

# **Book of Proof**

Third Edition

by Richard Hammack

RESUMO E ADAPTAÇÃO POR:  
BRUNO DE M. RUAS e  
LUIZ EDUARDO DE LIMA

26 de dezembro de 2022

# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Fundamentos</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Conjuntos</b>	<b>2</b>
1.1	Introdução . . . . .	2
1.2	Produto Cartesiano . . . . .	4
1.3	Subconjuntos . . . . .	6
1.4	Conjunto de Partes . . . . .	6
1.5	União, Intersecção e Diferença . . . . .	7
1.6	Complemento . . . . .	7
1.7	Diagramas de Venn . . . . .	7
1.8	Conjuntos Indexados . . . . .	8
1.9	Conjuntos que são Sistemas Numéricos . . . . .	8
1.10	O Paradoxo de Russell . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Lógica</b>	<b>11</b>
2.1	Proposições . . . . .	11
2.2	Operadores: e, ou, não . . . . .	12
2.3	Proposições Condicionais . . . . .	13
2.4	Proposições Bicondicionais . . . . .	14
2.5	Tabelas-Verdade para Proposições . . . . .	14
2.6	Equivalência Lógica . . . . .	15
2.7	Quantificadores . . . . .	17
2.8	Um pouco mais de Proposições Condicionais . . . . .	18
2.9	Traduzindo Português para Lógica Simbólica . . . . .	19
2.10	Negando Proposições . . . . .	20
2.11	Inferência Lógica . . . . .	21
2.12	Nota Importante . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Contagem</b>	<b>25</b>
3.1	Listas . . . . .	25
3.2	O Princípio da Multiplicação . . . . .	26
3.3	Os Princípios da Adição e Subtração . . . . .	28
3.4	Fatoriais e Permutações . . . . .	29
3.5	Contando Subconjuntos . . . . .	31

3.6	O Triângulo de Pascal e O Teorema Binomial . . . . .	32
3.7	O Princípio da Inclusão-Exclusão . . . . .	38
3.8	Contando Multiconjuntos . . . . .	40
3.9	Os Princípios da Divisão e da Casa dos Pombos . . . . .	42
3.10	Prova Combinatorial . . . . .	43
<b>II</b>	<b>Como Provar Afirmações Condicionais</b>	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>Prova Direta</b>	<b>45</b>
4.1	Teoremas . . . . .	45
4.2	Definições . . . . .	46
4.3	Prova Direta . . . . .	47
4.4	Uso de casos . . . . .	47
4.5	Tratamento de Casos Semelhantes . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Prova Contra-positiva</b>	<b>49</b>
5.1	Prova Contrapositiva . . . . .	49
5.2	Congruência dos Inteiros . . . . .	49
5.3	A Escrita Matemática . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Prova por Contradição</b>	<b>52</b>
6.1	Provando Afirmações com Contradição . . . . .	52
6.2	Provando Afirmações Condicionais por Contradição . . . . .	53
6.3	Combinando Técnicas . . . . .	54
6.4	Uma Advertência . . . . .	54
<b>III</b>	<b>Mais Sobre Provas</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Prova de Afirmações Não-Condicionais</b>	<b>56</b>
7.1	Prova de Se, e somente se . . . . .	56
7.2	Afirmações equivalentes . . . . .	57
7.3	Provas de Existência; Provas de existência e unicidade . . . . .	57
7.4	Provas contrativas e não construtivas . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Provas Envolvendo Conjuntos</b>	<b>60</b>
8.1	Como provar que $a \in A$ . . . . .	60
8.2	Como provar que $A \subset B$ . . . . .	60
<b>9</b>	<b>Contraprova</b>	<b>62</b>
<b>10</b>	<b>Indução Matemática</b>	<b>63</b>

<i>CONTEÚDO</i>	iii
<b>IV Relações, Funções e Cardinalidade</b>	<b>64</b>
11 Relações	65
12 Funções	66
13 Provas com Cálculo Infinitesimal	67
14 Cardinalidade de Conjuntos	68

**Parte I**

**Fundamentos**

# 1

## Conjuntos

*“The theory of sets is a language that is perfectly suited to describing and explaining all types of mathematical structures.”*

– página 3

### Aviso ao Leitor

Bem-vindo ao início de uma jornada consideravelmente longa. Esse texto é um resumo (mais conciso e menos didático) do livro do professor Hammack. O objetivo desse presente manual é servir como material de construção dos fundamentos para auxílio dos estudantes que quiserem seguir o caminho proposto no **Projeto Matemática** do site **Economia Mainstream**. Além dessa série de aulas sobre matemática, o site ainda contém uma gama vasta de postagens nos mais variados temas da Economia enquanto ciência.

A leitura do material original é fortemente indicada e encorajada por parte dos que elaboraram o presente manual. Os exercícios contidos no livro, por outro lado, são obrigatórios. Você deve tentar resolver o máximo possível. Quaisquer dúvidas podem ser enviadas nos comentários do projeto no site citado acima.

### 1.1 Introdução

Um **conjunto** (set)<sup>1</sup> é uma lista de **elementos**. Normalmente denotados por uma letra maiúscula. Por exemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

---

<sup>1</sup>Nós vamos intercalar bastante o uso dos termos em português e inglês para que o leitor aprenda os termos em ambos os idiomas. Isso falcita muito na hora de pesquisar a respeito desses assuntos.

Dois sets  $A$  e  $B$  são ditos **iguais** se possuírem exatamente os mesmos elementos. Não importando a ordem desses elementos dentro de cada set. Ou seja, no mundo dos conjuntos,  $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ .

Vamos definir um símbolo (também chamado de token) para facilitar a comunicação quando um determinado elemento ( $x$ ) pertencer ou não a um determinado set qualquer ( $A$ ). Para tal relação usaremos o símbolo " $\in$ " se  $x$  for um elemento de  $A$  ou, caso contrário, usaremos " $\notin$ " se  $x$  não for um elemento de  $A$ .

É provável que, em algum momento, seja necessário contar a quantidade de elementos em um dado set qualquer  $A$ . Chamaremos essa relação de **cardinalidade** ou **tamanho** do set  $A$ . O símbolo usado será duas barras em volta do set do seguinte modo: " $|A|$ ".

A partir dessas duas relações já podemos definir um tipo especial de set.

Vamos definir como **conjunto vazio** ou **empty set** um conjunto que possua o cardinal igual a zero. Usaremos o símbolo " $\emptyset$ " para definir a relação a seguir:

$$|\emptyset| = 0$$

Em várias situações não vale a pena construir sets apenas com uma lista-exemplo de alguns dos seus elementos. Imagine um set de todos os números pares, por exemplo, ou um set de todos os números que começam com 3 e terminam com 4 ou qualquer outra regra mais específica. Para essas situações usamos a **notação de formação de conjuntos (set builder notation)**. Como no exemplo abaixo:

$$E = \{ 2n : n \in \mathbb{Z} \}^2$$

A matemática é uma linguagem que consegue dizer muita coisa com poucos símbolos. Ao longo desse curso, você será capaz de ler esses símbolos e compreender corretamente o que o autor quis dizer por meio deles.

Para facilitar essa primeira leitura, cada símbolo da expressão acima está com a cor correspondente da passagem a seguir: "O conjunto  $E$  é igual ao conjunto dos elementos da forma  $2n$  tal que  $n$  é um elemento do conjunto  $\mathbb{Z}$ ".

Podemos resumir esse tipo de notação de formação de conjuntos como "Conjunto = { Expressão : Regra }". É bem comum vermos notações onde os

---

<sup>2</sup>Aprender a ler a notação de formação de conjuntos é, basicamente, aprender a ler Matemática. Se esforce para entender sempre que usarmos essa técnica na hora de definir conjuntos. Para ajudar, eu vou colocar no rodapé a leitura em alguns casos.

dois pontos são trocados por uma barra: "Conjunto = { Expressão | Regra }". Nesse livro o autor preferiu a notação com dois pontos.

Existem alguns conjuntos que são famosos ao ponto de terem nomes e símbolos próprios.

$$\emptyset = \{\} \text{ Conjunto Vazio}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ Conjunto dos Naturais}^3$$









$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ Conjunto dos Inteiros}$$

$$\mathbb{Q} = \{x : x = m/n, \text{ onde } m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\} \text{ Conjunto dos Racionais}^4$$

$$\mathbb{R} = \begin{array}{c} \leftarrow -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \rightarrow \\ \hline \end{array} \text{ A Reta Real}$$

Como o conjunto dos número reais pode ser descrito como pontos em uma reta numérica infinita, se tivermos dois pontos quaisquer  $a$  e  $b$ , de modo que  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ , temos infinitos elementos entre esses dois pontos.

Por causa dessa propriedade, teremos que usar um novo símbolo para se referir aos conjuntos que são melhor descritos em termos de **intervalos** entre pontos. Abaixo colocamos uma coluna com uma representação gráfica e, ao lado, uma coluna com a respectiva definição por set builder notation.

Gráfico	Set Builder Notation
	$[-3, 3] = \{x : -3 \leq x \leq 3\}$
	$(-3, 3) = \{x : -3 < x < 3\}$
	$(-3, 3] = \{x : -3 < x \leq 3\}$
	$[-3, 3) = \{x : -3 \leq x < 3\}$
	$(-3, \infty) = \{x : -3 < x\}$
	$[-3, \infty) = \{x : -3 \leq x\}$
	$(\infty, 3) = \{x : x < 3\}$
	$(\infty, 3] = \{x : x \leq 3\}$

## 1.2 Produto Cartesiano

### Definição 1.2.1 (Par Ordenado)

Um **par ordenado** é uma lista<sup>5</sup> na forma  $(x, y)$  que contém dois elementos

<sup>3</sup>Perceba que, para o autor do livro,  $0 \notin \mathbb{N}$ . Usaremos  $\mathbb{N}^0$  para expressar os naturais com o elemento 0. Aqui tem um link para um video bacana sobre o assunto.

<sup>4</sup>Lê-se: O set dos Racionais é igual ao conjunto dos elementos  $x$  tal que todo elemento  $x$  é formado pela divisão de  $m$  por  $n$ , de modo que  $m$  e  $n$  são número inteiros e  $n$  não é zero.

