

Microeconomia

Tradução da 9 edição

Hal R. Varian

RESUMO E ADAPTAÇÃO POR:
BRUNO DE M. RUAS

5 de janeiro de 2022

Conteúdo

Preparativos	2
Matemática	2
Funções	2
Gráficos	2
Propriedades das Funções	3
Funções Inversas	3
Equações e Identidades	3
Funções Lineares	3
Variações e Taxas de Variação	4
Inclinações e Interceptos	5
Valores Absolutos e Logaritmos	5
Derivadas	6
Derivadas Segundas	6
A regra do Produto e da Cadeia	6
Derivadas Parciais	7
Otimização	7
Otimização com Restrição	8
Programação	10
Capítulo 25 - Monopólio	10
Demanda Linear e Monopólio (25.2)	10
Demanda Elasticidade Constante e Monopólio (25.3)	10
Capítulo 26 - Comportamento do Monopolista	11
Demandas Lineares e Discriminação de Preço (26.4)	11
Vinculação de Produtos (26.5)	11
I Teoria da Escolha e Teoria do Consumidor	12
1 O Mercado	13
2 Restrição Orçamentária	14
3 Preferências	15

<i>CONTEÚDO</i>	ii
4 Utilidade	16
5 Escolha	17
6 Demanda	18
7 Preferência Revelada	19
8 A Equação de Slutsky	20
9 Comprando e Vendendo	21
10 Escolha Intertemporal	22
11 Mercado de Ativos	23
12 Incerteza	24
13 Ativos de Risco	25
14 O Excedente do Consumidor	26
15 Demanda de Mercado	27
II Equilíbrio, Econometria e Leilões	28
16 Equilíbrio	29
17 Medição	30
18 Leilões	31
III Teoria da Firma	32
19 Tecnologia	33
20 Maximização do Lucro	34
21 Minimização de Custos	35
22 Curva de Custo	36
23 Oferta da Empresa	37
24 Oferta da Indústria	38

IV	Mercados e Concorrência Imperfeita	39
25	Monopólio	40
25.1	Maximização dos Lucros	40
25.2	Curva de Demanda Linear e Monopólio	42
25.3	Estabelecimento de Preços com Markup	43
25.3.1	Demanda com Elasticidade Constante e Monopólio	44
25.4	A Ineficiência do Monopólio	45
25.5	O Ônus do Monopólio	47
25.6	Monopólio Natural	48
25.7	O Que Causa os Monopólios?	49
26	O Comportamento do Monopolista	52
26.1	Tipos de discriminação de Preços	52
26.2	Discriminação de Preços de 1º Grau	53
26.3	Discriminação de Preços de 2º Grau	55
26.4	Discriminação de Preços de 3º Grau	58
26.4.1	Curvas de Demanda Lineares	60
26.5	Vinculação de Produtos	62
26.6	Tarifas Bipartidas	63
26.7	Competição Monopolística	67
26.8	Modelo de Diferenciação de Produtos por Local (Estabilidade na Competição)	69
26.9	Diferenciação de Produtos	71
26.10	Mais Sorveteiros	72
27	O Mercado de Fatores	73
27.1	O Monopólio no Mercado do Produto	73
27.2	O Monopsônio	77
27.2.1	Monopsônio com Oferta Linear	79
27.3	Monopólios Upstream e Downstream na Cadeia de Produção	80
28	O Oligopólio	84
28.1	A Escolha de Uma Estratégia	85
28.2	Liderança de Quantidade	86
28.2.1	O Problema da Empresa Seguidora	86
28.2.2	O Problema da Empresa Líder	87
28.3	Liderança do Preço	90
28.3.1	O Problema da Seguidora	90
28.3.2	O Problema da Líder	90
28.4	Comparação entre as Lideranças de Preço e Quantidade	92
28.5	Estabelecimento Simultâneo da Quantidade	92
28.6	Exemplo do Equilíbrio de Cournot	93
28.7	Ajustamento para o Equilíbrio	95

28.8	Várias Empresas no Equilíbrio de Cournot	96
28.9	Fixação Simultânea de Preços	98
28.10	Conluio	98
28.10.1	O problema da ‘Desonestidade’	99
28.11	Estratégias Punitivas	101
28.12	Comparação das Soluções	103
29	A Teoria dos Jogos	104
29.1	A Matriz de Ganhos de um Jogo	104
29.2	Equilíbrio de Nash	105
29.3	Estratégias Mistas	106
29.4	O Dilema do Prisioneiro	108
29.5	Jogos Repetidos	108
29.6	Manutenção de um Cartel	109
29.7	Jogos Sequenciais	109
29.8	Um jogo com Barreiras à Entrada	110
30	Aplicações da Teoria dos Jogos	112
30.1	Curvas de Melhor Resposta	112
30.2	Estratégias Mistas	113
30.3	Jogos de Coordenação	116
30.3.1	A Batalha dos Sexos	116
30.3.2	O Dilema do Prisioneiro	116
30.3.3	Jogos de Garantia	117
30.3.4	Roleta Russa	118
30.4	Jogos de Competição	119
30.5	Jogos de Coexistência	119
30.6	Jogos de Compromisso	119
30.7	Negociação	119
V	Tópicos Avançados	120
31	Economia Comportamental	121
32	Trocas	122
33	Produção	123
34	O Bem-Estar	124
35	Externalidades	125
36	Tecnologia da Informação	126

CONTEÚDO

v

37 Bens Públicos

127

38 Informação Assimétrica

128

Preparativos

Matemática

*"Some Day, And That Day May Never Come, I Will Call Upon
You To Do A Service For Me."*

– The Godfather

Bem vindo ao meu resumo do livro do prof. Varian. Ao contrário do que ele fez, eu preferi trazer o apêndice de matemática pro começo do material porque aqui nós vamos ver as ferramentas que serão usadas para a explicação dos conceitos teóricos ao longo do material.

Aqui a gente só vai dar um overview básico nos conceitos. Não tenha dúvida que alguém mais experimentado em matemática torceria o nariz pra algumas definições dadas aqui. Mas o objetivo é te dar um "norte" a respeito de alguns conceitos normalmente usados. Não se assuste com a simplicidade de algumas coisas. Melhor garantir agora do que sofrer mais pra frente no texto.

Funções

Sejam dois números quaisquer x e y , uma **função** ou **transformação** é uma regra que descreve uma relação entre eles.

Para demonstrar que existe alguma dependência entre duas variáveis usamos a notação $y = f(x)$, onde nossa variável y (chamada de **dependente**) é o resultado de alguma transformação (denotada pelo símbolo " f ") realizada em x (nossa variável **independente**).

Não é raro ter uma variável dependente relacionada a várias outras variáveis. Nesses casos é comum o uso da notação anterior com a adição das novas incógnitas. Algo como $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Gráficos

Não tem muito o que falar aqui. Dá uma lida lá na página 1010.

Propriedades das Funções

Uma função pode ter algumas características que facilitam a sua descrição. Aqui temos algumas que serão usadas ao longo do curso:

Uma **função contínua** é aquela que não possui nenhum "salto" ou "quebra".

Uma **função suave** é aquela que não tem "dobras" nem "cantos".

Uma **função monotônica** é aquela que sempre segue o mesmo sentido (ou crescendo ou decrescendo) sem nunca mudar de sentido. Quando é crescente a medida que x cresce, chamaremos de **função monotônica crescente**. Quando decrescer a medida que x crescer, chamaremos de **função monotônica decrescente**.

Funções Inversas

Uma das implicações de quando uma função é monotônica é que, para cada x , sempre existirá apenas um único y associado.

Uma **função inversa** é a função que, sempre que colocarmos um y como variável independente teremos como resultado um x de alguma função anterior.¹

Equações e Identidades

Podemos relacionar dois ou mais elementos por meio do uso de **equações** (usando o símbolo da igualdade "="). Onde as suas respectivas **soluções** são os valores atribuíveis as incógnitas que assegurem a validade da relação proposta.

Uma **identidade** (que tem o símbolo dado por " \equiv ") é um tipo de relação onde sempre haverá as soluções independentemente de quais valores suas variáveis assumam.

Funções Lineares

Chamamos de **função linear**, qualquer função da forma $y = ax + b$. Fique atento porque uma função linear pode ser expressa de maneira implícita (ou seja, será necessário desenvolver um pouco a álgebra até que se chegue numa equação no formato da definição).

¹Eu tentei não deixar confuso mas se ficou com dúvida, pesquisa um pouco sobre o tema.

Variações e Taxas de Variação

Usamos o símbolo " Δ "² para denotar a variação de alguma variável. Ou seja, se tivemos uma variável qualquer x que teve seu valor alterado de x^1 para x^2 , então:

$$\Delta x = x^2 - x^1$$

ou também

$$x^2 = x^1 + \Delta x$$

Normalmente, usamos o delta quando falamos de **pequenas variações** ou, como os economistas falam, **variações marginais**.

A **taxa de variação** é obtida pela razão (ou seja, pela divisão) de duas variações. Seja a função $y = f(x)$, sempre que tivemos um $\Delta x > 0$ também teremos algum $\Delta y \neq 0$. A taxa de variação de y em relação à x é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} = \frac{f(x^1 + \Delta x) - f(x^1)}{\Delta x}$$

É uma medida do quanto y varia a medida que x varia.

Quando uma função é linear, teremos que essa taxa de variação será sempre constante para quaisquer valores de x . Como $y = ax + b$, então

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{a + b(x^1 + \Delta x) - (a + bx^1)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\cancel{a} + b(x^1 + \Delta x) - \cancel{a} - bx^1}{\Delta x} = \\ &= \frac{\cancel{bx^1} + b\Delta x - \cancel{bx^1}}{\Delta x} = \\ &= \frac{b\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = b \end{aligned}$$

Para as funções não lineares, essa propriedade não é observada. Tomemos $y = f(x) = x^2$ como exemplo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

²O nome é "delta".

$$\frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$\frac{2x\cancel{\Delta x} + \Delta x\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$2x + \Delta x$$

Ou seja, entra no resultado da taxa de variação o valor de x e a magnitude da variação, dada por Δx .

Inclinações e Interceptos

Já aprendemos como calcular a taxa de variação de uma função. Graficamente falando, essa é a medida da inclinação da curva da função entre os dois pontos que formam o delta da variável independente.

Em uma função linear, a inclinação da curva sempre será a mesma independente da magnitude da variação. No caso das funções não lineares, a inclinação é dada pela **reta tangente** ao ponto da curva³.

No caso de uma função linear, $y = ax + b$, temos alguns pontos que recebem nomes de **intercepto**. O **intercepto vertical** (y^*) é dado pelo ponto $y = a \cdot 0 + b = b$, ou seja, onde $x = 0$. Já o **intercepto horizontal** (x^*) é dado pelo ponto onde $y = ax + b = 0$, ou seja, $x = \frac{-b}{a}$.

Valores absolutos e logaritmos

O **valor absoluto** de um número x qualquer é definido pela função $f(x)$ do seguinte modo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Você já deve ter visto no ensino médio que o **logaritmo natural** ou **log** de um número é uma função escrita como $y = \ln x$ ou $y = \ln(x)$ e que possui as seguintes propriedades:

- Se $x, y > 0$, então, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(x^y) = y\ln(x)$

³Mais pra frente a gente volta nessa ideia.

Derivadas

Você deve lembrar desse conceito das aulas de matemática no primeiro período. A **derivada** da função $f(x)$ será dada por:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Mas perai, a gente acabou de ver um conceito muito parecido no ponto 1.7. E é isso mesmo, a derivada é o cálculo da taxa de variação à medida que aplicamos o limite⁴ até 0 para nosso Δx .

Comentário: Essa técnica é muito importante ao longo de quase todos os tópicos desse curso. Volte nas apostilas e nas listas de derivadas caso seja necessário.

Derivadas segundas

Já vimos que a deriva nos permite saber a inclinação da reta tangente da nossa função genérica $f(x)$ num determinado ponto. Chamamos de **derivada segunda** de $f(x)$ a derivada da derivada dessa função.

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Nós aplicamos a derivada segunda para descobrirmos a curvatura da função no ponto x . Se for positiva, a função é convexa no ponto. Se for negativa, a função é côncava no ponto. Por fim, se for igual a zero, a função será plana.

A regra do produto e da cadeia

Dadas duas funções $g(x)$ e $h(x)$ Se definirmos uma nova função $f(x) = g(x)h(x)$. A derivada dessa última função é dada pela aplicação da **regra do produto**:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \frac{dh(x)}{dx} + h(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

Comentário: Normalmente a gente vê a regra do produto e da divisão junto. Mas o prof. Varian não colocou essa segunda regra como necessária. Então se eu ver que ficou faltando, eu atualizo esse material.

⁴Vá pesquisar se você não souber o que é isso.

Agora imagine a situação onde temos uma função dentro de outra função. Dadas as funções $y = g(x)$ e $z = h(y)$, a **função composta** é dada por $f(x) = h(g(x))$, cuja derivada é obtida pela seguinte regra:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dh(y)}{dy} \frac{dg(x)}{x}$$

Derivadas parciais

Nós já vimos no ponto 1.1 que funções podem conter mais de uma variável independente. Supondo uma função composta $f(x_1, x_2)$ a sua **derivada parcial** em relação a x_1 será dada por:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

similarmente, a derivada parcial em relação a x_2 será dada por

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$$

A ideia por trás de uma derivada parcial é verificar a taxa de variação entre a nossa função composta em relação a alguma variação de apenas uma das variáveis independentes, ou seja, é como se tratássemos as outras variáveis como constantes.

As propriedades das derivadas parciais são parecidas com as normais. Exceção é a regra da cadeia. Seja a função composta $g(t) = f(x_1(t), x_2(t))$, então a derivada de $g(t)$ em relação a t é dada por:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{dx_2(t)}{dt}$$

Atente para o fato que as variáveis independentes da nossa função $g(t)$ são as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que também têm como variável independente t .

Otimização

A maioria dos modelos utilizados pela Economia podem ser expressos como um problemas de otimização. Matematicamente falando, dada uma função $y = f(x)$ seu valor **máximo** será dado ponto x^* se $f(x^*) \geq f(x)$ para qualquer valor de x . Não faz parte do escopo desse apêndice demonstrar isso, então tenha fé que, se uma função for suave, o seu valor máximo é obtido no ponto onde teremos

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$

e também

$$\frac{d^2f(x^*)}{dx^2} \leq 0$$

Ou seja, o máximo será o ponto onde a derivada for igual a zero e a derivada segunda for menor igual a zero. Chamamos a primeira de **condição de primeira ordem** e a segunda de **condição de segunda ordem**.

Também é muito comum buscarmos a minimização de determinadas funções. Nesse caso, só teremos uma pequena mudança na condição de segunda ordem;

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$

e também

$$\frac{d^2f(x^*)}{dx^2} \geq 0$$

No casos das funções compostas suaves, as condições de primeira ordem para os pontos de máximo e mínimo são alcançadas no ponto (x_1^*, x_2^*) cujas derivadas serão

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$

e

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0$$

As condições de segunda ordem são muito mais complexas então não fazem parte do escopo desse curso.

Otimização com restrição

Saber maximizar ou minimizar uma função é só uma parte do problema de otimização. Na vida real, a esmagadora maioria das situações de otimização está contida dentro de algum limite de possibilidades. A **otimização com restrição** é a técnica usada para encontrar o ponto de máximo ou mínimo de alguma função dentro de um determinado domínio de possibilidades.

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$$

de modo que $g(x_1, x_2) = c$

A função $f(x_1, x_2)$ é chamada de **função objeto** e a equação $g(x_1, x_2) = c$ é chamada de **restrição**.

Programação

“I don’t like violence, Tom. I’m a businessman. Blood is a big expense.”.



– The Godfather

Caro aluno, com o avanço do poder computacional e da disponibilidade de dados, os economistas não ficaram de fora da revolução tecnológica. Além de todo o arcabouço teórico, matemático, estatístico, histórico e social que você está adquirindo na sua formação, a programação se tornou uma ferramenta indispensável para o processo de análise moderna e merece ser objeto do seu estudo⁵.

Ao longo do livro eu vou construir alguns programas em Python para simular os modelos que a gente for construindo. Não faz parte do escopo desse livro ensinar como fazer isso. Contudo, cada código será disponibilizado em dois links. O primeiro é referente ao repositório no github e o segundo é referente a um notebook no google colab onde você pode executar o modelo sem precisar instalar nada no seu computador.



Capítulo 25 - Monopólio

Demanda Linear e Monopólio (25.2)

 Código no Github 

 Simulação no Google Colab 

Demanda Elasticidade Constante e Monopólio (25.3)



 Código no Github 

 Simulação no Google Colab 

⁵Pode até ser que você não tenha alguma matéria de programação na sua grade curricular, mas não se engane, mesmo que seu curso não esteja cobrando, vá estudar por conta própria.



Capítulo 26 - Comportamento do Monopolista

Demandas Lineares e Discriminação de Preço (26.4)

 Código no Github 

 Simulação no Google Colab 

Vinculação de Produtos (26.5)

 Código no Github 

 Simulação no Google Colab 

Parte I

Teoria da Escolha e Teoria do Consumidor

1

O Mercado

“A friend should always underestimate your virtues and an enemy overestimate your faults.”

– The Godfather

2

Restrição Orçamentária

3

Preferências

4

Utilidade

5

Escolha

6

Demanda

7

Preferência Revelada

8

A Equação de Slutsky

9

Comprando e Vendendo

10

Escolha Intertemporal

11

Mercado de Ativos

12

Incerteza

13

Ativos de Risco

14

O Excedente do Consumidor

15

Demanda de Mercado

Parte II

Equilíbrio, Econometria e
Leilões

16

Equilíbrio

17

Medição

18

Leilões

Parte III

Teoria da Firma

19

Tecnologia

20

Maximização do Lucro

21

Minimização de Custos

22

Curva de Custo

23

Oferta da Empresa

24

Oferta da Indústria

Parte IV

Mercados e Concorrência
Imperfeita

25

Monopólio

“I’m gonna make him an offer he can’t refuse.”

– The Godfather

Anteriormente, fora demonstrado como a oferta pode ser construída da firma individual até a indústria competitiva. Nesse cenário, todos os ofertantes não possuem poder de interferir no preço e na quantidade de equilíbrio do mercado. Mas podemos pensar num caso muito diferente: Como seria o caso onde só exista uma empresa controlando toda a oferta?

Diferente dos casos anteriores, agora nós buscamos construir um modelo de tomada de decisão que leve em consideração a capacidade do monopolista de intervir diretamente no preço de modo a maximizar seus lucros totais.

Existem duas maneiras de enxergar esse problema. Podemos modelar como se o monopolista controlasse o preço e a demanda é quem definiria a quantidade. Ou, ao contrário, podemos modelar como se o monopolista definisse a quantidade a ser produzida e a demanda definiria o seu preço de equilíbrio para essa quantidade.

Independente do modelo, podemos ver que as abordagens são equivalentes. Por facilidade analítica vamos seguir a abordagem de definição da quantidade produzida.

25.1 Maximização dos Lucros

Como vimos nos capítulo 01, estamos diante de um problema de maximização. Sendo mais preciso, nós queremos maximizar o lucro do monopolista dado por $yp(y) - c(y)$ onde $p(y)$ é a demanda inversa¹ para o mercado,

¹Lá do capítulo 15. É a função que indica qual deve ser o preço do bem para que seja demanda uma determinada quantidade.

$r(y) = yp(y)$ é a receita do monopolista e $c(y)$ é o custo de produção das y unidades. Podemos resumir nosso problema como

$$\max_y r(y) - c(y)$$

A condição de otimização é evidente: A receita marginal deve ser igual ao custo marginal. Se a receita marginal for maior, bastaria aumentar a produção para aumentar os lucros. Se fosse menor, seria necessário reduzir a quantidade produzida afim de elevar o preço a um nível satisfatório. Algebricamente, temos que

$$RM = CMa$$

ou

$$\frac{\Delta r}{\Delta y} = \frac{\Delta c}{\Delta y}$$

Até aqui a gente tá bem perto da modelagem para as firmas competidoras. O custo marginal é definido pela tecnologia de produção. A mudança acontecerá na receita marginal.

Como o monopolista tem o poder de intervir no mercado, sempre que ele decidir alterar a produção em Δy unidades, haverá dois efeitos na receita. Em primeiro lugar, ele terá um aumento na receita em $p\Delta y$ unidades. Em segundo lugar, como o mercado terá mais bens a sua disposição, ele estará disposto a pagar um preço menor pelas novas unidades, ou seja, $y\Delta p$. O resultado líquido desse efeito é obtido por

$$\Delta r = p\Delta y + y\Delta p$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta y} = \frac{p\Delta y}{\Delta y} + \frac{y\Delta p}{\Delta y}$$

$$= \frac{p\cancel{\Delta y}}{\cancel{\Delta y}} + \frac{y\Delta p}{\Delta y}$$

$$= p + y \frac{\Delta p}{\Delta y}$$

$$= p \left[1 + \underbrace{\frac{y}{p} \frac{\Delta p}{\Delta y}}_{1/\text{elasticidade}} \right]$$

$$= p \left[1 + \frac{1}{\epsilon(y)} \right]$$

Como a elasticidade da demanda é negativa, podemos reescrever como

$$\frac{\Delta r}{\Delta y} = RM(y) = p \left[1 - \frac{1}{|\epsilon(y)|} \right]$$

Agora que sofisticamos um pouco mais a ideia da receita marginal. Voltemos para a condição de maximização onde a Receita Marginal deve ser igual a o Custo Marginal.

$$p(y) \left[1 - \frac{1}{|\epsilon(y)|} \right] = CMa(y)$$

Agora podemos ver claramente que o nosso monopolista atuará somente nos pontos onde a demanda é elástica ($|\epsilon| > 1$). Se operar no ponto onde $\epsilon = 1$, cairá exatamente no caso da competição perfeita². Não faz sentido para ele operar nos pontos onde a demanda é inelástica porque ele poderia simplesmente reduzir a quantidade produzida (o que reduziria o custo total) com aumento de receita (porque o preço aumentaria). O ponto de máximo estará sempre na zona onde $|\epsilon| \geq 1$.

25.2 Curva de Demanda Linear e Monopólio

Veremos como fica o comportamento dessas variáveis num exemplo cuja curva de demanda é linear. O professor dá o seguinte sistema de equações:

$$\text{Demanda Linear Inversa: } p(y) = a - by$$

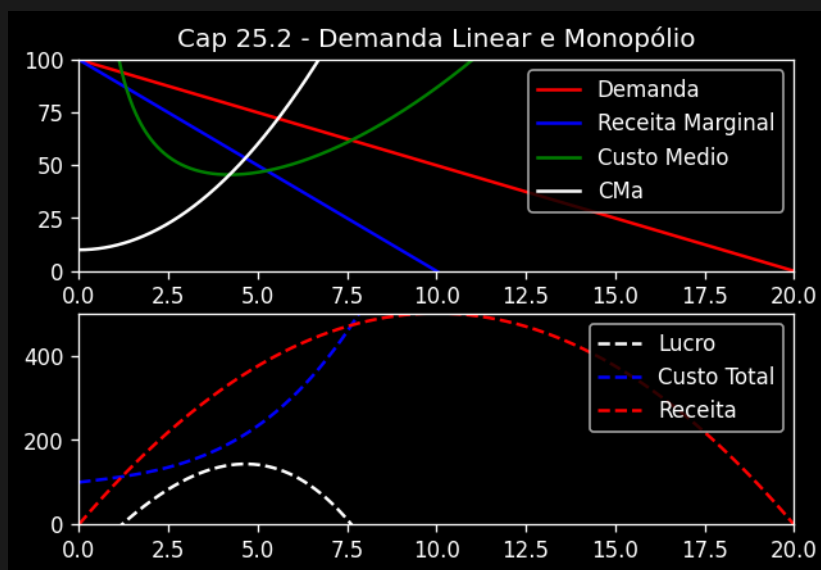
$$\text{Função Receita: } r(y) = p(y)y = ay - by^2$$

$$\text{Função Receita Marginal: } RM(y) = a - 2by$$

A receita marginal é dada (como vemos no capítulo 15) pela derivada da função receita. Podemos ver que o intercepto vertical da demanda e da receita marginal são iguais (dado pelo ponto a).

