- **Presentar** cuáles son las características en frecuencia, módulo y ángulo de fase de los sistemas de corrientes. (**secuencia**)
- **Presentar** cuáles son las características de los **sistemas de corrientes**, cuando actúan simultáneamente e interconectados. (**relación entre corrientes de líneas y corrientes en la carga**)

### 3. DESARROLLO

#### 3.1. GENERACION

##### GENERACION MONOFASICA

Analicemos una máquina elemental de generación alterna monofásica.



**Maquina elemental**

Rotor con polos salientes  
1 Par de polos  
1 bobina concentrada en estator

Ley de Faraday

$$e = B \cdot L \cdot v$$

B = densidad de Flujo [Web/m<sup>2</sup>]

L = longitud de lado de bobina [m]

v = velocidad tangencial de lado de bobina [m/s]

Ley de Lenz

$$e = - N \frac{d\Phi}{dt}$$

e = Fuerza electromotriz inducida

N = N° de espiras

$\frac{d\Phi}{dt}$  = variación de flujo respecto al tiempo [Web/s]

$\Phi = B \cdot S$

S = Área debajo de la expansión polar

Para una distribución espacial de B cosenoideal

$$B = B_{\max} \cos \omega t \rightarrow \Phi = \Phi_{\max} \cos \omega t$$

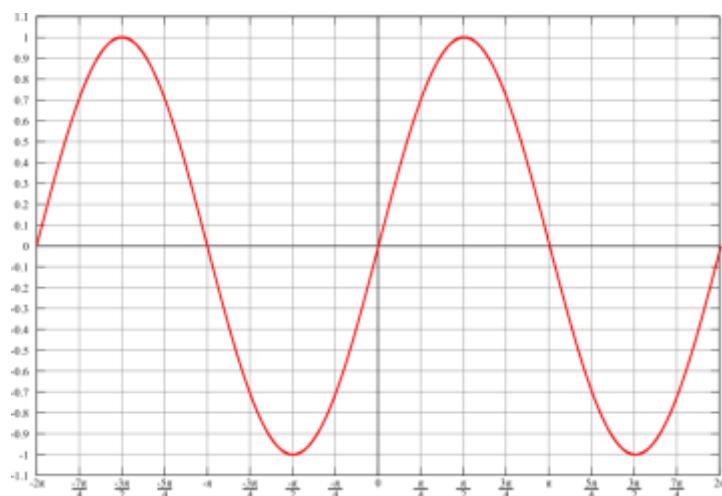
$$\frac{d\Phi}{dt} = - \Phi_{\max} \omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$e = - N \frac{d\Phi}{dt} = - N \cdot (-\Phi_{\max} \omega \operatorname{sen} \omega t) = N \cdot \Phi_{\max} 2\pi f \operatorname{sen} \omega t = E_{\max} \operatorname{sen} \omega t$$

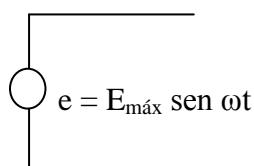
$$E_{\max} = 2\pi f \cdot \Phi_{\max}$$

$$E_{\text{eficaz}} = E_{\max} / \sqrt{2} = 2\pi f \cdot \Phi_{\max} / \sqrt{2} = 4,44 N.f. \Phi_{\max}$$

$$E = E_{\text{eficaz}}$$

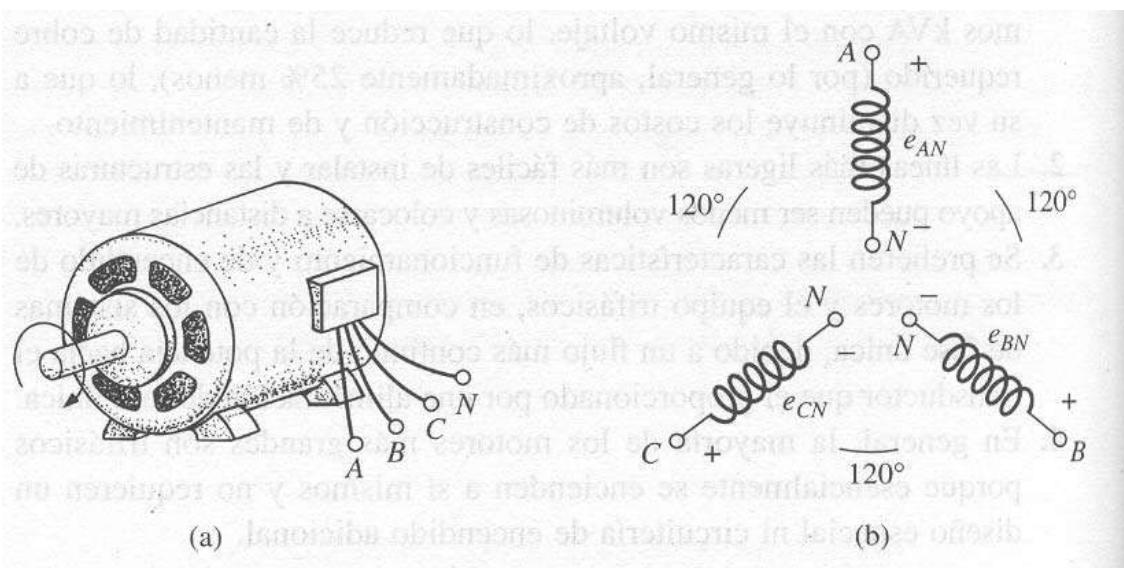
**Onda de tensión resultante en bobina elemental**

### Representación de fuente monofásica

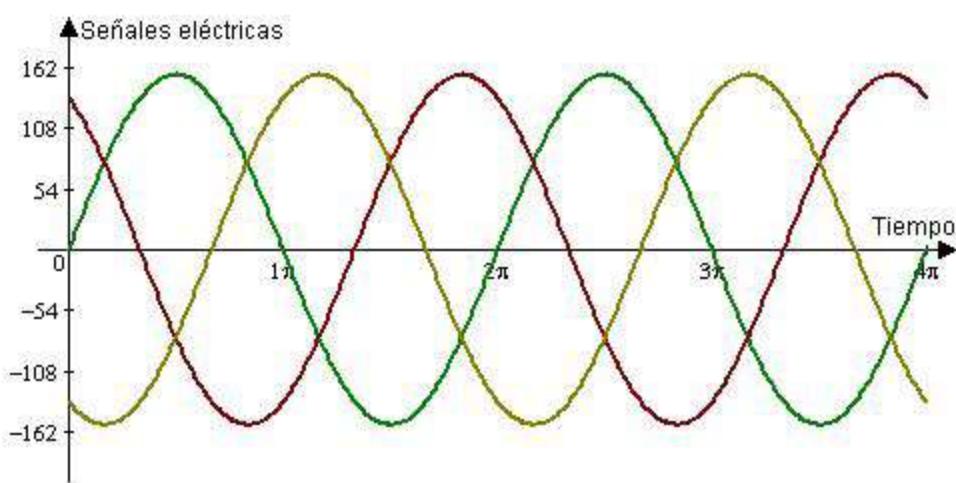


### GENERACION TRIFASICA

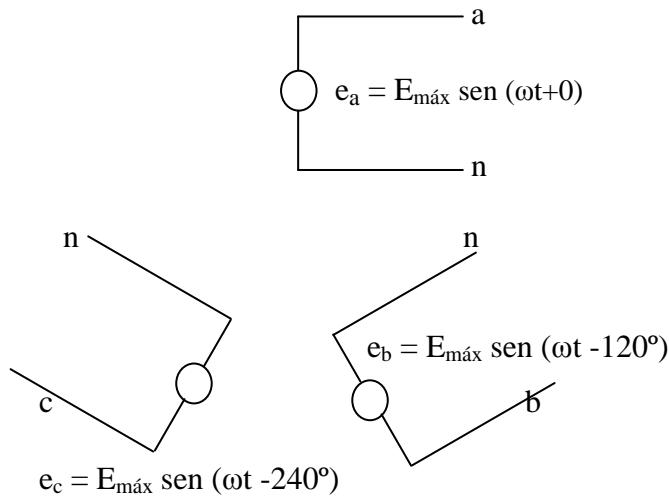
Aplicando el mismo concepto para 3 bobinas concentradas, desfasadas 120° en el estator, con rotor de polos salientes de un par de polos. Obtenemos la siguiente gráfica



Obtenemos la siguiente gráfica



Representación de las tres Fuentes Monofásicas que conforman las tres bobinas por separado



Obtengo un sistema de 3 tensiones senoidales, desfasadas entre sí,  $120^\circ$  que presentan una secuencia (orden en que se van dando sus valores máximos en la gráfica, según el sentido de giro del rotor del generador trifásico.