<sup>5</sup>Nós definiremos uma lista no cap. 03



(nesse caso, um  $x$  e um  $y$ ). Onde esses dois elementos ficam entre parênteses e separados por uma vírgula.

Diferente dos conjuntos, a ordem dos elementos dos pares ordenados importa. Ou seja,  $(x, y) \neq (y, x)$ .

De posse dessa definição de par ordenado. Podemos escrever um novo conjunto usando esse conceito.

**Definição 1.2.2** (Produto Cartesiano)

O **produto cartesiano** de dois sets  $A$  e  $B$  é um outro set cujo símbolo é “ $A \times B$ ” e é definido como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}^6$$

Perceba que, se  $A$  e  $B$  são finitos, então  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . Isso é, o cardinal do produto cartesiano de dois sets é igual à multiplicação dos cardinais dos dois conjuntos.<sup>7</sup>

Podemos construir um produto cartesiano onde os conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais. Por exemplo:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

Podemos expandir o par ordenado para infinitos elementos. Para isso vamos criar um novo conceito a partir da generalização do conceito de par ordenado. Chamaremos de **n-upla** a coordenada de  $n$  elementos do modo  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Nesse conceito mais geral, um par ordenado nada mais é que uma n-upla cujo  $n = 2$ .

Para simplificar essa expressão onde temos um produto cartesiano de sets iguais, vamos criar um novo conceito que chamaremos de **Potência Cartesiana (Cartesian power)**. Desse modo, podemos definir o exemplo de “ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ” como simplesmente “ $\mathbb{R}^2$ ”. Mais genericamente, dizemos que, para qualquer set  $A$  e um  $n$  positivo, o cartesian power  $A^n$  será definir como:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in A\}^8$$

<sup>6</sup>Lê-se: O produto cartesiano dos conjuntos  $A$  e  $B$  é formado pelos pares ordenados  $(a, b)$  de modo que as primeiras coordenadas são elementos de  $A$  e as segundas são elementos de  $B$ .

<sup>7</sup>Ao longo da etapa de Fundamentos do Projeto Matemática, faremos várias afirmações sem a devida demonstração mas, a medida que você entrar no curso de Análise, não faremos afirmações sem as devidas provas.

<sup>8</sup>Lê-se: A potência cartesiana  $A^n$  é igual ao conjunto das n-uplas cujas  $n$  coordenadas são elementos do conjunto  $A$ .

### 1.3 Subconjuntos

Nós já aprendemos a relacionar elementos e conjuntos, agora, vamos definir um método de relacionar conjuntos entre si. A primeira ligação que vamos explorar é a que expressa a situação onde todos os elementos de um conjunto também são elementos de outro conjunto.

**Definição 1.3.1** (Subconjunto)

Suponha que existam dois sets  $A$  e  $B$ . Se todos os elementos de  $A$  também forem elementos de  $B$ , dizemos que  $A$  é um **subconjunto** (**subset**) de  $B$ . O símbolo usado para expressar essa relação é “ $\subseteq$ ”, ou seja,  $A \subseteq B$  quer dizer que  $A$  é subconjunto de  $B$ . Caso exista um elemento de  $A$  que não seja um elemento de  $B$ , então escrevemos que  $A \not\subseteq B$ .

**Atenção 1:** Uma consequência direta dessa definição de subconjunto é o fato que  $\emptyset \subseteq B$  para qualquer conjunto “ $B$ ”. A demonstração dessa afirmação é simples:

Suponha que exista algum conjunto  $Z$  onde  $\emptyset \not\subseteq Z$ . Isso significaria que existe algum  $x \in \emptyset$  que não é um elemento de  $Z$ , ou seja,  $x \notin Z$ . Mas, por definição,  $x \notin \emptyset$ , desse modo,  $\emptyset \subseteq Z$ .

**Atenção 2:** É trivial o fato que dado um conjunto qualquer  $A$ , todos os elementos de  $A$  pertencem a ele mesmo. Isso implica que  $A \subseteq A$ . Portanto, todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

**Atenção 3:** Como vimos antes:  $\emptyset \subseteq B$ , para qualquer set  $B$ . Acontece que também é verdadeiro o fato que  $\emptyset \subseteq \emptyset$ . Uma vez que, se  $\emptyset \not\subseteq \emptyset$  existiria algum  $x$  de modo que  $x \in \emptyset$  e  $x \notin \emptyset$ . O que é uma clara contradição.

### 1.4 Conjunto de Partes

**Definição 1.4.1** (Conjunto de Partes)

Dado um set qualquer  $B$ , o seu **conjunto de partes** ou **power set** será outro set escrito como  $\mathcal{P}(B)$  e definido como:

$$\mathcal{P}(B) = \{X : X \subseteq B\}$$

**Dica:** Tem bastante informação interessante no livro. Como esse aqui é só um resumo, não vamos entrar muito além da definição. Recomendamos a leitura do material original.

## 1.5 União, Intersecção e Diferença

Já vimos como podemos relacionar conjuntos por **produto cartesiano** para gerar outros conjuntos. Agora vamos expandir ainda mais nosso ferramental de operações entre conjuntos.

### Definição 1.5.1 (União)

Dados dois conjuntos  $F$  e  $G$ . A **união** entre eles será um novo set denotado por “ $F \cup G$ ” e definido como:

$$F \cup G = \{x : x \in F \text{ ou } x \in G\}$$

### Definição 1.5.2 (Intersecção)

Dados dois conjuntos  $F$  e  $G$ . A **intersecção** entre eles será um novo set denotado por “ $F \cap G$ ” e definido como:

$$F \cap G = \{x : x \in F \text{ e } x \in G\}$$

### Definição 1.5.3 (Diferença)

Dados dois conjuntos  $F$  e  $G$ . A **diferença** entre eles será um novo set denotado por “ $F - G$ ” e definido como:

$$F - G = \{x : x \in F \text{ e } x \notin G\}$$

**Dica:** Esses conceitos são muito importantes. Para o curso não ficar muito grande, vamos nos ater somente às definições. Em caso de dificuldade, busquem o material original.

## 1.6 Complemento

Quando lidamos com conjuntos é comum supor que há um conjunto maior que contém todos os outros. A esse set geral chamamos de **conjunto universo** ou **conjunto universal**.

### Definição 1.6.1 (Complemento)

Dado um conjunto qualquer  $H$  e o seu conjunto universo  $U$ . O **complemento** de  $H$  é um novo set denotado por “ $\overline{H}$ ” e definido por:

$$\overline{H} = U - H$$

## 1.7 Diagramas de Venn

Pulamos essa seção integralmente. Diagramas de Venn são ótimos pra se ter uma intuição sobre todos os conceitos que vimos até agora, entretanto, não são usados para provas matemáticas. Ainda assim vale a leitura do capítulo original.

## 1.8 Conjuntos Indexados

As vezes é necessário trabalhar com uma quantidade consideravelmente grande de conjuntos. Para esses casos, usamos uma técnica de simplificação que é adicionar um índice numérico subscrito à alguma letra maiúscula. Desse modo, ao invés de trabalharmos com sets  $A$ ,  $B$  e  $C$ , podemos trabalhar com os sets  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ .

Podemos relacionar esses subscritos à um outro set. O nome dado a esse set é **conjunto índice (index set)**. Nos exemplos acima, podemos dizer que todos os subscritos pertencem ao conjunto  $\{1, 2, 3\}$ .

Agora podemos adicionar essa técnica às relações de união e intersecção entre esses conjuntos indexados para um numero arbitrariamente grande. Além disso, vamos usar uma notação similar a do somatório<sup>9</sup> para definir essas relações.

**Definição 1.8.1** (União de Sets Indexados)

Dados os conjuntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  e o index set  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , temos que

$$\bigcup_{i \in I} = \{x : x \in A_i \text{ para algum } A_i, \text{ onde } i \in I\}$$

**Definição 1.8.2** (Intersecção de Sets Indexados)

Dados os conjuntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  e o index set  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , temos que

$$\bigcap_{i \in I} = \{x : x \in A_i \text{ para todo } A_i, \text{ onde } i \in I\}$$

O livro tem dois exemplos bem interessantes da aplicação dos conceitos que acabamos de definir. A essa altura você deve conseguir entender os dois.

## 1.9 Conjuntos que são Sistemas Numéricos

A maioria dos conjuntos que trabalhamos são conjuntos que possuem estruturas e propriedades especiais. No caso dos conjuntos numéricos tomamos como certo que os seus elementos podem ser somados, multiplicados e possuem relações que obedecem as regras que passamos todo o ensino infantil, fundamental e médio aprendendo e aplicando.

Como esse livro é introdutório, todas essas características clássicas dos sistemas numéricos serão tomadas como verdade. Nos materiais mais avançados

---

<sup>9</sup>Link para uma aula sobre a notação Sigma.

todas essas relações que achamos ser naturais possuem comprovações bastante complexas que você pode procurar por conta própria.

Aqui o autor elenca algumas propriedades que tomaremos como verdades sem que sejam devidamente definidas e demonstradas:

- Propriedade Comutativa/Associativa/Distributiva para:
  - Adição
  - Subtração
  - Multiplicação
  - Divisão
- Ordenação Natural dos elementos numéricos de  $\mathbb{R}$
- Os subconjuntos de  $\mathbb{N}$  obedecem ao Princípio da Boa Ordenação.

**Comentário:** Agora a gente vai adentrar um pouco nas propriedades que podemos derivar desses pressupostos acima. Pode parecer que é um papo chato mas a sua missão é se certificar que você é capaz de compreender toda a explicação. Vença a preguiça.

Uma conclusão que podemos tirar do princípio da boa ordenação é que dado um conjunto não nulo qualquer  $A \subseteq \mathbb{N}$  sempre vai haver um  $x_0 \in A$  que seja o seu **menor elemento**. De modo parecido, para qualquer  $b \in \mathbb{Z}$ , qualquer conjunto não nulo  $A \subseteq \{b, b+1, b+2, b+3, \dots\}$  também possui um **menor elemento**.