Simulação: Clique aqui para ter acesso a essa simulação. Você pode mudar os parâmetros de "a", "b", "CF" e "CV" afim de verificar como os valores se modificam.

²Onde o preço é igual ao custo marginal.



Para poder fazer essa simulação, eu tive de definir uma função custo e, consequentemente, uma função custo marginal³. Conseguimos ver que a curva de lucro tem um ponto de máximo exatamente onde a curva da receita marginal encontra o custo marginal. Qualquer ponto diferente desse levaria a um nível de lucro menor.

Além disso, também é relevante o fato da curva de custo médio estar abaixo da curva de demanda⁴. Se o ponto de produção cuja receita marginal é igual ao custo marginal tiver um custo médio superior a demanda, a empresa receberá menos do que os custo de produção.⁵

25.3 Estabelecimento de Preços com Markup

Já conseguimos aprimorar nosso modelo de escolha da firma para o caso do monopolista. Agora que tornamos a receita marginal endógena, podemos ver as condições de maximização do lucro quando a firma tem poder de definir o preço ou a quantidade do mercado (mas não os dois ao mesmo tempo).

Podemos compreender essa última equação como uma política de preço do monopolista. Para isso, só precisamos isolar o termo $p(y)$ via rearranjo da última equação, o que após feito nos dá a seguinte relação

³Eu tentei pensar numa função que apresentasse um comportamento parecido com a imagem que vemos no livro.

⁴Tente justificar isso matematicamente e, depois, tente criar uma situação onde isso aconteça.

⁵Veremos isso daqui a pouco no ponto 25.6.

$$p(y) = \frac{CMa(y)}{1 - 1/|\epsilon(y)|}$$

Essa equação nos diz que o preço praticado no mercado cujo monopolista atua sempre⁶ se comportará como uma função de *markup* do seu custo marginal. Podemos simplificar a visualização disso do seguinte modo

$$p(y) = \phi \times CMa(y)$$

onde $\phi = \frac{1}{1-1/|\epsilon(y)|}$

Como sabemos, o monopolista sempre operará nos pontos cuja demanda é elástica⁷, isso nos dará um $\epsilon(y) > 1$. Isso nos diz que o divisor $(1 - 1/|\epsilon|) < 1$, o que por sua vez, nos diz que $\phi > 1$.

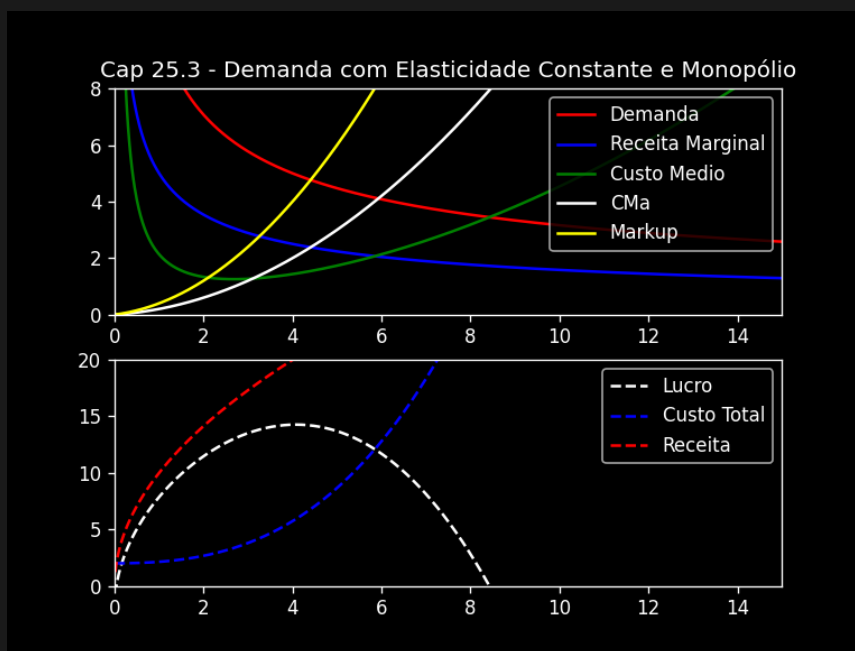
Agora vamos dar uma olhada em um caso muito interessante: quando a curva de demanda possui a mesma elasticidade em todos os seus pontos.

25.3.1 Demanda com Elasticidade Constante e Monopólio

Para simular o caso da demanda com elasticidade constante, vamos usar o método do markup para encontrar o ponto de oferta do monopolista. Como esperado, teremos uma função de marcação acima da curva de custo marginal.

⁶Sempre que ele agir de acordo com os pressupostos do nosso modelo de escolha.

⁷Ele até pode operar no ponto onde $\epsilon = 1$, já vimos que nesse caso, o resultado seria o mesmo do caso na competição perfeita.



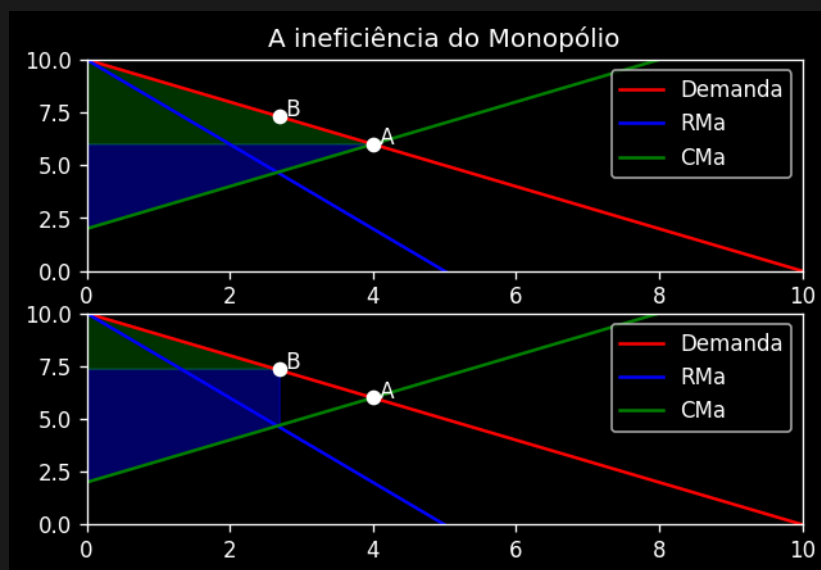
Simulação: [Clique aqui para ter acesso a essa simulação.](#)

Comentário: Leia o exemplo sobre o impacto dos impostos sobre o monopolista na página 634. Com os conceitos vistos até agora, não deve ser difícil compreendê-lo. Você pode acessar a simulação e modificar o custo variável para ver se o resultado é igual ao que você esperava.

25.4 A Ineficiência do Monopólio

Já conseguimos ver que, quando uma empresa opera como um monopólio, o preço de mercado será definido sempre acima do seu custo marginal. No mercado de competição perfeita, esse preço seria exatamente igual ao custo marginal. Isso implica na redução de algum excedente dos consumidores, mas em um incremento no excedente do produtor.

Como já sabemos, um arranjo é eficiente no sentido de Pareto se, e somente se, é possível realizar alguma troca de modo a se ter um aumento no excedente de uma das partes sem a redução do excedente de outra parte. Agora vamos investigar se o equilíbrio no mercado monopolista é eficiente. Considere a imagem abaixo.



O gráfico da parte de cima é o equilíbrio no mercado de competição e o de baixo é o nosso equilíbrio com monopólio. Perceba como há um incremento no excedente do produtor (medido pela área azul) e uma redução do excedente do consumidor (área verde).

Para investigarmos se há uma ineficiência no sentido de Pareto no ponto *B*, façamos a seguinte pergunta: É possível adicionar uma unidade de produto no mercado de modo que o custo marginal pela produção desse bem seja inferior ao preço do mesmo? A resposta é claramente sim!

No nível *B*, a curva de preço (medida pela demanda inversa) ainda é superior à curva de custo marginal (aquela reta verde). Desse modo, se o monopolista produzisse mais uma unidade, ele receberia mais do que o custo marginal dessa unidade e os consumidores cujo preço de reserva é igual ao novo nível de preço passariam a consumir o produto. O excedente desse novo consumidor é igual a 0, contudo, todos os que já consumiam o produto passaram a pagar menos do que antes o que aumentará os seus respectivos excedentes. Como o consumidor teria um lucro positivo (pois o custo marginal é inferior ao preço) e os consumidores teriam um aumento de excedente, achamos uma melhoria de Pareto.

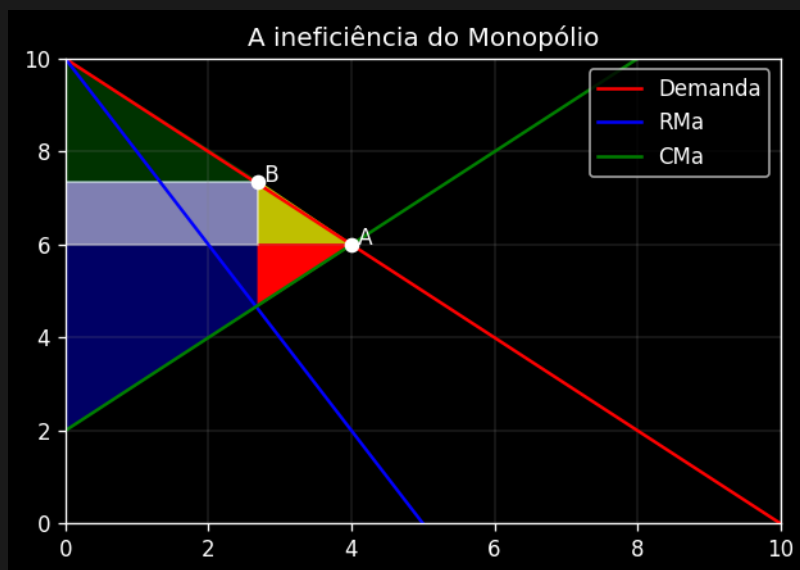
A razão para o monopolista abrir mão dessa receita adicional é devida a necessidade dele de ter que manter o mesmo preço para todos os compradores⁸. Diferente da empresa na competição perfeita, ele leva em consideração o impacto dessa unidade adicional no lucro. Essa redução do lucro se dá porque ao produzir mais, o preço de todas as unidades cai. Se ele pudesse

⁸Vamos explorar mais essa ideia no próximo capítulo.

manter o preço nas unidades anteriores e vender mais barato as novas, ele venderia.

25.5 O Ônus do Monopólio

Agora que já vimos que o monopólio é ineficiente, podemos querer mensurar o tamanho dessa ineficiência. Uma maneira possível de medir essa ineficiência é observando os excedentes nos cenários competitivo e de monopólio. Observe a figura abaixo:



A área amarela é a medida da redução do excedente do consumidor. Em vermelho temos a redução do excedente do produtor. Em branco temos o quanto o monopolista consegue "capturar" do excedente dos consumidores ao adotar o nível de produção que maximiza o seu lucro.

A área branca não é definida como parte da ineficiência porque ela apenas demonstra uma transferência de excedente dos consumidores para o produtor. O **ônus resultante do monopólio** é precisamente a soma das áreas amarela e vermelha.

Comentário: Aqui o professor discorre sobre 3 exemplos do ônus do monopólio. Eu vou dar um resumo mas indico que você leia essa parte do livro.

No exemplo 1, vemos os casos das patentes (que, na prática, podem ser entendidas como um monopólio temporário). A ideia das patentes é criar um incentivo ao investimento em pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias. Contudo, por se tratar de um monopólio, acaba por criar um ônus

atrelado a ele. O trabalho do Nobel William Nordhaus, demonstra que a estimativa da eficiência das patentes americanas é de 90%, isso quer dizer que os consumidores estariam perdendo aproximadamente 10% do seu excedente. O que parece indicar que o sistema de patentes não tem causado grandes malefícios.

No exemplo 2, ainda analisamos o mercado de patentes. Vemos que as patentes possuem 3 critérios de classificação: tempo de duração, extensão da proteção e novidade da invenção. Sendo os últimos dois muito subjetivos. Também discorremos sobre como o mercado de patentes permite algumas distorções (como o emaranhamento de patentes) de modo a tornar obrigatório para as empresas muito grandes a busca por grandes quantidades de patentes afim de se proteger de eventuais processos judiciais.

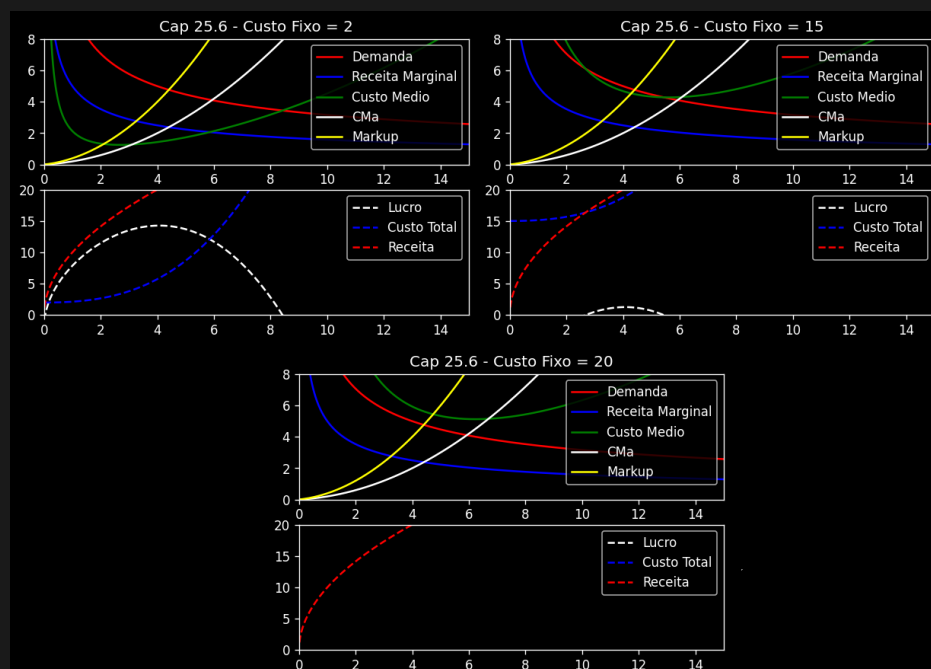
No exemplo 3, vemos o caso da isenção às proibições de *antitrust* que os produtores agrícolas possuem nos EUA. Isso levou a uma pressão por parte dos grupos organizados dos produtores de batata a forçarem uma redução na quantidade ofertada do produto na ordem de 6,8 milhões de sacas. O que seria equivalente a 1,3 bilhão de pedidos de batata frita.

25.6 Monopólio Natural

Pois bem, já aprendemos o modelo de decisão do monopolista e também já vimos a ineficiência que esse modelo acarreta para os mercados. Ao percebermos que o monopólio produz aquém da quantidade ótima, poderíamos nos sentir tentados a propor regulações que obrigassem o monopolista a aumentar o seu nível de produção até o nível da competição perfeita. Contudo, esse problema é mais complexo do que parece, porque essa proposta de solução não leva em consideração a estrutura de custos.

Você mesmo pode fazer esse experimento, abra a simulação 25.2 ou a 25.3 e altere apenas o parâmetro "CF" que quer dizer "Custo Fixo". A medida que você aumenta esse parâmetro a curva de custo médio vai "subindo" e, em todos os pontos onde ele for superior a demanda, o monopolista terá lucro negativo.

Eu fiz 3 simulações para o caso da demanda com elasticidade constante. Uma com um custo fixo baixo, outra com um custo um pouco mais elevado e última com 10 vezes o custo fixo da primeira. Perceba na imagem abaixo como a curva de lucro (da parte de baixo de cada painel vai caindo até desaparecer.



Chamamos de **monopólio natural** a situação onde temos uma estrutura de custo fixos muito alta e custos marginais baixos. Agora podemos ver que se obrigarmos o monopolista a produzir o nível da competição perfeita, pode acontecer do projeto não ser sustentável, pois a curva de custo médio está acima da curva de demanda.

Agora o dilema ficou um pouco mais complexo. Se forçarmos o monopolista a produzir a quantidade que iguala o custo marginal ao preço, ele terá prejuízo. Se aceitarmos que ele mesmo defina a quantidade a produzir, agirá num ponto que produzirá uma ineficiência no mercado.

Não existe solução simples para essa questão. Na maioria das situações os monopólios naturais são regulamentados ou operados diretamente pelos governos. Cada opção de solução acaba acarretando benefícios e malefícios consigo. Em ambos os casos, os problemas são geralmente oriundos devido a informação assimétrica entre a empresa e os seus controladores.

25.7 O Que Causa os Monopólios?

Parabéns, querido aluno. Agora você já compreendeu como um monopolista age, o que o comportamento dele acarreta no mercado e como o controle sobre o monopólio é mais complexo do que se parece a primeira vista. Agora nos resta uma última investigação: Qual a causa dos monopólios?

Uma variável que podemos creditar como importante é a **escala mínima de eficiência (EME)**. Ela nada mais é do que o ponto de mínimo da nossa curva de custo médio.⁹ O formato da curva de custo médio (e consequentemente a EME) é definido exclusivamente pela tecnologia.

Quando temos uma escala mínima de eficiência muito elevada, uma empresa precisa produzir uma quantidade muito grande dos bens vendidos no mercado para se manter. A economia é advinda da economia de escala. O que implica em uma capacidade produtiva de porte elevado. Nesses mercados, a chance maior é que hajam poucos ofertantes, e consequentemente, que esses ofertantes acabem usufruindo do poder de mercado advindo da pouca competitividade.

Quando temos uma EME pequena, qualquer empresa pequena pode começar a operar no mercado. Isso aumenta o número de competidores. O que acaba por reduzir o peso de cada empresa individualmente. O que acaba por gerar um ambiente de competição.

Observe que o fator importante é a relação entre a EME e o tamanho do mercado. É possível que a quantidade de eficiência aconteça em 10.000 de unidades, mas se o mercado for o Brasil inteiro, ainda pode ser que hajam muitos ofertantes. Quando não é possível aumentar o tamanho do mercado e a EME é elevada, aí sim, nos deparamos com uma condição de monopólio que pode necessitar de regulação ou mesmo intervenção do Estado.

Além da EME, outra maneira de se criar um monopólio é por meio da coordenação dos agentes ofertantes em uma **colusão**¹⁰. Quando um conjunto de empresa se une para definir em conjunto a produção, elas agem como um **cartel**. Esse cartel acaba atuando como se fosse um ofertante só (e consequentemente, age com o poder de mercado advindo dessa coordenação).

Um terceiro e último motivo para o nascimento de um monopólio é o bom e velho "cheguei primeiro". Se uma empresa, por algum acidente histórico, é a primeira a se estabelecer no mercado. É natural que ela se valha da falta de competidores e consiga um crescimento em escala. Quando novos ofertantes entram no mercado, o monopolista consegue usar seu arsenal de escala e reduzir artificialmente o preço até o ponto onde ninguém além dele pode se manter.

⁹Podemos achar esse ponto pela derivada primeira da função custo médio igual a zero e pela derivada segunda menor igual a zero.

¹⁰Um ajuste secreto entre ofertantes para prejudicar outras pessoas.

Comentário: Aqui o professor cita alguns exemplo. Mesma coisa de antes, indico ler o livro porque eu só vou dar uma resumida aqui.

No exemplo 1, vemos o caso do mercado de diamantes e a sua gigante participante De Beers. É um exemplo de monopólio por tamanho da participação no mercado.

No exemplo 2, temos um caso de poder de mercado advindo da cooperação de comerciantes de móveis antigos.

No exemplo 3, outro exemplo de conluio por parte dos ofertantes para fixação dos preços de microchips de memória RAM.

O Comportamento do Monopolista

“Great men are not born great, they grow great . . .”

– The Godfather

Na prática, a maioria das empresas possui algum poder de mercado. É bem possível que um mercadinho eleve um pouco seus preços sem que isso acarrete a perda de todos os seus clientes. Nesse capítulo vamos ver quais estratégias as empresas podem adotar para aumentar e explorar o seu poder de mercado.

A medida que você vai avançando no seu curso de Microeconomia, o seu arcabouço de conhecimento vai ficando cada vez mais refinado e, consequentemente, próximo da realidade. Os modelos puros de competição perfeita e monopólio até existem, mas são mais raros na realidade quando comparados à competição monopolística.¹

26.1 Tipos de discriminação de Preços

No capítulo anterior, nós vimos que o monopolista acaba produzindo em um ponto onde a demanda ainda está disposta a pagar por mais do que o custo marginal. Vimos que a explicação do porquê ele não produz mais é que ele teria de baixar o preço de todos os produtos e não apenas os adicionais. Pois bem, existem alguns monopolistas que detêm o poder de **discriminação de preços**. O professor classifica esse poder em 3 categorias:

- Discriminação de Preços de 1º Grau:

Nesse caso ele tem poder de cobrar um preço diferente para cada consumidor e para cada quantidade.

¹Veremos mais sobre isso nesse capítulo.

- Discriminação de Preços de 2º Grau

Nesse caso ele tem poder de discriminar o preço apenas para as quantidades compradas. Mas todos os consumidores que levarem a mesma quantidade, pagarão o mesmo preço no total.

- Discriminação de Preços de 3º Grau

Esse é o caso mais comum. É quando o monopolista tem o poder de escolher qual preço cada pessoa vai pagar por todas as unidades que levar. Ou seja, ele pode controlar qual o valor de todas as unidades da cesta, contudo, não pode diferenciar o valor entre essas unidades.

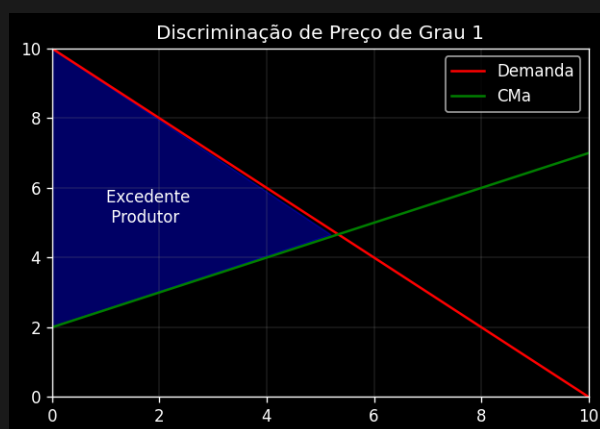
26.2 Discriminação de Preços de 1º Grau

Nesse caso, o monopolista está em plenos poderes. Ele possui conhecimento do preço de reserva² de cada consumidor e, com esse conhecimento, cobra exatamente o valor máximo para cada quantidade. Também chamamos esse tipo de **discriminação perfeita**.

Um fato curioso desse arranjo é que, por incrível que pareça, ele é eficiente no sentido de Pareto. Uma vez que, para cada produto vendido, os consumidores pagam exatamente o valor máximo que estão dispostos a pagar, e consequentemente, o monopolista vai vender para todos os consumidores que tenham um preço de reserva maior ou igual ao custo marginal. O ponto final da produção será o ponto onde a quantidade iguala o custo marginal à curva de demanda.