### Análisis fasorial

The diagram shows a phasor diagram with three vectors originating from a common point:  $\dot{E}_a$  pointing along the horizontal axis to the right,  $\dot{E}_b$  pointing at an angle of  $120^\circ$  below the horizontal axis, and  $\dot{E}_c$  pointing at an angle of  $240^\circ$  below the horizontal axis. To the right of the vectors, their corresponding complex exponential forms are given:

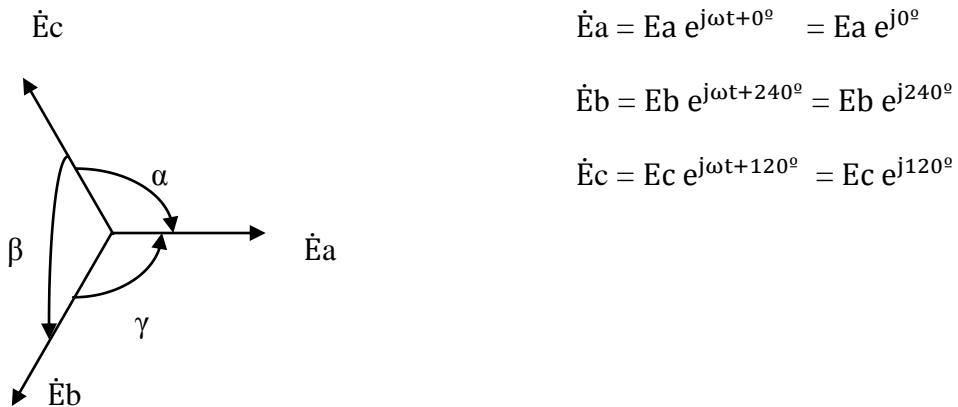
$$\dot{E}_a = E_a e^{j\omega t + 0^\circ} = E_a e^{j0^\circ}$$

$$\dot{E}_b = E_b e^{j\omega t + 240^\circ} = E_b e^{j240^\circ}$$

$$\dot{E}_c = E_c e^{j\omega t + 120^\circ} = E_c e^{j120^\circ}$$

### 3.2 SECUENCIA

Es el orden de sucesión de las tensiones inducidas en cada bobina



## **Secuencia directa, positiva o nº 1:**

La sucesión de las tensiones de bobina, también denominadas tensiones de fases debe ser la siguiente:

a,b,c - 1,2,3 - RST

### **Secuencia indirecta, negativa o nº 2:**

La sucesión de las tensiones de bobina, también denominadas tensiones de fases debe ser la siguiente:

a,c,b - 1,3,2 - RTS

### **3.3 DEFINICIONES DE CONDICIONES**

Se debe cumplir alguna de las siguientes definiciones

### **3.3.1 CONDICION DE SIMETRIA**

## Igualdad de Módulos

$$|E_a| = |E_b| = |E_c| = E$$

Igualdad de ángulos entre tensiones de bobina

$$\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$$

### 3.3.2 CONDICION DE EQUILIBRIO

La suma de los fasores de tensión debe ser nula

$$\dot{E}_a + \dot{E}_b + \dot{E}_c = 0$$

### 3.3.3 CONDICION DE PERFECCION

Se deben cumplir simultáneamente las condiciones de Simetría y Equilibrio

Los sistemas de secuencia directa e inversa son Perfecto, pues **cumple la condición de Simetría** (igualdad de módulos), y **cumple la condición de Equilibrio** (la suma de las tensiones es nula).

### 3.3.4 CONDICION DE IMPERFECCION

No se debe cumplir al menos una de las dos primeras condiciones (simetría y/o perfección)

## 3.4 CONEXIÓN DE BOBINAS DE SISTEMAS TRIFASICOS

Estudiaremos dos formas de conexión de las bobinas de tensiones de una fuente de tensiones trifásicas, como las vista en **3.1**. Según la forma de conexión de las mismas se presentarán las conexiones de fuente de alimentación:

**En Estrella**, también llamada Sustractiva.

**En Triángulo**, también llamada Aditiva

### 3.4.1 CONEXIÓN DE FUENTE EN ESTRELLA

Si unificamos los extremos de bobinas de igual polaridad, por ejemplo los bornes identificados con la letra “n”, tendremos una configuración de 3 bornes con distintas tensiones ( $\dot{E}_a$ ,  $\dot{E}_b$ ,  $\dot{E}_c$ ), y un cuarto borne común (N) con igual potencial.

Resulta el mismo sistema anterior pero con cuatro bornes (cuatro cables de salida), en lugar de los seis bornes originales (seis cables de salida)

Los bornes con las distintas tensiones  $\dot{E}_a$ ,  $\dot{E}_b$ ,  $\dot{E}_c$  se denominan bornes de salida a, b, c, respectivamente.

El borne común N se denomina “Centro de Estrella”

Resultan 6 Tensiones:

3 tensiones denominadas “tensiones simples o tensiones de fase”,

$\dot{E}_{an}$

$\dot{E}_{bn}$

$\dot{E}_{cn}$

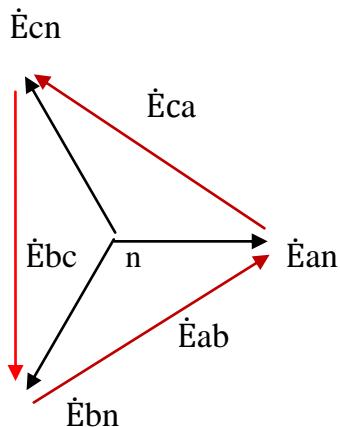
3 tensiones denominadas “tensiones compuestas o tensiones de línea,

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{an} - \dot{E}_{bn}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bn} - \dot{E}_{cn}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an}$$

### Representación y ecuaciones fasoriales



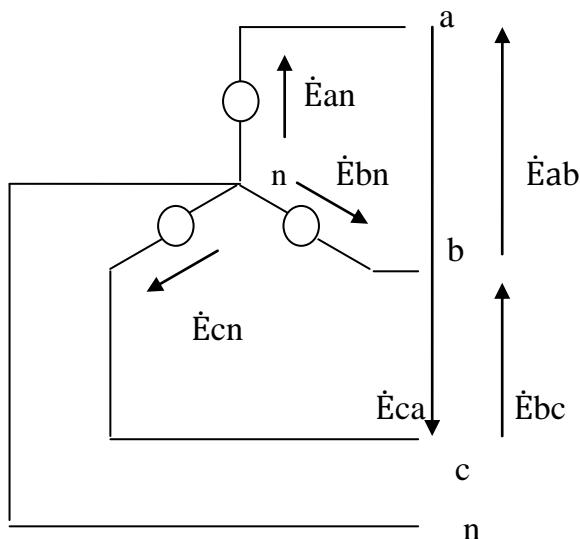
#### Tensiones de Fase

$$\dot{E}_{an} = |E_{an}| e^{j0^\circ} = E e^{j0^\circ}$$

$$\dot{E}_{bn} = |E_{bn}| e^{j240^\circ} = E e^{j240^\circ}$$

$$\dot{E}_{cn} = |E_{cn}| e^{j120^\circ} = E e^{j120^\circ}$$

### Esquema de Conexión en Estrella



### Tensiones Compuestas

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{an} - \dot{E}_{bn} = \sqrt{3}E e^{j30^\circ}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bn} - \dot{E}_{cn} = \sqrt{3}E e^{j270^\circ}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an} = \sqrt{3}E e^{j150^\circ}$$

### 3.4.2 CONEXIÓN DE FUENTE EN TRIANGULO

Si unificamos los extremos de bobinas en forma aditiva, por ejemplo:

El extremo “a” de la bobina “a” lo conectamos con el extremo “n” de la bobina “c”.

El extremo “c” de la bobina “c” lo conectamos con el extremo “n” de la bobina “b”.

Finalmente el extremo “b” de la bobina “b” lo conectamos con el extremo “n” de la bobina “a”.

Tendremos una configuración de 3 bornes únicamente, los cuales nos entregarán las **tensiones compuestas o de línea**.