**Fato 1.9.1** (Division Algorithm)

Dados dois inteiros  $a$  e  $b$ , onde  $b > 0$ . Existem outros dois inteiros únicos  $q$  e  $r$  para qual  $a = qb + r$  e  $0 \leq r < b$ .

Agora o autor demonstra a existência de  $r$  e  $q$  com suas propriedades. Mas a gente pretende estender a prova para a unicidade<sup>10</sup> desses valores.

**Demonstração 1.9.1** (Division Algorithm - Existência de  $r$  e  $q$ )

Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $b > 0$ , é possível criar um set do tipo:

$$A = \{a - xb : x \in \mathbb{Z}, 0 \leq a - xb\} \subseteq \mathbb{N}^0$$

Desse modo,  $A \subseteq \mathbb{N}^0$ . Por causa disso, podemos aplicar o princípio da boa ordenação em  $A$  e dizer que existe algum elemento  $r$  que seja o menor elemento de  $A$ .

---

<sup>10</sup>Um esboço de demonstração pode ser achado em JOHNSTON, William; MCALLISTER, Alex. A transition to advanced mathematics: a survey course. OUP USA, 2009. p. 97.

Como  $r \in A$  ele pode ser escrito da forma  $r = a - qb$  onde  $x = q \in \mathbb{Z}$ . Desse fato podemos tirar duas informações úteis: 1)  $a = r + qb$  e 2) Como  $r \in \mathbb{N}^0$ , então  $r \geq 0$ .

Agora só nos resta provar que  $r < b$  mas para isso, vamos usar o pensamento contrário: O que aconteceria se  $r \geq b$ ?

Ora, se  $r \geq b$ , então a subtração  $r - b$  será um número positivo, portanto será também um elemento de  $\mathbb{N}^0$ . Podemos reescrever essa subtração como  $r - b = (a - qb) - b = a - (q + 1)b$ .

Mas veja só que estranho,  $q + 1$  certamente será um elemento de  $\mathbb{Z}$ . Logo, o número expresso por  $a - (q + 1)b$  também será um elemento de  $A$  (nesse caso,  $(q + 1)$  é o  $x$ ). Portanto, não é possível que  $r$  seja o seu menor elemento visto que  $r - b$  também é um elemento de  $A$  e é menor que  $r$ . Isso é uma clara contradição. Isso é justamente isso que queríamos mostrar: Quando tomamos  $r \geq b$  acabamos com uma contradição<sup>11</sup>, portanto, só podemos aceitar o oposto, ou seja, sabemos que  $r < b$ . Com isso finalizamos a demonstração da existência de  $r$  e  $q$ . ■<sup>12</sup>

## 1.10 O Paradoxo de Russell

Até agora trabalhamos a distinção entre "elementos" e "conjuntos". Mas, na verdade, qualquer número (ou seja, elemento de sets numéricos) pode, sim, ser interpretado como um conjunto.<sup>13</sup> Até mesmos as operações matemáticas podem ser definidas usando-se teoria dos conjuntos. O Autor vai até mais longe "Qualquer entidade matemática é um conjunto, mesmo que não escolhamos pensar desse modo".

Essa parte do paradoxo de Russell não serve pro resto do livro mas é bem legal de saber. O que Bertrand Russell propôs foi o seguinte conjunto:

$$A = \{X : X \text{ é um set e } X \notin X\}^{14}$$

E perguntou: "O conjunto  $A$  é um elemento de si mesmo?".

Se você quiser entender um pouco mais, confira esse link ou esse link, ou ainda esse último link.

**Dica:** No livro, professor explica bem melhor sobre o paradoxo.

<sup>11</sup>O nome dessa técnica é prova por contradição. Falaremos dela mais pra frente no curso.

<sup>12</sup>Esse quadrado preto é usado para pontuar o final de uma demonstração.

<sup>13</sup>Existe um mundo de teoria sobre conjuntos, nós não temos tempo pra entrar muito fundo nessa questão. Então vá atrás de livros sobre teoria dos conjuntos e seja feliz.

<sup>14</sup>Ou seja,  $A$  é formado por todos os conjuntos que não possuem a si mesmo como elemento.

## 2

# Lógica

*“Logic is a systematic way of thinking that allow us to parse the meanings of sentences and to deduce new information from old information. [...] Logic is a process of deducing information correctly, not just deducing correct information”*

– página 34

### 2.1 Proposições

Uma **proposição** é uma sentença, que pode ser escrita ou uma expressão matemática, que seja definitivamente verdadeira ou falsa. Em cima dessas proposições é que aplicamos a lógica para produção de novas proposições. Qualquer resultado ou teorema provado é, na verdade, uma proposição<sup>1</sup>. O estudo da lógica começa a partir das proposições.

**Comentário:** Ao longo desse capítulo a palavra "proposição" vai ser repetida muitas vezes. Essa repetição é proposital. Queremos que você internalize a importância desse conceito para a análise matemática.

Podemos usar letras para nomear proposições. Por exemplo, a proposição "Se um número  $x$  é múltiplo de 6, então  $x$  é par" pode ser resumida em uma letra. Nesse caso diremos que " $P$ " é a proposição acima. Dessa feita, sempre que dissermos  $P$  é falso ou  $P$  é verdadeiro, estamos nos referindo a proposição completa.

Quando uma proposição possuir variáveis, podemos escreve-la de uma maneira similar às funções. No exemplo do parágrafo acima, podemos usar o símbolo  $P(x)$  para expressar que a proposição  $P$  possui uma variável  $x$

---

<sup>1</sup>Isso inclui o teorema de Pitágoras, por exemplo.

dentro dela.<sup>2</sup>

Uma **sentença aberta** é uma proposição cuja validade depende da sua variável. Ou seja, dependendo do valor que você der para a variável, a proposição pode ser verdadeira ou falsa.

O livro que estamos estudando aqui trata, basicamente, sobre o método de como se provar que uma proposição é verdadeira ou falsa. Existem estratégias de raciocínio que podem ser usadas para demonstrar proposições e, conseqüentemente, teoremas complexos. Nosso objetivo nesse curso é lhe ensinar essas técnicas.

## 2.2 Operadores: e, ou, não

Até agora foi dito que você pode usar proposições junto à lógica para se chegar a outras proposições. Então vamos aprender como trabalhar com mais de uma proposição por meio dos **operadores lógicos**.

O primeiro operador que vamos aprender é o "e". Dadas as proposições  $P$  e  $Q$ . Podemos criar uma nova proposição através desse operador. Quando escrevemos " $R : P \text{ e } Q$ ", estamos criando uma nova proposição  $R$  que é composta de das duas proposições  $P$  e  $Q$ . O símbolo usado para esse conectivo é o " $\wedge$ ". Aqui em baixo vamos colocar a tabela verdade<sup>3</sup> desse operador<sup>4</sup>.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Outro operador lógico clássico é o "ou". O símbolo dele é o " $\vee$ ". Eu sei, parece muito com o símbolo do "e" mas a gente não pode fazer nada a não ser decorar<sup>5</sup> bem a distinção entre esses dois símbolos. A tabela-verdade do "ou" segue abaixo.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

<sup>2</sup>Fique atento para não confundir quando estivermos nos referindo a funções e proposições.

<sup>3</sup>Se você não sabe o que são tabelas-verdades então dá uma lida nesse link.

<sup>4</sup>"V" significa Verdadeiro e "F" significa Falso.

<sup>5</sup>Uma dica é usar o sentido do sinal: A letra "e" está "acima" ( $\wedge$ ) da letra "o" ( $\vee$ ).



O significado da palavra "ou" na linguagem do dia a dia é diferente do significado empregado no contexto da lógica. Quando usamos o conectivo "ou" na lógica, fica implícita a possibilidade de ambas as proposições sejam verdadeiras ao mesmo tempo. Para as situações onde queremos que apenas uma proposição seja aceita mas não ambas, usamos um "ou exclusivo", cujo símbolo é o  $\oplus$ , dos seguintes modos:

- ou  $P$  ou  $Q$
- $P$  ou  $Q$ , mas não ambos
- Exatamente um de  $P$  ou  $Q$

A tabela-verdade desse conectivo é apresetada abaixo.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O último operador que veremos é a **negação**. Ela inverte a condição da proposição onde é aplicada. Seu símbolo é o  $\sim$ <sup>6</sup>, ou seja, se uma proposição é verdadeira, ao aplicarmos a negação à ela, tornamos essa proposição falsa. A tabela-verdade desse operador é bem simples.

P	$\sim P$
V	F
F	V

## 2.3 Proposições Condicionais

Podemos ainda combinar proposições de outra maneira. Sejam as proposições  $P$  e  $Q$ . Podemos dizer que "Se  $P$  for verdade, então  $Q$  também será verdadeiro". O símbolo usado para esse conectivo se...então é o  $\implies$ . Uma proposição desse tipo é chamada de **proposição condicional**. Leia a página 43 do livro caso você esteja com dúvida sobre as últimas duas linhas da tabela-verdade.<sup>7</sup>

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

<sup>6</sup>Existem outras representações desse operador:  $\neg$ ,  $\downarrow$ ,  $\dot{\vee}$

<sup>7</sup>O autor dá a dica de você pensar nas proposições compostas como promessas feitas por alguém. Isso ajuda muito a entender como as tabelas-verdade são construídas.

**Dica:** Nessa parte do livro o professor coloca bastante esforço em explicar esse conceito. Se você não conseguir entender essa tabela-verdade acima, recomendamos a leitura da seção que começa na página 42.

## 2.4 Proposições Bicondicionais

Existem situações onde duas proposições são mutuamente condicionais, ou seja,  $P \implies Q$  e  $Q \implies P$ . Nesses casos usamos o conectivo "se e somente se" cujo símbolo é " $\iff$ ". A tabela-verdade segue abaixo.

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

**Desafio:** Na prática, a proposição bicondicional  $P \iff Q$  nada mais é do que a proposição composta  $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ . Leia a seção 2.5 e volte aqui. Seu desafio é provar essa equivalência.<sup>8</sup>.

