UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios

Departamento de Matemática

31 de Outubro de 2025

Aluno: ____

1 Transformada de Laplace

Questão 1. Prove que:

a) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$;

b) $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$;

c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $s > a$;

d) $\mathcal{L}\{sen(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$;

e) $\mathcal{L}\{cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$;

f) $\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$, $|s| > a$;

g) $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$, $|s| > a$.

Questão 2. Encontre a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções. Em cada caso, especifique os valores de s para os quais a transformada de Laplace existe.

a) $f(t) = 2e^{4t}$;

b) $f(t) = 5t - 3$;

c) $f(t) = 3cos(5t)$;

d) $f(t) = 6sen(2t) - 5cos(2t)$;

e) $f(t) = (sent - cost)^2$;

f) $f(t) = (5e^{2t} - 3)^2$;

g) $f(t) = 4cos^2(2t)$.

Questão 3. Mostre que

$$\mathcal{L}\{\cosh^2(4t)\} = \frac{s^2-32}{s(s^2-64)}.$$

Questão 4. Uma função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é chamada periódica se houver um número $T > 0$ tal que

$$f(t+T) = f(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Mostre que, se $f(t)$ for periódica e contínua por partes, entã a transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Como aplicação, faça o gráfico da função

$$f(t) = \begin{cases} sent, & \text{se } t < \pi \\ 0, & \text{se } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

estendida periodicamente com periódo 2π e encontre $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Questão 5. Seja

$$f(t) = \begin{cases} 3t, & \text{se} \quad 0 < t < 2 \\ 6, & \text{se} \quad 2 < t < 4 \end{cases}$$

onde $f(t)$ é periódica com período $T = 2$. Faça o gráfico de $f(t)$ e mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}}{s^2(1 - e^{-4s})}.$$

Questão 6. Se $f(t) = t^2$, $0 < t < 2$ e $f(t+2) = f(t)$, mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 4s^2e^{-2s}}{s^3(1 - e^{-2s})}.$$

Questão 7. Seja

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se} \quad 0 < t < 1 \\ 0, & \text{se} \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

e $f(t+2) = f(t)$. Mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2(1 - e^{-2s})}$$

Questão 8. Seja

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 < t < 2 \\ 4, & \text{se} \quad t > 2 \end{cases}$$

Verifique que $\mathcal{L}\{f(t)\} = 4e^{-2s}$. Faça o mesmo para a função

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & \text{se} \quad 0 \le t \le 5 \\ 1, & \text{se} \quad t > 5 \end{cases}$$

mostrando que $\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{2}{s^2}(1 - e^{-5s}) - \frac{9}{s}e^{-5s}$.

Questão 9. Faça um esboço do gráfico da função

$$f(t) = 3\Pi_{0,2}(t) + \Pi_{2,5}(t) + t\Pi_{5,8}(t) + \frac{t^2}{10}\mathcal{U}_8(t).$$

Calcule $\mathcal{L}(f(t))(s)$

Questão 10. Represente graficamente a função $f(t) = t^2\mathcal{U}_1(t)$ e calcule sua transformada de Laplace.

Questão 11. Mostre que a transformada de Laplace de $f(t) = e^{-at}\cos(bt)$, com a e b constantes, é $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$. Analogamente para a função $f(t) = e^{-at}\sin(bt)$, com a e b constantes, é $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$. Utilize os resultados para obter $y(t)$, sabendo que

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13}.$$

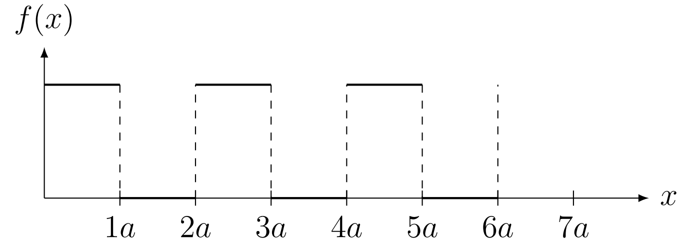


Figura 1: Gráfico de uma função de onda quadrada periódica $f(x)$ da questão 12.