**No hay tensión simple o de fase.**

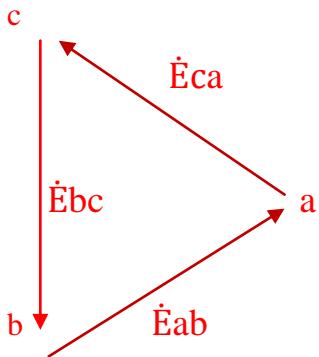
Resultan 3 Tensiones denominadas “tensiones compuestas o tensiones de línea”:

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{an} - \dot{E}_{bn}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bn} - \dot{E}_{cn}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an}$$

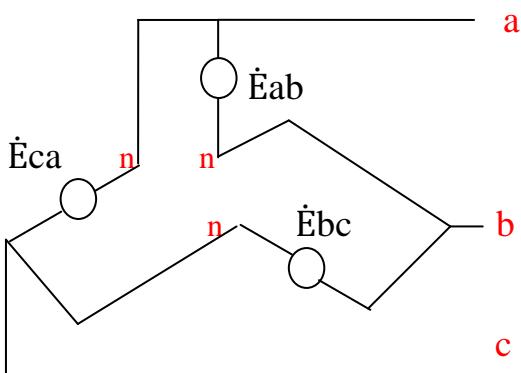
Representación y ecuaciones fasoriales

**Tensiones Compuestas**

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{an} - \dot{E}_{bn} = \sqrt{3}E e^{j30^\circ}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bn} - \dot{E}_{cn} = \sqrt{3}E e^{j270^\circ}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an} = \sqrt{3}E e^{j150^\circ}$$

**Esquema de Conexión en Triángulo****3.5 TIPOS DE CARGA**

La carga es un dispositivo receptor de potencia que se la denomina Impedancia y se la identifica con la letra Z.

En los sistemas de potencia y consumo trifásicos la carga se denomina **Carga o Impedancia Trifásica**, y la misma está compuesta por tres impedancias conectadas de distinta forma.

**3.5.1 CLASIFICACIÓN DE CARGA O IMPEDANCIA TRIFASICA****I - CARGA O IMPEDANCIA TRIFASICA EQUILIBRADA**

Se la denomina también, **simétrica o balanceada**

$$Z_a = |Z_a| e^{j\phi_a}$$

$$Z_b = |Z_b| e^{j\phi_b}$$

$$Z_c = |Z_c| e^{j\varphi_c}$$

Su característica es que las tres son iguales en módulo y ángulo de fase

$$|Z_a| = |Z_b| = |Z_c| = |Z|$$

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$$

## II - CARGA O IMPEDANCIA TRIFASICA DESEQUILIBRADA

Se la denomina también, asimétrica o desbalanceada

$$Z_a = |Z_a| e^{j\varphi_a}$$

$$Z_b = |Z_b| e^{j\varphi_b}$$

$$Z_c = |Z_c| e^{j\varphi_c}$$

Su característica es que **las tres no cumplen la condición de perfección**, es decir, que se pueden presentar los siguientes casos:

Son iguales en módulo y difieren en todos o al menos en un ángulo de fase

$$|Z_a| = |Z_b| = |Z_c| = |Z|$$

$$\varphi_a \neq \varphi_b \neq \varphi_c \quad \text{o} \quad \varphi_a = \varphi_b \neq \varphi_c$$

Difieren en todos o al menos en un módulo y son iguales en ángulo de fase

$$|Z_a| \neq |Z_b| \neq |Z_c| \quad \text{o} \quad |Z_a| \neq |Z_b| = |Z_c|$$

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$$

Difieren en todos o al menos en un módulo y difieren todos o al menos en un ángulo de fase

$$|Z_a| \neq |Z_b| \neq |Z_c| \quad \text{o} \quad |Z_a| \neq |Z_b| = |Z_c|$$

$$\varphi_a \neq \varphi_b \neq \varphi_c \quad \text{o} \quad \varphi_a = \varphi_b \neq \varphi_c$$

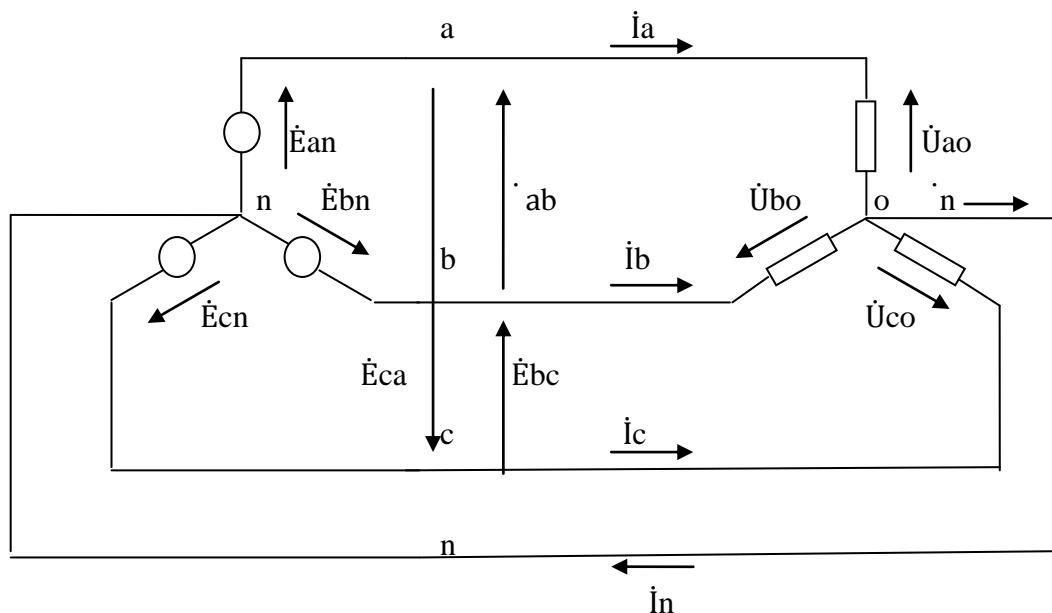
## 3.6 GENERADOR O FUENTE TRIFASICA PERFECTA EN ESTRELLA CON CARGA TRIFASICA

Realizaremos el análisis de las tensiones y corrientes resultantes de la conexión entre sí de fuentes y cargas trifásicas.

Para todos los casos consideraremos **generadores o fuentes trifásicas perfectas conectadas en estrella**, que es la configuración más utilizada en nuestras redes de baja tensión.

En primera instancias, consideraremos dos formas de conexión de **cargas o impedancias trifásicas equilibradas, en estrella y en triángulo**.

### 3.6.1 GENERADOR O FUENTE TRIFASICA PERFECTA EN ESTRELLA Y CARGAS TRIFASICAS EQUILIBRADAS EN ESTRELLA



#### Tensiones de Fase

$$\dot{E}_{an} =$$

$$\dot{E}_{bn} =$$

$$\dot{E}_{cn} =$$

#### Tensiones en la Carga

$$\dot{E}_{an} = \dot{U}_{ao}$$

$$\dot{E}_{bn} = \dot{U}_{bo}$$

$$\dot{E}_{cn} = \dot{U}_{co}$$

Las tensiones en las cargas son las de fase.

Como el Sistema de Tensiones del Generador o Fuente es Perfecto, el Sistema de Tensiones en la Carga también es Perfecto.

$$= \quad = \quad =$$

$$= \quad = \quad =$$

$$=$$

El punto “n”, se denomina “Centro de Estrella del Generador o Fuente”

El punto “o”, se denomina “Centro de Estrella de la Carga”

En esta conexión, los puntos **n** & **o** están unidos galvánicamente y no se considera caída de tensión entre ellos (el conductor de unión es de impedancia nula)

Los módulos y ángulos de desfasaje de las tensiones de línea las podemos obtener gráfica y analíticamente.

### Determinación de la Tensión de Línea o Compuesta $\dot{E}_{ca}$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an} = E e^{j120^\circ} - E e^{j0^\circ} = E (e^{j120^\circ} - e^{j0^\circ})$$

$$\dot{E}_{ca} = E \left[ \frac{-1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + j0) \right] = E \left[ \frac{-3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\dot{E}_{ca} = E \sqrt{3} \left[ \frac{-\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right] = E \sqrt{3} e^{j150^\circ}$$

Realizando el mismo análisis para las Tensiones de Línea o Compuestas  $\dot{E}_{ab}$  y  $\dot{E}_{bc}$ , resulta,

### Tensiones Compuestas

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{an} - \dot{E}_{bn} = \sqrt{3} E e^{j30^\circ}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bn} - \dot{E}_{cn} = \sqrt{3} E e^{j270^\circ}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an} = \sqrt{3} E e^{j150^\circ}$$

### Impedancia equilibrada en estrella

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_Y = |Z_Y| e^{j\varphi^0}$$

Las corrientes en cada impedancia se obtienen aplicando la Ley de Ohm, en cada una de ellas. Estas corrientes reciben el nombre de **Corrientes de Fase**.