## 2.5 Tabelas-Verdade para Proposições

Agora que você sabe as tabelas-verdade de  $\wedge, \vee, \sim, \implies$  e  $\iff$ , você deve internalizá-las de modo a serem muito naturais ao avaliar a validade de uma proposição cuja construção utilize esses operadores.

Vamos trabalhar uma proposição composta que expressa a seguinte situação: Dadas duas proposições  $P$  e  $Q$ , somente uma delas é verdadeira mas não ambas. Não existe um operador que nos permita construir uma proposição apenas com um único símbolo<sup>9</sup>. Para podermos construir tal proposição temos que combinar nossos operadores do seguinte modo:

$$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$$

Essa proposição pode assustar numa primeira olhada, contudo, ela expressa exatamente nossa intenção anteriormente explicitada. Podemos resumir-la como: " $P$  ou  $Q$  são verdadeiras, mas não é o caso onde  $P$  e  $Q$  são verdadeiras.

A tabela-verdade dessa proposição é a seguinte:

<sup>8</sup>Posta uma foto da tabela-verdade composta e me marca no twitter.

<sup>9</sup>Será mesmo?

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	$\sim (P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

Calma. É bem mais tranquilo do que parece. Vamos analisar essa tabela por partes. Nas primeiras duas colunas temos as proposições iniciais  $P$  e  $Q$ . Nas linhas estão as situações onde testamos o que acontece quando elas são verdadeiras ou falsas.

Na segunda parte temos as proposições compostas por  $\vee$  e  $\wedge$  (que você já conhece a tabela-verdade).

Na parte 3 temos apenas a negação da coluna  $(P \wedge Q)$ . Se criarmos mais duas proposições do tipo  $Z : (P \vee Q)$  e  $W : \sim (P \wedge Q)$ . Podemos reduzir a última coluna como a tabela-verdade abaixo:

P	Q	Z	W	$Z \wedge W$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Que é exatamente igual à última coluna da tabela-verdade anterior. Portanto, nossa proposição é verdadeira exatamente quando  $P$  ou  $Q$  são verdadeiros mas não quando ambos são verdadeiros. Parabéns por ter entendido até aqui!

**Comentário:** Eu peguei esse exemplo direto do livro, contudo, eu pensei um pouco e uma equivalência a essa proposição composta (bem mais simples) seria  $\sim (P \iff Q)$ <sup>10</sup>. Uma terceira observação dessa passagem me fez perceber que é exatamente a tabela-verdade do "ou exclusivo"  $\oplus$ .

## 2.6 Equivalência Lógica

Nesse meu comentário acima já vemos um exemplo de equivalência lógica. Quando temos tabelas-verdade iguais para proposições diferentes. Podemos dizer que elas são **logicamente equivalentes**.

Esse conceito é importante porque podemos trabalhar o mesmo problema de diferentes abordagens e acabarmos chegando no mesmo resultado. Cada

<sup>10</sup>Você consegue ver isso?

abordagem pode ter facilidades que desejamos explorar e que vão nos permitindo desenrolar o pensamento necessário para uma demonstração mais complexa.

Muitos teoremas matemáticos usam a forma  $P \implies Q$  mas, não raramente, precisamos usar a equivalência lógica e trabalhar com a proposição  $\sim(Q) \implies \sim(P)$ . Para ver essa equivalência, basta construir as tabelas-verdade das duas proposições.<sup>11</sup>

Existem equivalências que são tão importantes que possuem um nome particular. As duas abaixo são chamadas de Lei de DeMorgan.

$$\begin{aligned}\sim(P \wedge Q) &= (\sim P) \vee (\sim Q) \\ \sim(P \vee Q) &= (\sim P) \wedge (\sim Q)\end{aligned}$$

A tabela-verdade da primeira parte é:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

A tabela-verdade da segunda parte é:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$(\sim P) \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Nessa parte o professor elenca várias equivalências que podem ser verificadas por suas respectivas tabelas-verdade.

- $P \implies Q = (\sim Q) \implies (\sim P)$  - Lei Contrapositiva
- $\sim(P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$  - Lei de DeMorgan 1
- $\sim(P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$  - Lei de DeMorgan 2
- $P \wedge Q = Q \wedge P$  - Lei Comutativa 1
- $P \vee Q = Q \vee P$  - Lei Comutativa 2
- $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$  - Lei Distributiva 1
- $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  - Lei Distributiva 2

<sup>11</sup>Fica como dever de casa pra você.

- $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$  - Lei Associativa 1
- $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$  - Lei Associativa 2

**Comentário:** Como são muitas equivalências, se colocarmos todas as tabelas-verdade aqui a seção ficaria muito dilatada e tornaria a didática do material menos efetiva. Então cabe a você demonstrar todas essas equivalências por conta própria. Não confie só porque está escrito ai. Demonstre com seu próprio esforço todas elas.

## 2.7 Quantificadores

Até agora nós já vimos um punhado de símbolos que nos permitem construir proposições consideravelmente complexas, bem como, achar as equivalências entre diferentes proposições. Mas ainda temos um problema para superar: o que fazer quando temos que lidar com infinitos elementos?

O professor usa o seguinte exemplo: Imagine um conjunto infinito de números inteiros  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ . Com os símbolos apresentados até agora, como faríamos para representar as seguintes proposições?

- $Z_1$  : "Todos os elementos de  $X$  são ímpares"
- $Z_2$  : "Pelo menos um elemento de  $X$  é ímpar"

Primeiro vamos definir a proposição  $P$  : "O número  $x$  é ímpar". Para a primeira proposição ( $Z_1$ ), teríamos algo parecido com

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \dots$$

E para a segunda proposição ( $Z_2$ ), algo como

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \dots$$

Ou seja, acabaríamos com proposições de tamanho infinito.

Para superar essa dificuldade, vamos introduzir novos símbolos " $\forall$ " e " $\exists$ ". O símbolo  $\forall$  significa "para todos" e o símbolo  $\exists$  significa "existe algum". Desse modo podemos reescrever as proposições anteriores como:

- $Z_1 : \forall x \in X, P(x)$
- $Z_2 : \exists x \in X, P(x)$

Nós chamamos esses novos símbolos de **quantificadores**.<sup>12</sup> Esse nome é dado porque eles se referem a alguma propriedade da quantidade de algo.  $\forall$  é chamado de **quantificador universal** e  $\exists$  é chamado de **quantificador existencial**. Proposições que contenham esses símbolos são chamadas de **proposições quantificadas**.

**Dica:** Leia o exemplo 2.5 do livro. O professor Hammack dá 4 exemplos em inglês e "traduz" esses exemplos para os símbolos que já aprendemos até agora.

## 2.8 Um pouco mais de Proposições Condicionais

Na seção 2.1 nós vimos que uma **sentença aberta** é uma proposição cuja validade depende do valor da variável. Contudo, uma característica que os quantificadores possuem é transformar sentenças abertas em proposições.

Dada a sentença aberta " $x$  é par  $\implies x$  é múltiplo de 6". A validade dessa afirmação depende totalmente do valor dado para a variável  $x$ . Agora, quando adicionamos um quantificador " $\forall x \in \mathbb{Z}, x$  é par  $\implies x$  é múltiplo de 6", ela se torna uma proposição, ou seja, podemos definir se ela é verdadeira ou falsa (nesse caso, falsa).

De maneira geral, dadas duas proposições  $Q(x)$  e  $P(x)$ , a expressão  $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \implies Q(x)$  é verdadeira ou falsa. Logo, ela é uma proposição e não uma sentença aberta.

Agora chegamos no ponto importante sobre esse assunto: sempre que você ver duas proposições a respeito de uma variável que seja elemento de algum conjunto (previamente definido), por exemplo, uma expressão da forma  $P(x) \implies Q(x)$ . Devemos interpreta-la como sendo uma proposição do tipo  $\forall x \in \text{Conjunto}, P(x) \implies Q(x)$ , ou seja, se uma proposição condicional não estiver quantificada explicitamente, então existe um quantificador implícito atrelado a ela. O motivo desse quantificador não aparecer é que cansa ter que ficar escrevendo toda hora " $\forall x \in \text{Conjunto}$ ".

Agora nós vamos definir de maneira mais geral (mas consistente com o que foi dito na seção 2.1) as proposições condicionais.

### Definição 2.8.1 (Proposição Condicional)

Se  $P$  e  $Q$  são proposições ou sentenças abertas, então "Se  $P$ , então  $Q$ " será uma proposição.

---

<sup>12</sup>Não sei você, mas pra mim esse daria um bom nome de banda.

Essa proposição será verdadeira se for impossível que  $P$  seja verdadeira enquanto  $Q$  seja falsa. Também, será falsa se existir alguma situação onde  $P$  é verdadeira e  $Q$  é falsa.

## 2.9 Traduzindo Português para Lógica Simbólica

Quando estamos lendo provas de teoremas, sempre devemos estar atentos para a estrutura lógica e o significado das sentenças. Não é raro ter que converter as expressões feitas de palavras para expressões feitas dos símbolos que estudamos até agora. Essa seção é uma prática para você exercitar essa competência.

**Comentário:** A partir desse ponto pode ser que você veja alguns conceitos que não foram previamente explicados no material. Não se assuste por causa disso. Foque apenas na lógica e no que você aprendeu até aqui.

**Exemplo 1:** O teorema do valor médio do Cálculo Infinitesimal.

---

Se  $f$  é contínua no intervalo  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ , então existe um número  $c \in (a, b)$  onde  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

---

A tradução para a forma simbólica dessa afirmação é:

$$((f \text{ cont. em } [a, b]) \wedge (f \text{ dif. em } (a, b))) \implies \left( \exists c \in (a, b), f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

Eu sei, ficou meio poluído. Pra melhorar um pouco vamos definir novas proposições e limpar um pouco essa sujeira toda.  $P$  : " $f$  é contínua no intervalo  $[a, b]$ ",  $Q$  : " $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ ".

$$(P \wedge Q) \implies \left( \exists c \in (a, b), f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

**Exemplo 2:** A conjectura de Goldbach.

---

Todo número inteiro par maior que 2 é a soma de dois primos.