Questão 12. Considere a função degrau unitária (uma função com uma descontinuidade de salto) definida por

$$\mathcal{U}_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a \\ 1, & \text{se} \quad x \geq a \end{cases}$$

Verifique que $\mathcal{L}(\mathcal{U}_a(x))(p) = \frac{e^{-pa}}{p}$, se $p > 0$. Como aplicação, verifique qua a função onde quadrada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ cujo gráfico encontra-se na figura abaixo, se escreve como

$$f(x) = \lambda \left[\mathcal{U}_0(x) - \mathcal{U}_a(x) + \mathcal{U}_{2a}(x) - \mathcal{U}_{3a}(x) + \ldots\right],$$

onde $\lambda > 0$ é a altura da onda. Conclua que $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{\lambda}{p(1+e^{-pa})}$.

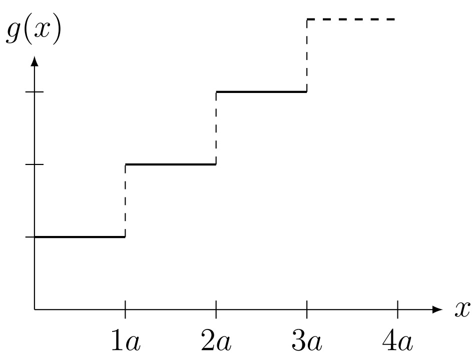


Figura 2: Função de degrau da questão 13.

Questão 13. Considere o gráfico da da função degrau descrita na figura 2. Verifique que

$$g(x) = \mathcal{U}_0(x) + \mathcal{U}_a(x) + \mathcal{U}_{2a}(x) + \mathcal{U}_{3a}(x) + \ldots.$$

Conclua que $\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p(1-e^{-pa})}$.

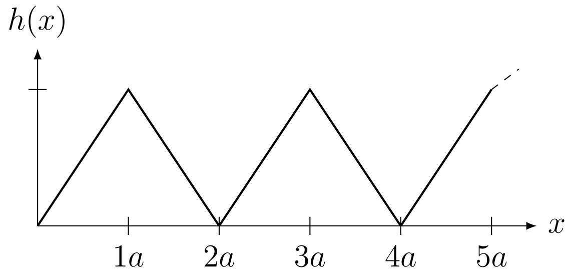


Figura 3: Função de onda triangular da questão 14

Questão 14. Considere o gráfico da da função triangular descrita na figura 3. Verifique que $h'(x) = f(x)$, onde

$$f(x) = \mathcal{U}_0(x) - 2\mathcal{U}_a(x) + 2\mathcal{U}_{2a}(x) - 2\mathcal{U}_{3a}(x) + \ldots.$$

Conclua que $\mathcal{L}(h)(p) = \frac{1}{p^2}\text{tgh}\left(\frac{ap}{2}\right)$.

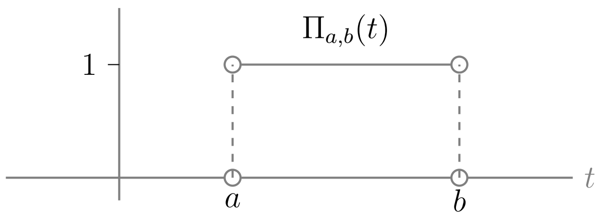


Figura 4: Representação da função retangular $\Pi_{a,b}(t)$.

Questão 15. Considere a **função janela retangular** $\Pi_{a,b}(t)$, definido por

$$\Pi_{a,b}(t) = \mathcal{U}_a(t) - \mathcal{U}_b(t).$$

Verifique que o gráfico de $\Pi_{a,b}(t)$ é representado na Figura 4. Mostre que $\mathcal{L}(\Pi_{a,b})(s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$.

Questão 16. Prove usando, indução matemática

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Questão 17. Encontre as seguintes transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3sen(4t) + 2cos(2t)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2sen(5t) + 3cos(2t)\}.$$

Questão 18. Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe, mostre que

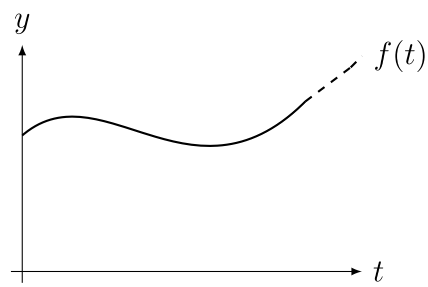
$$\mathcal{L}\{e^{\gamma t} f(t)\} = F(s - \gamma).$$

Use isto para encontrar a transformada de Laplace das seguintes funções: $f(t) = t^2 e^{3t}$, $g(t) = e^{-2t} sen(4t)$, $h(t) = e^{4t}\cosh(5t)$ e $\ell(t) = e^{-2t}(3cos(6t) - 5sen(6t))$.