Em termos de excedente, o que acontece é que o monopolista captura todo o excedente do mercado. Os consumidores, por sua vez, não possuem nenhum excedente.

²Lembra desse conceito?



Uma maneira conveniente de se pensar nessa situação é pela ótica da produção. Ao invés de pensar que o produtor olha para cada cliente e consegue cobrar exatamente o máximo que ele quer pagar, ele simplesmente oferta no mercado uma quantidade e deixa que os clientes definam quanto pagarão por ela. Claro que estamos supondo uma simplificação do comportamento das pessoas, mas a ilustração é válida.

O professor cita um exemplo da companhia aérea chamada Southwest Airlines. Que usou um software chamado Ding que faz ofertas periódicas e exclusivas para cada cliente cadastrado no sistema. Outro exemplo menos real, e mais icônico, é Mafioso Don Vito Corleone da clássica trilogia de filmes *The Godfather* (na abertura de todos os capítulos desse manual contém uma frase retirada dessa obra). O "modelo de negócio" do protagonista é fazer alguns favores em troca de outros favores. No caso do personagem mafioso, ele abusava do poder de mercado que detinha para cobrar o máximo possível (em bens ou serviços) de quem estava em dívida com ele.



The Godfather (1972) - Paramount Films

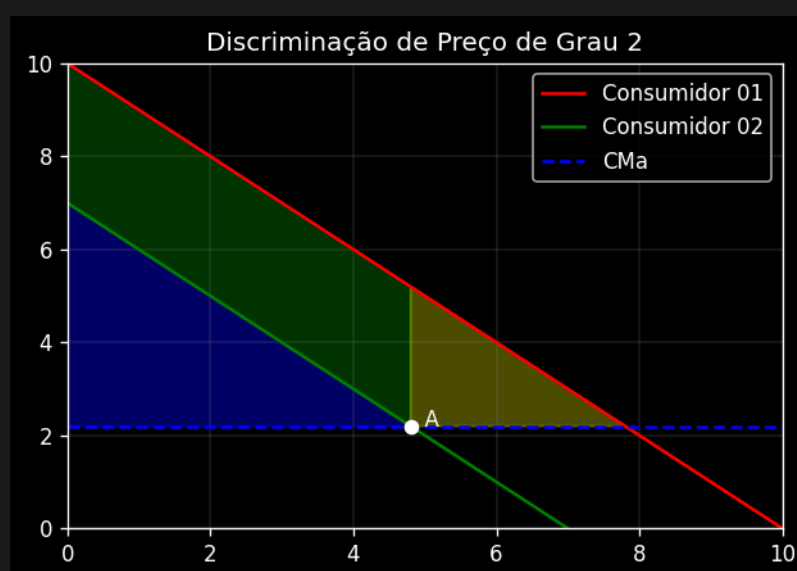
26.3 Discriminação de Preços de 2º Grau

Nesse modelo, também chamado de **fixação de preços não linear**, o produtor já não pode cobrar, por uma mesma quantidade, um valor diferente entre consumidores diferentes. Isso força o monopolista a desenvolver uma estratégia de precificação que tente tirar o maior proveito possível das diferentes curvas de demanda.

Comentário: Eu não sei você, mas no meu caso, deu um trabalhão para entender o que o professor quis dizer nessa parte. Eu acho que o que deixou mais confuso foi ele ter suposto que o custo marginal é igual a zero (porque isso implicaria em dizer que ele venderia alguma cesta ao preço zero). Então eu retirei essa simplificação e reconstruí a mesma argumentação dele só que para um custo marginal constante maior que zero.³

Imagine que temos apenas 2 grupos de consumidores no mercado. Como nosso modelo prevê, o monopolista tem acesso às curvas de demanda de cada consumidor, mas como limitação, ele só pode escolher quais cestas ofertar por qual preço, e deixar que os consumidores escolham qual é a melhor para eles. Chamamos esse modelo de **autosseleção**.

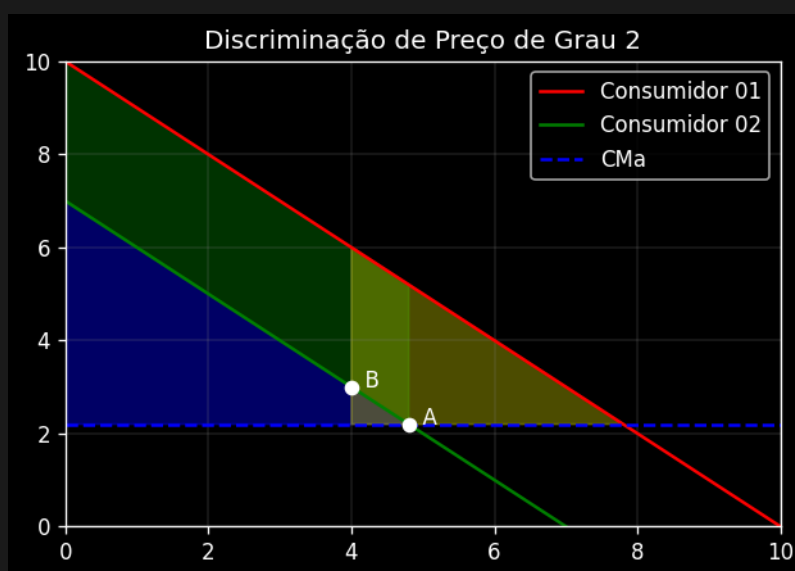
O objetivo do monopolista é captar todo o excedente do mercado. Mas ele enfrenta uma limitação nessa modalidade de discriminação de preços. Como ele não pode vender a mesma quantidade a preços diferentes para os grupos de consumidores, ele tem de escolher se vai vender a preço de reserva da curva de demanda 1 ou 2.



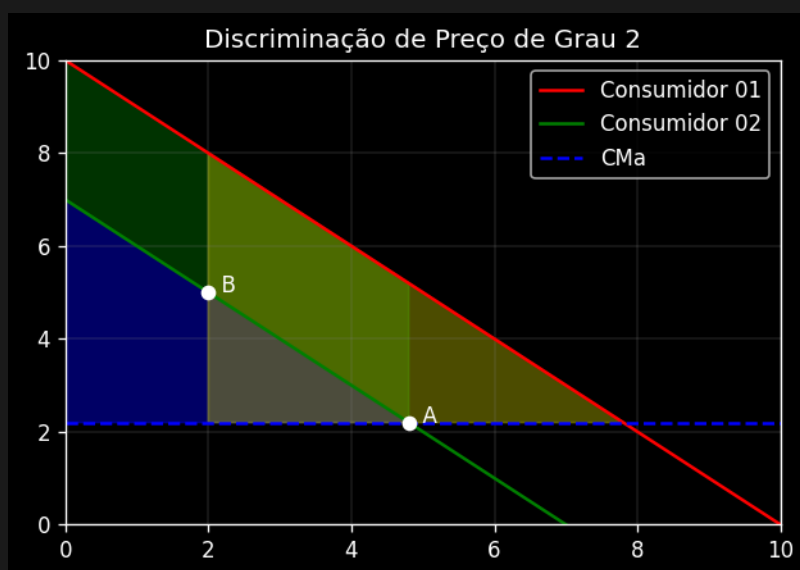
³Esse vídeo aqui me ajudou bastante a entender melhor o que o professor quis dizer.

Se ele optar por vender na fronteira da curva de demanda 1, ele vai abrir mão de todo o excedente advindo dos consumidores do tipo 2! Isso significaria abrir mão de toda a área azul na figura acima. Como ele não vai fazer isso, ele adotará a seguinte abordagem: Vender de 0 até o ponto *A* pelo preço de reserva da curva de demanda dos consumidores do tipo 2 e, a partir desse ponto, vender pela fronteira do preço de reserva dos consumidores do tipo 1. Isso garantirá que ele obtenha todo o excedente da área azul e também da área amarela.

Não satisfeito, o monopolista pode pensar um pouco mais e perceber que ele pode escolher uma opção que aumentará o seu excedente. Veja o que acontece se ele decide optar pela fronteira do consumidor tipo para uma cesta cuja quantidade é um pouco menor que a cesta *A*.



Veja só que interessante, como no ponto *B* o preço não é igual ao custo marginal para o consumidor tipo 2, haverá uma perda no total do excedente capturado pelo monopolista, mas em contrapartida, veja como a área amarela aumentou muito mais do que a área de perda do excedente do primeiro grupo. Isso quer dizer que, ao aumentar o preço da cesta, optando por adotar o preço de reserva do consumidor tipo 1 em um ponto anterior ao custo marginal igual à demanda tipo 2, o monopolista "abre mão" de uma pequena parte do excedente tipo 1 e ganha uma grande parte do excedente tipo 2. Não é difícil prever que ele continuará reduzindo a quantidade até o ponto onde o excedente perdido de um grupo é igual ao excedente ganho do outro.



A partir desse novo ponto *B*, o excedente perdido dos consumidores tipo 2 com o aumento do preço da cesta é maior que o ganho adicional do excedente dos consumidores tipo 1. Desse modo o monopolista acaba com um excedente total igual à área azul e toda a área amarela.

Comentário: Alguns de vocês podem pensar que o excedente abaixo da curva de demanda verde foi inteiramente perdido. Mas não é o caso! Perceba que, mesmo com a retirada dos consumidores do tipo 2, essa área de excedente foi preenchida pelo excedente dos consumidores do tipo 1. O monopolista abre mão no sentido que antes essa área era computada duas vezes (uma vez para cada tipo de consumidor).

Na realidade, o principal método de incentivo a autosseleção é a alteração da qualidade do bem. Normalmente, o monopolista reduz a qualidade dos produtos direcionados aos consumidores com preços de reserva menores, afim de evitar que seus consumidores dispostos a pagar mais, prefiram comprar esses produtos ao invés de produtos de "primeira linha". Essa estratégia maximiza o lucro do monopolista e ainda garante algum excedente para os consumidores das demandas mais altas.

O professor coloca dois exemplos que são espetaculares. Um sobre a diferença nos preços das passagens aéreas e o motivo da existência das classes econômica e executiva nos meios de transporte. Recomendo demais a leitura. O segundo é referente ao mercado de remédios.

26.4 Discriminação de Preços de 3º Grau

Só nos resta o último tipo de discriminação de preços. Nesse caso, o monopolista consegue discernir claramente qual consumidor pertence a qual grupo e, conseqüentemente, consegue cobrar um preço diferente. Atente para o fato que o monopolista só pode adotar um único preço para cada grupo de consumidores.

Na prática, a modelagem desse problema é muito parecida com o que vimos no capítulo passado, já que, ele só pode escolher um único preço para cada tipo de consumidor. A única diferença do modelo do capítulo passado é que ele vai se deparar com mais de uma curva de demanda. Veja a formalização do problema logo abaixo

$$\max_{y_1, y_2} p_1(y_1)y_1 + p_2(y_2)y_2 - c(y_1 + y_2)$$

Esse problema nada mais é do que uma adaptação do problema da maximização da receita. Veja que $p_1(y_1)y_1$ nada mais é do que a receita obtida com a venda do produto para o grupo 1. Desse modo, o problema de maximização é a receita total obtida (que é a soma das receitas da venda para cada grupo) menos o custo total de produção.

Da mesma maneira de antes, a otimização será dada por:

$$RM_1(y_1) = CMa(y_1 + y_2)$$

$$RM_2(y_2) = CMa(y_1 + y_2)$$

Isso claramente implica em

$$RM_1(y_1) = RM_2(y_2) = CMa(y_1 + y_2)$$

Atenção: Eu acho que encontrei um erro de tradução no parágrafo que vem logo depois dessa expressão das receitas marginais acima. Na tradução, temos o trecho: "se a receita marginal no mercado 1 ultrapassar o custo marginal, valeria a pena aumentar a produção **nos dois mercados**". Isso está errado! No original temos a seguinte passagem: "if the marginal revenue in market 1 exceeded marginal cost, it would pay to expand output **in market 1**, and similarly for market 2". Uma tradução melhor seria algo como: "se a receita marginal no mercado 1 for maior que a o custo marginal, então valerá a pena aumentar a produção no mercado 1, a mesma lógica se aplica ao mercado 2".

Podemos usar a nossa fórmula da elasticidade para elaborar um pouco mais esse problema:

$$p_1(y_1) \left[1 - \frac{1}{|\epsilon_1(y_1)|} \right] = CMa(y_1 + y_2)$$

$$p_2(y_2) \left[1 - \frac{1}{|\epsilon_2(y_2)|} \right] = CMa(y_1 + y_2)$$

Suponha que $y_1 = y_2$. Se $p_1 > p_2$, então:

$$1 - \frac{1}{|\epsilon_1(y_1)|} < 1 - \frac{1}{|\epsilon_2(y_2)|}$$

O que implica em

$$\frac{1}{|\epsilon_1(y_1)|} > \frac{1}{|\epsilon_2(y_2)|}$$

Que, por fim, nos diz que

$$|\epsilon_1(y_1)| < |\epsilon_2(y_2)|$$

Não continue lendo se você não entendeu essa afirmação. Pare e pense até sentir que compreendeu o argumento. Se ainda tiver dúvida me manda um twite que eu te ajudo.

Dessa maneira, podemos ver que quanto mais elástico for o mercado, menor será o seu preço. Faz todo sentido porquê quanto mais elástica é a demanda, mais sensível ela será às alterações de preços. Portanto, o monopolista vai conseguir elevar o preço sempre que a demanda for inelástica e manterá o preço comparativamente mais baixo nos grupos de demanda mais elástica. Isso maximizará o seu lucro em cada grupo de consumidores.

Comentário: Querido aluno, agora você tem todo o arcabouço teórico necessário para entender o motivo de você pagar meia entrada no cinema⁴. Os cinemas acreditam que uma elevação dos preços levaria vocês a buscar outros serviços além do cinema, visto que é comum supor que essa fase da vida tenha restrição orçamentária consideravelmente modesta. Por outro lado, um executivo de uma empresa tem um preço de reserva muito maior que o de vocês, então o cinema cobra dele mais caro para entrar (sem falar o preço "salgado" das pipocas).

Agora o professor coloca três exemplos. O primeiro é teórico, o segundo é um exemplo de aplicação e o terceiro é uma aplicação do conceito ao

⁴Entender isso é muito top, fala sério.

mercado de revistas acadêmicas. Eu vou criar uma simulação do segundo exemplo.

26.4.1 Curvas de Demanda Lineares

O monopolista precisa lidar com duas curvas de demanda (que suporemos serem lineares) do tipo:

$$\begin{aligned}D_1(p_1) &= 100 - p_1 \\D_2(p_2) &= 100 - 2p_2\end{aligned}$$

As demandas inversas dessas funções são

$$\begin{aligned}p_1(y_1) &= 100 - y_1 \\p_2(y_2) &= 50 - y_2/2\end{aligned}$$

As funções de receita serão iguais a

$$\begin{aligned}r_1(y_1) &= 100y_1 - y_1^2 \\r_2(y_2) &= 50y_2 - \frac{y_2^2}{2}\end{aligned}$$

Cujas receitas marginais serão

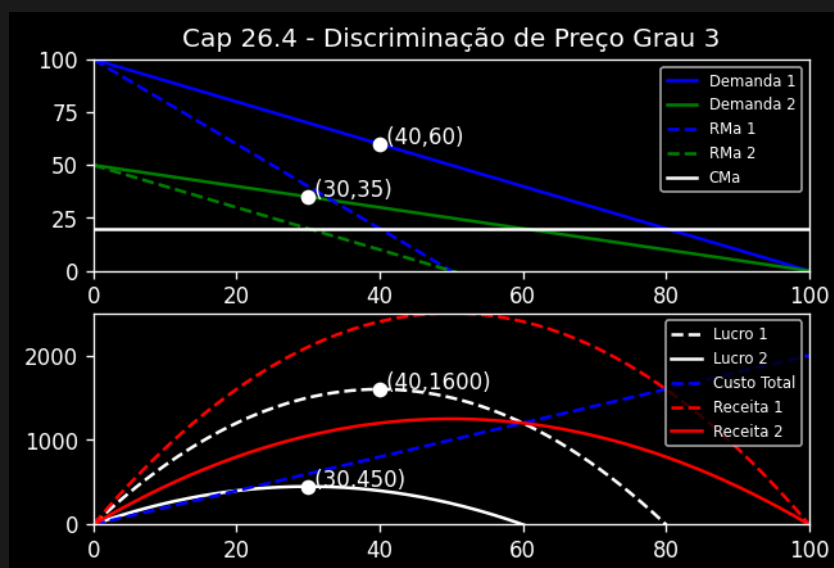
$$\begin{aligned}RMa_1(y_1) &= 100 - 2y_1 \\RMa_2(y_2) &= 50 - y_2\end{aligned}$$

Para simplificar vamos supor que o custo marginal é contante em $CMa = \$20,00$. Com isso já podemos criar uma simulação do modelo. Mas antes de colocar o computador fazer isso, nós podemos encontrar os pontos de máximo facilmente ao igualar as funções de receita marginal ao custo marginal.

$$\begin{array}{ll}100 - 2y_1 = 20 & 50 - y_2 = 20 \\100 - 20 = 2y_1 & 50 - 20 = y_2 \\80/2 = y_1 = 40 & y_2 = 30\end{array}$$

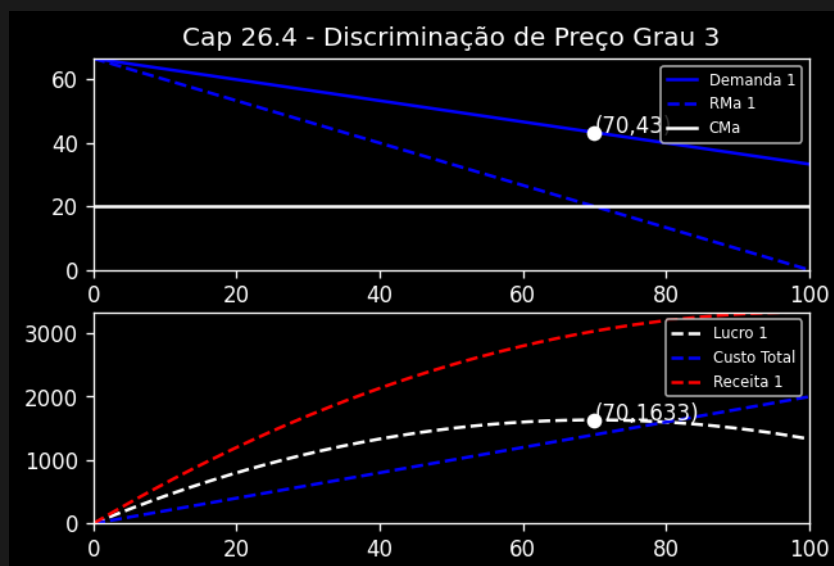
Sabemos que os pontos de maximização do lucro para cada curva de demanda serão os pontos cujas quantidades são iguais a $y_1 = 40$ e $y_2 = 30$. Para descobrir os preços, basta colocar esses valores nas funções de demanda

inversa. Podemos ver que esses são os pontos que estão no topo das curvas de lucro 1 e 2.



Simulação: [Clique aqui para ter acesso a essa simulação.](#)

Se, por outro lado, o monopolista não puder fazer essa separação dos preços, teremos que somar as demandas como se fosse uma única e trabalhar a otimização como no primeiro modelo do capítulo 25.



Atenção: Quando trabalharmos com demandas somadas, temos que testar se o preço de equilíbrio não gera demanda negativa em alguma das curvas de

demanda. Se a função demanda for negativa ao preço de equilíbrio, isso quer dizer que o monopolista aumentará o seu lucro se não vender para esse grupo de consumidores. Ao excluir essa demanda e calcular o novo equilíbrio, seu lucro aumentará.

26.5 Vinculação de Produtos

Uma prática muito comum entre as empresas é a **venda casada**. Você já se perguntou qual o motivo das empresas de internet se esforçarem tanto para vender o pacote TV + Internet + Telefone?. Pois bem, agora você vai ter uma ideia por trás dessa estratégia.⁵

Já vimos que a vontade do monopolista é cobrar o máximo possível para cada cliente em cada quantidade. Isso faria com que ele capturasse todo o excedente do mercado. Como na prática isso implicaria em conhecimento perfeito de todos os consumidores e existe uma legislação que limita a capacidade de impor muito do poder de mercado, as empresas se valem de estratégias para maximizar esse excedente.

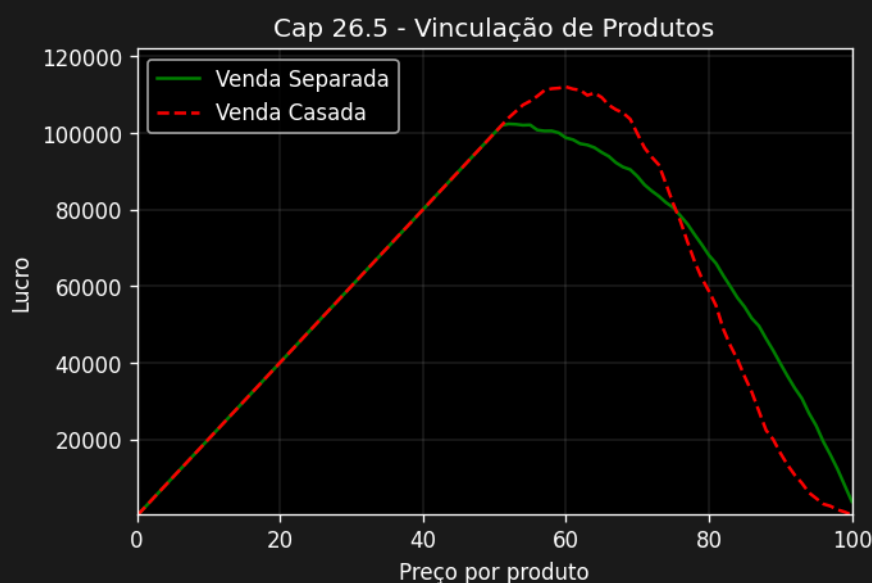
Uma dessas estratégias é exatamente a venda casada. A ideia é a seguinte: como o vendedor não pode cobrar um preço para cada consumidor, ele precisa ter uma ideia dos preços de reserva dos mesmos para que possa cobrar exatamente o valor do preço de reserva mais baixo que o custo marginal permita.

Veja a tabela 26.1 a página 672 do livro. Temos dois tipos consumidores que possuem preços de reservas inversos para dois tipos de programas diferentes. Se o monopolista cobrar U\$101,00 pelo processador de texto, ele perderá 100% dos consumidores do tipo A. Por causa disso, ele sempre cobrará o mínimo possível para poder capturar o preço de reserva mais baixo. Isso implica que os consumidores que possuem preços de reserva maiores tenham algum excedente.

Mas como bem sabemos, as empresas sempre pensam em novas estratégias. No caso da vinculação de produtos, supondo que o preço de reserva pelos produtos juntos seja igual à soma dos preços individuais, nós tratamos os dois produtos como uma cesta única. Nesse novo arranjo, o vendedor consegue cobrar um preço maior, porque o preço de reserva por cesta é maior que o valor cobrado separadamente.

