Book of Proof
Third Edition

Richard Hammack

10 de agosto de 2021

Conteúdo

1

Conjuntos

"The theory of sets is a language that is perfectly suited to describing and explaining all types of mathematical structures."

– página 3

1.1 Introdução

Um **conjunto** (set) é uma lista de **elementos**. Normalmente denotados por uma letra maiúscula. Por exemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

Dois sets A e B são **iguais** se possuírem exatamente os mesmos elementos. Não importando a ordem desses elementos dentro de cada set.

Vamos definir um símbolo para sinalizar se um determinado elemento x pertence ou não a um determinado set qualquer A. Para tal relação usaremos o símbolo " $\in$ " se x for um elemento de A ou, caso contrário, usaremos " $\notin$ " se x não for um elemento de A.

É provável que, em algum momento, seja necessário contar a quantidade de elementos em um dado set qualquer A. Chamaremos essa relação de **cardinalidade** ou **tamanho** do set A. O símbolo usado será duas barras em volta do set do seguinte modo: "$|A|$".

A partir dessas duas relações já podemos definir um tipo especial de set. Vamos definir como **conjunto vazio** ou **empty set** um conjunto que possua o cardinal igual a zero. Usaremos o símbolo "$\emptyset$" para definir a relação abaixo:

$$|\emptyset| = 0$$

Às vezes, não raramente, usamos sets que a escrita como uma lista de elementos não é tão intuitiva para uso. Para essas situações usamos a **notação de formação de conjuntos (set builder notation)**. Como no exemplo abaixo:

$$E = \{\ 2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Eu colori cada significado da expressão acima com a cor correspondente para facilitar o entendimento. A leitura da expressão acima é: "O conjunto 'E' é igual ao conjunto dos elementos da forma $2n$ tal que n é um elemento de $\mathbb{Z}$".

Podemos resumir essa notação de formação de conjuntos como "$Conjunto = \{Express\tilde{a}o : Regra\}$". É bem comum vermos notações onde os dois pontos são trocados por uma barra: "$Conjunto = \{Express\tilde{a}o \mid Regra\}$".

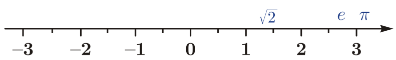
Existem alguns conjuntos que são famosos e a essa altura você já deve ter visto algumas vezes.

$\emptyset = \{\}$

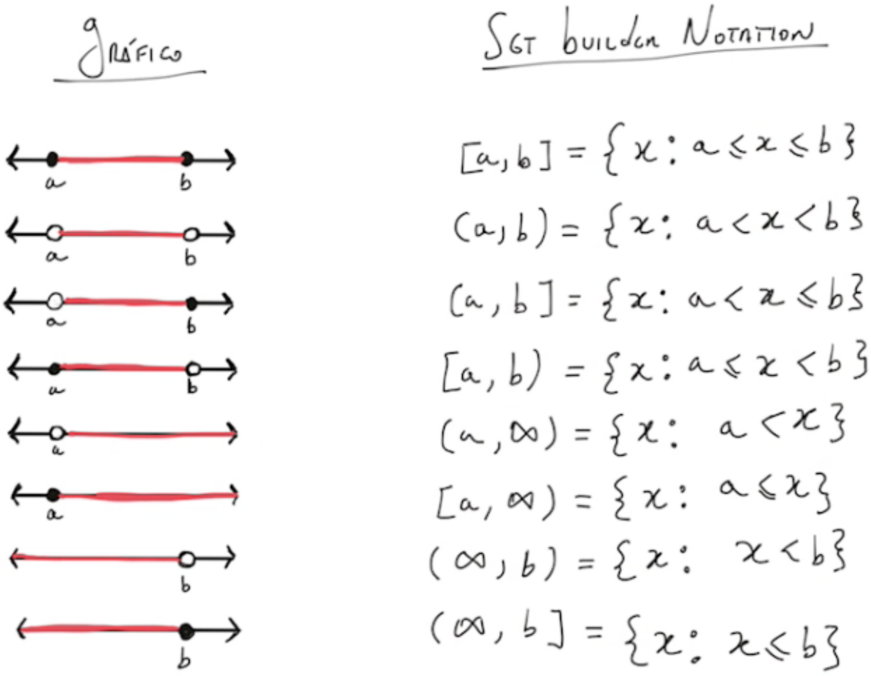
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, perceba que $0 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Q} = \{x : x = m/n,\ onde\ m, n \in \mathbb{Z}\ e\ n \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ 

Como o conjunto dos número reais pode ser descrito como pontos em uma reta infinita. Se tivermos dois pontos quaisquer a e b, de modo que, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Temos infinitos elementos entre esses dois pontos. Desse modo, teremos que usar um novo símbolo para se referir aos conjuntos que são melhor descritos em termos de **intervalos** entre pontos.



1.2 Produto Cartesiano

Definition 1.2.1 (Par Ordenado)**.** Um **par ordenado** é um lista na forma (x, y) que contém dois elementos (x e y). Onde esses dois elementos estão entre parênteses e separados por uma vírgula.

Atente para o fato que $(x, y) \neq (y, x)$.

Agora que temos a definição de par ordenado. Podemos escrever conjuntos usando esse novo símbolo.

Definition 1.2.2 (Produto Cartesiano)**.** O **produto cartesiano** de dois sets A e B é um outro set cujo símbolo é "$A \times B$" e é definido como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Perceba que, se A e B são finitos, então $|A \times B| = |A|.|B|$

2

Lógica

3

Contagem

4

Prova Direta

5

Prova Contra-positiva

6

Prova por Contradição

7

Prova de Afirmações Não-Condicionais

8

Provas Envolvendo Conjuntos

9

Contraprova

10

Indução Matemática

11

Relações

12

Funções

13

Provas com Calculus

14

Cardinalidade de Conjuntos