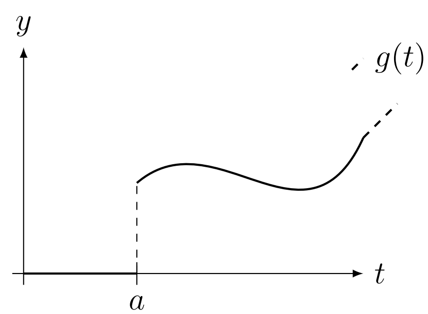
Questão 19. A Figura 5 mostra a função $g(t)$, que é uma versão da função $f(t)$ **deslocada** (ou **transladada**) no eixo do tempo. Note que $g(t)$ é nula para $t < a$. Mostre que se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & \text{se} \quad t > a \\ 0, & \text{se} \quad t < a \end{cases},$$

então $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$.



(a) Função $f(t)$



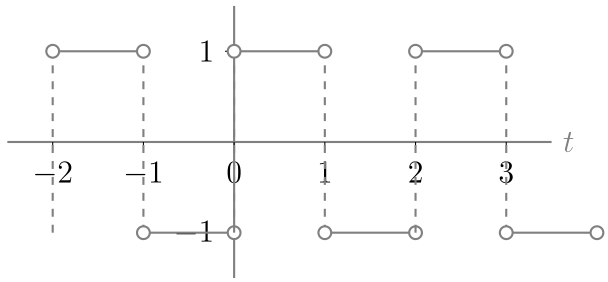
(b) Função $g(t)$

Figura 5: Representação das funções $f(t)$ e $g(t)$.

Como aplicação, se

$$f(t) = \begin{cases} cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right), & \text{se} \quad t < 2\pi/3 \\ 0, & \text{se} \quad t < 2\pi/3 \end{cases},$$

mostre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$.



Questão 20. A função $g(t)$ é definida ao lado representa a chamada **função onda quadrada**. Essa representação é útil para descrever sistemas lineares em engenharia e análise de sinais. Expresse a função dada usando funções janela ($\Pi_{a,b}(t)$) e degrau e calcule sua transformada.

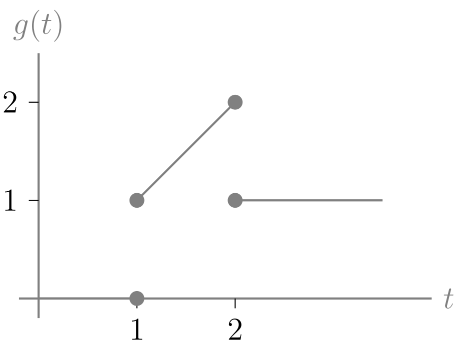


Figura 6: Função $g(t)$

Questão 21. A função $g(t)$ é definida por partes: ela permanece em zero até $t = 1$, cresce linearmente entre $t = 1$ e $t = 2$, e depois se mantém constante em 1. Essa representação é útil para descrever sistemas lineares em engenharia e análise de sinais. Expresse a função dada usando funções janela ($\Pi_{a,b}(t)$) e degrau e calcule sua transformada.

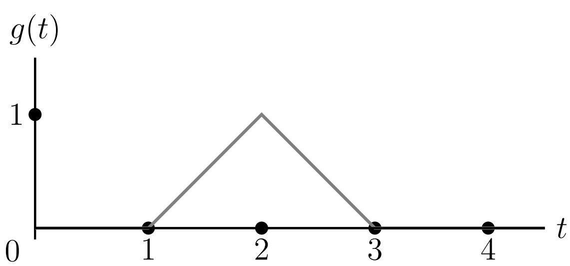


Gráfico da função $g(t)$

Questão 22. A figura ao lado apresenta o gráfico de uma **função pulso triangular**. Essa representação é útil para descrever sistemas lineares em engenharia e análise de sinais. Expresse a função dada usando funções janela ($\Pi_{a,b}(t)$) e degrau e calcule sua transformada.