⁵ Aqui estamos supondo que as demandas por esses serviços não são relacionadas. Mas não leve esse primeiro parágrafo tão ao pé da letra. O objetivo dele é só vender o conteúdo do tópico ;)

Eu expandi um pouco do exemplo do professor Varian para um caso de 1.000 consumidores. Nessa simulação os preços de reserva são aleatórios entre 51 e 100. Para cada uma das duas abordagens, eu comparei os lucros a medida que se eleva o preço praticado no mercado. Para efeito de simplificação, os preços de reserva mínimos são iguais nos dois produtos, então o vendedor sempre aumentará os preços em paralelo. Atente para o fato de que nesse gráfico o preço está no eixo horizontal.⁶



Simulação: [Clique aqui para ter acesso a essa simulação.](#)

De zero até 50, a curva de lucro é uma linha reta porque o preço de reserva mínimo da nossa simulação é 50. Então, sempre existirá alguém disposto a comprar a medida que ofertamos até esse preço. A partir desse ponto, cobrar mais caro implica em abrir mão dos consumidores com preço de reserva menor que o preço.

26.6 Tarifas Bipartidas

Um artigo famoso de 1971 cujo título é "A Disneyland Dilemma: Two-Part Tariffs for a Mickey Mouse Monopoly", de Walter Oi, nos mostra uma situação interessante. Como o monopolista se comportará no caso da venda de dois produtos que possuem demandas interrelacionadas?

No tópico anterior, supomos que as demandas eram independentes. Agora

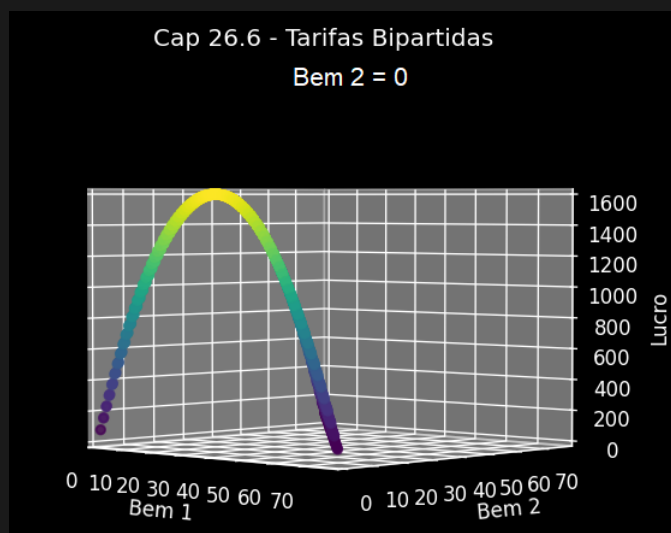
⁶Ficou na dúvida, fala comigo que eu explico melhor.

temos um caso onde, ao aumentar a oferta do bem 1, os consumidores estarão menos propensos a consumir o bem 2. Chamamos esse arranjo de **tarifa bipartida**.

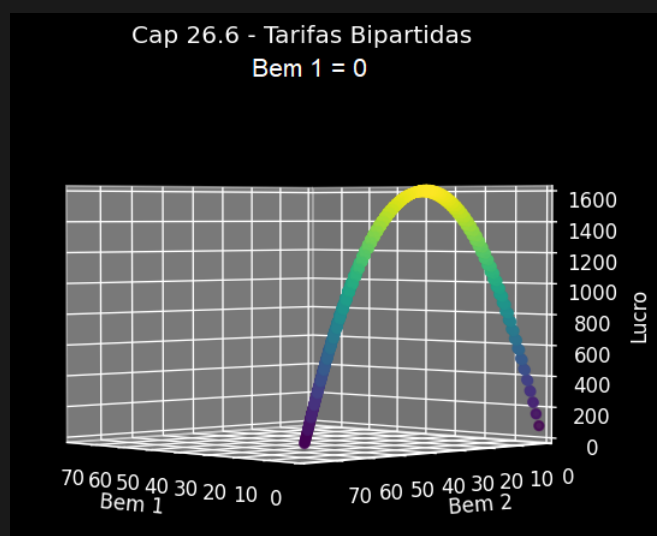
Como já trabalhamos antes, sabemos que a maximização do lucro é obtida no ponto onde o custo marginal é igual à receita marginal. Fazendo isso para a oferta do bem 1 e como ele não pode discriminar perfeitamente os preços, haverá um excedente do consumidor. Esse excedente é exatamente o valor máximo que ele pode cobrar pelo bem 2. Nesse caso, pode ser que a quantidade cobrada pelo bem 2 seja inferior ao montante que iguale o custo marginal à receita marginal.

Para elucidar esse modelo eu fiz uma simulação. Fora suposto que as demandas são lineares, com a mesma forma funcional e interdependentes, ou seja, quanto mais de um bem se tem, menos do outro terá. Os custo marginais são fixos em 20.

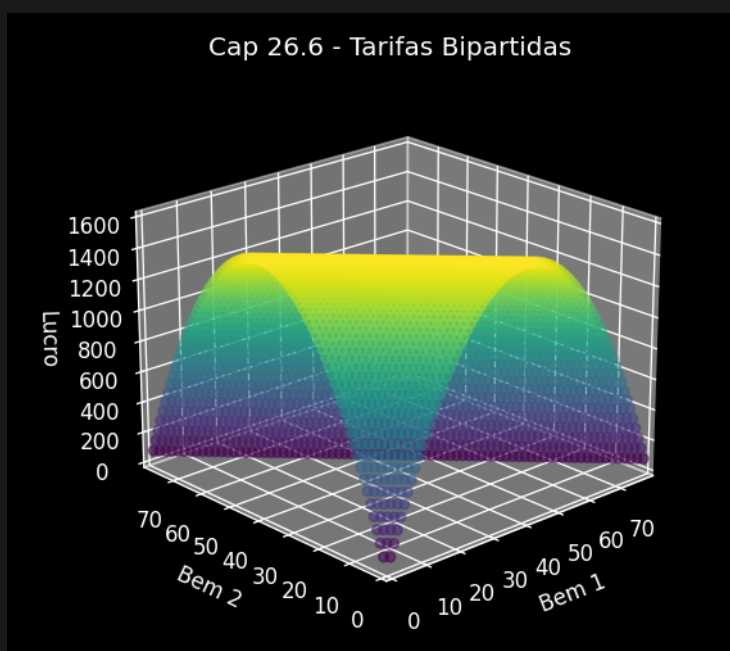
Como esse problema envolve o equilíbrio em dois mercados (bem 1 e bem 2), eu optei por construir um gráfico tridimensional. O problema dessa abordagem é que a melhor maneira de se entender um gráfico desse é pela mudança do ângulo da câmera. Então eu vou colocar 3 perfis de visualização mas também fiz um gif com um panorama dos eixos **clique aqui para ver**.



Nessa primeira imagem temos um ângulo que evidencia como o lucro se comportaria se só existisse o mercado do bem 1. Podemos ver que o lucro é maximizado em um ponto (que é justamente onde o custo marginal é igual à receita marginal). A segunda imagem é similar a primeira, mas para o outro bem.

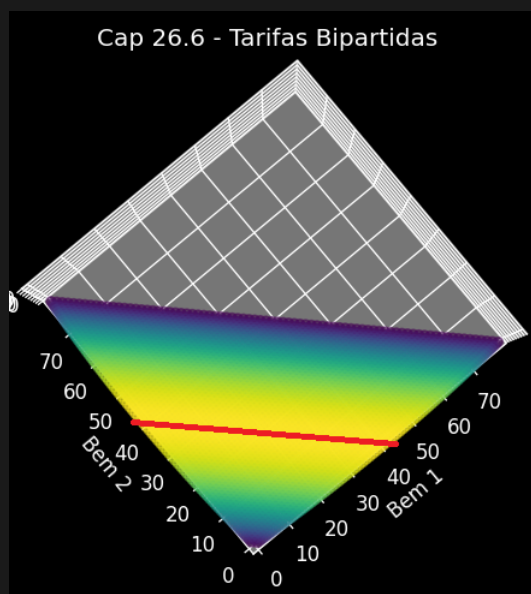


A terceira mostra como o monopolista deverá agir para poder ofertar ambos os bens. O padrão é simétrico porque no modelo as duas demandas possuem as mesmas formas e os mesmos coeficientes. Veja como a figura do lucro forma um tipo de "onda" que parte da cesta onde os dois bens são iguais a zero. Na parte amarela temos o máximo do lucro possível para cada cesta. E, a partir desses pontos de máximo, os lucros de cada cesta vão sendo cada vez menores.

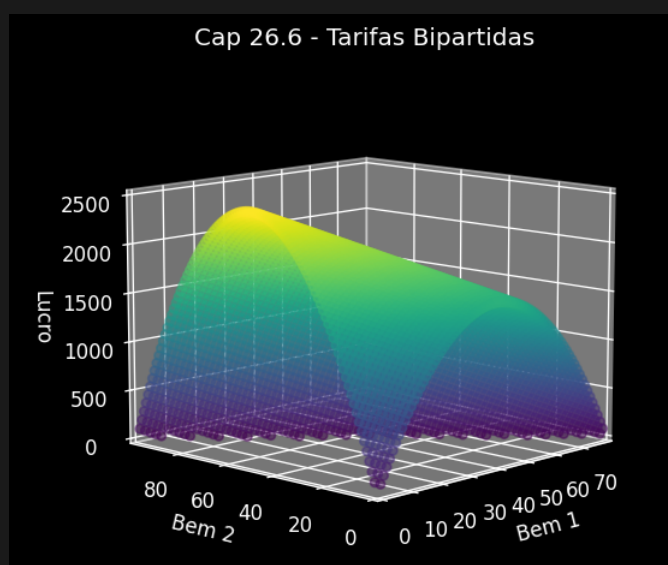


A última mostra um ângulo onde vemos a relação de troca entre os bens (a

linha vermelha indica a reta onde as cestas maximizam o lucro). Observe que, visto de cima, temos um gráfico que demonstra o quanto o monopolista tem que abrir mão de um bem para vender mais do outro, sem que isso incorra em redução do seu lucro total.⁷



Como as demandas desse modelo são simétricas e os custos são iguais, o modelo gráfico é uniforme. Na imagem abaixo eu simulei o mesmo modelo para o caso onde o custo marginal do bem 2 é igual a zero.



⁷Pra mim, lembra um pouco a curva de restrição orçamentária do consumidor.

Podemos ver claramente que, nesse segundo caso, o monopolista só maximiza seu lucro ao vender exclusivamente o bem 2.

Essa assimetria é a explicação do motivo da Disney não cobrar um preço pela entrada nos brinquedos, uma vez que em os custos dos serviços (a saber: a entrada e os passeios) não são iguais. A Disney percebeu que ao cobrar somente a entrada, poderia captar mais o excedente total do mercado do que se cobrasse também os passeios aos brinquedos.

26.7 Competição Monopolística

Nós começamos essa seção do livro partindo da posição oposta aos modelos que vimos ao longo da primeira metade do curso. Adaptamos o modelo da escolha maximizadora do lucro para a existência do poder de mercado e avançamos como o monopolista pode usar esse poder mesmo em arranjos menos favoráveis à capacidade de discriminação de preços. Nessas últimas duas seções expandimos nosso modelo para mais de um produto e como eles podem interagir entre si para a maximização do lucro.

Todo esse caminho foi muito bem pensado pelo professor. Lá no começo alguns de vocês podem ter achado a hipótese da existência de apenas um produtor um tanto quanto caricata. Mas agora vamos trazer o nosso modelo da escolha para mais perto da realidade presenciada todos os dias por vocês.

Até agora, tratamos uma **indústria** como um conjunto de produtores cujo resultado do esforço produtivo era *exatamente* a mesma mercadoria. Isso quer dizer que, sendo 1 (que é o caso do monopólio) ou 1.000 produtores, todas as mercadorias que saem das fábricas e são comercializadas seriam exatamente as mesmas. Essa hipótese simplificadora vai dar lugar a uma nova que, na minha opinião, é bem mais aplicável a nossa realidade fática.

Os produtos agora possuem certas propriedades exclusivas (sendo a marca a principal) e seus competidores também serão diferenciáveis entre si. Todos competindo por um mercado de bens relativamente parecidos aos consumidores. Além disso, vamos considerar que a barreira de entrada de novos produtores também será mais baixa.

Nesse novo arranjo, os produtores possuem características de ambos os modelos vistos. Eles não podem alterar seus preços completamente como um monopólio, porque os consumidores olhariam para os seus concorrentes e comprariam algum produto semelhante ao seu, só que mais barato. Por outro lado, eles não estão fadados estritamente ao preço de mercado, uma vez que nesse arranjo a demanda não será infinitamente elástica. O nome

dessa estrutura setorial é **concorrência monopolística**.⁸

Estamos vendo apenas vantagens ao novo modelo, mas como tudo na vida, temos um trade-off entre realidade e praticidade. Esse modelo é bem mais complexo de ser construído e analisado. Como o próprio professor diz "Em um modelo detalhado do setor de competição monopolística, dependemos muito dos detalhes específicos dos produtos e da tecnologia (de produção), assim como da natureza das escolhas estratégicas disponíveis para as empresas". Isso acaba implicando naquela situação clássica de "cada caso é um caso". Por causa disso, e do fato desse curso ser introdutório, vamos apenas ver alguma das principais estratégias dos economistas para modelar esses mercados.

Mesmo sendo um modelo mais complexo, podemos evidenciar algumas características que independam de quaisquer fatores relacionados ao mercados específicos. O primeiro deles é relacionado ao número de competidores.

É razoável supor que se o número de concorrentes aumentar (algo que está muito relacionado às barreiras de entrada) haverá impactos na curva de demanda que a empresa está imposta. O primeiro impacto que podemos supor é que essa curva irá se aproximar mais da origem do plano cartesiano⁹. O segundo impacto previsto é que a elasticidade de demanda aumentará¹⁰.

Se todas as empresas do mercado tiverem como objetivo o lucro. Quaisquer equilíbrio alcançado terá que obedecer algumas restrições:

- Cada empresa venderá o máximo possível. Ou seja, elas sempre optam por ofertar cestas que estejam na curva de demanda e não abaixo dela.
- Cada empresa precisará maximizar seu lucro levando em consideração as imposições oriundas à sua curva de demanda da empresa.
- Quanto mais competidores o mercado tiver, mais próximo de zero será o lucro das empresas contidas no mercado.

Do fato 1, podemos derivar o fato que quaisquer opções de maximização estão na própria curva de demanda¹¹. Do fato 3, podemos ver que a medida que o número de competidores tende ao infinito, a cesta escolhida deve ser num ponto onde a curva de custo médio tangencia a curva de demanda¹².

⁸Eu não sei você, mas eu acho esse modelo muito empolgante de ser estudado.

⁹Ou seja, ele vai acabar tendo que baixar mais o seu preço se quiser continuar vendendo a mesma quantidade.

¹⁰Porque agora os consumidores podem escolher mais opções em relação a antes.

¹¹Afinal, ela mostra as maiores quantidades para cada nível de preço.

¹²A lógica é que se $p > c(y)/y$ então $py - c(y) > 0$, o que contraria nosso postulado. Agora, se $p = c(y)/y$ então, $py - c(y) = 0$, que é exatamente o que estamos dizendo.

Por fim, o nosso postulado 2 afirma que a maximização ocorrerá na curva de demanda, isso implica no fato que a curva de custo médio não cruzará a curva de demanda, porque se isso acontecer, as empresas terão lucro positivos.

Existem algumas características desse equilíbrio competitivo monopolizador:

- Ele é ineficiente no sentido de Pareto, porque a maximização ocorre pelo custo médio e não pelo custo marginal. Mesmo sendo uma situação de lucro zero, quando tratamos de eficiência, estamos trabalhando com a maximização do excedente do mercado. E isso se dá pelo custo marginal.
- As empresas acabam por atuar num ponto à esquerda do nível de produção. Isso quer dizer que os consumidores acabam não tendo acesso a todas as mercadorias que os produtores realmente poderiam lançar no mercado.

Um fato interessante desse segundo ponto é que temos um trade-off interessante. Vimos que as empresas até teriam como ofertar quantidades maiores, mas como a maximização do lucro se dá pelo custo médio, elas não produzem tudo que podem. Se quiséssemos aumentar a oferta dos produtos, teríamos que reduzir a quantidade de ofertantes. Isso realmente aumentaria a quantidade ofertada por cada empresa, mas em contrapartida, os consumidores teriam menos opções para escolher!. Esse é o tipo de situação onde não existe regra de ouro e cada caso é único.

26.8 Modelo de Diferenciação de Produtos por Local (Estabilidade na Competição)

Essa seção é inspirada no clássico artigo de 1929 "Stability in Competition" de Harold Hotelling.¹³

Como foi dito antes, as abordagens puramente teóricas nessa parte da teoria microeconômica são limitadas porque agora os aspectos únicos de cada mercado acabam tornando praticamente impossível deduzirmos leis gerais. Na seção passada nós já aprendemos como um concorrente monopolista possui algumas restrições e alguma liberdade advinda da diferenciação dos produtos (que não é absoluta, mas existe). Agora, porém, vamos abordar outro tipo de diferenciação: A geográfica.

¹³ Imagina como deve ter sido doido publicar um artigo em 1929.

Nossos modelos sempre adotaram que os consumidores não possuíam nenhum custo pela aquisição além do preço. Mas, na realidade, todos nós precisamos sair de casa e perdermos um tempo indo até o local onde teremos acesso aos produtos que desejamos¹⁴.

Pensando nisso vamos criar um experimento mental:

Imagine que a orla da Ponta Negra seja retilínea e que só seja permitida a venda de sorvetes mediante autorização da Prefeitura. Adicionaremos a restrição que a probabilidade de você encontrar um transeunte com calor é uniforme em toda a extensão da orla. Suporemos também que os preços dos sorvetes sempre serão iguais, que não há diferença de qualidade e que por motivos climáticos só exista um único sabor disponível.

Diante das características do mercado acima, onde o primeiro sorveteiro com licença da prefeitura deve instalar sua barraquinha?. Não é difícil chegar na conclusão que ele deve se instalar exatamente no meio da orla. Desse modo, a distância máxima que um transeuntes com calor terá de caminhar para aliviar seu desconforto térmico é de meia orla.

Agora vamos complicar um pouco mais. Supondo que outro sorveteiro consiga sua licença para vender na orla. Qual será o melhor arranjo?. Se usarmos o mesmo pensamento de antes, podemos supor que cada vendedor fique no ponto que corresponda a $1/4$ e $3/4$ do tamanho da orla. Nesse caso, todos os consumidores das áreas $1/4$ e $2/4$ estariam próximos ao vendedor 1. E os consumidores dos setores $3/4$ e $4/4$ estariam mais próximos do sorveteiro 2. No final teremos uma distância máxima de $1/4$ da orla para cada consumidor e $1/2$ da receita total para cada sorveteiro.

Tudo certo então? Terminamos?. Evidente que não. Ainda precisamos pensar no que cada vendedor fará. Como eles querem maximizar sua receita, cada vendedor terá o incentivo à se mover um pouco para o centro, porque desse modo ele manterá a sua demanda cativa e ainda "roubará" parte da demanda do seu colega de ofício. No final, ambos se encontrarão no centro da orla. Esse novo arranjo aumenta a distância máxima dos consumidores para $1/2$ e mantém a receita dos sorveteiros em $1/2$.

Esse é um exemplo de como a competição pelos clientes gerou um padrão menos eficiente na localização dos sorveteiros. Quanto menos agentes temos no mercado, mais precisaremos nos preocupar com as estratégias que cada um deles adotará.¹⁵

¹⁴Ou optamos por pagar a bendita taxa de entrega do Ifood afim de termos a comodidade de receber a comida na porta de casa.

¹⁵Se você começou a pensar em teoria do jogos, é isso mesmo!

Como o próprio Hotelling pontua na página 53: "A importância e variedade das tendências aglomerativas¹⁶ se torna evidente quando nos lembramos que a distância, usada nessa ilustração, é apenas um termo figurativo para uma grande convergência de qualidade". O que o autor quer dizer, é que ele usou essa analogia das distâncias apenas como uma ilustração. Mas ao invés dos vendedores possuírem uma *commoditie* separada geograficamente, podemos considerar vendedores um do lado do outro, mas com produtos um pouco diferentes. Pelo modelo de Hotelling, eles terão um incentivo à padronização dos seus produtos.

No Youtube, parece que os vídeos estão cada vez mais parecidos. Na música, observamos padrões de ritmo, temática e estrutura de tempos em tempos. Os filmes de super-heróis viraram uma moda que já dura uma década. Enfim, esse padrão de convergência é explicado relativamente bem pelos conceitos que desenvolvemos até agora. Esse modelo de convergência na competição continua muito poderoso desde sua descoberta em 1929. Agora você tem um ferramental novo para impressionar seus parentes nas reuniões de família. Use esse poder com moderação.

26.9 Diferenciação de Produtos

Uma característica muito interessante da ciência é que ela não se limita em continuar revisando seus conhecimentos. Embora o modelo do Hotelling tenha sido muito famoso, os cientistas continuaram fazendo pesquisas e construindo modelos que explicassem os fenômenos observados na realidade.

Existem situações onde os produtores optam por buscar o oposto do modelo de convergência, eles investem na diferenciação dos seus produtos. Qual o sentido disso? nós já vimos que, quanto maior é o grau de diferenciação do produto, mais característica de monopólio o competidor terá. Então as empresas investem pesado em marketing para alterar a percepção dos consumidores e construir a ideia de uma marca "única". A Apple tem uma estratégia excelente nessa linha, para citar um exemplo.

Infelizmente, o livro não adentra muito além da demonstração que existe essa vertente de possibilidade dos mercados. O importante aqui é saber que a competição monopolística pode gerar tanto uma padronização dos produtos quanto uma excessiva diferenciação deles.

¹⁶Ele está falando da tendência à convergência.

26.10 Mais Sorveteiros

Se a gente retomar o nosso experimento mental da orla da Ponta Negra. Alguns de vocês podem pensar: "Mas perai, e se colocarmos mais sorveteiros no mercado?". Pois bem, vamos ver o que acontece nessa situação.

Coloque um novo sorveteiro em qualquer lugar. Acontecerá que alguém vai ficar no meio. Os que estão nas proximidades, vão ter o incentivo de irem cada vez mais para perto do que está no meio, uma vez que eles mantêm seus clientes a ainda "roubam" parte dos clientes do pobre sorveteiro do meio. Só que o sorveteiro do meio também é esperto. Se um dos dois das extremidades chegar perto demais, ele pode simplesmente ir para no sentido da extremidade. Ao passar pelo sorveteiro que veio de lá, ele captaria toda a receita da extremidade até a sua atual posição.

Mas quando o sorveteiro do meio passa a ser um sorveteiro da extremidade, o novo sorveteiro do meio terá o mesmo incentivo que ele teve e também irá de encontro a algum deles para trocar de lugar. O que podemos ver é que esse arranjo é dinâmico. Sempre existirá um incentivo de algum dos sorveteiros de mudar de posição. Mas não se desespere. A medida que temos mais e mais competidores, o padrão de convergência volta a aparecer.

Comentário: Embora eu tenha dito o padrão de aglomeração reapareça para quatro ou mais vendedores, eu só refiz a mesma afirmação que o professor fez no seu livro. Eu não sei você, mas eu não gosto muito de afirmações sem as devidas comprovações. Quando tiver mais tempo, eu atualizo essa seção com a demonstração que esse padrão realmente aparece para 4 ou mais vendedores.¹⁷

¹⁷Favorita meu repositório no Github para não perder as atualizações no material.

O Mercado de Fatores

“Give him a living, but never discuss the family business with him.”