---

A tradução para a forma simbólica dessa afirmação é:

$$(n \in X) \implies (\exists p, q \in P, n = p + q)$$

Ou então, podemos usar essa outra forma equivalente:

$$\forall n \in X, \exists p, q \in P, n = p + q$$

Sendo  $P = \{x : x \text{ é primo}\}$  e  $X = \{4, 6, 8, 10, \dots\}$ .

Esse exemplo acima nos mostra uma relação interessante entre as proposições do tipo  $(n \in X) \implies Q(n)$  e as do tipo  $\forall n \in X, Q(x)$ . Toda proposição universalmente quantificada<sup>13</sup> pode ser expressa como uma proposição condicional.

**Fato 2.9.1** (Equivalência de proposições)

Suponha que  $X$  é um conjunto e  $Q(x)$  é uma proposição a respeito de cada  $x \in X$ . As proposições abaixo são equivalentes:

$$\forall x \in X, Q(x)$$

$$(x \in X) \implies Q(x)$$

Essas equivalências são importantes porque podemos trocar a maneira como um teorema se apresenta na hora de tentar provar ou desprovar uma proposição.

**Comentário:** Na hora que você ler um teorema, evite ir direto para as palavras "ou", "se", "e" como se elas sempre significassem os seus respectivos valores lógicos. O contexto é quem diz o real significado das palavras. Sempre analise o enunciado inteiro antes de transcrever para a linguagem simbólica da lógica. Entretanto, sempre tente escrever os argumentos em linguagem simbólica.

## 2.10 Negando Proposições

Não é raro que ao tentar demonstrar uma proposição complexa  $R$ , por exemplo, seja mais fácil trabalhar com a negação dessa proposição  $\sim R$ . Mais a frente do curso você verá que essa é uma das técnicas usadas para provar teoremas.

Também não é incomum termos que lidar com negações de proposições quantificadas. Considere a proposição  $\sim (\forall x \in \mathbb{N}, P(x))$  que podemos ler como "Não é o caso que  $P(x)$  é verdade para todos os  $x$  números naturais". Portanto, a negativa dessa proposição envolve outro quantificador (o de existência), de modo que podemos reescrever essa negação como  $\exists x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$ .

Chegamos em um ponto importante aqui. Os quantificadores são usados para negar um ao outro. Observe as seguintes equivalências:

---

<sup>13</sup>Ou seja, com o uso do  $\forall$ .



$$\sim (\forall x \in X, P(x)) = \exists x \in X, \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x \in X, P(x)) = \forall x \in X, \sim P(x)$$

**Comentário:** Se você leu com atenção até aqui, deve ser capaz de compreender essas equivalências. Se elas não fazem sentido na sua cabeça, me manda uma dm no twitter explicando qual a sua dúvida. Eu posso melhorar o texto com o seu feedback.

Quando se está escrevendo demonstrações, as vezes é necessário negar proposições condicionais  $P \implies Q$ . Se você aprendeu a tabela-verdade desse tipo de operador, sabe que a única maneira de ele ser falso é quando temos  $P$  verdadeiro e  $Q$  falso. Em termo da lógica dizemos que  $\sim (P \implies Q) = P \wedge \sim Q$ .

**Dica:** Tente fazer o exercício 5 da seção 2.10. Tem a solução dele no final do livro. Se mesmo assim você não conseguir entender, comenta sua dúvida na postagem dessa aula no Economia Mainstream.

## 2.11 Inferência Lógica

A **inferência lógica** é o processo de se tirar conclusões dadas premissas e regras previamente estabelecidas. Existem algumas maneiras de se trabalhar esse processo de pensamento. Para a construção das regras de inferência da lógica proposicional começa com sua axiomatização:

**Axiomas 2.11.1** (Frege-Lukasiewicz)

Sejam  $p$ ,  $q$  e  $r$  proposições:

**FL1)**  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

**FL2)**  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \rightarrow [p \rightarrow r])$

**FL3)**  $\sim p \rightarrow \sim q \rightarrow (q \rightarrow p)$

Os axiomas podem ser um pouco confusos e pouco intuitivos. Para que não tenhamos que lidar apenas com eles durante o processo de inferência utilizamos as **regras de inferência**.

Antes de falarmos sobre elas vamos formalizar o conceito de inferência lógica:

**Definição 2.11.1** (Inferência Lógica)

Sejam  $p_0, p_1, \dots, p_n$  e  $q$  proposições, se  $q$  é uma consequência lógica de  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , então  $p_0, p_1, \dots, p_n$  inferem em  $q$ , denotamos por:

$$p_0, p_1, \dots, p_n \Rightarrow q$$

**Definição 2.11.2** (Regras de Inferência)

Sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  fórmulas proposicionais:

**Modus Ponens:**

$$P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$$

**Modus Tolens:**

$$P \rightarrow Q, \sim P \Rightarrow \sim Q$$

**Dilemas Construtivo:**

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), P \vee R \Rightarrow Q \vee S$$

**Dilema Destrutivo:**

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), \sim P \vee \sim R \Rightarrow Q \vee S$$

**Silogismo Disjuntivo:**

$$P \vee Q, \sim P \Rightarrow Q$$

**Silogismo Hipotético:**

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

**Conjunção:**

$$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$$

**Simplificação:**

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

**Adição:**

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

Apesar de definidas em uma linha não é dessa forma que descrevemos um processo de inferência, seria algo mais semelhante à uma tabela:

<i>Modus Ponens</i>	<i>Modus Tollens</i>	<i>Eliminação</i>
$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \vee Q$
$P$	$\sim Q$	$\sim P$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$\therefore Q$	$\therefore \sim P$	$\therefore Q$

Os diagramas acima são fáceis de se ler. Tudo que está em cima da linha é dado como verdadeiro. O que está abaixo é a consequência lógica do que está acima.

Do processo de inferência podemos gerar o conceito de **prova formal**:

**Definição 2.11.3** (Prova Formal)

Uma prova formal da fórmula  $q$  (conclusão) a partir de  $p_0, \dots, p_n$  é uma sequência de fórmulas:

$$p_0, p_1, \dots, p_n, q_0, \dots, q_m$$

De tal forma que  $q_m = q$ , e para todo  $i$   $q_i$  é um axioma se  $i = 0$  então  $p_0, \dots, p_n \Rightarrow q_0$ , caso  $i > 0$  então  $p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_{i-1} \Rightarrow q_i$ .

Se existe prova formal de  $q$  partindo de  $p_0, \dots, p_n$  então  $q$  é **deduzido** de  $p_0, \dots, p_n$  e denotamos isso por:

$$p_0, \dots, p_n \vdash q$$

Caso não hajam premissas  $q$  é consequência do axioma  $q_0$  e das conclusões posteriores  $q_1, \dots, q_m$  uma prova formal é a sequência:

$$q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m$$

Como  $q = q_m$ , se  $i = 0$ ,  $q_i$  é um axioma, se  $i > 0$ , tal que:

$$q_0, \dots, q_{i-1} \Rightarrow q_i$$

Escreva  $\vdash q$  e chame  $q$  de **teorema**

Apesar do formalismo deixar essa definição um pouco confusa ela é muito simples. Veja: Há um grupo de premissas  $p$  e um de consequência  $q$ . Se  $q_i$  onde  $i = 0$  então  $q_i$  é um axioma por ser autoevidente e deduzido diretamente das premissas.

Um exemplo disso é a função sucessor  $S(n)$  <sup>14</sup> dos **Axiomas de Peano**. Para isso assumimos como premissa que todo número natural tem um sucessor e então deduzimos os axiomas.

Se  $q_i$  e  $i > 0$  então  $q_i$  e não temos premissas, então  $q_i$  é um teorema por basear-se nos axiomas e em teoremas do qual depende. Continuando com o exemplo dos axiomas de peano temos o teorema:

**Teorema 1**

$$2 \neq 4$$

A prova disso não precisa tomar nenhuma premissa, apenas os axiomas que temos conhecimento.

---

<sup>14</sup>Para todo numero natural  $n$  existe um sucessor  $n + 1$  e se  $S(n) = S(m)$ , então  $m = n$   
Não se apegue muito à isso, veremos com mais rigor adiante

*Prova:* Assuma que  $2 = 4$ , então  $S(2) = S(4)$ , porém sabemos que  $S(2) = 3$  e  $S(3) = 4$ , logo,  $3 = 4$ , o que é um absurdo. ■

O leitor não precisa memorizar todos as regras de inferência, mas sim compreender como a lógica torna-se o fundamento da matemática por meio dessas operações, e como os processos só são válidos por obedecerem as regras da lógica. É importante que você internalize esses métodos de pensamento. Você usará bastante ao longo da sua jornada pela matemática.

## 2.12 Nota Importante

Para finalizar, o professor elenca 3 grandes motivos para se estudar lógica: 1) As tabelas-verdade nos dizem exatamente os significados das palavras "e", "ou", "não", "se...então", etc; 2) As regras da inferência produzem um sistema onde podemos deduzir novas informações de afirmações anteriores; 3) Regras lógicas (como a lei de DeMorgan) nos ajudam a transformar proposições em formatos que sejam mais fáceis de se trabalhar e que são equivalentes.

Lógica é a linguagem-comum que toda a Matemática utiliza, então temos que ter uma boa base para poder escrever e entender a própria matemática. Durante o resto desse livro não usaremos com tanta frequência os símbolos que vimos ( $\wedge, \vee, \implies, \iff, \sim, \forall, \exists$ ) mas sempre que ler uma passagem matemática, você deve usa-los, mentalmente ou em papel, para se certificar que você a compreendeu de uma maneira inequívoca e verdadeira.

## 3

# Contagem

*“Counting can become quite subtle, and in this chapter we explore some of its more sophisticated aspects. Our goal is still to answer the question ‘How many?’ but we introduce mathematical techniques that bypass the actual process of counting individual objects”*

– página 65

### 3.1 Listas

Uma **lista** é uma sequência ordenada de objetos. Esses objetos são mantidos entre um par de parênteses e separados por vírgulas. Os objetos dentro de uma lista são chamados de **entradas**<sup>1</sup>. Já que uma lista é uma sequência ordenada, é evidente que a ordem dos seus elementos é suficiente para distinguir listas que contenham os mesmo objetos.

$$(a, b, c) \neq (c, b, a)$$

**Comentário:** Também é comum escrever uma lista sem os parênteses e as vírgulas. Esse formato de escrita se chama **string**. Nesse caso  $(a, b, c)$  é a mesma coisa de  $abc$ . Essa outra maneira só é usada quando não há risco de confusão entre as entradas da lista. Mantenha essas duas formas de escrita como padrão na sua mente.