Questão 23. Calcule $\mathcal{L}(t\sin(at))$ e $\mathcal{L}(t^2\sin(ax))$, onde a é uma constante.

Questão 24. Mostre que, se a é uma constante, então:

$$\mathcal{L}(\text{senh}(at)) = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \ \forall\, s > |a|.$$

Questão 25. Ache $\mathcal{L}(\sin^2(at))$ e $\mathcal{L}(\cos^2(at))$ sem integrar. Como essas duas transformadas se relacionam uma com a outra?

Questão 26. Mostra explicitamente que $\mathcal{L}(e^{t^2})$ não existe. (**Sugestão:** $t^2 - st = (t - \frac{s}{2})^2 - \frac{s^2}{4}$.)

Questão 27. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\int_0^x (x-t)^n t^m dt = \frac{n!m!}{(m+n+1)!} x^{m+n+1}.$$

(**Sugestão:** Use o Teorema da convolução para $f(t) = t^n$ e $g(t) = t^m$.)

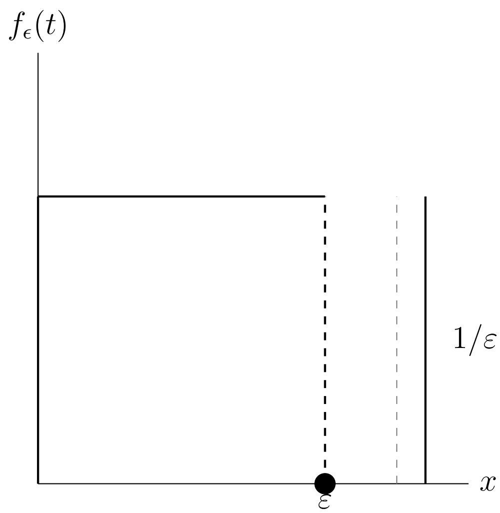


Gráfico da função $f_\epsilon(t)$ da questão 29.

Questão 28. Seja $\epsilon > 0$ e considere $f_\epsilon(t)$ definida por

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & \text{se} \quad 0 \le t \le \epsilon \\ 0, & \text{se} \quad t > \epsilon \end{cases},$$

O gráfico é mostrado ao lado. Mostre que $\int_0^\infty f_\epsilon(t) dt = 1$ e que $\mathcal{L}(f_\epsilon(t)) = \frac{1-e^{-\epsilon s}}{\epsilon s}$. Mostre que

$$\lim_{\epsilon \to \infty} \mathcal{L}(f_\epsilon(t)) = 1.$$

Estritamente falando, $\lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$ não existe como função, mas se ignorarmos o "rigor", então $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$ é visto como algum tipo de quase-função que é infinita em $x = 0$ e zero para $x > 0$, e tem as propriedades

$$\int_0^\infty \delta(t) dt = 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(\delta(t)) = 1.$$

A quase-função $\delta(t)$ é chamada **função Delta de Dirac** ou **função impulso unitária**.

Questão 29. Mostre que, se $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ é um número complexo, então $\mathcal{L}(e^{zt}) = \frac{1}{s-z}$ se $s > \alpha$. Qual a região no plano complexo da existência da transformada de Laplace $\mathcal{L}(e^{(2+3i)t})$? Calcule $\mathcal{L}(e^{(2+3i)t})$

Questão 30. Use a Questão anterior para provar que:

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}\sin(\beta t)) = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(e^{\alpha t}\cos(\beta t)) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

Questão 31. Prove que, se α é uma constante, então

$$\cos(\alpha t) = \frac{e^{ait} + e^{-ait}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\alpha t) = \frac{e^{ait} - e^{-ait}}{2i}$$

Use isso para calcular $\mathcal{L}(\sin(\alpha t))$ e $\mathcal{L}(\cos(\alpha t))$.

Questão 32. Sejam
$$f(t) = e^{-t}\sin(2t) \quad \text{e} \quad g(t) = e^{-t}\cos(2t).$$
Calcule a transformada cde Laplace da convolução $f \star g$.