– The Godfather

Quando falamos de produção, o mercado de fatores é muito relevante e até o momento não tocamos nesse assunto desde do capítulo 20. Agora que temos um *framework* mais interessante como o comportamento do monopolista, podemos pensar nas implicações para o mercado de fatores. Veremos algumas situações:

1. Qual a diferença entre a demanda por fatores de um monopólio e de uma empresa competitiva.
2. O que acontece quando temos um mercado de fatores competitivo mas apenas um comprador¹.
3. Como será o arranjo onde há um monopolista no mercado de fatores e um monopolista no mercado de produto.

27.1 O Monopólio no Mercado do Produto

Pensemos novamente na empresa que demanda fatores de produção. Sua demanda maximizadora será dada pelo ponto onde o custo marginal pela compra do fator é igual à receita marginal advinda do emprego desse fator. Supondo uma empresa que só possua um único fator de produção. Sua função de produção será dada por $y = f(x)$. A receita será dada pelo volume de produção e da demanda inversa do mercado, algo como, $R(y) = p(y)y$.

O Produto Marginal de um fator de produção é obtido pela variação

¹O nome desse arranjo é **monopsônio**. Pense nele como um monopólio do mundo invertido de stranger things.

da função produção em relação à variação do fator observado. No nosso exemplo, só temos um único fator, então:

$$PM_x = \frac{\delta y}{\delta x} = f'(x)$$

Se você sobreviveu até aqui, deve estar entendendo tudo tranquilamente².

Como não é novidade, esse incremento marginal na produção será vendido e produzirá uma **Receita Marginal**. Podemos expor esse efeito pela expressão da variação infinitesimal da receita dividida pela variação infinitesimal do produto.³

$$RM_y = \frac{\delta R}{\delta y} = p(y) + p'(y)y$$

Até agora já vimos o impacto que um fator causa no produto e, do outro lado, o impacto que um produto causa na receita. Agora nos resta fazer a relação direta entre essas duas lógicas. Uma vez que $y = f(x)$, então, $p(y) = p(f(x))$. Podemos reescrever nossa equação da receita como:

$$R(x) = p(f(x))f(x)$$

Agora que temos nossa função de receita explicitamente relacionada ao nosso fator de produção, podemos obter a relação chamada de **Produto da Receita Marginal** que mede o impacto na receita dada uma variação no fator de produção. Para obter-la usamos a derivada de $R(x)$ em relação à x .

Mas essa derivada tem um pequeno toque de sofisticação adicional: temos que aplicar, ao mesmo tempo, a regra da multiplicação junto à regra da cadeia.⁴

$$\begin{aligned} PRM_x &= \frac{dR(x)}{dx} = p(y)f'(x) + f(x)p'(y)f'(x) \\ &= [p(y) + p'(y)y]f'(x) \\ &= RM_y \times PM_x \end{aligned}$$

Ou seja, o impacto na receita de uma variação do fator de produção é igual à receita marginal da produção vezes o produto marginal do fator. O que

²Parabéns! Você está cada vez mais perto de ler um paper e de expressar modelos como os economistas fazem.

³O primeiro capítulo desse material é exatamente para você saber o que estamos fazendo aqui.

⁴A regra da cadeia para $p(y) = p(f(x))$ nos diz que $\frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \frac{dy}{dx}$.

faz todo sentido.⁵

Podemos ir um pouco mais fundo e trazermos de volta a nossa expressão da receita marginal desenvolvida na seção de maximização de lucro do capítulo 25. $RM(y) = p(y) [1 - 1/|\epsilon|]$.

$$\frac{dR(x)}{dx} = p(y) \left[1 - \frac{1}{|\epsilon|} \right] PM_x$$

Voilà! Agora temos uma generalização do caso competitivo estudado no capítulo 20.

Uma vez que, na competição perfeita, a elasticidade é infinita. Isso implica no fato que o produto da receita marginal será dado pelo preço de mercado (que é igual à receita marginal) vezes o produto marginal do fator de produção, ou seja, pPM_x . O professor chamou de **valor do produto marginal** essa multiplicação entre o preço de mercado e o produto marginal do fator.

$$\text{Competição Perfeita: } PRM_x = pPM_x$$

Mas no caso do monopólio, a receita marginal não é igual ao preço. Como já sabemos, o monopolista maximiza seu lucro num ponto onde a elasticidade é maior que 1. Isso significa que $\left(1 - \frac{1}{|\epsilon|}\right) \leq 1$. Ou seja, no caso do monopólio, o produto da receita marginal será, no máximo, igual ao valor do produto marginal.

$$\text{Monopólio: } PRM_x = p \left[1 - \frac{1}{|\epsilon|} \right] PM_x \leq pPM_x$$

Se a demanda não for perfeitamente elástica. Para o caso do monopolista, seu PRM_x será estritamente menor que o da empresa de competição perfeita. Isso quer dizer que o resultado na receita do emprego de um fator adicional de produção será menor para o monopolista se comparado a uma empresa competitiva.

O motivo disso é que o monopolista interfere no preço de equilíbrio do mercado ao produzir mais unidades. Ao chegar no ponto onde a demanda é elástica, o resultado na receita será cada vez menor. Já no caso da empresa competitiva, não importa quantos produtos ela produza, o preço de mercado sempre será o mesmo.

⁵Se não faz sentido, para um pouquinho e pensa um pouco. Apenas ler sem compreender é perda de tempo. Mas passar horas tentando entender é muito produtivo!

Não é difícil perceber, então, que o monopolista possui menos incentivo à utilizar determinada quantidade de insumo na sua produção. O que está plenamente de acordo com nossa análise do ponto de maximização do lucro do monopolista, feita nos capítulos anteriores. Vimos que o equilíbrio acontecerá num ponto onde a quantidade maximizadora de lucro é inferior ao caso competitivo.

Podemos saber **quanto** será demandado por cada empresa no mercado de fatores de produção?. Não é difícil supor que será a quantidade que iguala o produto da receita marginal ao custo marginal desse fator.

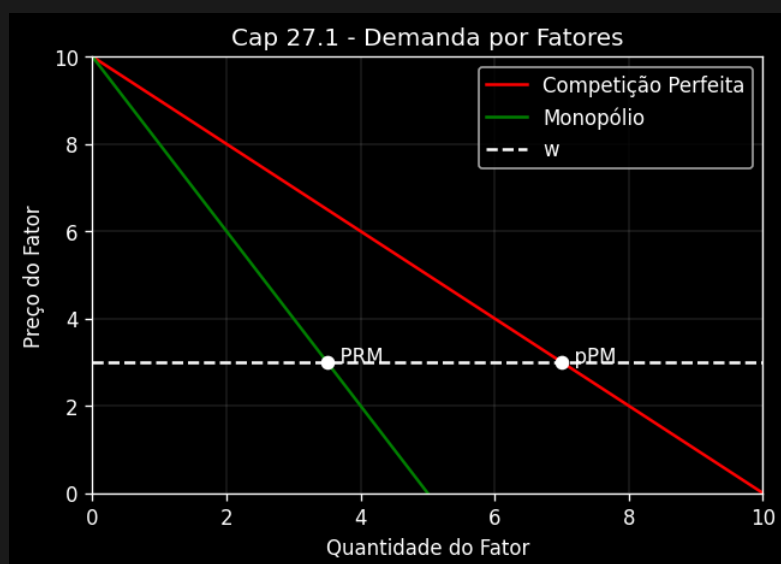
Se o mercado de fatores é competitivo, uma empresa operando em um mercado igualmente competitivo poderá demandar a quantidade de insumos que desejar (x_c) a um preço constante w . A quantidade empregada de insumo será:

$$\text{Competição Perfeita: } PRM_{x_c} = pPM(x_c) = w$$

Já o caso monopolista é um pouco diferente. Ele ainda demandará a quantidade que iguale o seu produto da receita marginal, mas esse ponto não será igual ao valor do produto marginal.

$$\text{Monopólio: } PRM(x_m) = w$$

Essa figura abaixo demonstra essa relação. A curva de demanda por fatores de produção do monopolista quase sempre será mais inclinada que a do caso competitivo. Ou seja, $x_m \leq x_c$.



27.2 O Monopsônio

O livro constrói um cenário onde temos um mercado competitivo de fatores, um único comprador e um mercado de produtos competitivo.

Para simplificar, vamos supor que a empresa usa apenas um único fator de produção. Sua função de produção será dada por $y = f(x)$. A análise de comportamento do monopsônio é parecida com a do monopólio, só que ao invés de impactar o mercado pela oferta de bens, o poder de mercado é exercido pela compra. A quantidade de fator comprado, impactará no preço pago por ele.

Para expandir o modelo, vamos criar uma função de oferta inversa $w(x)$ onde o preço pago pelo insumo será determinado pela quantidade demandada pelo nosso único comprador (chamado de **monopsonista**). É razoável supor que $\frac{dw(x)}{dx} > 0$.

Como na imagem da seção acima, num mercado de fatores competitivo, a curva de oferta de fatores é plana. Ou seja, não importando a quantidade demandada, o custo será sempre o mesmo. Já no caso de um único comprador, a curva de oferta de fatores será inclinada positivamente. Como o professor resume perfeitamente: "Uma empresa num mercado de fatores competitivo é uma **tomadora de preços**. Um monoposionista é um **fixador de preços**".

A maximização de lucro do monoposionista será:

$$\max_x \quad pf(x) - w(x)x$$

Ou seja, temos que encontrar a quantidade de insumo - x - que permita maximizar a diferença entre a receita total - $pf(x)$ - e o custo total - $w(x)x$. A condição de primeira ordem desse problema será:

$$pf'(x) - [w(x) + w'(x)x] = 0$$

$$pf'(x) = w(x) + w'(x)x$$

$$\underbrace{pM_x}_{\text{PRM}} = \underbrace{w(x) + w'(x)x}_{\text{Custo Marginal}}$$

Como supomos no início do nosso caso, o mercado do produto é competitivo. Isso quer dizer que a receita marginal será igual a pM_x (que é a mesma coisa que $pf'(x)$). Mas obter o custo marginal não será tão simples quanto antes.

Quando a firma compra uma pequena quantidade (x) do fator de produção,

ela deve pagar o preço desse fator vezes a quantidade (wx). Contudo, nesse caso, o preço será afetado exatamente na quantidade demanda ($w'(x)x$). O valor final pago é a soma dessas duas ações. Podemos desenvolver essa lógica exatamente como desenvolvemos a receita do monopolista na seção 25.1.

$$\begin{aligned}
\Delta c &= w\Delta x + x\Delta w \\
\frac{\Delta c}{\Delta x} &= w + x \frac{\Delta w}{\Delta x} \\
&= w \left[1 + \frac{x}{w} \frac{\Delta w}{\Delta x} \right] \\
&= w \left[1 + \frac{1}{\eta} \right]
\end{aligned}$$

Onde η^6 representa a elasticidade da oferta. Como a inclinação a curva de oferta é positiva, η será maior que zero. Se a elasticidade da oferta for perfeita, *eta* será infinito. O que implica, por sua vez, no caso da competição perfeita onde o custo marginal seria igual a w . Quaisquer outro valor da elasticidade, produzirá uma curva de oferta não plana.

27.2.1 Monopsônio com Oferta Linear

Para aplicar a teoria precisamos dar alguma forma funcional a nossa curva de oferta do fator de produção. No livro, o professor trabalha com uma oferta linear da seguinte forma:

$$w(x) = a + bx$$

O custo total da produção será dado por:

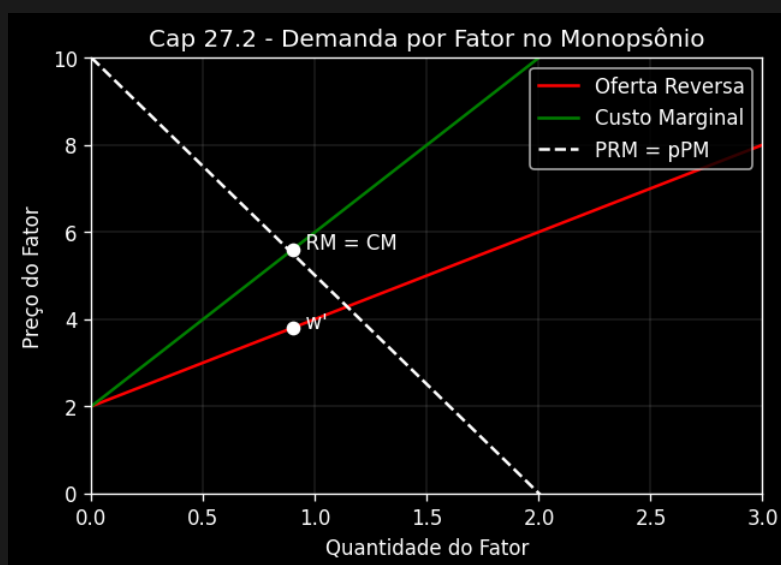
$$C(x) = w(x)x = ax + bx^2$$

O custo marginal do fator é obtido pela derivada da função custo total em relação ao fator x .

$$CMa_x(x) = a + 2bx$$

Graficamente, a quantidade do insumo demandado será igual ao ponto onde o $PRM = pPM$ é igual ao custo marginal da aquisição do insumo.

⁶O nome dessa letra grega é eta.



Se o custo marginal for maior que o retorno da receita oriunda do emprego desse fator, o monopsionista não terá o incentivo à utilização do mesmo. Caso o contrário, valerá a pena usar um pouco mais do insumo. O ponto onde não há incentivo a mudança é justamente onde o custo marginal é igual à receita marginal.

Assim como no caso do monopolista, a quantidade demanda será o ponto menor do que se o mercado fosse competitivo. No cenário de competição, a quantidade demandada seria o ponto onde a oferta reversa se equivalesse ao retorno do emprego do insumo (medido pelo PRM). Só que nesse caso, a ineficiência acontece no mercado de fatores e não no de produção.

Comentário: Veja o exemplo sobre o salário mínimo que o professor colocou no livro. Você deve ser capaz de entendê-lo sem tanto sofrimento. A conclusão de que no mercado de trabalho controlado por um monopsionista, um salário mínimo pode aumentar o nível de emprego é bem interessante.

27.3 Monopólios Upstream e Downstream na Cadeia de Produção

Nós só observamos dois tipos de concorrência imperfeita. Mas os exemplos acima são apenas um dos múltiplos arranjos que podem acontecer na realidade. O professor não achou serventia em ter que modelar todas as combinações possíveis, e eu não vou fazer isso também. O importante é saber como modelar o comportamento do monopolista (ou do monopsionista) seja no mercado de fatores ou no mercado de produção.

Mesmo não querendo modelar todos os arranjos possíveis, ainda veremos uma nova situação: O caso onde um monopolista no mercado de fatores vende para um monopolista no mercado de produção.

O monopolista do mercado de fatores é chamado de **upstream** ou **para trás**. Ele vende o insumo x ao preço k e com custo marginal constante c . O monopolista do mercado de produto será denominado por **downstream** ou **para frente**. Esse segundo usará o insumo x para obter a produção y via função de produção da forma $f(x) = y$ que será vendida no mercado cuja demanda inversa será $p(y)$. No nosso exemplo a forma funcional dessa demanda será $p(y) = a - by$.

O professor usa uma simplificação bem camarada da função de produção do downstream. Ele supõe que $f(x) = y = x$, ou seja, é como se ele revendesse o produto⁷. Outra simplificação é que o downstream também terá custo marginal igual ao preço pago pelo insumo (k) ao upstream.

Teremos que buscar um equilíbrio entre os dois monopolistas. Para isso, vamos começar modelando o caso para o downstream. Ele quer maximizar seu lucro que é dado pelo seguinte problema:

$$\max_y L(y) = p(y)y - ky$$

$$\max_y L(y) = [a - by]y - ky$$

$$\max_y L(y) = ay - by^2 - ky$$

A condição de primeira ordem da última forma é dada por:

$$\frac{dL(y)}{dy} = a - 2by - k = 0$$

$$a - 2by = k$$

$$y = \frac{a - k}{2b}$$

Como a função de produção usada iguala a quantidade de insumo à quantidade de produto. Vemos que ele demandará exatamente a mesma quantidade de fator de produção que a oferta no mercado do produto.

$$x = \frac{a - k}{2b}$$

⁷O que torna esse exemplo surpreendentemente válido para diversas ocasiões da vida real.

Comentário: O importante aqui é perceber que a função de produção do monopolista downstream é usada para derivar a demanda do fator produzido pelo upstream. Perceba que a quantidade demandada de fator depende do preço pago por ele e da demanda no mercado de produto. Tudo bem intuitivo e simples.

Agora temos que modelar o comportamento do upstream. Vamos supor que ele tenha acesso à função demanda de fatores do downstream e queira maximizar seu lucro. A demanda inversa de fatores nada mais é do que a última equação tendo k em função de x :

$$k(x) = a - 2bx$$

A receita é dada por:

$$k(x)x = ax - 2bx^2$$

E a receita marginal por:

$$RM_x = a - 4bx$$

Igualando a receita marginal ao custo marginal, teremos que:

$$a - 4bx = c$$

ou seja, o total vendido no mercado pelo monopolista upstream será dado por:

$$x = \frac{a - c}{4b}$$

Como a função de produção é um pra um, podemos definir que o total produzido no mercado de produto será:

$$y = \frac{a - c}{4b}$$

Essa é a quantidade da produção que maximiza os lucros do monopolista upstream. Mas lembre-se que ele usa como função de demanda de fatores o resultado do problema de maximização do downstream. Então a solução acaba por gerar um lucro fruto do processo de maximização de ambos os monopolistas.

Se houvesse apenas um monopolista em ambos os mercados (imagine que as duas empresas se fundissem) e os custos de produção dos fatores se mantivessem os mesmos. O problema de maximização seria igualar a receita marginal ($a - 2by$) ao custo do fator (c). Isso geraria um volume de produção igual à

$$y_{int} = \frac{a - c}{2b}$$

O monopolista integrado produzirá o dobro que o arranjo com dois monopolistas separados. Mas qual o motivo dessa diferença?

Para entendermos o motivo dessa diferença precisamos lembrar que o monopolista sempre escolherá o ponto que maximiza o seu lucro pela igualdade entre o custo marginal e a receita marginal. A curva de demanda inversa do mercado serve para determinar o preço de equilíbrio que será usado no mercado dada a decisão da quantidade da produção do monopolista.

O caminho usado para encontrarmos o equilíbrio teve uma etapa para cada monopolista:

- Primeiro usamos a demanda do mercado de produtos para determinar qual a quantidade o monopolista ofertará (e como essa quantidade é função do preço do fator de produção).
- Depois, usamos a relação entre a quantidade produzida e os insumos para determinar a demanda inversa do mercado de fatores. Essa demanda é usada pelo monopolista upstream para determinar o seu ponto de maximização.

Na prática, o monopolista upstream vai cobrar uma quantidade cujo preço de mercado é superior ao custo marginal. Esse preço será o custo que o monopolista downstream usará para maximizar seu lucro. Contudo, quando as empresas se fundem, o novo custo marginal do monopolista do mercado de produto será exatamente o custo de produção c . Nós retiramos de cena o Markup do monopolista upstream.

O Oligopólio

“I want you to talk to this movie bigshot and settle this business for Johnny. Now, if there’s nothing else, I’d like to go to my daughter’s wedding.”

– The Godfather

O trabalho de entender os mercados é longo e trabalhoso. Até agora, nós elaboramos as estruturas mais simples e que se encontram nos dois extremos do poder de mercado. De um lado, aprendemos a estrutura onde não existe poder de mercado e as empresas são pequenas concorrentes. Após isso, vimos o que acontece quando temos apenas uma empresa (ou empresas que trabalham como se fossem uma só) e o poder de mercado está todo nas mãos dela.

Agora vamos entrar num cenário um pouco mais realista. Pensemos em uma situação onde temos poucos concorrentes. De um lado, não temos tantos a ponto de ninguém poder manipular seus preços. Do outro, ninguém é grande o suficiente para ignorar o comportamento dos seus concorrentes. Esse arranjo é denominado de **Oligipólio**.

Nós já tangenciamos esse assunto quando vimos o modelo de concorrência monopolística no capítulo 25. Esse arranjo também é um tipo de oligopólio. Nessa configuração, as variáveis mais importantes são o custo de entrada (pela regra do custo médio) e nas estratégias de diferenciações entre os produtos (seja a de convergência ou a de diferenciação).

Aqui vamos estudar arranjos com um número ainda menor de concorrentes. Como dito anteriormente, a medida que aprimoramos o nosso modelo, as características únicas de cada mercado se tornam cada vez mais relevantes. Aqui só vamos conseguir ver regras gerais de resultados possíveis, bem como, algumas variáveis importantes para monitorarmos.

Vamos partir da estrutura de competição de apenas duas empresas: o **Duo-**

pólio¹. Outra limitação que imporemos é a de que os produtos são idênticos. Essas limitações nos livram de notações complexas com vários competidores e a utilização do poder de mercado oriundo da diferenciação. Nosso foco são as **interações estratégicas**.²

28.1 A Escolha de Uma Estratégia

Em um arranjo de dois competidores, temos que desenvolver um modelo que consiga equilibrar 4 variáveis:

- Preço da Empresa 1
- Preço da Empresa 2
- Quantidade da Empresa 1
- Quantidade da Empresa 2

Na hora de tomar uma decisão sobre o preço e a quantidade, uma empresa pode, ou não, ter acesso as escolhas feitas pelo seu concorrente. Chamaremos de **líder** toda empresa que decidir seu **preço** ou **quantidade** antes da outra. A empresa que decidirá após a informação da decisão da empresa líder será chamada de **seguidora**. As interações desse tipo são chamadas de **jogos sequenciais**.³

Quando as duas empresas decidem sem ter acesso a informação do adversário, elas precisam supor o que ele fará. Esse arranjo é denominado **jogo simultâneo**.

Com esses dois conceitos, podemos ter 4 tipos de interações estratégicas:

- Liderança de Preço
- Liderança de Quantidade
- Preço Simultâneo
- Quantidade Simultânea

Analisaremos cada tipo de interação estratégica que surge com cada tipo de esquema. Mas não pararemos aí. Uma opção possível de estratégia é a de

¹Alguns exemplos em que podemos aproximar esse modelo: PS4 x Xbox, Iphone x Samsung, Coca-Cola x Pepsi, Apple x Microsoft.

²Se você quiser ver modelos mais próximos da realidade, vai ter que encarar um mestrado e um doutorado.

³Começamos a chegar mais perto da teoria dos jogos.

negociação entre as empresas para formação de um **conluio**. Esse tipo de esquema é chamado de **jogo cooperativo**.

Comentário: Leia o exemplo da estratégia de "cobrimos o preço da concorrência" e a partir de agora, você nunca mais lerá essas ofertas com os mesmos olhos.

28.2 Liderança de Quantidade

O modelo desenvolvido nessa seção é creditado ao economista alemão Heinrich von Stackelberg. Seu livro *Marktform und Gleichgewicht* foi publicado em 1934.⁴

Vamos supor que temos uma empresa líder na quantidade. Como é de se esperar, ela fixará sua produção em y_1 unidades. A empresa seguidora, de posse da informação de y_1 e da demanda inversa do mercado, escolherá seu nível de produção em y_2 . A demanda inversa do mercado será em função do total de produtos $p(Y) = p(y_1 + y_2)$.

Como a empresa líder decidirá sua quantidade de modo a maximizar seus lucros? Certamente ela terá que supor como a empresa seguidora agirá. Não seria nada estranho que ela tivesse a hipótese que a empresa seguidora queira maximizar seus lucros também. Desse modo, a empresa líder terá que endogenizar o problema da maximização do lucro da empresa seguidora.