### Corrientes en cada Impedancia de la estrella

$$\dot{I}_{ao} = \frac{\dot{U}_{ao}}{ZY} = \frac{E}{ZY} e^{j(0^\circ - \varphi)}$$

$$\dot{I}_{bo} = \frac{\dot{U}_{bo}}{ZY} = \frac{E}{ZY} e^{j(240^\circ - \varphi)}$$

$$\dot{I}_{co} = \frac{\dot{U}_{co}}{ZY} = \frac{E}{ZY} e^{j(120^\circ - \varphi)}$$

Por la característica de la conexión de la fuente en estrella con la carga en estrella, resulta que las corrientes de fase son las mismas que las corrientes de la línea que alimentan cada borne de la carga

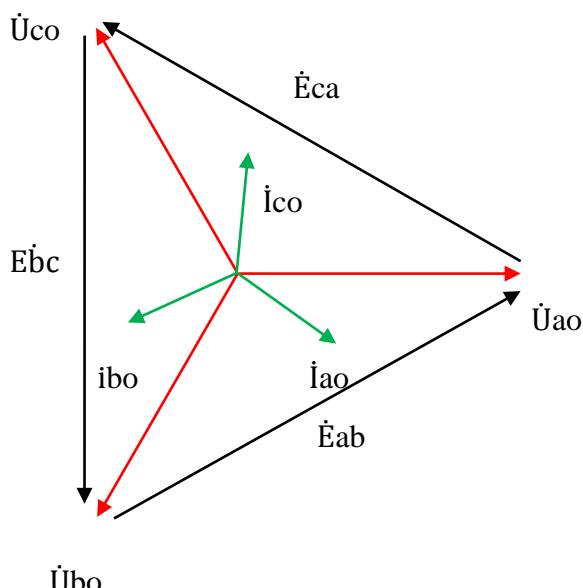
### Corrientes en cada línea de alimentación a la carga

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ao}$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_{bo}$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_{co}$$

### Diagramas Fasorial de tensiones de línea, de tensiones fase y de corrientes de fase.



## CONCLUSIONES CON CARGAS TRIFASICAS EQUILIBRADAS EN ESTRELLA:

El Sistema de Tensiones presenta 6 tensiones, 3 tensiones de fase y 3 tensiones de línea. Es decir, dos sistemas de tensiones trifásicas de distinto módulo de tensión, cada uno.

**I El Sistema de tensiones de fase** está compuesto por tres tensiones de igual módulo, pero de distinto ángulo de inicio, con el desfasaje entre los fasores de tensiones igual a  $120^\circ$  entre sí. Por lo tanto conforman un **Sistema de Tensiones Trifásicas Perfectas**. Dado que las tensiones de fase son iguales a las tensiones de carga correspondientes, el **Sistema de Tensiones de Carga**, también es **Perfecto**.

$$\dot{E}_{an} = \dot{U}_{ao}$$

$$\dot{E}_{bn} = \dot{U}_{bo}$$

$$\dot{E}_{cn} = \dot{U}_{co}$$

$$|E_{an}| = |E_{bn}| = |E_{cn}| = |E_F|$$

$$|U_{ao}| = |U_{bo}| = |U_{co}| = U$$

$$\gamma_{ab} = \beta_{bc} = \alpha_{ca} = 120^\circ$$

**II El Sistema de tensiones de línea** está compuesto por tres tensiones de igual módulo, pero de distinto ángulo de inicio, con el desfasaje entre los fasores de tensiones igual a  $120^\circ$  entre sí. Por lo tanto conforman otro **Sistema de Tensiones Trifásicas Perfectas**.

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{an} - \dot{E}_{bn}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bn} - \dot{E}_{cn}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an}$$

$$|E_{ab}| = |E_{bc}| = |E_{ca}| = |E_L|$$

$$\gamma_{ab-bc} = \beta_{bc-ca} = \alpha_{ca-ab} = 120^\circ$$

**III La relación de módulos** entre las tensiones de línea y las de fase **es el factor  $\sqrt{3}$** , esta proporcionalidad se obtiene tanto gráfica como analíticamente.

Resulta

$$|E_L| = \sqrt{3} |E_F|$$

**IV El Sistema de Corrientes de Fase** es el mismo que el de **Corrientes de Línea**, y conforman un **único Sistema de Corriente Trifásicas Perfectas**.

**Son Simétricas**, pues los módulos de las tensiones e impedancias son iguales, por cumplir las condiciones de Simetría.

$$|I_{ao}| = |I_{bo}| = |I_{co}| = |I_F|$$

$$|I_a| = |I_b| = |I_c| = |I_L|$$

$$|I_F| = |I_L| = \frac{E}{ZY}$$

El ángulo de desfasaje respecto de las correspondientes tensiones de fase es el mismo ( $\phi$ ).

Dado que el sistema de Tensiones de Fase es Equilibrado, resulta que el **Sistema de Corrientes también es Equilibrado**.

$$\varphi_{ao} = \varphi_{bo} = \varphi_{co} = \varphi$$

Por lo tanto,

$I_{ao} + I_{bo} + I_{co} = 0$

**V La Corriente en el Neutro resulta nula.**

Aplicando la 1<sup>a</sup> ley de Kirchoff en el Nodo “o” de centro de estrella de la carga, obtenemos la corriente de Neutro (In).

Dado que el Sistema de Corrientes es perfecto, resulta

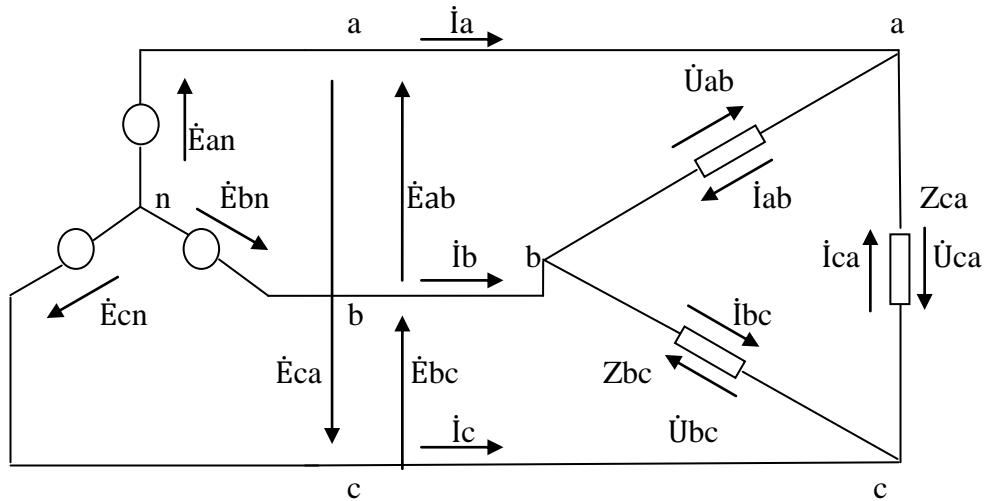
$$\dot{I}_{ao} + \dot{I}_{bo} + \dot{I}_{co} = \dot{I}_n = 0$$

Significa que por el conductor de unión entre “o” y “n”, denominado “conductor de neutro”, no circula corriente.

Entonces:

Para carga equilibrada conectada en estrella, se puede prescindir del “conductor de neutro”.

### 3.6.2 GENERADORES O FUENTES TRIFASICAS PERFECTAS CON CARGAS TRIFASICAS EQUILIBRADAS EN TRIANGULO



#### Tensiones de Fase

$$\dot{E}_a = E_a e^{j0^\circ}$$

$$\dot{E}_b = E_b e^{j240^\circ}$$

$$\dot{E}_c = E_c e^{j120^\circ}$$

#### Tensiones Compuestas

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_a - \dot{E}_b = \sqrt{3} E e^{j30^\circ}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_b - \dot{E}_c = \sqrt{3} E e^{j270^\circ}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_c - \dot{E}_a = \sqrt{3} E e^{j150^\circ}$$

#### Impedancia equilibrada en triángulo

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_\Delta = |Z_\Delta| e^{j\varphi}$$

#### Tensiones en la Carga

$$\dot{U}_{ab} = \dot{E}_a - \dot{E}_b = \dot{U}_{ab}$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{E}_b - \dot{E}_c = \dot{U}_{bc}$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{E}_c - \dot{E}_a = \dot{U}_{ca}$$

#### Corrientes en cada

#### Impedancia del triángulo

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_\Delta} = \frac{\sqrt{3} E}{Z_\Delta} e^{j(30^\circ - \varphi)}$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_\Delta} = \frac{\sqrt{3} E}{Z_\Delta} e^{j(270^\circ - \varphi)}$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{Z_\Delta} = \frac{\sqrt{3} E}{Z_\Delta} e^{j(150^\circ - \varphi)}$$

Aplicando la 1<sup>a</sup> ley de Kirchoff en cada Nodo de entrada al triángulo, obtenemos las corrientes de línea

### **Corrientes en cada línea**

#### **de alimentación a la carga**

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}$$

Los módulos y ángulos de desfasaje de las corrientes de línea las podemos obtener gráfica y analíticamente.