Questão 33. Calcule $\mathcal{L}\left(e^{-3t}\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Questão 34. Encontre uma função contínua $f(t)$, sabendo que $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{(s-i)(s+2)}$.

Questão 35. Calcule
$$\mathcal{L}(e^{(2+3i)t}\cos(4t)).$$

Questão 36. Seja
$$f(t) = e^{\frac{i\pi}{4}t}.$$
Calcule $\mathcal{L}(f''(t) + 3f'(t) + 2f(t))$ e determine o valor de $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Questão 37. a) Considere a função
$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{se } \ t \neq 0 \\ 1, & \text{se } \ t = 0 \end{cases},$$
Mostre que $f : [0, +\infty) \to R$ vé contínua e admissível.

b) Usando que
$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots,$$
mostre que
$$\mathcal{L}\left\{\frac{sent}{t}\right\} = \text{arc tg}(1/s),$$

c) Mostre que, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$. Use isto para encontrar $\mathcal{L}\left\{\frac{sen(at)}{t}\right\}$.

Questão 38. Mostre que

a) $\mathcal{L}\{e^{-t}sen^2(t)\} = \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

b) $\mathcal{L}\{(1 + te^{-t})^3\} = \frac{1}{s} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+2)^3} + \frac{6}{(s+3)^4}$.

Questão 39. Suponha que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s^2-s+1}{(2s+1)^2(s-1)}$. Mostre que
$$\mathcal{L}\{f(2t)\} = \frac{s^2 - 2s + 4}{4(s+1)^2(s-2)}.$$

Questão 40. Mostre que, se
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s},$$
então $\mathcal{L}\{e^{-t}f(3t)\} = \frac{e^{-\frac{3}{s+1}}}{s+1}$.

Questão 41. Mostre que, se

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

então para todo $\lambda > 0$,

$$\mathcal{L}\{\lambda^t f(at)\} = \frac{1}{s - \ln(\lambda)} F\left(\frac{s - \ln(\lambda)}{a}\right)$$

Questão 42. Suponha que as funções $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas e suaves por partes para $t \geq 0$ e que cada uma das funções satisfaz a condição de crescimento exponencial. Mostre por indução matemática que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(o) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Use este resultado para provar que $\mathcal{L}\{sen(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$.

Questão 43. Prove por indução que

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Use o resultado para provar que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\tau) d\tau,$$

desde que $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ exista. Conclua que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sent}{t}\right\} = \text{arc tg}(1/s).$$

Questão 44. Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Conclua que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{sen\tau}{\tau} d\tau\right\} = \frac{1}{s}\text{arc tg}(1/s).$$

Questão 45. Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\int_t^{\infty} \frac{cos(\tau)}{\tau} d\tau\right\} = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}.$$

Questão 46. Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\int_t^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau\right\} = \frac{\ln(s+1)}{s}.$$

Questão 47. Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

a) Demonstre que $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(\tau) d\tau$, desde que as integrais convirjam.

b) Usando a Questão 43, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{sent}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Questão 48. Verifique que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (\tau^2 - \tau + e^{-\tau}) d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{t^2 - t + e^{-t}\right\}.$$

Questão 49. Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e

$$g(\tau) = \int_0^\tau f(u) du,$$

mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s^2}.$$

Questão 50. Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau\right\} = \frac{1}{s}\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right).$$

Questão 51. Prove que

a) $\mathcal{L}\{tcos(at)\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$;

b) $\mathcal{L}\{tsen(at)\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$;

c) $\mathcal{L}\{t[3sen(2t) - 2cos(2t)]\} = \frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$;

d) $\mathcal{L}\{t^2 sent\} = \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^2}$;

e) $\mathcal{L}\{t \cdot \cosh(3t)\} = \frac{s^2 + 9}{(s^2 - 9)^2}$;

f) $\mathcal{L}\{t \cdot \mathrm{senh}(2t)\} = \frac{4s}{(s^2 - 4)^2}$;

g) $\mathcal{L}\{t^2 cost\} = \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3}$;

h) $\mathcal{L}\{(t^2 - 3t + 2)sen(3t)\} = \frac{6s^4 - 18s^3 + 126s^2 - 162s + 432}{(s^2 + 9)^3}$;

i) $\mathcal{L}\{t^3 cos(t)\} = \frac{6s^4 - 36s^2 + 6}{(s^2 + 1)^4}$.