28.2.1 O Problema da Empresa Seguidora

O problema da maximização da empresa seguidora é:

$$\max_{y_2} p(y_1 + y_2)y_2 - c_2(y_2)$$

Já conhecemos esse tipo de problema muito bem. Queremos encontrar o ponto onde a receita marginal será igual ao custo marginal.

$$RM_2 + CM_{a2} = p(y_1 + y_2) + \frac{dp(y_1 + y_2)}{dy_2}y_2 + \frac{dc_2(y_2)}{dy_2} = 0$$

ou, na notação de derivadas de Lagrange

$$RM_2 + CM_{a2} = p(y_1 + y_2) + p'(y_1 + y_2)y_2 + c'(y_2) = 0$$

A novidade aqui é que temos que levar em consideração a quantidade y_1 para encontrar nosso y_2 . Isso quer dizer que

⁴Eu recomendo dar uma olhada na bibliografia dos gigantes que desenvolveram as teorias ao longo desse livro.

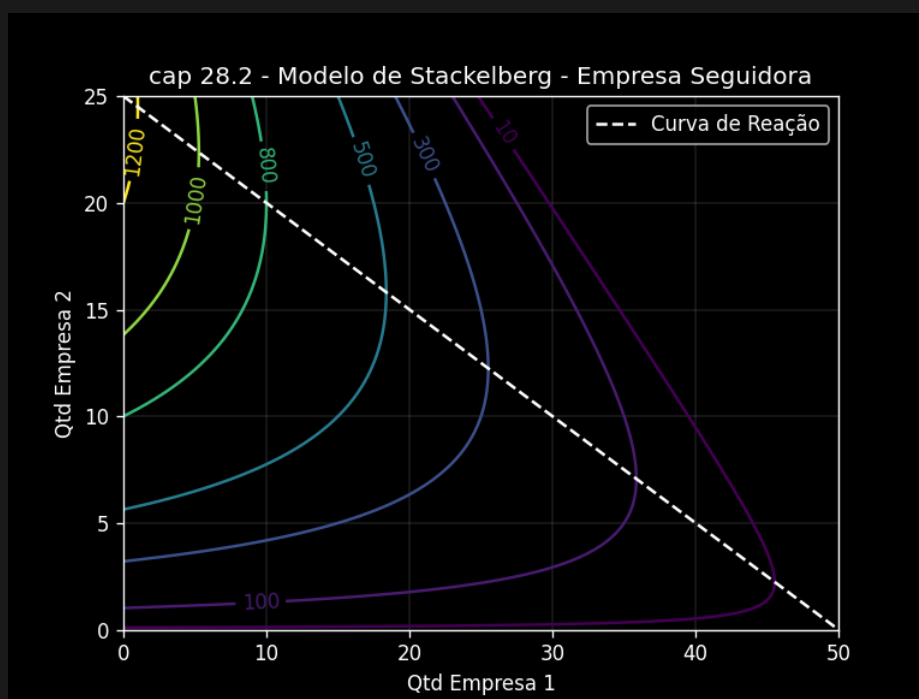
$$y_2 = f_2(y_1)$$

Nós conseguimos obter essa função isolando nosso termo y_2 no problema de maximização acima. Essa função tem o nome de **função de reação** e nos diz qual quantidade será produzida pela empresa seguidora ao ser conhecida a quantidade da empresa líder.

Para prosseguirmos vamos ter que definir uma forma funcional à nossa função de demanda inversa. Faremos para o caso linear onde $p(y_1 + y_2) = a - b(y_1 + y_2)$. Também adotaremos o custo igual a zero para facilitar a matemática da coisa.

$$\begin{aligned}\text{Função Lucro 2: } \pi_2(y_1, y_2) &= p(y_1 + y_2)y_2 \\ &= [a - b(y_1 + y_2)]y_2 = ay_2 - by_1y_2 - by_2^2\end{aligned}$$

Com a função de lucro e a de reação, conseguimos ver a relação entre essas duas funções. Na imagem abaixo podemos ver que a curva de reação sempre atravessa as curvas de isolucro no ponto onde temos o maior valor de y_2 .



28.2.2 O Problema da Empresa Líder

Já aprendemos a parte do modelo que trata da quantidade de equilíbrio dada a escolha anterior da empresa líder. Agora vamos desenvolver como

essa empresa define a sua quantidade de modo a maximizar o seu lucro.

Uma das características desse modelo é que a empresa líder sabe como a outra empresa vai se comportar dada a escolha dela, ou seja, ela conhece $f_2(y_1)$. Diante disso, o problema da maximização dela está sujeita a essa restrição.

$$\begin{aligned} \max_{y_1} \quad & p(y_1 + y_2)y_1 - c_1(y_1) \\ \text{de modo que } & y_2 = f_2(y_1) \end{aligned}$$

Ou melhor, podemos colocar tudo em função de y_1 e obtermos

$$\max_{y_1} \quad p[y_1 + f_2(y_1)]y_1 - c_1(y_1)$$

A produção total será definida pela líder sendo que será parte devida a produção direta e a outra parte pela resposta da seguidora ao nível definido da produção, ou seja, $y_1 + f_2(y_1)$. Pela equação da demanda inversa linear, temos que a função de reação da empresa seguidora é

$$f_2(y_1) = y_2 = \frac{a - by_1}{2b}$$

A função lucro é dada pela receita menos os custos (que no nosso exemplo é zero)

$$\text{Função Lucro 1: } \pi(y_1, y_2) = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 = ay_1 - by_1^2 - by_1y_2$$

Colocando a função de reação dentro da função de lucro teremos

$$\begin{aligned} &= ay_1 - by_1^2 - by_1f(y_1) \\ &= ay_1 - by_1^2 - by_1 \frac{a - by_1}{2b} \\ &= ay_1 - by_1^2 - \frac{by_1a}{2b} + \frac{b * b(y_1)^2}{2b} \\ &= ay_1 - by_1^2 - \frac{ay_1}{2} + \frac{by_1^2}{2} \\ \pi(y_1, y_2) &= \frac{a}{2}y_1 - \frac{b}{2}y_1^2 \end{aligned}$$

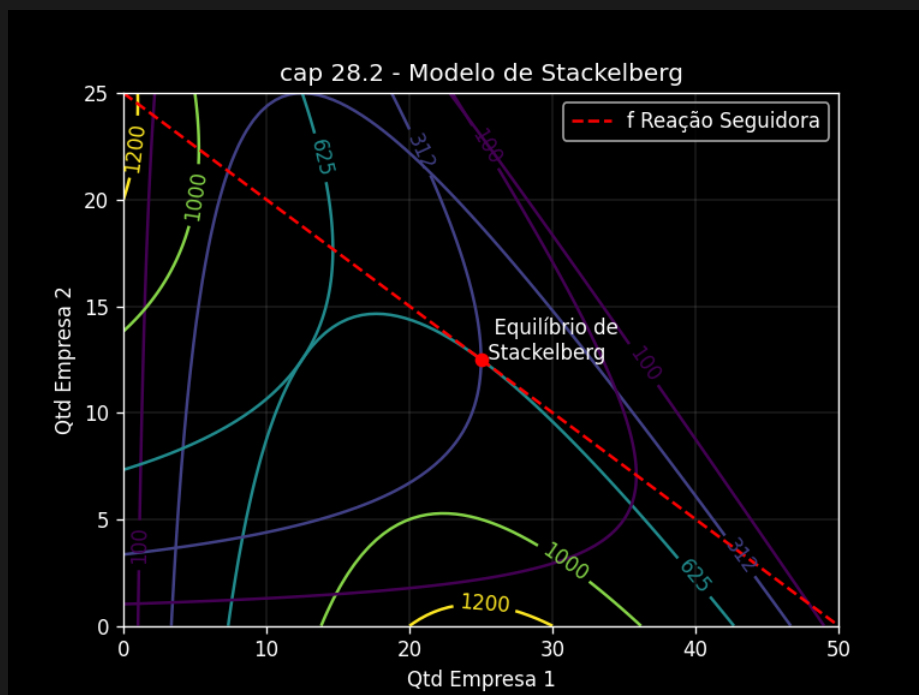
Para encontrarmos a quantidade ótima basta derivar a função lucro em função de y_1 e igualar a zero. O que nos dará

$$y_1^* = \frac{a}{2b}$$

Desse modo, podemos encontrar facilmente a produção de equilíbrio da empresa seguidora.

$$\begin{aligned}
 y_2^* &= \frac{a - by_1}{2b} \\
 y_2^* &= \frac{a - b(a/2b)}{2b} \\
 y_2^* &= \frac{a - ab/2b}{2b} \\
 y_2^* &= \frac{2ab/2b - ab/2b}{2b} \\
 y_2^* &= \left(\frac{2ab}{2b} - \frac{ab}{2b} \right) \frac{1}{2b} \\
 y_2^* &= \left(\frac{2ab}{2b} - \frac{ab}{2b} \right) \frac{1}{2b} \\
 y_2^* &= \left(a - \frac{a}{2} \right) \frac{1}{2b} \\
 y_2^* &= \frac{a}{4b}
 \end{aligned}$$

Por fim, podemos ter a quantidade total do mercado pela soma de $y_1^* + y_2^* = \frac{3a}{4b}$. Agora que temos a função de lucro da empresa 1, podemos acrescentar as curvas de isolucro para vermos a solução gráfica da álgebra que acabamos de desenvolver.



Se você colocar as quantidades de equilíbrio nas equações de lucro, chegará nos valores de lucro para cada empresa desse modelo. O ponto de Equilíbrio de Stackelberg acontecerá onde a curva de reação tangencia a maior curva de isolucro da empresa líder. No exemplo da imagem eu usei para a função da demanda inversa linear um $a = 100$ e um $b = 2$.

28.3 Liderança do Preço

Outra forma de um jogo sequencial acontecer entre duas empresas é pela definição do preço pela empresa líder. Similarmente ao que vimos na seção anterior, a empresa líder precisa levar em consideração o que a empresa seguidora fará.

28.3.1 O Problema da Seguidora

No mercado competitivo, o preço é dado e as empresas maximizam seus lucros pela igualdade entre a receita marginal (que é justamente o preço) e o custo marginal. Por sorte, o problema da empresa seguidora é bem parecido com esse. Ela recebe o preço definido pela líder e maximiza seu lucro.

$$\max_{y_2} py_2 - c_2(y_2)$$

A oferta da empresa seguidora será a quantidade que iguala o preço definido pela líder ao custo marginal.

28.3.2 O Problema da Líder

A empresa líder, sabendo a função de oferta da empresa seguidora, vai trabalhar com a diferença entre a Demanda do mercado e a demanda da empresa seguidora, ou seja, $R(p) = D(p) - S(p)$. O nome dessa curva de demanda reduzida é **curva de demanda residual**.

Supondo um custo de produção constante c . A função de lucro da empresa líder é dada por

$$\text{Função Lucro 1: } \pi_1(p) = R(p)p - R(p)c = (p - c)R(p)$$

A maximização dessa empresa acontece onde a receita marginal (que nesse caso é oriunda da demanda residual) é igual ao custo marginal.

A partir de agora temos que definir uma forma funcional para a nossa curva de demanda, como sempre, vamos optar pelo caso mais simples, $D(p) = a - bp$. Também vamos definir as funções custo para a seguidora

$c_2(y_2) = y_2^2/2$ e para a líder $c_1(y_1) = cy_1$.

Isso nos diz que a condição de maximização da empresa seguidora será a derivada da função lucro igual a zero.

$$\begin{aligned}\frac{dL(y_2)}{dy_2} &= p - \frac{2y_2}{2} = 0 \\ &= p - y_2 = 0 \\ &= p = y_2\end{aligned}$$

Ou seja, nossa função de oferta da seguidora será $S(p) = p$. De posse dessa informação, podemos descobrir a equação da demanda residual da empresa líder pela subtração da curva de demanda pela oferta da seguidora.

$$R(p) = D(p) - S(p) = a - bp - p = a - (b + 1)p$$

Agora é só maximizar o lucro pela igualdade entre a receita marginal e o custo marginal e verificar na curva de demanda inversa o volume de produção e o preço. A demanda inversa é obtida isolando p da demanda residual.

$$p(y_1) = \frac{a}{b+1} - \frac{1}{b+1}y_1$$

A receita da empresa líder é obtida pela multiplicação de $p(y_1)$ por y_1 . A receita marginal é a derivada dessa função em relação a y_1 .

$$\begin{aligned}Receita_1 &: \left[\frac{a}{b+1} - \frac{1}{b+1}y_1 \right] y_1 \\ &= \frac{a}{b+1}y_1 - \frac{1}{b+1}y_1^2\end{aligned}$$

A receita marginal será

$$RMa_1 = \frac{a}{b+1} - \frac{2}{b+1}y_1$$

O nosso custo foi definido como $c_1(y_1) = cy_1$, logo, o custo marginal é igual a c^5 .

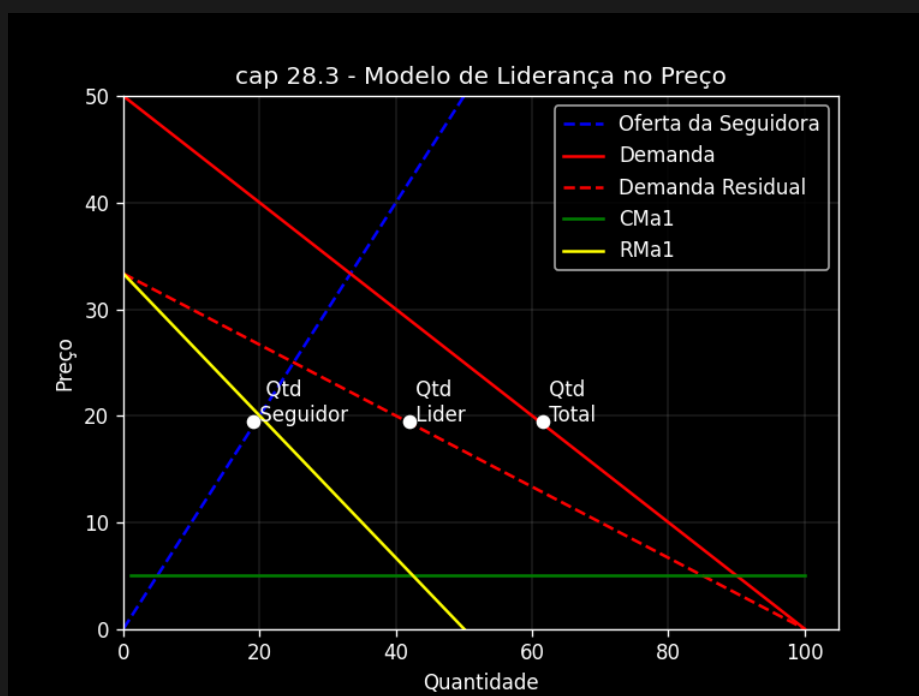
Portanto, nosso problema de maximização será dado pela equação

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+1} - \frac{2}{b+1}y_1 &= c \\ -\frac{2}{b+1}y_1 &= c - \frac{a}{b+1}\end{aligned}$$

⁵A essa altura do campeonato você não tem mais dúvida nessas derivadas triviais né?!

$$\begin{aligned}\frac{2}{b+1}y_1 &= \frac{a}{b+1} - c \\ \frac{2}{b+1}y_1 &= \frac{a}{b+1} - \frac{c(b+1)}{b+1} \\ \frac{2}{b+1}y_1 &= \frac{c(b+1)}{b+1} \\ 2y_1 &= c(b+1) \\ y_1^* &= \frac{c(b+1)}{2}\end{aligned}$$

Na imagem abaixo, nós podemos ver as variáveis interagindo. A oferta total será a soma das quantidades de ambas empresas.



28.4 Comparação entre as Lideranças de Preço e Quantidade

Esse seção do livro é bem explicativa. Vá ler o material original.

28.5 Estabelecimento Simultâneo da Quantidade

Não raramente, as empresas não ficam se comunicando entre si para informar seus concorrentes a respeito de suas decisões. Nesses cenários, as empresas

precisam supor o que suas concorrentes farão. Esse modelo é chamado de **Modelo de Cournot** e é um modelo de jogo simultâneo onde as empresas definem suas quantidades produzidas e vendidas no mercado.

Como de costume, suporemos que as empresas queiram maximizar seus lucros. Pensemos no caso da empresa 1. A quantidade total do mercado será dada por $Y = y_1 + y_2^e$, onde y_2^e é a quantidade prevista da empresa 2. O preço de equilíbrio do mercado será dado pela equação de demanda inversa $p(Y) = p(y_1 + y_2^e)$.

O problema de maximização do lucro será

$$\max_{y_1} p(y_1 + y_2^e)y_1 - c(y_1)$$

Não é difícil ver que quaisquer expectativa da produção da sua concorrente mudará o ponto de produção que maximizaria o lucro. Desse modo, podemos ver que existe uma relação entre essa expectativa e a produção, de modo mais formal, $y_1 = f(y_2^e)$.

Mas, espera um pouco, a gente já viu algo bem parecido um pouco mais acima. Essa é a **curva de reação** da empresa, a diferença é que aqui a empresa 1 não é mais a líder e essa reação se refere a *expectativa* da produção. Mas o tratamento matemático é o mesmo.⁶

Similarmente, a empresa 2 se depara com a mesma situação.

$$y_2 = f(y_1^e)$$

Como ambas maximizações são funções de expectativas, é muito mais provável que as empresas não acertem exatamente o volume de produção da sua concorrente. O equilíbrio de Cournot é dado pelo sistemas de equações

$$y_1^* = f_1(y_2^*)$$

$$y_2^* = f_2(y_1^*)$$

Nessa solução, nenhuma das empresas terá incentivos em mudar seu nível de produção.

28.6 Exemplo do Equilíbrio de Cournot

Se reutilizarmos o exemplo na liderança da quantidade (com custo zero e demanda linear) obteremos as mesmas funções de reação que a empresa 2 tinha naquele modelo.

⁶Para a nossa sorte!

$$y_1 = \frac{a - by_2^e}{2b}$$

e

$$y_2 = \frac{a - by_1^e}{2b}$$

O ponto de equilíbrio acontece onde $y_1 = y_2$, ou seja, onde as curvas de reação são iguais. Nesse ponto, $y_1^e = y_1$ e $y_2^e = y_2$. Só precisamos substituir dentro desse sistema de equações do seguinte modo

$$y_1 = \frac{a - by_2^e}{2b}$$

$$y_1 = \frac{a - by_2}{2b}$$

$$y_1 = \frac{a - b\left(\frac{a - by_1}{2b}\right)}{2b}$$

$$y_1 = \frac{a - \left(\frac{ab - b^2 y_1}{2b}\right)}{2b}$$

$$y_1 = \frac{\frac{2ba}{2b} - \left(\frac{ab - b^2 y_1}{2b}\right)}{2b}$$

$$y_1 = \frac{2ba - ab + b^2 y_1}{2b} \frac{1}{2b}$$

$$y_1 = \frac{2ba - ab + b^2 y_1}{4b} \frac{1}{b}$$

$$y_1 = \frac{2ba - ab + b^2 y_1}{4b} \frac{1}{b}$$

$$y_1 = \frac{2a - a + by_1}{4b}$$

$$4by_1 - by_1 = a$$

$$3by_1 = a$$

$$y_1^* = \frac{a}{3b} = y_2^*$$

Com essas funções e as equações de lucro podemos ver graficamente o equilíbrio de Cournot onde as curvas de reação se equivalem.



28.7 Ajustamento para o Equilíbrio

Seria muita boa vontade supor que, na vida real, as empresas conseguissem acertar na mosca o nível de produção dos seus concorrentes. Mas o nosso modelo é forte o suficiente para um processo de ajustamento em caso de (prováveis) palpites equivocados no nível de produção.

Imaginemos que as empresas suponham que a produção do seu concorrente será uma quantidade qualquer diferente do equilíbrio. Para facilitar, vamos supor que a cesta inicial produzida esteja em cima da curva de reação da empresa 2. A cesta inicial, que chamamos no gráfico de $Cesta(t)$ será igual à lista (y_1^t, y_2^t) .

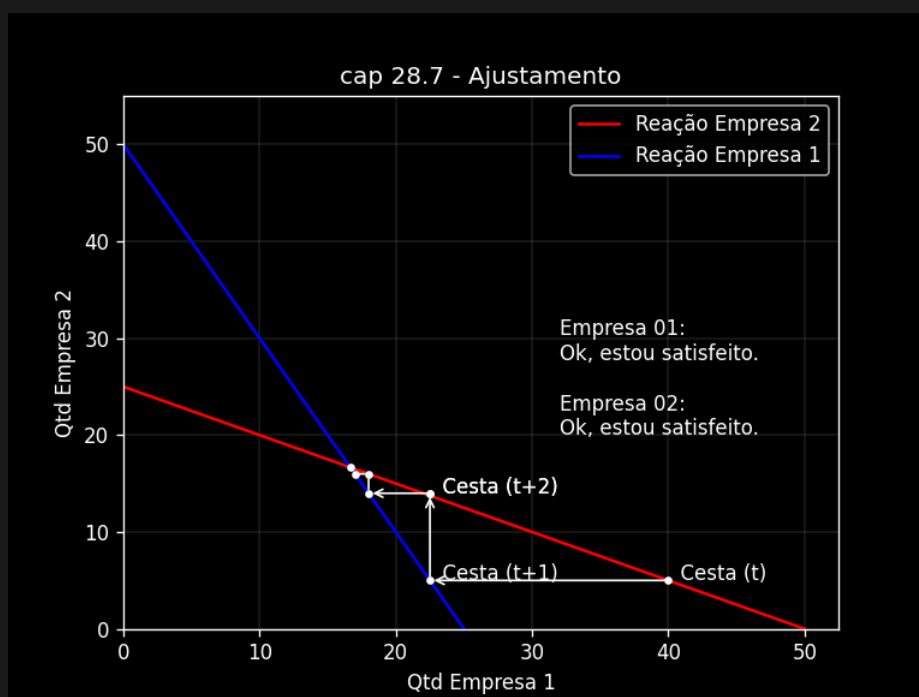
Essa cesta está na curva de reação da empresa 2, logo, essa empresa não terá incentivo a fazer nenhuma mudança. Mas para a empresa 1, a situação é outra, ela quer reduzir sua produção para aumentar seus lucros.

Isso faz com que a cesta do mercado se desloque para a curva de reação da empresa 1. Mas agora, quem está insatisfeito é a empresa 2. Ela fará um reajuste, só que agora, usará a nova produção da empresa 1 para definir sua oferta.

Esse processo fica se realimentando até um ponto onde elas estão satis-

feitas. Nós já vimos agora a pouco que esse ponto é justamente o equilíbrio do modelo de Cournot.

A imagem abaixo mostra esse caminho. Mas eu também transformei ela em um gif animado⁷ para ilustrar o caminho até o equilíbrio.



Essa propriedade de convergência ao ponto de equilíbrio é o que caracteriza esse modelo como um modelo de **equilíbrio estável**. Embora o processo descrito aqui seja bem resumido e simplificado devido o escopo do nosso curso.