Como já vimos conjuntos no capítulo 01, podemos usá-los para comparação. No caso dos conjuntos a ordem dos elementos não importa na comparação. Ou seja,  $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$ . Já vimos acima que essa propriedade não é mantida nas listas.

Diferentemente dos conjuntos, uma lista pode ter entradas repetidas sem

---

<sup>1</sup>Do original, **entries**

nenhum problema. A lista  $(a, a, a, a, b)$ , por exemplo, é perfeitamente aceitável.

Tal qual a cardinalidade dos conjuntos, nós contamos quantas entradas existem em uma lista. Chamamos essa medida de **comprimento**. A lista  $(a, a, a, a, b)$  possui um comprimento de 5.

**Regra:** Duas listas são **iguais** se possuírem exatamente as mesmas entradas nas mesmas posições, ou seja, também possuem o mesmo comprimento.

Só existe uma lista cujo comprimento é igual a zero. Denominamos essa lista de **lista vazia**. Denotada por  $()$ .<sup>2</sup>

## 3.2 O Princípio da Multiplicação

Existem muitos problemas práticos que envolvem a contagem do número possível de listas que satisfazem uma determinada condição ou propriedade. Por causa disso, vamos aprender uma maneira de trabalharmos essa questão sem precisar ficar escrevendo todas as listas possíveis antes de contar os resultados.

### Fato 3.2.1 (Princípio da Multiplicação)

Suponha que em uma lista de comprimento  $n$  exista  $a_1$  escolhas possíveis para a primeira entrada,  $a_2$  escolhas possíveis para a segunda entrada,  $a_3$  escolhas possíveis para a terceira entrada e etc. Então, o total de listas diferentes que podem ser geradas por essas entradas será igual ao produto entre  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$ .

**Dica:** Nas páginas 67 e 68 do livro, o professor coloca dois exemplos que tornarão esse conceito abaixo bem mais entendível. Se você não entender como esse fato é evidente, dá uma olhada no livro e volta aqui.

Embora no livro não seja dada uma demonstração desse princípio. Achamos que a provadessa afirmação é útil para exercitarmos os conceitos que vimos até a gora. Não se preocupe se você não conseguir entender essa demonstração agora. Volte quando estiver mais adiantado no curso e tente novamente.

### Demonstração 3.2.1 (Princípio da Multiplicação<sup>3</sup>)

<sup>2</sup>Sim, lembra muito o conceito de conjunto vazio.

<sup>3</sup>A ideia da primeira parte da demonstração para  $m \leq 2$  veio desse livro: JOHNSTON, William; MCALLISTER, Alex. A transition to advanced mathematics: a survey course. OUP USA, 2009. p. 365. Pra segunda parte, onde  $m > 2$ , a inspiração veio desse link do StackExchange.

Começaremos com a proposição  $P(m)$ : "Se existirem  $m \in \mathbb{N}$  conjuntos  $A_i$  com  $n_i$  elementos em cada conjunto onde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . O Cardinal do produto cartesiano de todos os  $m$  conjuntos será igual à multiplicação de todos os  $m$  cardinais  $|A_i|$ , ou seja,  $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m| = \prod_{i=1}^m |A_i|$ ".<sup>4</sup>

Essa proposição é equivalente ao enunciado do princípio da multiplicação.<sup>5</sup>

Quando  $m = 1$ , temos apenas o conjunto  $A_1$  que possui  $n_1$  elementos. Portanto, o cardinal de todos os  $m = 1$  conjuntos é igual ao cardinal do único conjunto ( $|A_m| = |A_1|$ ). Com isso, vemos que  $P(1)$  é verdadeira.

$P(2)$ : "Se  $A_1$  e  $A_2$  são conjuntos finitos onde  $A_1$  contém  $n_1$  elementos e  $A_2$  contém  $n_2$  elementos, então, o conjunto  $A_1 \times A_2$  possui  $n_1 \cdot n_2$  elementos".

A demonstração dessa proposição é simples. Para cada um dos  $n_1$  elementos  $a \in A_1$  na primeira coordenada do par ordenado  $(a, b) \in A_1 \times A_2$ , existem exatamente  $n_2$  elementos  $b \in A_2$ . Uma vez que existem  $n_1$  elementos em  $A_1$  que podem ser essa primeira coordenada do par ordenado  $(a, b)$ , então, existem ao todo  $n_1 \cdot n_2$  possíveis pares ordenados no produto cartesiano  $A_1 \times A_2$ .

Agora vamos fazer uma pequena adaptação nessa demonstração para qualquer quantidade de conjuntos, ou seja, para qualquer  $P(m)$  cujo  $m > 2$ .

Suponha que agora temos 3 conjuntos:  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . Para podermos demonstrar  $P(3)$ : "Se  $A_1 \times A_2 \times A_3$ , então o cardinal será  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ " só precisamos da seguinte linha de pensamento: Podemos definir um novo conjunto  $B = A_1 \times A_2$ . Desse modo, podemos reescrever o cardinal anterior como  $B \times A_3$ . Essa reescrita possui apenas dois elementos. Portanto, podemos usar a proposição já demonstrada  $P(2)$  sem nenhum prejuízo.

Aplicando esse mesmo procedimento para qualquer  $m > 2$  fica demonstrado que o cardinal de quaisquer conjuntos  $A_i$  para qualquer  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  será a multiplicação do cardinal dos conjuntos  $A_i$ . Aplicando a equivalência da proposição  $P(m)$  com o princípio da multiplicação, finalizamos a demonstração. ■

Existem dois tipos de problemas que envolvem contagem de listas: Problemas que possuem entradas repetidas (como a construção de placas de carros, números de telefone e etc) e Problemas que não permitem entradas repetidas (como ordenar pessoas em uma fila). Nós podemos chamar as listas do segundo tipo de problema de **listas não repetitivas**.

<sup>4</sup>O nome desse símbolo é "Produtório"

<sup>5</sup>Você consegue ver essa equivalência?

Usando o princípio da multiplicação você é capaz de resolver todos os problemas envolvendo contagens de listas (com e sem repetição) sem precisar ficar escrevendo as soluções possíveis, ao invés disso, você só precisa interpretar as opções de entradas na lista e usar a multiplicação.

**Dica:** Tente fazer os exemplos 3.1, 3.2 e 3.3 da página 69 até a 72.

### 3.3 Os Princípios da Adição e Subtração

Vamos ver mais dois princípios de contagem. Você já está familiarizado com eles mas agora definiremos esses princípios usando a linguagem dos conjuntos.

**Fato 3.3.1** (Princípio da Adição)

Suponha que um conjunto finito  $X$  pode ser decomposto na união  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$

onde  $X_i \cap X_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j$ . Então,  $|X| = \sum_{i=1}^n |X_i|$ .

Calma. Não é difícil de entender. O que estamos dizendo aí é: "Se  $X$  é um conjunto formado por  $n$  outros conjuntos menores de modo que nenhum desses conjuntos possui interseção entre si. Então, o cardinal de  $X$  será a soma dos cardinais de todos os  $n$  subconjuntos. A única coisa que pode assustar nessa notação é o sigma ( $\sum$ ) para denominar somatório."<sup>6</sup>

**Dica:** Veja os exemplos 3.5 e 3.6 na página 75 para ter uma ideia da aplicação desses conceitos na prática.

**Fato 3.3.2** (Princípio da Subtração)

Se  $X$  é um subconjunto de um conjunto finito  $U$ , então  $|\overline{X}| = |U| - |X|$ . Ou seja, se  $X \subseteq U$ , então  $|U - X| = |U| - |X|$ .

Existem situações onde é mais fácil contar o total de um conjunto maior, e retirar uma parte desse total que não queremos, do que contar diretamente a parte desejada. A primeira vista pode parecer um pouco confuso mas a ideia é simples: Usamos esse método para computar o que sobra após a retirada de algumas opções.

**Dica:** Leia o exemplo 3.7 novamente. A gente usa exatamente essa abordagem pra chegar no resultado.

---

<sup>6</sup>Já vimos essa notação no capítulo 01.



### 3.4 Fatoriais e Permutações

O processo de contagem para listas não repetitivas de tamanho  $n$  é tão comum que criamos um conceito especial para lidar com esse tipo de problema. O conceito em questão é o **Fatorial** ( $n!$ ). Antes de formalizarmos, observe o quadro abaixo.

n	Elementos	Listas não repetidas de tamanho $n$	$n!$
0	$\{\}$	$()$	1
1	$\{a\}$	$(a)$	1
2	$\{a, b\}$	$(a, b), (b, a)$	2
3	$\{a, b, c\}$	$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Consegue ver como a quantidade de listas não repetitivas cresce rápido com apenas o incremento de 1 elemento no exemplo?. O número da última coluna é obtido pela aplicação do princípio da multiplicação. Nós chamamos esse número de **Fatorial** de  $n$ . Seu símbolo é esse ponto de exclamação ao lado direito do número " $n!$ "<sup>7</sup>.

#### Definição 3.4.1 (Fatorial)

Se  $n$  é um número inteiro não negativo, então  $n!$  será o número de listas de tamanho  $n$  que podem ser formadas com  $n$  símbolos, sem repetições. Desse modo, temos que  $0! = 1, 1! = 1$ . Para qualquer  $n > 1$ , então  $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ .

**Dica:** O exemplo 3.8 na página 79 é ótimo pra exercitar esses conceitos vistos até agora.

Outro conceito importante<sup>8</sup> é o conceito de **Permutação**. Quando computamos um fatorial, estamos, na verdade, contando a quantidade de listas de comprimento  $n$  que podem ser geradas a partir da mudança da ordem dos  $n$  elementos.

**Comentário:** Guarde na memória que o **Fatorial** conta o número de **Permutações** possíveis para  $n$  elementos via aplicação do **princípio da multiplicação**.