Questão 52. Mostre que

$$\int_0^\infty te^{-3t} sent dt = \frac{3}{50}.$$

Questão 53. Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right).$$

Questão 54. Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{cos(at)-cos(bt)}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right).$$

Questão 55. Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{senh}(t)}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right).$$

Questão 56. Usando a Questão 53, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t} dt = \ln(2).$$

Usando a Qurstão 54, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{cos(6t)-cos(4t)}{t} dt = \ln(3/2).$$

Questão 57. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{sen^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Questão 58. Mostre que

$$\mathcal{L}\{sen^3(t)\} = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}.$$

Questão 59. Se $\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$, encontre uma expressão para $\mathcal{L}\{e^{-t}f(2t)\}$.

Questão 60. Mostre que, se

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \text{arc tg}(1/s),\ f(0) = 2 \ \text{ e } \ f'(0) = -1,$$

então $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2s-1+\text{arc tg}(1/s)}{s^2}$.

Questão 61. Sejam α, β constantes e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Mostre que

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(\beta t)\} = \frac{1}{\beta}F\left(\frac{s-\alpha}{\beta}\right).$$

Questão 62. Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sen^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right).$$

Conclua que $\int_0^\infty \frac{e^{-t}sen^2 t}{t} dt = \frac{1}{4}\ln 5$.

2 Transformada Inversa de Laplace

Questão 63. Mostre que

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$;

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$;

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{sen(at)}{a}$;

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = cos(at)$;

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{\operatorname{senh}(at)}{a}$;

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh(at)$.

Questão 64. Prove a propriedade de translação: Se $F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$ entã

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).$$

Como aplicação mostre que

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = 2e^{3t}(3cos(4t) + sen(4t))$;

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = 4e^{-4t}(1-t)$;

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = 4e^{3t} - e^{-t}$.

Questão 65. Prove a propriedade de translação: Se $F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$ então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = g(t),$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & \text{se} \quad t > a \\ 0, & \text{se} \quad t < a \end{cases}$$

Como aplicação, calcule

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^2}\right\}$;

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}\right\}$;

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$;

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$.

Questão 66. Prove que, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(\lambda s)\} = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

Como aplicação mostre que, se $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{cos(2\sqrt{at})}{\sqrt{\pi t}}.$$

Questão 67. Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{f^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t),\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Como aplicação, mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{tsen(at)}{2a}$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\} = \frac{2(1 - cos(t))}{t}.$$

Questão 68. Como aplicação do problema **??** , mostre que

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \frac{t^2}{2} + cos(t) - 1;$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}tsen(t);$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\} = 2\int_0^t \frac{1-cos\tau}{\tau}d\tau.$

Questão 69. Mostre que, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ e $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f \star g.$$

Mostre também que $f \star g = g \star f$. Como aplicação, mostre que

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{tsen(at)}{2a};$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2.$

Questão 70. Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}.$$

Questão 71. Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} + 4te^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Questão 72. Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t}(sent + sen2t).$$

Questão 73. Sejam $P(s)$ e $Q(s)$ polinômios onde $P(s)$ tem grau menor do que o de $Q(s)$. Suponha que $Q(s)$ tem n zeros distintos α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}.$$

Como aplicação direta, mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}.$$

Questão 74. Suponha que $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s), Q(s)$ são polinômios, como no problema anterior, mas que $Q(s)$ tenha uma raiz repetida $\alpha_k = a$ com multiplicidade m, enquanto as demais raízes não se repetem, $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

a) Mostre que

$$F(s) = \frac{A_1}{(s-a)^m} + \frac{A_2}{(s-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{s-a} + \frac{B_1}{s-b_1} + \frac{B_2}{s-b_2} + \ldots + \frac{B_n}{s-b_n}.$$

b) Mostre que

$$A_k = \lim_{s\to a} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^k}{ds^k}\{(s-a)^m F(s)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

c) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at}\left\{\frac{A_1}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{A_2}{(m-2)!}t^{m-2} + \ldots + A_m\right\} + B_1e^{b_1t} + \ldots + B_ne^{b_nt}.$$

d) Como aplicação calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$.