#### **Determinación de las Corrientes de línea $I_a$**

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = \frac{\sqrt{3}E}{Z\Delta} (e^{j(30^\circ - \varphi)} - e^{j(150^\circ - \varphi)}) = \frac{\sqrt{3}E}{Z\Delta} e^{-j\varphi} (e^{j30^\circ} - e^{j150^\circ})$$

$$\dot{I}_a = \frac{\sqrt{3}E}{Z\Delta} e^{-j\varphi} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}E}{Z\Delta} e^{-j\varphi} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}E}{Z\Delta} \sqrt{3} e^{-j\varphi}$$

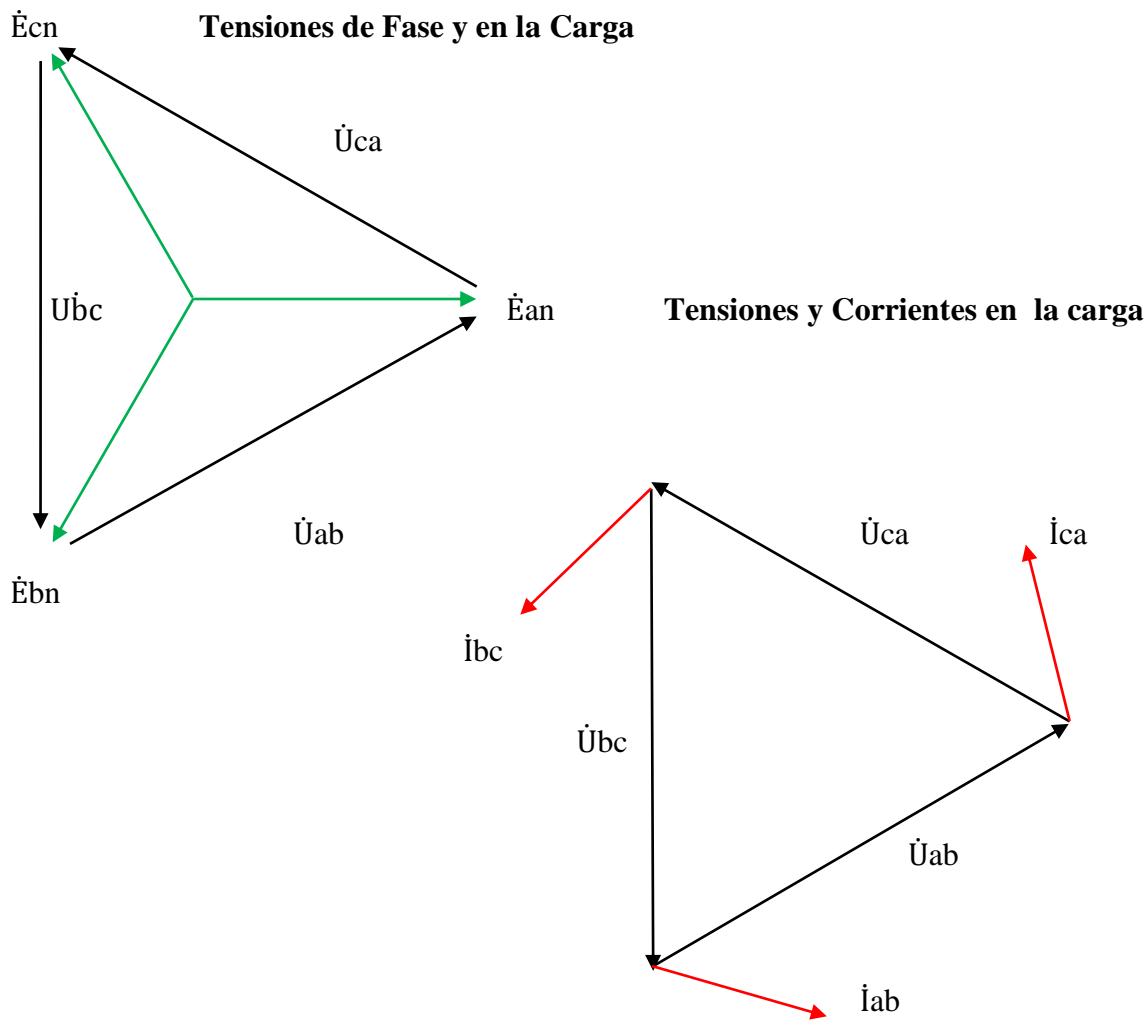
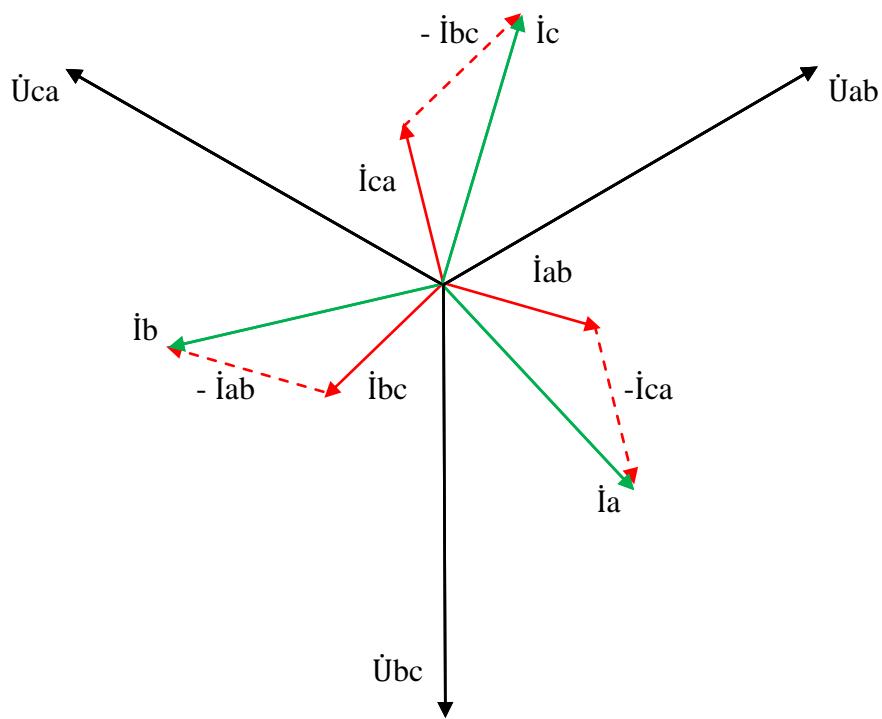
$$\dot{I}_a = I_\Delta \sqrt{3} e^{-j\varphi} \quad \text{con} \quad I_\Delta = \frac{\sqrt{3}E}{Z\Delta}$$

Realizando el mismo análisis para las Corrientes de Línea  $\dot{I}_b$  e  $\dot{I}_c$ , resulta

$$\dot{I}_b = I_\Delta \sqrt{3} e^{j(240^\circ - \varphi)}$$

$$\dot{I}_c = I_\Delta \sqrt{3} e^{j(120^\circ - \varphi)}$$

$$\text{con} \quad I_\Delta = \frac{\sqrt{3}E}{Z\Delta}$$

**Corrientes del Triángulo y de Línea**

## **CONCLUSIONES CON CARGAS TRIFASICAS EQUILIBRADAS EN TRIANGULO:**

**I** El Sistema de Tensiones presenta las **tres tensiones de línea de igual módulo**, pero de distinto ángulo de inicio. Siendo el **desfasaje entre los fasores de tensiones igual a 120 ° entre sí**. Por lo tanto conforman un **Sistema de Tensiones Trifásicas Perfectas**.

Esta condición se cumple para la fuente y la carga

$$\dot{E}_{ab} = \dot{U}_{ab}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{U}_{bc}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{U}_{ca}$$

**II** El sistema de Corrientes del triángulo conforman un **Sistema de Corriente Trifásicas Perfectas**.

**Son Simétricas**, pues los módulos de las tensiones e impedancias son iguales, por cumplir las condiciones de Simetría.

$$|I_{ab}| = |I_{bc}| = |I_{ca}| = |I_{\Delta}| = \frac{\sqrt{3}E}{Z_{\Delta}}$$

El ángulo de desfasaje respecto de las correspondientes tensiones de línea es el mismo ( $\phi$ ).

Dado que el sistema de Tensiones de Línea es Equilibrado, resulta que el sistema de Corrientes del Triángulo también es Equilibrado.

$$\varphi_{ab} = \varphi_{bc} = \varphi_{ca} = \varphi$$

Por lo tanto,

$$\dot{I}_{ab} + \dot{I}_{bc} + \dot{I}_{ca} = \dot{I}_{circ} = 0$$

$I_{circ}$ , se denomina corriente de circulación dentro de la conexión triángulo de la carga, la cual genera un calentamiento no deseado.