Agora vamos estender um pouco mais esse pensamento. Se temos um total de  $n$  elementos. Uma permutação é uma lista de comprimento  $n$ . Mas e se não quisermos usar todos os elementos disponíveis na composição dessas

<sup>7</sup>Lemos como " $n$  fatorial".

<sup>8</sup>Que eu aposto que você viu no ensino médio e achou que nunca ia usar.

listas? Para isso o autor usa o conceito de **k-permutação**<sup>9</sup> (aqui no Brasil você viu esse conceito pelo nome de **Arranjo**). Uma k-permutação será uma lista de tamanho  $k$  formada por um subconjunto dos  $n$  elementos anteriores.

Para facilitar (ou não) a nossa vida, vamos definir uma notação para situações onde queremos fazer permutações de comprimento  $k$  de um conjunto qualquer de tamanho  $n$ . Escreveremos  $P(n, k)$  para denotar essa situação.<sup>10</sup>

Para o caso onde  $k = 0$  só precisamos pensar em quantas listas de comprimento 0 conseguiríamos fazer a partir de um conjunto com  $n$  elementos. Isso mesmo, só temos uma lista possível - a lista vazia  $()$ .

Para todos os casos onde  $k \leq n$  podemos calcular o número de k-permutações usando o princípio da multiplicação. Na página 81 tem uns exemplos sobre isso.

Nos casos onde  $k > n$  seria como responder algo parecido com: "Quantas lista de 4 elementos podemos fazer com 3 números". A resposta é "zero listas".

De modo mais geral, via princípio da multiplicação, temos que para a primeira entrada da lista de comprimento  $k$  temos sempre  $(n)$  opções. Para a segunda entrada, teremos  $(n - 1)$  opções. Para a terceira entrada teremos  $(n - 2)$  opções. Podemos ver claramente um padrão se formando. Podemos definir que o número de escolhas para a posição  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  será  $(n - i + 1)$ <sup>11</sup>. Quando  $i = k$  teremos então  $(n - k + 1)$  opções.

Com isso podemos chegar em uma equação:

$$P(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1)$$

Podemos ainda transformar essa relação em outra equação. Primeiro pensemos no que essa parte direta da equação acima quer dizer. Ela se parece com a fórmula do fatorial de  $n$  mas com a diferença de "parar" em  $(n - k + 1)$ . Para recuperar o formato do fatorial podemos multiplicar a equação acima por  $(n - k) \cdot (n - k - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$  e dividir pela mesma expressão.

$$P(n, k) = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1) \cdot (n - k) \cdot (n - k - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

<sup>9</sup>Do original: k-permutation.

<sup>10</sup>Perceba que se  $k = n$  teremos que  $P(n, k) = n!$ . Não tem problema nenhum se não entender. Vamo bater um papo no twitter que eu te explico com mais calma.

<sup>11</sup>Por exemplo:

$i = 1 \implies (n - 1 + 1) = (n)$  opções

$i = 2 \implies (n - 2 + 1) = (n - 1)$  opções

Depois de todas essas manipulações, podemos formalizar o conceito de  $k$ -permutações.

**Fato 3.4.1** (K-Permutações ou Arranjos)

Uma  **$k$ -permutação** ou **Arranjo** de um conjunto com  $n$  elementos é uma lista de comprimento  $k$  feita com elementos desse conjunto. Informalmente, podemos pensar nessa lista como fruto do "rearranjo" dos elementos desse conjunto.

O número de  $k$ -permutações de um conjunto com  $n$  elementos é denotado por  $P(n, k)$  e é dado por:

$$P(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1)$$

Se  $0 \leq k \leq n$ , então temos que:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

### 3.5 Contando Subconjuntos

Até agora, vimos quantas listas de tamanho  $k$  podemos fazer com todos os  $n$  elementos de um conjunto qualquer. Agora, vamos expandir essa linha de pensamento para um tópico correlato: "Quantos subconjuntos podem ser feitos se selecionarmos  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos?".

Algum leitor de pensamento rápido pode pensar que se trata exatamente do mesmo problema. Contudo, não é o caso. A diferença reside nas propriedades de uma **lista** e de um **conjunto**.

Uma lista leva em consideração a ordem dos seus elementos, ou seja,  $(a, b) \neq (b, a)$  enquanto os conjuntos só se preocupam com os valores dos seus elementos  $\{a, b\} = \{b, a\}$ . Para prosseguirmos vamos definir essa tarefa de "contar subconjuntos" usando uma notação.

**Comentário:** Estranhamente, o professor não dá um nome para o conceito que ele vai definir agora. Nós achamos por bem usar o nome que os materiais didáticos do Brasil utilizam.

**Definição 3.5.1** (Combinação)

Se  $k, n \in \mathbb{Z}$ , então  $\binom{n}{k}$ , ou alternativamente,  $C(n, k)$ , denota o número de subconjuntos que podem ser feitos escolhendo  $k$  elementos de um conjunto com  $n$  elementos. Lemos  $\binom{n}{k}$  como "de  $n$  escolhemos  $k$ ".

**Comentário:** Aqui já temos algo para guardar na mente. Se tivermos um conjunto com  $n$  elementos, sempre será verdade que  $P(n, k) \geq \binom{n}{k}$  ou, na outra notação,  $P(n, k) \geq C(n, k)$ . Ou seja, sempre será verdade que os arranjos serão maiores ou iguais que as combinações para quaisquer  $n$  e  $k$ .

Já definimos o que queremos dizer quando escrevemos  $\binom{n}{k}$  e sabemos bem qual problema queremos responder com essa notação nova. Precisamos de uma fórmula que nos permita encontrar a solução de quaisquer valores de  $n$  e  $k$ . Para tanto, vamos começar com um exemplo prático:  $\binom{5}{3}$ .

Nós já sabemos que se fossem listas ao invés de subconjuntos, teríamos  $P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$  listas possíveis. Também já sabemos que  $P(5, 3) \geq \binom{5}{3}$ .

O pensamento para chegarmos no nosso resultado é o seguinte: "Quantas listas podemos formar com cada subconjunto de 3 elementos?". A resposta é obtida pela aplicação do princípio da multiplicação. Isso nos dá  $3! = 6$  listas possíveis para cada subconjunto de 3 elementos.

Agora que sabemos que teremos 6 listas para cada subconjunto formado por 3 elementos e também sabemos que podemos formar um total de 60 listas diferentes. Basta dividirmos as 60 listas por 6 que chegaremos no total de 10 subconjuntos possíveis.

**Dica:** Na página 89 o professor monta uma tabela com todos os subconjuntos e as listas que falamos aqui.

De maneira mais abstrata, o que fizemos foi dividir a  $k$ -permutação  $P(5, 3)$  por  $3!$ . Ou seja, podemos saber quantos subconjuntos de tamanho  $k$  podem ser formados com  $n$  elementos pela equação abaixo.

**Fato 3.5.1** (Cálculo das Combinações)

Se  $0 \leq k \leq n$ , então:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Se  $k > n$  então  $\binom{n}{k} = 0$ . Seria como perguntar algo como "quantos subconjuntos de 5 elementos podemos fazer com 3 elementos? Isso mesmo, zero conjuntos.

### 3.6 O Triângulo de Pascal e O Teorema Binomial

Até aqui você é capaz de resolver qualquer problema que envolva contagens de listas e subconjuntos seja usando todos os valores disponíveis ou apenas

uma parte deles. Uma coisa interessante da matemática é que alguns padrões surgem a medida que se criam novos conceitos.

Um desses padrões foi descoberto em vários países em épocas diferentes, mas o nome que usaremos é atribuído ao matemático francês Blaise Pascal e é denominado Triângulo de Pascal.

A relação é simples:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Ou seja, o número de subconjuntos que podemos formar com a adição de apenas 1 elemento no universo de opções é igual à soma dos totais de subconjuntos de tamanho  $k-1$  das opções originais com a quantidade de subconjuntos de tamanho  $k$  das  $n$  opções originais. Parece um pouco chato todo esse papo mas se certifique que está acompanhando.

Para verificar se o triângulo de Pascal é verdadeiro, vamos começar quebrando a equação e desenvolvendo suas formas completas:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

e

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Não se assuste, foram apenas pequenas alterações feitas na formulação clássica de  $\binom{n}{k}$ . Escreva em um papel para se certificar que entendeu.

A próxima parte é bem feia e pode assustar mas é simplesmente uma soma de frações comum do estilo  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$  aplicada equação para  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ :

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n!k!(n-k)!}{k!(n-k)!(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)!}{k!(n-k)!(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n!k!(n-k)! + n!(n-k+1)!}{k!(n-k)!(k-1)!(n-k+1)!}$$

Para ficar mais fácil de visualizar vamos abrir os fatoriais  $k!$  e  $(n-k+1)!$ :

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n!k(k-1)!(n-k)! + n!(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!(k-1)!(n-k+1)!}$$

Perceba que temos  $(k-1)!(n-k)!$  em ambas as parcelas da soma podemos transformar isso em:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n-k)!(k-1)![n!k + n!(n-k+1)]}{(k-1)!(n-k+1)!k!(n-k)!} \\ \binom{n+1}{k} &= \frac{\cancel{(n-k)!} \cancel{(k-1)!} [n!k + n!(n-k+1)]}{\cancel{(k-1)!} \cancel{(n-k)!} (n-k+1)!k!} \\ \binom{n+1}{k} &= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}\end{aligned}$$

Opa! Chegamos em um ponto interessante! Temos ambos os divisores<sup>12</sup> iguais, agora resta mostrar que os dividendos<sup>13</sup> são iguais. Para que fique mais limpo trabalharemos com os dividendos separadamente. Agora só temos que provar essa pequena igualdade:

$$(n+1)! = n!k + n!(n-k+1)$$

Primeiramente relembremos:

$$(n+1)! = (n+1) \underbrace{(n)(n-1)\dots 3.2.1}_{\text{Isso aqui é igual a } n!}$$

Então podemos simplificar a equação restante como

$$\begin{aligned}(n+1)n! &= n!k + n!(n-k+1) \\ (n+1)\cancel{n!} &= \cancel{n!}k + \cancel{n!}(n-k+1) \\ (n+1) &= k + n - k + 1 \\ (n+1) &= \cancel{k} + n\cancel{-k} + 1 \\ (n+1) &= (n+1)\end{aligned}$$

Com divisores e dividendos iguais concluimos que:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \blacksquare$$

<sup>12</sup>A parte de baixo da divisão.