3 Resolvendo EDO's

Questão 75. Utilize a transformada de Laplace para resolver a seguinte EDO:

$$y'' + 2y' + y = te^{-t},$$

com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$.

Questão 76. Utilize a transformada de Laplace para resolver a seguinte EDO:

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t},$$

com as condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 12$.

Questão 77. Utilize a transformada de Laplace para resolver a seguinte EDO:

$$y'' + 4y' - 5y = te^{t},$$

com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Questão 78. Utilize a transformada de Laplace para resolver a seguinte EDO:

$$w''(t) - 2w'(t) + 5w(t) = -8e^{\pi - t},$$

com as condições iniciais $w(\pi) = 2$ e $w'(\pi) = 12$.

Questão 79. Utilize a transformada de Laplace para resolver a seguinte EDO:

$$y'' + 2ty' - 4y = 1,$$

com as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Questão 80. Use a transformada de Laplace para resolver

$$y''(t) + 4y(t) = g(t),$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ 0 < t < 1 \\ -1, & \text{se } \ 1 < t < 2 \\ 0, & \text{se } \ t > 2 \end{cases}$$

Questão 81. Use a transformada de Laplace para resolver as seguintes EDO's com coeficientes variáveis:

a) $ty'' + 2(t-1)y' + (t-2)y = 0$;

b) $y'' - 2y' + ty = 0$,

onde $y = y(t)$.

Questão 82. Use o Teorema da convolução para encontrar uma solução particular da equação

$$y'' + 2ay' + a^2y = f(t)$$

onde a é uma constante.

Questão 83. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = \delta(x - x_0)$$

com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Questão 84. Consideremos o movimento de um oscilador harmônico amortecido sob a ação de uma força que representa um golpe instantâneo quando $t = t_0 > 0$. Suponhamos ainda que o sistema esteja em repouso no instante $t = 0$. Encontre $x(t)$ em cada instante $t \geq t_0$.

Questão 85. Usando transformada de Laplace, encontre a solução do P.V.I.

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = e^{(1+2i)t}$$

com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Questão 86. Um sistema massa–mola–amortecedor possui $m = 2\,\text{kg}$, $c = 4\,\text{N·s/m}$ e $k = 8\,\text{N/m}$. Uma força externa $F(t) = 10e^{-t}$ atua sobre o sistema inicialmente em repouso.

1. Monte a equação diferencial do movimento.
2. Use a Transformada de Laplace para obter $X(s)$.
3. Determine a resposta $x(t)$ e discuta se o sistema é subamortecido, criticamente amortecido ou superamortecido.

Questão 87. A temperatura $T(t)$ de um corpo é modelada por

$$T'(t) + 0{,}5T(t) = 100\mathcal{U}(t - 2), \qquad T(0) = 20.$$

1. Aplique a Transformada de Laplace e encontre $T(s)$.
2. Determine $T(t)$ e descreva o comportamento antes e depois de $t = 2$.

Questão 88. A equação de aquecimento de um corpo é dada por

$$\frac{dT}{dt} + 0{,}5T = 20[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 3)], \quad T(0) = 25.$$

1. Determine $T(s)$ usando Transformada de Laplace.
2. Ache $T(t)$ no domínio do tempo.
3. Desenhe o comportamento qualitativo da temperatura.

Questão 89. Um sistema massa–mola sem amortecimento possui $m = 1\,\text{kg}$, $k = 9\,\text{N/m}$. Uma força externa $F(t) = 6e^{-t}$ atua sobre a massa, inicialmente em repouso.

1. Escreva a equação diferencial para o deslocamento $x(t)$.
2. Determine $X(s)$ usando Transformada de Laplace.
3. Ache $x(t)$.

Questão 90. Um oscilador massa–mola sem amortecimento recebe um impulso no tempo $t = 1$ segundo:

$$x''(t) + 9x(t) = \delta(t-1), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

1. Determine $X(s)$ usando a Transformada de Laplace.
2. Ache $x(t)$ no domínio do tempo.
3. Descreva a resposta após o impulso.