28.8 Várias Empresas no Equilíbrio de Cournot

Além de fornecer um modelo para um duopólio, podemos ajustar o modelo de Cournot para n empresas competidoras. A oferta total da indústria será dada por $Y = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n$. Desse modo o problema da maximização da empresa será dado pela igualdade entre a receita marginal e o seu custo marginal do seguinte modo

$$p(Y) + \frac{\delta p}{\delta Y} y_i = CMa(y_i)$$

⁷Com alguma dose de bom humor.

$$p(Y) + \frac{\delta p}{\delta Y} \frac{Y}{p(Y)} y_i = CMa(y_i)$$

$$p(Y) \left[1 + \frac{\delta p}{\delta Y} \frac{Y}{p(Y)} \frac{y_i}{Y} \right] = CMa(y_i)$$

Definindo $s_i = \frac{y_i}{Y}$ como a participação da empresa no total do mercado.

$$p(Y) \left[1 + \frac{\delta p}{\delta Y} \frac{Y}{p(Y)} s_i \right] = CMa(y_i)$$

O termo $p(Y)$ é a curva de demanda. Então, se lembrarmos da fórmula da elasticidade, podemos ver que o termo $\frac{\delta p}{\delta Y} \frac{Y}{p(Y)}$ é justamente o inverso da elasticidade $\frac{1}{\epsilon(Y)}$

$$p(Y) \left[1 + \frac{s_i}{\epsilon(Y)} \right] = CMa(y_i)$$

Como a elasticidade de demanda é negativa

$$p(Y) \left[1 - \frac{s_i}{|\epsilon(Y)|} \right] = CMa(y_i)$$

O professor faz uma transformação que, para alguns, pode parecer estranha. Mas a lógica é essa (se tiver difícil de ver, dá um zoom):

$$\frac{1}{\frac{\epsilon(Y)}{s_i}} = \frac{\frac{1}{\epsilon(Y)}}{\frac{s_i}{s_i}} = \frac{1}{s_i} \frac{s_i}{\epsilon(Y)} = \frac{s_i}{\epsilon(Y)}$$

Com essa transformação, chegamos em

$$p(Y) \left[1 - 1/\frac{|\epsilon(Y)|}{s_i} \right] = CMa(y_i)$$

Essa solução é bem parecida com a maximização do monopolista. A principal diferença é esse termo s_i dividindo a elasticidade. Como $s_i = y_i/Y$ ele será $0 \leq s_i \leq 1$. No caso monopolista, sabemos que $s_i = 1$. No outro extremo, se $\lim(s_i) \rightarrow 0$, a empresa terá elasticidade infinita como as empresas da competição perfeita.

Para as empresas não monopolísticas e com algum poder de mercado, podemos entender esse termo como a elasticidade da demanda da empresa. Quanto maior s_i menor será a elasticidade da demanda da empresa.

Isso nos mostra que, em um mercado competitivo, temos um equilíbrio de Cournot. As empresas estarão maximizando seus lucros sem incentivo em mudar seu nível de produção.

28.9 Fixação Simultânea de Preços

Da mesma maneira que conseguimos desenvolver um modelo para quantidade e preço em jogos sequenciais, podemos fazê-lo para os jogos simultâneos. Já aprendemos nessa última seção como as empresas definem as quantidades produzidas de modo a maximizar seus lucros sem que haja uma empresa líder no processo.

Acontece que, em algum momento do século XIX, um matemático francês de nome Joseph Bertrand, ao ler o livro do Cournot, desenvolveu um modelo simultâneo de equilíbrio de preços. Esse modelo ficou conhecido como **concorrência de Bertrand**.

Assim como fizemos com Cournot, estamos na busca do par de preços que permitam ambas as empresas maximizar seus lucros. Para isso, temos que seguir algumas regras que já fazem parte dos modelos usados até o momento ao longo de todo o livro:

- O preço não poderá ser maior que o custo marginal. Porque as empresas aumentariam seus lucros simplesmente produzindo menos.
- Se o preço for maior que o custo marginal, todas as empresas terão um incentivo de reduzir seu preço para "roubar" os clientes das concorrentes e ainda auferir lucros positivos.

O segundo ponto funciona de maneira recursiva. Se uma empresa reduz seu preço em 10% abaixo dos preços das suas concorrentes, ela ganhará parte do mercado. As concorrentes terão o incentivo em reduzir mais ainda seus preços até o ponto onde não poderão mais reduzir (determinado pelo custo marginal).

28.10 Conluio

Até agora, todas as soluções envolveram processos de competição entre as empresas. Contudo, não seria nem um pouco alheio à realidade supor que algumas empresas queiram operar de modo coordenado. Esse arranjo é chamado de **Cartel** e é crime em vários países.

Você já sabe, desde o capítulo 25, que um cartel não passa de um grupo de empresas se comportando como um monopolista. Diante disso, seu problema de maximização será muito parecido com o modelo do capítulo que tratamos sobre o monopólio.

O problema da maximização para um cartel de duas empresas será dado por

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_1} = p(y_1 + y_2) - c_1(y_1) - c_2(y_2)$$

Cujas condições de primeira ordem serão

$$p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\delta p}{\delta Y}[y_1^* + y_2^*] = CMa_1(y_1^*)$$

$$p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\delta p}{\delta Y}[y_1^* + y_2^*] = CMa_2(y_2^*)$$

Podemos ver que, quando uma empresa decide expandir sua produção, receberá uma quantia oriunda da venda dos seus produtos, contudo, essa oferta adicional reduzirá o preço de equilíbrio do mercado (o que reduz o lucro recebido). A novidade aqui é que essa redução do preço impactará também na outra empresa do cartel.

O que as duas equações anteriores nos dizem é que as quantidades produzidas (e ofertadas no mercado) serão as que igualem seus custos marginais $CMa_1(y_1^*) = CMa_2(y_2^*)$.

Agora temos um fator interessante para pensarmos. Se uma empresa possuir uma estrutura de custos que permita produzir mais com o mesmo custo marginal que sua empresa companheira, ela obterá uma maior parte dos lucros do mercado. Uma vez que sua produção será maior.

28.10.1 O problema da ‘Desonestidade’

Será que as empresas que operam em um cartel possuem algum incentivo em "trapacear" a sua empresa parceira?⁸

Vejamos o que acontece com a empresa 1 do nosso cartel, caso ela aumente a sua produção em δy_1 unidades. Podemos mensurar esse impacto pela derivada parcial da função lucro do cartel em relação a y_1

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\delta p}{\delta Y}y_1^* - CMa_1(y_1^*)$$

A condição de maximização do cartel nos diz que

$$p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\delta p}{\delta Y}y_1^* + \frac{\delta p}{\delta Y}y_2^* - CMa_1(y_1^*) = 0$$

Apenas isolando o termo referente à produção da empresa, temos então

$$p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\delta p}{\delta Y}y_1^* - CMa_1(y_1^*) = -\frac{\delta p}{\delta Y}y_2^*$$

⁸Nessas situações cabe o ditado popular: "Ladrão que rouba ladrão tem ..."

Como $\delta p/\delta Y$ é negativo, então o termo da esquerda da última equação é positivo. Ou seja, a empresa 1 consegue aumentar seus lucros positivamente ao aumentar sua produção para além do ponto de equilíbrio do cartel.

Aqui mora o problema de longo prazo dos carteis. Na solução de maximização do lucro conjunto, existe um incentivo para cada empresa aumentar sua produção, visto que, se a outra empresa mantiver fixa a sua produção, sempre será lucrativo um aumento unilateral da quantidade produzida.

Agora, se houver desconfiança entre as empresas, fica mais difícil ainda manter a coalizão. Se as empresas esperam que a outra irá aumentar sua produção, elas terão um incentivo adicional em agir antes da outra e aproveitar os lucros positivos oriundos do aumento da produção.

Para exemplificar, vamos pegar uma demanda linear do tipo $p(Y) = a - b(y_1 + y_2)$ e supormos um custo marginal igual a 0. A equação do lucro será dada por

$$\pi(y_1, y_2) = p(Y)(y_1 + y_2) = [a - b(y_1 + y_2)](y_1 + y_2) = a(y_1 + y_2) - b(y_1 + y_2)^2$$

A condição de primeira ordem desse problema é dada pela derivada dessa função em relação a $(y_1 + y_2)$. O que nos dá

$$\begin{aligned} a - 2b(y_1 + y_2) &= 0 \\ y_1^* + y_2^* &= \frac{a}{2b} \end{aligned}$$

O gráfico abaixo ilustra exatamente esse situação para $a = 100, b = 2$ e os custos de produção fixos em 10. Veja como temos 3 pontos onde as curvas de isolucro se tocam. Esses pontos ocorrem na reta de maximização do lucro dada pela equação acima.



Todas as soluções de maximização do lucro acontecem nas tangências das curvas de isolucro que ocorrem na reta de maximização.

28.11 Estratégias Punitivas

Já aprendemos o motivo dos carteis terem alguma dificuldade de se manter estáveis devido os incentivos que as empresas têm de aumentar suas produções. Para superar essa dificuldade, os carteis precisam de medidas para punir quaisquer comportamentos que venham "burlar" o ponto de maximização do lucro da coalizão.

Uma maneira possível é pensar que, em um duopólio, uma das empresas ameace a outra que produzirá permanentemente o nível de produção de Cournot (ou seja, um ponto na curva de reação). Essa estratégia é chamada de **estratégia de punição**.

Para sabermos se essa punição seria forte o suficiente para mitigar o risco de trapaça, precisamos comparar o que aconteceria com o lucro das empresas nos dois casos. Na coalizão, o lucro π_m é dado pela equação de maximização da seção passada. Já no equilíbrio de Cournot, as empresas produzirão o ponto de equilíbrio que produzirá o lucro π_c .

Os lucros obtidos pelo cartel são maiores porque fazem uso do poder de

mercado do monopólio (via markup do custo marginal). Enquanto na solução de Cournot, as quantidades são definidas pela maximização das empresas via ajuste competitivo. Isso implica em lucros menores no segundo modelo se comparados aos lucros do primeiro, ou seja, $\pi_m > \pi_c$.

Se uma empresa do duopólio decidir furar a regra da cota de produção, terá lucros positivos de $\pi_d > \pi_m$. As empresas do monopólio possuem um incentivo de realizar esses lucros via aumento unilateral da produção.

Ao produzir a quantidade do cartel, cada empresa auferirá um fluxo constante de lucro π_m . O valor presente desse fluxo de lucros a partir de hoje é dado por

$$\text{Valor Presente Cartel} = \pi_m + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi_m}{(1+r)^i} = \pi_m + \pi_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i}$$

Definindo $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i}$ como $1/r$. Podemos resumir a equação acima como está no livro

$$\text{Valor Presente Cartel} = \pi_m + \frac{\pi_m}{r}$$

Enquanto o valor presente da empresa que decida fraudar o cartel e recebe o equilíbrio de Cournot como resultado

$$\text{Valor Presente Trapaça} = \pi_d + \frac{\pi_c}{r}$$

Quando valerá a pena trapacear e quando será melhor se manter fiel ao cartel? Não é difícil ver que se o valor presente do cartel for maior que o valor presente da trapaça, será melhor continuar cumprindo o acordo do cartel, ou seja, o cartel será a melhor opção se

$$\pi_m + \frac{\pi_m}{r} > \pi_d + \frac{\pi_c}{r}$$

Isolando o termo de desconto r , temos

$$r < \frac{\pi_m - \pi_c}{\pi_d - \pi_m}$$

Já sabemos que $\pi_m - \pi_c > 0$ porque o lucro do cartel é maior que o lucro do equilíbrio de Cournot. Também sabemos que $\pi_d - \pi_m > 0$ porque o lucro da trapaça é superior ao do cartel. Então o termo da direita da desigualdade é a proporção entre a o prejuízo da punição pelo ganho da trapaça.

Se a taxa de desconto for menor que essa proporção, valerá a pena trapacear. Caso contrário, será melhor ficar no conluio.

Esse modelo até consegue propor uma maneira de controle do cartel, mas a noção de uma punição perpétua é um tanto quanto forçada na vida real. Veremos modelos mais realistas no decorrer do nosso curso.

Comentário: No livro temos dois exemplos sobre o assunto. O primeiro é sobre como a política de "cobrimos qualquer preço" pode ser usada para espionar as empresas do conluio. O segundo é sobre como as montadoras de carros japoneses usaram o governo para reduzir sua produção e elevar os preços dos carros exportados para os EUA.⁹

28.12 Comparação das Soluções

Essa última seção é um apanhado do que vimos no capítulo. Vá ler o material original.

⁹Esse segundo é muito interessante mesmo.

A Teoria dos Jogos

Parabéns! Você chegou no ponto da teoria que usaremos um dos ferramentais mais famosos da matemática aplicada. No capítulo anterior nós começamos a trabalhar os conceitos de interação estratégica entre agentes, mas agora veremos um framework mais robusto chamado **Teoria do Jogos**.¹

29.1 A Matriz de Ganhos de um Jogo

Como no nosso estudo sobre os oligopólios, vamos manter nosso horizonte de jogadores restrito a apenas dois e limitaremos o número de estratégias a um número finito. Assim conseguimos representar os ganhos em uma **matriz de ganhos**.

Como todo ferramental novo, temos que aprender a lógica do modelo. Para isso, o professor usa um exemplo com dois jogadores com duas estratégias para cada. O jogador *A* possui duas opções de ação: *Alto* e *Baixo*. Enquanto o outro possui, o jogador *B*, possui outras duas estratégias possíveis: *Esquerda* e *Direita*. Os retornos para cada jogada estão expostos nessa matriz de ganhos abaixo. Os retornos do jogador *A* estão a esquerda de cada célula, enquanto *B* obterá os valores da direita.

		Jogador B	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Jogador A	<i>Alto</i>	1, 2	0, 1
	<i>Baixo</i>	2, 1	1, 0

O que cada jogador fará? Bom, a primeira coisa que precisamos fazer é comparar os resultados de cada interação entre as estratégias possíveis. Se o jogador *B* escolhe a opção *Esquerda*, será melhor o jogador *A* escolher a

¹Sim, foi aqui que John Nash fez sua famosa contribuição que foi retratada naquele filme ganhador do Óscar "Uma mente brilhante". Agora você pode dizer para os seus familiares que estudou essa teoria ;)

opção *Baixo*, pois o retorno será o dobro. Se *B*, por outro lado, escolher *Direita*, ainda será melhor para *A* escolher a estratégia *Baixo* visto que o retorno será de 1 ao invés de 0. Percebeu que, independente do que *B* faça, sempre será vantajoso para *A* escolher *Baixo*?

Agora dá uma olhada na matriz e me diz qual será a estratégia de *B*. Eu espero, vai lá.

Muito bem! Para o jogador *B*, sempre será melhor escolher *Esquerda*.

Como há uma lógica dominante para as escolhas de ambos os jogadores, então, nesse jogo em questão, existe o que chamamos de **estratégia dominante**.

		Jogador B	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Jogador A	<i>Alto</i>	1, 2	0, 1
	<i>Baixo</i>	2, 1	1, 0

Eu sei, muito legal né?! Mas como sempre, existem muitas situações que não podemos contar com as existências de estratégias dominantes. E foi justamente para lidar com essas situações que o Nobel de 1994 criou (ou descobriu) o conceito que usaremos na seção seguinte.

29.2 Equilíbrio de Nash

Analise o seguinte jogo

		Jogador B	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Jogador A	<i>Alto</i>	2, 1	0, 0
	<i>Baixo</i>	0, 0	1, 2

Percebeu que nesse arranjo não temos nenhuma estratégia dominante? O que cada jogador fará, depende da escolha do outro jogador. Um **equilíbrio de Nash** é criado sempre que a escolha de um jogador for *ótima* dada a escolha do outro jogador. Note que um equilíbrio de estratégia dominante também é um equilíbrio de Nash mas não necessariamente o contrário.

No exemplo acima, o quadrante "esquerda e alto" é um equilíbrio de Nash. Uma vez que seja revelado aos participantes que eles estão nesse quadrante, nenhum deles terá o incentivo em mudar de estratégia. Para *A* jogar *Baixo* é pior, assim como para *B*, jogar *Direita* é pior.

Podemos reconstruir o modelo de Cournot usando essa mesma lógica. Na

verdade, o equilíbrio de Nash é a generalização do equilíbrio de Cournot². Voltaremos à essa afirmação um pouco mais pra frente.

Mas nem tudo são flores. O conceito do equilíbrio de Nash possui algumas dificuldades. No jogo que usamos como exemplo, podemos ver que o quadrante *Baixo* e *Direita* também é um equilíbrio de Nash. Ou seja, podem haver múltiplos equilíbrios de Nash em um mesmo jogo.

Outra dificuldade é que existem jogos em que não existam nenhum equilíbrio de Nash sequer. Veja o jogo abaixo

		Jogador B	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Jogador A	<i>Alto</i>	0, 0	0, -1
	<i>Baixo</i>	1, 0	-1, 3

Nesse jogo, em todos os quadrante existirá o incentivo para algum jogador de mudar de estratégia. E também não existe nenhuma estratégia dominante.

29.3 Estratégias Mistas

Até agora, todos os jogos que vimos foram jogos de **estratégia pura**. Onde os jogadores definem um caminho e sempre agem do mesmo modo. De modo mais formal, podemos usar a definição dada no livro de pós-graduação do Varian (Microeconomic Analysis, 1993)³.

Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras: Um equilíbrio de Nash em estratégias puras é um par [das estratégias] (r^*, c^*) de modo que $u_r(r^*, c^*) \geq u_r(r, c^*)$ para qualquer estratégias nas linhas r , e similarmente, $u_c(r^*, c^*) \geq u_c(r^*, c)$ para qualquer estratégias nas colunas c .

Mas podemos ampliar nossa forma de pensar e permitir que os jogadores atribuam probabilidades para cada escolha e possam mudar de estratégia ao longo do tempo. Nesse modelo, um jogador pode ficar 50% do tempo em uma estratégia e mudar de estratégia nos outros 50% do tempo. Auferindo o retorno de ambas multiplicado pela probabilidade associada a ela. Esse modelo é chamado de **estratégia mista**.

No nosso jogo em questão, se cada jogador tiver a probabilidade de 50% para cada estratégia, terão como retorno 1/4 do valor resultante de cada quadrante. Ou seja, o jogado *A* teria um total de 0, enquanto o jogado *B* terminaria o jogo com 1/2.

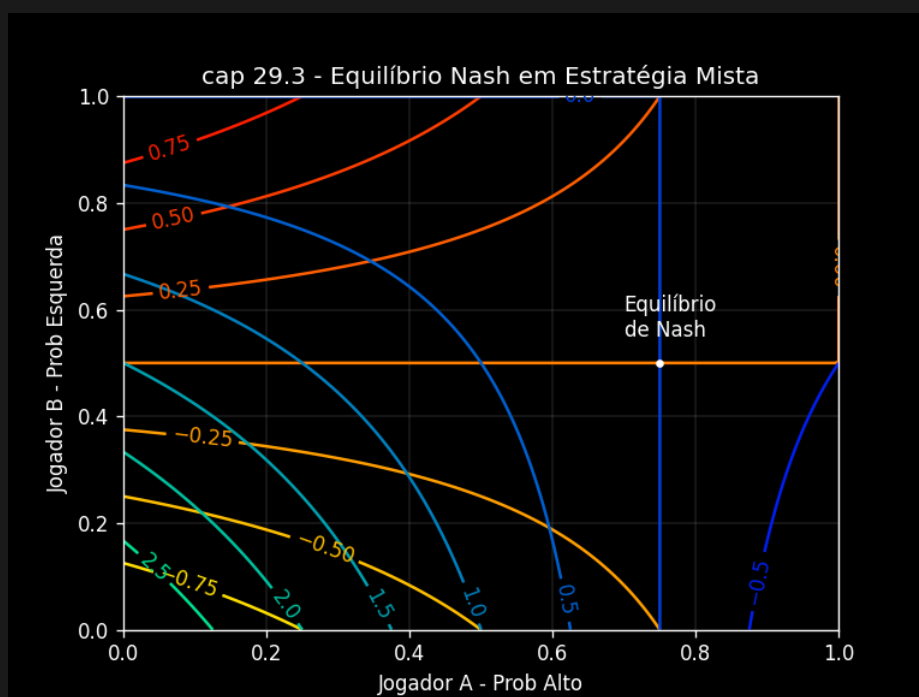
²Eu sei, mindblowing.

³Só para vocês irem se animando para o mestrado.

O equilíbrio de Nash em estratégias mistas é o equilíbrio na **escolhas das probabilidades** de cada agente. Ou seja, ao invés de escolher entre uma ou outra, ele escolherá quantos por cento de cada estratégia será utilizado.

No livro, o professor afirma que pode ser mostrado que, se o jogador *A* escolhe $3/4$ de alto e $1/4$ de baixo enquanto *B* jogar $1/2$ para esquerda e direita, teremos um equilíbrio de Nash. Pois bem, vamos mostrar isso.

Vamos pegar esse jogo e simular todos os retornos para cada escolha de probabilidades. Lembre-se que, se a probabilidade de *A* escolher *alto* for de 10%, então, *baixo* terá obrigatoriamente de ter a probabilidade igual a 90%. Os retornos de *A* são essa escala avermelhada enquanto os retornos de *B* são a escala azulada.



Como o professor afirma no livro. O ponto do equilíbrio de Nash acontece onde *B* escolhe 50% para cada e *A* escolhe 75% para *alto* e 25% para *baixo*. Quando *B* escolhe esse ponto, todos os retornos de *A* se tornam constantes (veja que a linha de *A* é uma reta horizontal nesse ponto). Similarmente, quando *A* escolhe esse ponto, todos os retornos de *B* se tornam constantes. Como nenhum deles tem nenhum incentivo em mudar de estratégia nesse equilíbrio, temos um equilíbrio de Nash para estratégias mistas.⁴

⁴Eu sei, lindo demais, né?!

Comentário: Aqui o professor coloca um exemplo muito bom sobre a relação entre teoria dos jogos e o jogo de pedra, papel e tesoura. Vale a pena a leitura.

29.4 O Dilema do Prisioneiro

Um dos conceitos mais conhecidos na economia é o dilema do prisioneiro. Chegou a sua hora de conhecê-lo. Primeiro, considere o jogo abaixo

		Jogador B	
		<i>Confessa</i>	<i>Nega</i>
Jogador A	<i>Confessa</i>	-3, -3	0, -6
	<i>Nega</i>	-6, 0	-1, -1

A essa altura você já notou que esse jogo possui uma estratégia dominante: confessar. Independente do que cada jogador faça, sempre vai ser melhor confessar. Mas aqui temos uma contradição. Se eles optassem por não seguir a estratégia dominante, acabariam em situação melhor.

Como a opção "nega-nega" não pode ser modificada sem prejuízo para alguma das partes, ela é eficiente no sentido de Pareto. Ou seja, estamos diante de um arranjo que impede que alcancemos o ótimo de Pareto do sistema.

Podemos adaptar esse dilema para várias outras situações da vida real. O professor cita uma adaptação para "instalar" ou "não instalar" um míssil. Também adapta esse jogo para a situação do cartel em que há as opções de "burlar" e "não burlar" as cotas de produção.

Como é de se esperar, o dilema do prisioneiro trouxe bastante discussão a respeito de como resolver esse jogo. Parece que a solução está relacionada à possibilidade ou não de repetição. Se o jogo é sem repetição, melhor será confessar. Pois essa é a estratégia dominante do arranjo.

29.5 Jogos Repetidos

Acabamos de falar sobre como a possibilidade de repetição pode modificar os resultados de um jogo. Dentro de um jogo repetido temos dois tipos: jogos de número fixo e jogos indefinidos.

Um jogo repetido pode permitir coordenações entre os jogadores. É possível "punir" um jogador que decida optar por um ponto egoísta e com isso, criar o incentivo à cooperação. No caso de um jogo com repetição fixa, é muito provável que os jogadores seguirão a estratégia dominante na última

rodada, visto que não serão punidos pela outra parte. Acontece que essa lógica é refletida nas outras rodadas. Se você já sabe que o jogador será egoísta na última rodada, o que impede de ele repetir esse ato na penúltima, e na antepenúltima e assim por diante? Se não houver uma garantia de cooperação na última rodada, a maior chance é que o jogo siga na estratégia dominante.