### III El sistema de Corrientes de línea conforman un **Sistema de Corriente Trifásicas Perfectas.**

Son Simétricas, pues los módulos de las tensiones e impedancias son iguales, por cumplir las condiciones de Simetría. Además, se obtienen a partir del sistema de corrientes de triángulo perfectas.

$$|I_a| = |I_b| = |I_c| = |I_\Delta| \sqrt{3}$$

El ángulo de desfasaje respecto de las correspondientes tensiones de fase es el mismo ( $\phi$ ).

Dado que el sistema de Tensiones de Fase es Equilibrado, resulta que **el sistema de Corrientes de Línea también es Equilibrado.**

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$$

Por lo tanto,

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

IV La **relación de módulos** entre las Corrientes de línea y las del triángulo es **el factor  $\sqrt{3}$** , esta proporcionalidad se obtiene tanto gráfica como analíticamente.

$$|I_\Delta| = \frac{\sqrt{3}E}{Z_\Delta}$$

$$|I_L| = \frac{\sqrt{3}E}{Z_\Delta} \sqrt{3}$$

Resulta

$$|I_L| = \sqrt{3} |I_\Delta|$$

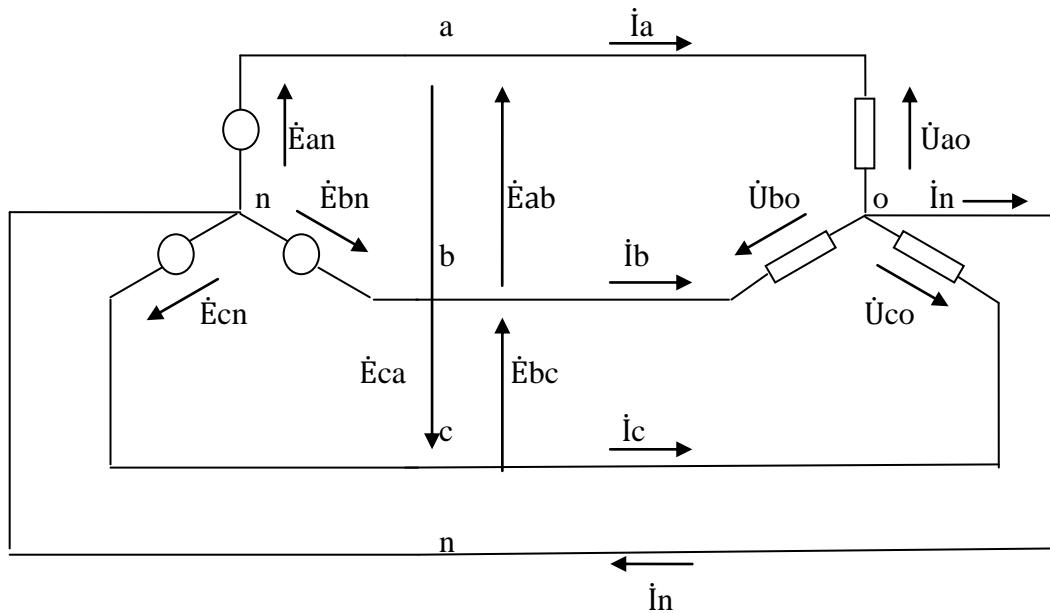
### 3.7 GENERADOR O FUENTE TRIFASICA PERFECTA EN ESTRELLA CON CARGA TRIFASICA DESEQUILIBRADA

Realizaremos el análisis de las tensiones y corrientes resultantes de la conexión entre sí de fuentes y cargas trifásicas.

Para todos los casos consideraremos **generadores o fuentes trifásicas perfectas conectadas en estrella**, que es la configuración más utilizada en nuestras redes de baja tensión.

En esta segunda instancia, consideraremos dos formas de conexión de **cargas o impedancias trifásicas desequilibradas, en estrella y en triángulo**.

#### 3.7.1 GENERADORES O FUENTES TRIFASICAS PERFECTAS CON CARGAS TRIFASICAS DESEQUILIBRADAS EN ESTRELLA



##### Tensiones de Fase

$$\dot{E}_{an} = |E_{an}| e^{j0^\circ}$$

$$\dot{E}_{bn} = |E_{bn}| e^{j240^\circ}$$

$$\dot{E}_{cn} = |E_{cn}| e^{j120^\circ}$$

##### Tensiones en la Carga

$$\dot{E}_{an} = \dot{U}_{ao}$$

$$\dot{E}_{bn} = \dot{U}_{bo}$$

$$\dot{E}_{cn} = \dot{U}_{co}$$

Como el Sistema de Tensiones del Generador o Fuente es Perfecto, el Sistema de Tensiones en la Carga también es Perfecto, y resulta:

$$|E_{an}| = |E_{bn}| = |E_{cn}| = E$$

$$|U_{ao}| = |U_{bo}| = |U_{co}| = U$$

$$E = U$$

El punto “n”, se denomina “Centro de Estrella del Generador o Fuente”

El punto “o”, se denomina “Centro de Estrella de la Carga”

En esta conexión, los puntos **n** & **o** están unidos galvánicamente y no se considera caída de tensión entre ellos (el conductor de unión es de impedancia nula)

Los módulos y ángulos de desfasaje de las tensiones de línea las podemos obtener gráfica y analíticamente.

### Determinación de la Tensión de Línea o Compuesta $\dot{E}_{ca}$

$$\dot{E}_{ca} = E_{cn} - \dot{E}_{an} = E e^{j120^\circ} - E e^{j0^\circ} = E (e^{j120^\circ} - e^{j0^\circ})$$

$$\dot{E}_{ca} = E \left[ \frac{-1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + j0) \right] = E \left[ \frac{-3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\dot{E}_{ca} = E \sqrt{3} \left[ \frac{-\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right] = E \sqrt{3} e^{j150^\circ}$$

Realizando el mismo análisis para las Tensiones de Línea o Compuestas  $\dot{E}_{ab}$  y  $\dot{E}_{bc}$ , resulta

### Tensiones Compuestas

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{ao} - \dot{E}_{bo} = \sqrt{3} E e^{j30^\circ}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bo} - \dot{E}_{co} = \sqrt{3} E e^{j270^\circ}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{co} - \dot{E}_{ao} = \sqrt{3} E e^{j150^\circ}$$

### **Impedancia desequilibrada en estrella**

$$Z_a \neq Z_b \neq Z_c$$

$$|Z_a| e^{j\varphi_a} \neq |Z_b| e^{j\varphi_b} \neq |Z_c| e^{j\varphi_c}$$

Las corrientes en cada impedancia se obtienen aplicando la Ley de Ohm, en cada una de ellas. Estas corrientes recibe el nombre de **Corrientes de Fase**

### **Corrientes en cada Impedancia de la estrella**

$$I_{ao} = \frac{U_{ao}}{Z_a} = \frac{E}{|Z_a|} e^{j(0^\circ - \varphi_a)}$$

$$I_{bo} = \frac{U_{bo}}{Z_b} = \frac{E}{|Z_b|} e^{j(240^\circ - \varphi_b)}$$

$$I_{co} = \frac{U_{co}}{Z_c} = \frac{E}{|Z_c|} e^{j(120^\circ - \varphi_c)}$$

**Estas 3 corrientes no cumplen la condición de Perfección, pues al menos una de ellas es distinta, en módulo o en fase, de las restantes**

Al ser el Sistema de corrientes de fase Imperfecto resulta:

$$I_{ao} + I_{bo} + I_{co} = I_n \neq 0$$

Por la característica de la conexión de la fuente en estrella con la carga en estrella, resulta que las corrientes de fase son las mismas que las corrientes de la línea que alimentan cada borne de la carga

### **Corrientes en cada línea de alimentación a la carga**

$$I_a = I_{ao}$$

$$I_b = I_{bo}$$

$$I_c = I_{co}$$

**Sistema de corrientes de línea también es Imperfecto, y resulta:**

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \dot{I}_n \neq 0$$

### **CONCLUSIONES CON CARGAS TRIFASICAS DESEQUILIBRADAS EN ESTRELLA:**

El Sistema de Tensiones presenta 6 tensiones, 3 tensiones de fase y 3 tensiones de línea. Es decir, dos sistemas de tensiones trifásicas de distinto módulo de tensión, cada uno.