Esse padrão não é mantido em um jogo indefinido. Como sempre haverá uma oportunidade de punir os comportamentos não cooperativos, a tendência é que os jogadores sigam para o equilíbrio de Pareto.

Comentário: Não está demarcado como exemplo, mas na página 744 o professor cita como o pesquisador Robert Axelrod fez um torneio computacional com vários algoritmos de estratégias em uma simulação do dilema do prisioneiro. A estratégia que performou melhor foi a que usou o "olho por olho". Leia a passagem no livro.

29.6 Manutenção de um Cartel

Nessa seção revisitamos o problema da manutenção do cartel, mas sob a ótica da teoria dos jogos. Na prática, esse problema pode ser modelo em termos de um dilema do prisioneiro onde seguir as cotas é igual ao ponto de cooperação e vender a custo competitivo (o ponto de Bertrand) é o equivalente a confessar e, portanto, é o equivalente ao equilíbrio de Nash.

Comentário: Depois ele cita o caso do Comitê Executivo Conjunto, que era um cartel gigante nos EUA no final do século XIX. Logo após ele coloca outro exemplo aplicando a teoria dos jogos ao problema de formação de preços das passagens aéreas. Vá ler o livro.

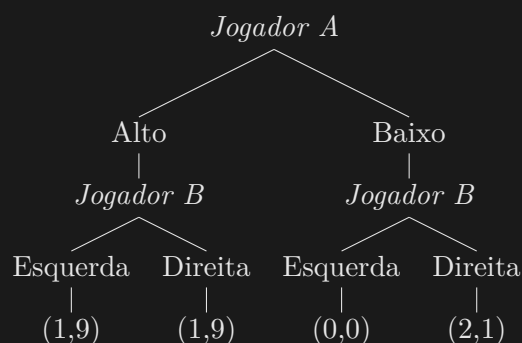
29.7 Jogos Sequenciais

Lá no capítulo do oligopólio nós vimos outros arranjos além dos jogos simultâneos. O modelo de Stackelberg é um exemplo de um jogo onde as ações são alternadas entre os jogadores. Nesses casos, além da matriz de ganhos, nós podemos usar a **forma extensiva do jogo** para ilustrar as etapas de escolhas e os devidos retornos de cada uma delas.

Observe o jogo abaixo

		Jogador B	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Jogador A	<i>Alto</i>	1, 9	1, 9
	<i>Baixo</i>	0, 0	2, 1

Se pensarmos nesse jogos como um jogo sequencial onde A toma a primeira ação, podemos demonstrar o processo de decisão por meio do diagrama de árvore abaixo⁵



Em uma primeira olhada na matriz de ganhos, poderíamos pensar que o jogo tínhamos dois equilíbrios de Nash. Mas quando colocamos o diagrama de árvore (ou a forma extensiva) podemos ver que o jogador A tem como estratégia escolher *baixo*, pois assim, terá o retorno de 2 ao invés de 1. O jogador B só tem a opção de escolher dentro das opções de *baixo*, o que lhe sobra é a opção *direita*.

Mas B poderia pensar em maneiras de obrigar o jogador A a escolher *alto*. Se B ameaçar uma retaliação e escolher *esquerda*, ambos terminariam com 0. Contudo, A só levaria a sério essa ameaça se houvesse forte indício de cumprimento. Uma maneira seria sinalizar por meio de um terceiro que se compromettesse a agir em desfavor dos dois caso o jogador A optasse por *baixo*. Ou seja, se B conseguir limitar seu escopo de atuação, é possível que a estratégia de A seja modificada porque a matriz de ganhos seria modificada também.

29.8 Um jogo com Barreiras à Entrada

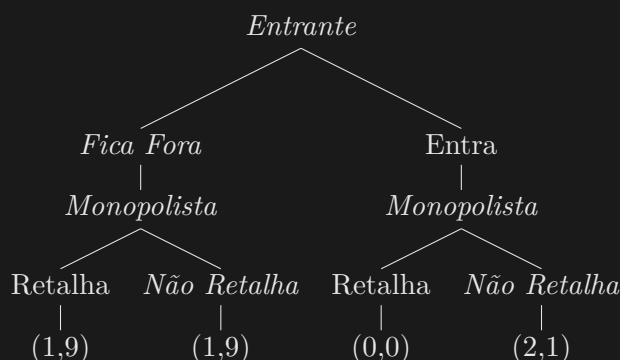
Voltemos no problema da entrada de concorrentes em um mercado monopolizado. Nós vimos que o monopolista possui o poder de retalhar devido a escala mínima de eficiência (EME) e do controle do mercado. Quando uma empresa pondera em entrar no mercado, ela precisa contar com as possíveis consequências por conta do monopolista e, da mesma maneira, o monopolista precisa ponderar se valerá a pena baixar os preços para evitar o concorrente.

Podemos exemplificar essa questão com a matriz abaixo

⁵Eu sei, eu sei. No livro está na horizontal. Mas o que importa é o conteúdo.

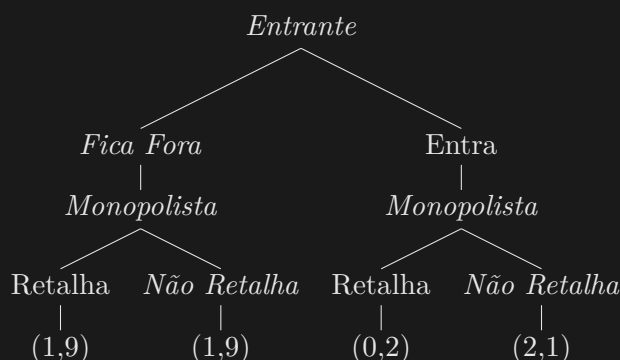
		Monopolista	
		<i>Retalha</i>	<i>Não Retalha</i>
Entrante	<i>Entra</i>	0, 0	2, 1
	<i>Fica Fora</i>	1, 9	1, 9

A primeira vista, temos dois equilíbrios de Nash. Mas esse também é um exemplo de um jogo sequenciado. Quem tem o poder de liderança é a empresa entrante.



Como podemos ver, a condição de entrada ou não é baseada na promessa de haver ou não retaliação. Esse esquema é igual ao que acabamos de ver na última seção. A estratégia da entrante é optar por concorrer no mercado. O que o monopolista fará? Bom, não existe maneira garantida do monopolista vincular a entrada do novo concorrente com a retaliação. Uma vez que o novo competidor se instalou, não é racional baixar os preços e abrir mão do lucro.

Agora, se o monopolista conseguir modificar sua matriz de ganhos (por meio de investimento na capacidade produtiva) de modo a obter lucro mesmo na retaliação, o cenário será outro. Se a árvore de decisão fosse igual a



Seria mais compensador ao monopolista lutar pelo seu mercado do que se acovardar. Nesse novo arranjo, o melhor a fazer é ficar de fora do mercado. O interessante é que o investimento feito na capacidade produtiva ficará ocioso, mas ainda assim, para o monopolista é vantajoso ter essa capacidade de barganha oriunda do excesso de capacidade produtiva.

Aplicações da Teoria dos Jogos

Ainda nos atermos à teoria dos jogos nesse capítulo. Aqui vamos aprender um ferramental novo para analisar os equilíbrios dos jogos, bem como veremos alguns modelos mais avançados de jogos.

30.1 Curvas de Melhor Resposta

Analise o jogo abaixo

		Coluna	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Linha	<i>Alto</i>	2, 1	0, 0
	<i>Baixo</i>	0, 0	1, 2

Podemos ver que não temos uma estratégia dominante, mas temos dois equilíbrios de Nash. Chamaremos de **melhor resposta** àquelas escolhas que os jogadores fizerem que maximizem seus retornos. Se existirem mais de uma escolhas maximizadoras, então a melhor resposta será um conjunto desses escolhas.

Agora vamos formalizar um pouco mais essas ideias. Seja um jogo com dois jogadores. O jogador linha terá l_1, l_2, \dots, l_L escolhas, similarmente, o jogador coluna terá c_1, c_2, \dots, c_C opções de escolhas.

Para cada escolha l feita, chamaremos de $b_c(l)$ a melhor escolha para coluna dada a escolha de linha. Da mesma maneira, chamaremos $b_l(c)$ a melhor escolha para linha. Um equilíbrio de Nash será o par de estratégias (l^*, c^*) tal que

$$c^* = b_c(l^*)$$

$$l^* = b_l(c^*)$$

Eu já tinha adiantado a formalização lá no ponto 29.3. Mas não custa nada repetir o conceito. Veja com o equilíbrio de Nash é consistente. É um arranjo cuja estratégia de um é precisamente dependente da estratégia do outro, de modo a manter esse ciclo de reforço mútuo.

Já vimos situações onde algum jogador pode ser indiferente ao retorno dada alguma escolha do outro jogador. É o caso onde só é benéfico para um deles, enquanto o outro terá o mesmo resultado independente da escolha. Mas isso não é um problema, os pontos c^* e l^* só precisar ser uma das melhores respostas.¹ Se existir apenas uma melhor resposta, então poderemos representar o equilíbrio por meio de uma **função de melhor resposta**.

Os equilíbrios de Cournot e Bertrand são exemplos de jogos com equilíbrios de Nash. No "jogos" de definir a quantidade e o preço, as empresas acabam adotando a posição de produzir nos pontos de maximização de lucro, em função do que esperam que suas concorrentes irão fazer. Isso as leva a produzir exatamente no ponto onde as curvas de reação se encontram e o equilíbrio é reforçado.

30.2 Estratégias Mistas

Voltaremos ao jogo da seção anterior

		Coluna	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Linha	<i>Alto</i>	2, 1	0, 0
	<i>Baixo</i>	0, 0	1, 2

Mas dessa vez, nosso interesse é no equilíbrio de estratégias mistas e, também, nos de estratégias puras. Já aprendemos que uma estratégia mista consiste na escolha das probabilidades para cada ação, de modo a obter os retornos proporcionais à cada probabilidade atribuída. Os jogos de estratégia pura podem ser explicados pelo mesmo modelo, só que com probabilidades iguais aos extremos (0% e 100%).

Primeiro vamos equacionar os retornos em termos das probabilidades de cada escolha. As probabilidades do jogador *linha* serão: l para *alto* e $(1 - l)$ para *baixo*. Do mesmo modo, para o jogador *coluna* teremos: c

¹É o caso dos jogos com mais de um equilíbrio do Nash

para *esquerda* e $(1 - c)$ para *direita*.

As probabilidades e os ganhos para o jogador *linha* para cada combinação serão:

		Coluna	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Linha	<i>Alto</i>	$lc = 2$	$l(1 - c) = 0$
	<i>Baixo</i>	$(1 - l)c = 0$	$(1 - l)(1 - c) = 1$

O resultado do jogador *linha* é obtido pela soma de cada probabilidades ponderada pelo retorno em cada quadrante. No caso da linha *alto* temos

$$\begin{aligned}
 \text{ganhos linha} &= 2lc + 0(l(1 - c)) + 0((1 - l)c) + (1 - l)(1 - c) \\
 &= 2lc + (1 - l)(1 - c) \\
 &= 2lc + 1 - l - c + lc
 \end{aligned}$$

Chegamos em um lugar bem interessante, temos uma função que relaciona as probabilidades de cada estratégia (l , $(1 - l)$, c e $(1 - c)$) a cada nível de retorno para o jogador *linha*. Podemos ver o quanto uma variação na probabilidade que ele tem controle Δl pode trazer de retorno

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\text{ganhos linha})}{dl} &= 2c - 1 + c \\
 &= 3c - 1
 \end{aligned}$$

Com esse resultado, podemos ver que, se $c > 1/3$ qualquer aumento em l gerará um resultado positivo. Por outro lado, se $c < 1/3$ qualquer valor de l positivo terá um retorno negativo (nesse caso, ele escolhe não jogar *alto*). Por fim, se $c = 1/3$, não importa o que o jogador *linha* faça, seus retornos serão constantes.

De maneira análoga, podemos ver que as probabilidades e os ganhos do jogador *coluna* são iguais a

		Coluna	
		<i>Esquerda</i>	<i>Direita</i>
Linha	<i>Alto</i>	$lc = 1$	$l(1 - c) = 0$
	<i>Baixo</i>	$(1 - l)c = 0$	$(1 - l)(1 - c) = 2$

Fazendo a mesma análise a partir desses valores, podemos ver que

$$\begin{aligned}
 \text{ganhos coluna} &= lc + 0(l(1 - c)) + 0((1 - l)c) + 2(1 - l)(1 - c) \\
 &= lc + 2(1 - l)(1 - c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= lc + 2(1 - l - c + lc) \\
 &= lc + 2 - 2l - 2c + 2lc \\
 &= 3lc + 2 - 2l - 2c
 \end{aligned}$$

Cuja derivada em relação à c será

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\text{ganhos coluna})}{dc} &= \\
 &= 3l - 2
 \end{aligned}$$

Podemos concluir que, quando $l < 2/3$, qualquer ação de c levará a uma redução no seu resultado (esse é o caso onde é melhor não fazer nada de *esquerda*). Se $l > 2/3$, qualquer aumento de c elevará o seu resultado. Finalmente, se $l = 2/3$, qualquer valor de c terá retornos constantes.

Com base nessas informações, podemos construir as curvas de melhor resposta no gráfico abaixo.



Podemos ver que temos 3 equilíbrios de Nash. Dois em estratégias puras: o ponto $(0,0)$ e o ponto $(1,1)$. E também um equilíbrio em estratégia mista: o ponto $(2/3, 1/3)$.

30.3 Jogos de Coordenação

De posse das curvas de melhor resposta, vamos começar a investigar algumas classes de jogos. A primeira que veremos são os **jogos de coordenação**. Que são jogos onde os ganhos serão maiores se os jogadores decidirem coordenar suas estratégias. A questão é criar os mecanismos que criem os incentivos à essa coordenação.

30.3.1 A Batalha dos Sexos

Imagine que temos dois jovens enamorados. Ambos marcaram que iriam se encontrar no cinema, mas estão sem celular² e não sabem qual filme o outro verá. O rapaz prefere o filme de ação enquanto a moça prefere o filme de arte. Ambos preferem assistir a algum filme juntos do que não se encontrarem. Podemos traduzir essa estrutura em uma matriz de ganhos

		Moça	
		Ação	Arte
Rapaz	Ação	2, 1	0, 0
	Arte	0, 0	1, 2

Já sabemos que essa matriz produz as curvas de melhor resposta vistas na seção passada. Então esse jogo tem 3 equilíbrios. Nos dois equilíbrios de estratégia pura, teremos as opções: Ambos arriscam se encontrar no filme de Ação, Ambos arriscam se encontrar no filme de Artes. No equilíbrio de estratégia mista, cada um arriscaria no seu filme preferido com $2/3$ de probabilidade³.

Da maneira como está descrito, não tem como a gente saber o resultado dessa história. Se supormos que o rapaz tenha o histórico de ceder as decisões para a moça⁴, podemos definir que esse jogo teria um equilíbrio "mais natural" que os outros. O termo comumente usado para essa diferenciação dos equilíbrios é **ponto focal** do jogo.

30.3.2 O Dilema do Prisioneiro

Esse você já deve estar enjoado de ver. Mas agora temos as curvas de melhor resposta para ajudar na nossa análise⁵. Sabemos que a estratégia dominante é confessar. Mas também sabemos que a estratégia eficiente no sentido de Pareto é negar.

²O do rapaz foi roubado e o da moça está sem bateria.

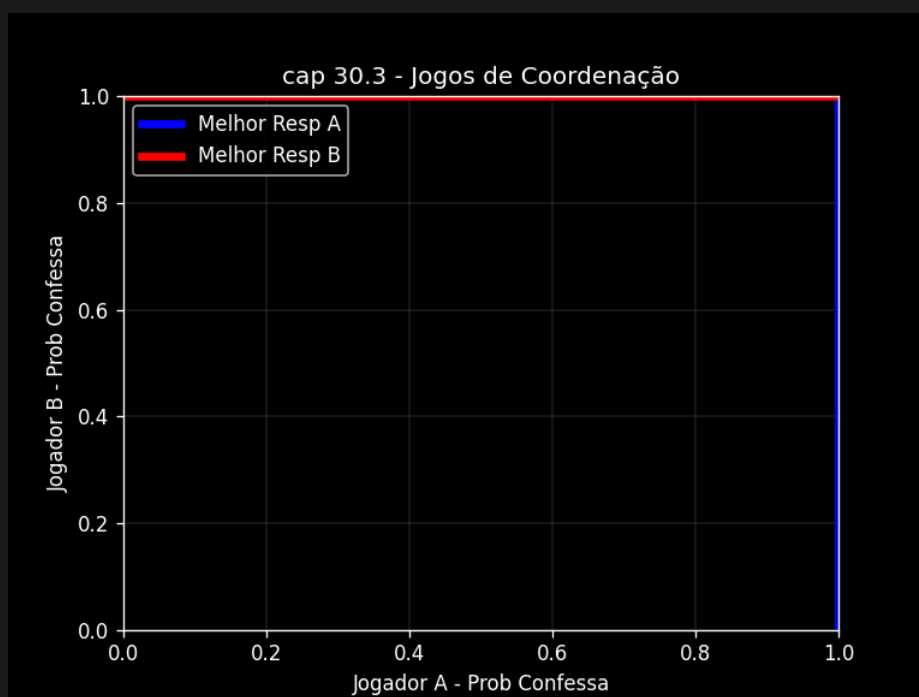
³Outra maneira é pensar que cada um ficaria $2/3$ do tempo na entrada do seu filme preferido

⁴Uma hipótese não muito rara na realidade.

⁵Não que isso vá mudar as conclusões que já temos.

		Jogador B	
		<i>Confessa</i>	<i>Nega</i>
Jogador A	<i>Confessa</i>	-3, -3	0, -6
	<i>Nega</i>	-6, 0	-1, -1

Quando modelamos as funções de melhor resposta. Como já sabemos, a única estratégia de equilíbrio é no ponto "confessa-confessa". No resto da seção não tem muita informação nova. Mas você tem que ler.



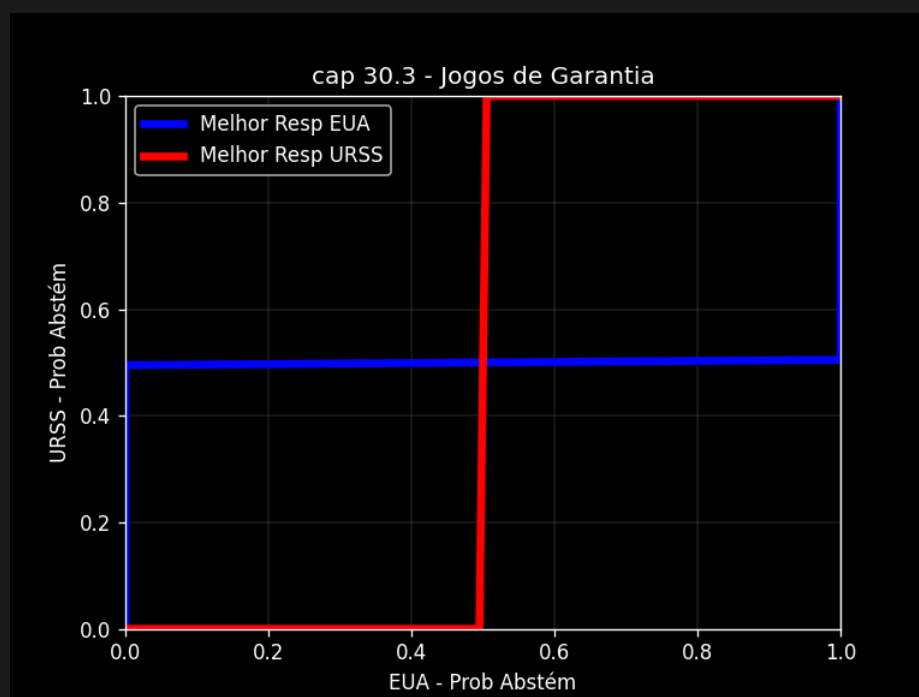
30.3.3 Jogos de Garantia

Uma coisa bacana da teoria dos jogos, é que podemos aplicar para uma gama enorme de contextos. Pensemos na corrida amarmentista de meados do século XX. Todo mundo sabe que o melhor era optar por não construir mais mísseis nucleares. Mas o custo de ser surpreendido por uma trapaça do outro lado⁶. Podemos resumir esse cenário na tabela abaixo

		URSS	
		<i>Abstém</i>	<i>Constrói</i>
EUA	<i>Abstém</i>	4, 4	1, 3
	<i>Constrói</i>	3, 1	2, 2

O gráfico das curvas de melhor resposta é esse aqui.

⁶"Malditos comunistas!", diriam eles.



Vemos que, como esse jogo é simultâneo, não temos uma estratégia mista. Nesse caso, só temos os pontos de equilíbrio nos extremos. Se um dos participantes conseguir convencer o outro que se abstém, ele "empurrará" o outro jogador para o ponto de equilíbrio da abstenção. A questão toda era como sinalizar de maneira eficiente para o outro jogador e ainda não parecer que está desistindo da corrida.

30.3.4 Roleta Russa

Antigamente, era comum ver, nos filmes de adolescentes americanos⁷, uma prática chamada "roleta russa" que consistia em dois veículos um de frente para o outro à uma distância considerável. Os veículos aceleravam em direção ao outro. A ideia é que o motorista mais corajoso não desviaria a trajetória⁸. A matriz de ganhos pode ser definida como

		Coluna	
		<i>Desvia</i>	<i>Mantém</i>
Linha	<i>Desvia</i>	0, 0	-1, 1
	<i>Mantém</i>	1, -1	-2, -2

Diferente dos outros jogos, aqui os equilíbrios são nas opções contrárias. Os

⁷Nesse link tem uma versão um pouco diferente do jogo, mas a lógica é a mesma. (Embora o carinha tenha roubado ao pular do carro).

⁸A um lista de microeconomia pra essa garotada arranjar o que fazer!

equilíbrios de Nash de estratégia pura estão nas opções onde eles seguem ações diferentes.



Como encontrar um resultado? Bom, a melhor maneira de encontrar um desfecho é pela sinalização de compromisso. Se um dos competidores arrancasse fora o volante, ele jogaria para o outro motorista toda a responsabilidade pelo resultado. Nesse caso, a matriz seria atualizada e seria melhor para o outro motorista sair derrotado do que bater o carro.

30.3.5 Como Coordenar?

Essa seção é bem pequeninha. Vá ler o original. Mas um resumo é que podemos modificar os resultados pela adoção de movimentos sequenciados, repetição ou contratação.

Quando modificamos os jogos da segurança, batalha dos sexos e roleta russa, para jogos sequenciados. Quando um jogador faz o primeiro movimento, o outro terá que maximizar apenas a partir do movimento feito. No caso da roleta russa, isso daria a vitória a um delas. Nos outros jogos, isso levaria ao ponto eficiente de Pareto.

No caso do dilema do prisioneiro, o melhor a fazer seria modificar o jogo para repetição (que permitiria a retaliação por mal comportamento) ou a contratação (que modificaria o resultado da confissão).

30.4 Jogos de Competição

30.5 Jogos de Coexistência

30.6 Jogos de Compromisso

30.7 Negociação

Parte V

Tópicos Avançados

31

Economia Comportamental

32

Trocas

33

Produção

34

O Bem-Estar

35

Externalidades

36

Tecnologia da Informação

37

Bens Públicos

38

Informação Assimétrica