**I** **El Sistema de tensiones de fase está compuesto por tres tensiones de igual módulo, pero de distinto ángulo de inicio,** con el desfasaje entre los fasores de tensiones igual a  $120^\circ$  entre sí. Por lo tanto conforman un **Sistema de Tensiones Trifásicas Perfectas**. Dado que las tensiones de fase son iguales a las tensiones de carga correspondientes, el sistema de tensiones de carga, también es Perfecto.

$$\dot{E}_{an} = \dot{U}_{ao}$$

$$\dot{E}_{bn} = \dot{U}_{bo}$$

$$\dot{E}_{cn} = \dot{U}_{co}$$

$$|E_{an}| = |E_{bn}| = |E_{cn}| = |E_F|$$

$$\gamma_{ab} = \beta_{bc} = \alpha_{ca} = 120^\circ$$

**II** **El Sistema de tensiones de línea está compuesto por tres tensiones de igual módulo, pero de distinto ángulo de inicio,** con el desfasaje entre los fasores de tensiones igual a  $120^\circ$  entre sí. Por lo tanto conforman otro **Sistema de Tensiones Trifásicas Perfectas**.

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_{an} - \dot{E}_{bn}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_{bn} - \dot{E}_{cn}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_{cn} - \dot{E}_{an}$$

$$|E_{ab}| = |E_{bc}| = |E_{ca}| = |E_L|$$

$$\gamma_{ab-bc} = \beta_{bc-ca} = \alpha_{ca-ab} = 120^\circ$$

**III** La relación de módulos entre las Tensiones de línea y las de fase es el factor  $\sqrt{3}$ , esta proporcionalidad se obtiene tanto gráfica como analíticamente.

Resulta,

$$|E_L| = \sqrt{3} |E_F|$$

**IV** El Sistema de Corrientes de Fase es el mismo que el de Corrientes de Línea, y conforman un único Sistema de Corriente Trifásicas Imperfectas.

No son Simétricas, pues los módulos de las impedancias no son iguales, por cumplir las condiciones de carga Asimétrica.

(caso particular de asimetría de impedancias, pues pueden darse otras condiciones de asimetría)

$$|I_{ao}| \neq |I_{bo}| \neq |I_{co}|$$

$$|I_a| \neq |I_b| \neq |I_c|$$

El ángulo de desfasaje respecto de las correspondientes tensiones de fase no es el mismo.

(caso particular, pues pueden darse otras condiciones de asimetría)

$$\varphi_{ao} \neq \varphi_{bo} \neq \varphi_{co}$$

Por lo tanto, **no son Equilibradas**

$$I_{ao} + I_{bo} + I_{co} = I_n \neq 0$$

**V La Corriente en el Neutro no resulta nula.**

Aplicando la 1<sup>a</sup> ley de Kirchoff en el Nodo “o” de centro de estrella de la carga, obtenemos la corriente de Neutro (In).

Dado que el Sistema de Corrientes es Imperfecto, resulta

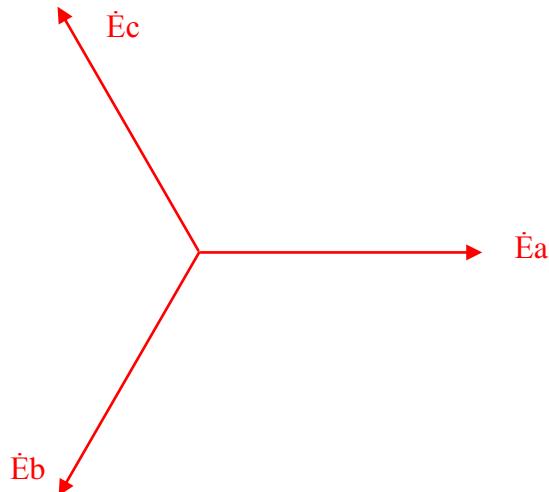
$$\dot{I}_{ao} + \dot{I}_{bo} + \dot{I}_{co} = \dot{I}_n \neq 0$$

Significa que por el conductor de unión entre “o” y “n”, denominado “conductor de neutro”, circula corriente.

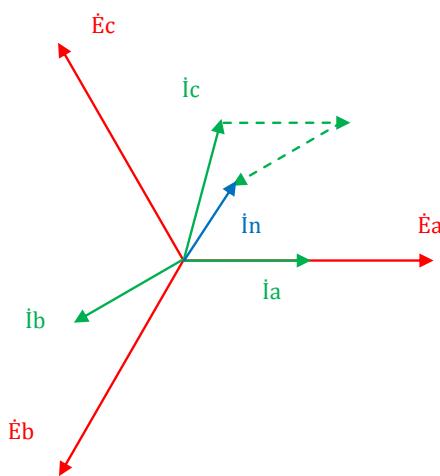
Entonces:

Para carga desequilibrada conectada en estrella, no se puede prescindir del “conductor de neutro”.

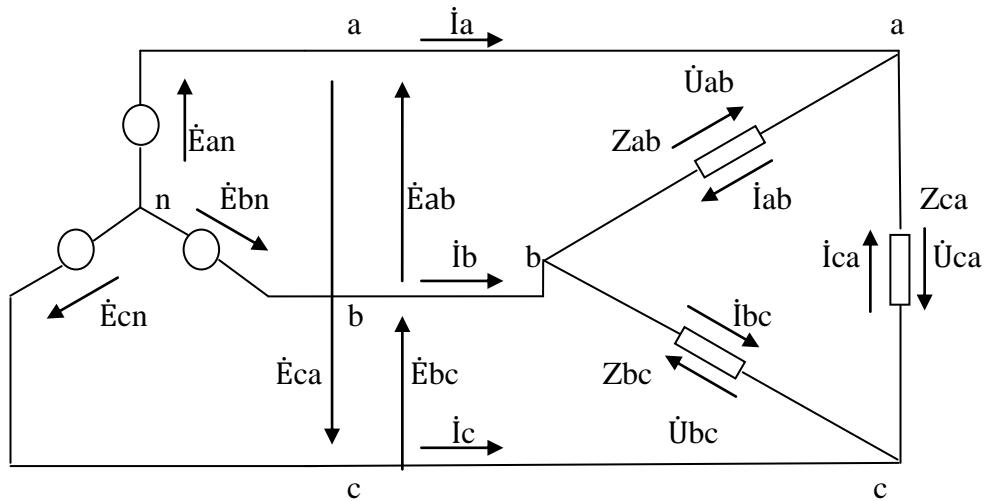
**El Sistema de tensiones de fase conforma un Sistema Perfecto.**



El **Sistema de Corrientes de Fase** es el mismo que el de **Corrientes de Línea**, y conforman un único **Sistema de Corriente Trifásicas Imperfectas**.



### 3.7.2 GENERADORES O FUENTES TRIFASICAS PERFECTAS CON CARGAS TRIFASICAS DESEQUILIBRADAS EN TRIANGULO



#### Tensiones de Fase

$$\dot{E}_a = E_a e^{j0^\circ}$$

$$\dot{E}_b = E_b e^{j240^\circ}$$

$$\dot{E}_c = E_c e^{j120^\circ}$$

#### Tensiones Compuestas

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_a - \dot{E}_b = \sqrt{3}E e^{j30^\circ}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_b - \dot{E}_c = \sqrt{3}E e^{j270^\circ}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_c - \dot{E}_a = \sqrt{3}E e^{j150^\circ}$$

#### Tensiones en la Carga

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_a - \dot{E}_b = \dot{U}_{ab}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_b - \dot{E}_c = \dot{U}_{bc}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_c - \dot{E}_a = \dot{U}_{ca}$$

#### Impedancia desequilibrada en triángulo

$$Z_{ab} \neq Z_{bc} \neq Z_{ca}$$

$$|Z_{ab}| e^{j\varphi_{ab}} \neq |Z_{bc}| e^{j\varphi_{bc}} \neq |Z_{ca}| e^{j\varphi_{ca}}$$

### Corrientes en cada Impedancia del triángulo

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{ab}|} e^{j(30^\circ - \varphi_{ab})}$$

$$I_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{bc}|} e^{j(270^\circ - \varphi_{bc})}$$

$$I_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{ca}|} e^{j(150^\circ - \varphi_{ca})}$$

Aplicando la 1<sup>a</sup> ley de Kirchoff en cada Nodo de entrada al triángulo, obtenemos las corrientes de línea

### Corrientes en cada línea de alimentación a la carga

$$I_a = I_{ab} - I_{ca}$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab}$$

$$I_c = I_{ca} - I_{bc}$$

Los módulos y ángulos de desfasaje de las corrientes de línea las podemos obtener gráfica y analíticamente.

### Determinación de las Corrientes de línea $I_a, I_b, I_c$

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{ab}|} e^{j(30^\circ - \varphi_{ab})} - \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{ca}|} e^{j(150^\circ - \varphi_{ca})}$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{bc}|} e^{j(270^\circ - \varphi_{bc})} - \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{ab}|} e^{j(30^\circ - \varphi_{ab})}$$

$$I_c = I_{ca} - I_{bc} = \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{ca}|} e^{j(150^\circ - \varphi_{ca})} - \frac{\sqrt{3}E}{|Z_{bc}|} e^{j(270^\circ - \varphi_{bc})}$$

### CONCLUSIONES CON CARGAS TRIFASICAS DESEQUILIBRADAS EN TRIANGULO:

**I** El Sistema de Tensiones presenta las **tres tensiones de línea de igual módulo**, pero de distinto ángulo de inicio. Siendo el desfasaje entre los fasores de tensiones igual a **120 ° entre sí**. Por lo tanto conforman un **Sistema de Tensiones Trifásicas Perfectas**. Esta condición se cumple para la fuente y la carga

$$\dot{E}_{ab} = \dot{U}_{ab}$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{U}_{bc}$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{U}_{ca}$$

**II** El sistema de Corrientes del triángulo conforman un **Sistema de Corriente Trifásicas Imperfectas.**

No son Simétricas, pues los módulos de las impedancias no son iguales, por cumplir las condiciones de carga Asimétrica.

(caso particular, pues pueden darse otras condiciones de asimetría)

$$|I_{ab}| \neq |I_{bc}| \neq |I_{ac}|$$

$$|I_a| \neq |I_b| \neq |I_c|$$

El ángulo de desfasaje respecto de las correspondientes tensiones de fase no es el mismo.

(caso particular, pues pueden darse otras condiciones de asimetría)

$$\varphi_{ab} \neq \varphi_{bc} \neq \varphi_{ac}$$

Por lo tanto, **no son Equilibradas**

$$\dot{I}_{ab} + \dot{I}_{bc} + \dot{I}_{ac} = \dot{I}_{circ} \neq 0$$

**$\dot{I}_{circ}$** , se denomina corriente de circulación dentro de la conexión triángulo de la carga, la cual genera un calentamiento no deseado.

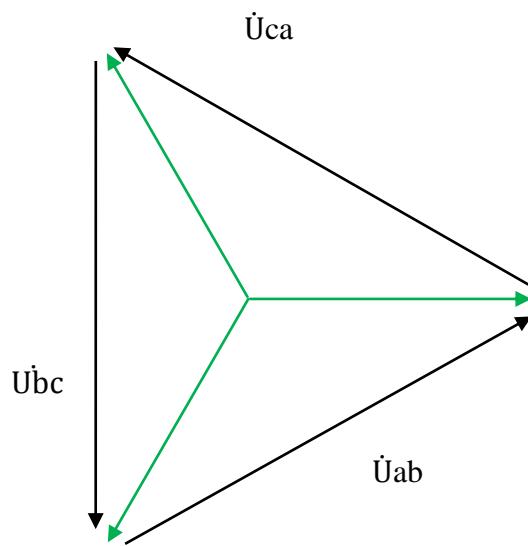
**III** El sistema de Corrientes de línea conforman un **Sistema de Corriente Trifásicas Equilibrado.**

**Pues al no haber neutro, se cumple esta condición, a pesar de cumplir la condición de asimetría.**

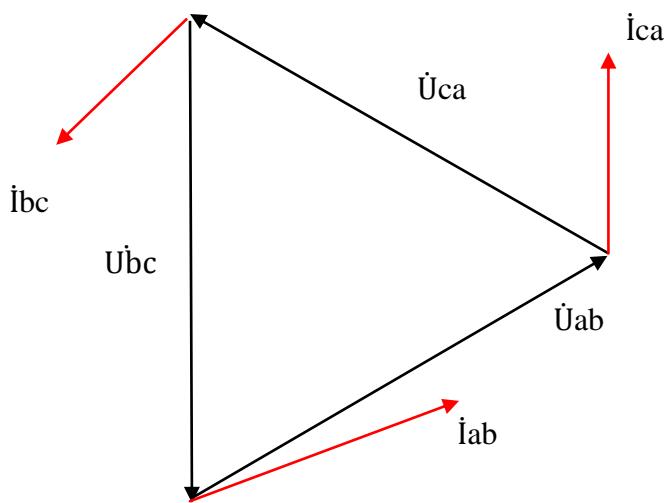
Por lo tanto:

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$$

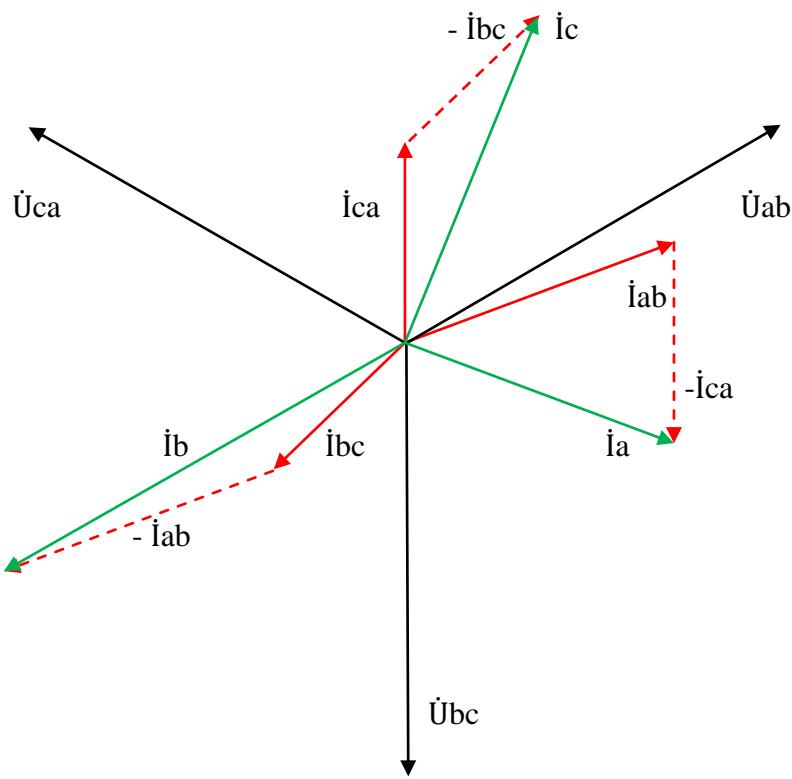
### I El Sistema Tensiones de Fase y en la Carga



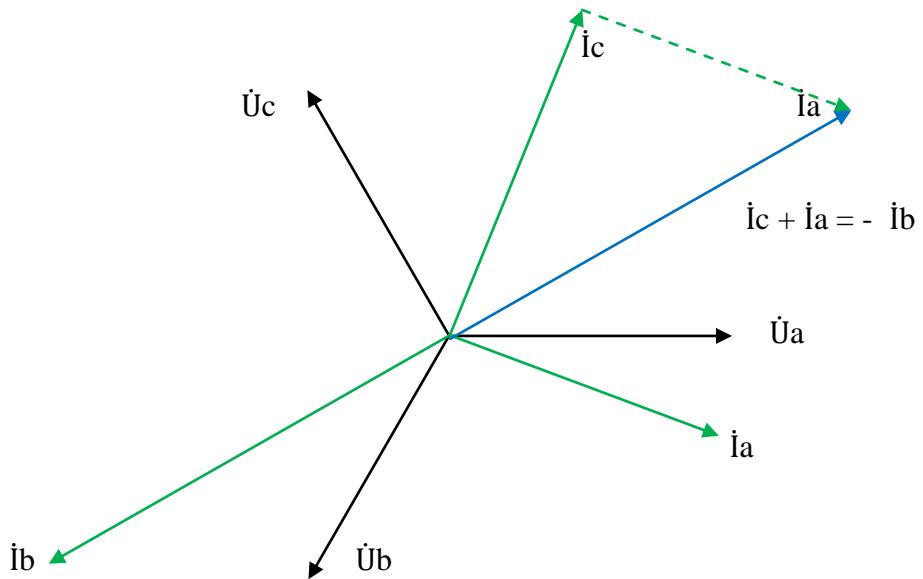
### II El sistema de Tensiones y Corrientes en la carga



### Corrientes del Triángulo y de Línea



### III El sistema de Tensiones de Fase y Corrientes de Línea



#### **4. BIBLIOGRAFIA**

Hugh Hildreth Skilling *Circuitos de Ingeniería Eléctrica.* CECSA.

Apuntes de clase *Asignatura Electrotecnia General.* Facultad de Ingeniería UNLP

Apuntes de clase *Asignatura Electrotecnia.* Facultad de Ingeniería UNLZ

Sanjurjo Navarro *Máquinas Eléctricas.* McGraw-Hill