<sup>13</sup>A parte de cima da divisão.

Tendo mostrado que essa propriedade é verdadeira podemos ver como o Triângulo de Pascal é verdadeiro.<sup>14</sup>

	0	1	2	3	4	5	...	$k$
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$n$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	...	$\binom{n}{k}$

Fazendo os devidos cálculos pela aplicação para todos os casos  $\binom{n}{k}$  teremos:

	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$			$\vdots$				$\ddots$

Para prosseguirmos, o professor Hammack usa os exercícios 3.5.13 e 3.5.14 como ferramentas para expor algumas implicações do triângulo de Pascal.

**Exercício 3.5.13:** Suponha que  $n, k \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq k \leq n$ . De posse da fórmula da combinação  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , demonstre que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

A resposta para essa questão está no solucionário do próprio livro. Assumindo que  $n, k \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq k \leq n$ , aplicando o conceito das combinações podemos ver que  $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)![n-n+k]!} = \frac{n!}{(n-k)![n-k]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$  ■

**Exercício 3.5.14:** Suponha que  $n, k \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq k \leq n$ . Usando apenas a definição de combinação da página 31 (sem usar a fórmula), demonstre que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

Para responder essa questão nós vamos ter que abordar 3 casos possíveis. Quando temos  $k = n$ , estamos dizendo que queremos saber quantos subconjuntos de tamanho  $n$  podemos fazer com  $n$  elementos, cuja resposta é

<sup>14</sup>Você com certeza viu isso, mas em formato de pirâmide, aqui é um Triângulo Retângulo de Pascal.

claramente 1. Quando temos  $k = 0$ , só temos 1 subconjunto possível, que é o conjunto vazio  $\emptyset$ . Ou seja<sup>15</sup>,  $(k = 0 \vee k = n) \implies \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = 1$ . Esses são os casos das laterais do triângulo de Pascal.

Agora teremos que trabalhar com os casos onde  $0 < k < n$ . Dentro dessa situação, temos o caso onde  $k = n/2$ . Nesse caso, é simples ver que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{\frac{n}{2}} = \binom{n}{n-\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} = \binom{n}{n-k}$ . Agora que já eliminamos todos os casos mais evidentes, precisamos desenvolver uma lógica que contemple todos os demais.

Primeiro vamos pensar num conjunto qualquer  $N$ . Como estamos contando subconjuntos, se  $N$  possuir elementos repetidos, isso não nos afeta visto que um conjunto não leva em consideração a ordem nem elementos repetidos. Para nos certificarmos, vamos criar um subconjunto  $N^* = \{n \in N : n_k \neq n_w \forall k \neq w\}$ . Esse conjunto  $N^*$  não tem nenhum elemento repetido. Primeiro, vamos contar todos os subconjuntos de tamanho  $k$  de  $N^*$ . Cada subconjunto  $k_i \subseteq N^*$  será do tipo  $\{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k\}$ . Uma vez que formos um conjunto  $k_i$  ainda teremos  $n - k$  elementos "sobrando" para criarmos novos subconjuntos. Desse modo, teremos um total de  $k(n - k)$  possibilidades. Do outro lado do problema, vamos pensar no caso para os subconjuntos de tamanho  $(n - k)$ . Eles serão do tipo  $\{n_1, n_2, \dots, n_{n-k}\}$ . Similarmente, para cada subconjunto com  $(n - k)$  elementos, teremos  $n - (n - k) = n - n + k = k$  elementos "sobrando" para construirmos novos subconjuntos. O que também nos dá um total de  $k(n - k)$  subconjuntos possíveis. Como temos o mesmo número de possibilidades, fica demonstrada a simetria entre  $\binom{n}{k}$  e  $\binom{n}{n-k}$  de acordo com o enunciado da questão. ■

Com a demonstração dos exercícios 3.4.13 e 3.4.14 nós podemos ver que o triângulo de Pascal possui uma simetria. Começando pelas laterais, as colunas onde  $k = 0$  e  $k = n$  são sempre iguais a 1. Mas além dessas, as colunas intermediárias também possuem uma simetria dada por  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Isso quer dizer que as segundas colunas sempre serão iguais às penúltimas. Do mesmo modo, as terceiras colunas sempre serão iguais às antepenúltimas. Nos casos onde o  $k$  é ímpar, teremos uma coluna do meio que será a única sem uma repetição do valor.

A partir dessa simetria, os matemáticos perceberam uma relação entre os valores de cada elemento das linhas do triângulo de Pascal com os coeficientes dos binômios do tipo  $(a + b)^n$ . Esse fato é chamado de **Teorema Binomial**. Como o nome diz, um **binômio** é formado por quaisquer dois números (chamados de monômios)  $a$  e  $b$  relacionados por uma soma.

<sup>15</sup>Se você leu o capítulo 02, você entendeu o que a gente quis dizer aqui.



Veja só que interessante:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
(a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \\
(a+b)^6 &= 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6 \\
(a+b)^7 &= 1a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 8ab^6 + 1b^7
\end{aligned}$$

Perceba como os coeficientes em vermelho seguem exatamente o padrão estabelecido pelo triângulo de Pascal. Nós vamos partir dessa constatação para a definição do teorema binomial. Relaxa que a gente vai indo em partes.

Os primeiros e últimos termos do binômio estão a  $n$ -ésima potência,<sup>16</sup> portanto:

$$(a+b)^n = a^n b^{n-n} + \dots + a^{n-n} b^n$$

Agora veja que o  $n$  no segundo termo do binômio temos  $a^{n-1}b^1$  e no penúltimo  $a^1b^{n-1}$

$$(a+b)^n = a^n b^{n-n} + a^{n-1}b^1 + \dots + a^1b^{n-1} + a^{n-n}b^n$$

Por fim, falta apenas incluir os coeficientes, que como dito antes, seguirão por padrão a  $k$ -ésima entrada da  $n$ -ésima linha do Triângulo de Pascal:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^{n-n} + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

Um fator importante para a notação mais limpa é que  $a$  está sempre elevado a  $n$  subtraído a  $k$ -ésima entrada, e  $b$  está sempre elevado a  $k$ -ésima potência.

Pronto. Com isso já conseguimos definir nosso teorema.

### **Teorema 2** (Teorema Binomial)

Se  $n$  é um inteiro não negativo, então:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

<sup>16</sup>Deixaremos  $a^{n-n}$  multiplicando o último termo e  $b^{n-n}$  o primeiro, apenas para que o desenvolvimento fique mais claro, afinal, é um número elevado a zero e não mudará nosso resultado

Que também pode ser expresso como:

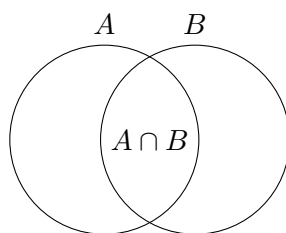
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

O autor deixa a demonstração como exercício para o capítulo 10. Nós vamos precisar de alguma ferramentas para poder demonstrá-lo, então, aguarde um pouco para ver essa demonstração mais a frente nesse curso.

### 3.7 O Princípio da Inclusão-Exclusão

Existem várias situações onde precisamos computar o cardinal<sup>17</sup> da união de conjuntos. O leitor de mente ligeira pode pensar que, tendo os conjuntos  $A$  e  $B$ , o cardinal da união seria dado por  $|A \cup B| = |A| + |B|$ . Contudo, esse pensamento está certo apenas em algumas situações.

Como dito no capítulo 01, diagramas de Venn não são usados para demonstrações matemáticas. Apesar disso, podem ser uma boa ferramenta para elucidar alguns pontos. Considere a situação abaixo:



O que acontece quando somamos os cardinais de  $A$  e  $B$  nessa situação? Isso mesmo, acabamos contando duplamente os elementos que estão na interseção dos dois conjuntos. Para evitar essa dupla contagem, basta subtrairmos  $|A \cap B|$ <sup>18</sup> da soma dos cardinais. A demonstração mais formal segue a baixo.

**Fato 3.7.1** (Fórmula da Inclusão-Exclusão para 2 conjuntos)

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos, então  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .

#### Demonstração 3.7.1

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos, então teremos que:

$$|A \cup B| = |A \cup (B - A)| = |A| + |(B - A)|$$

Por outro lado,  $(B - A)$  e  $(A \cap B)$  também são conjuntos, cuja união é igual

<sup>17</sup>Você lembra desse conceito do capítulo 01?

<sup>18</sup>Ou seja, o cardinal da interseção

ao próprio conjunto B:

$$|(B - A) \cup (A \cap B)| = |(B - A)| + |(A \cap B)| = |B|$$

Apenas rearranjando essa segunda igualdade temos que,

$$|(B - A)| = |B| - |(A \cap B)|$$

Substituindo o termo  $|(B - A)|$  na primeira equação,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \blacksquare$$

Essa demonstração foi inspirada nesse paper.

**Dica:** Tente resolver o exemplo 3.17 da página 93.

Claro que podemos nos deparar com situações que envolvam mais do que dois conjuntos. Para essas questões, vamos precisar de uma solução geral para  $n$  conjuntos.

**Fato 3.7.2** (Fórmula da Inclusão-Exclusão)

Sejam  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  conjuntos quaisquer, então

$$\begin{aligned} |E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n| = & \\ & + \left( \sum_{i=1}^n |E_i| \right) \\ & - \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |E_i \cap E_j| \right) \\ & + \left( \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |E_i \cap E_j \cap E_k| \right) \\ & \vdots \\ & (-1)^{n-1} |E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n| \end{aligned}$$

**Demonstração 3.7.2** (Esboço)

Partindo do caso mais simples, já sabemos que é verdade que, se  $n = 1$  então  $\bigcup_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ . Agora vamos usar a **indução matemática**<sup>19</sup> para demonstrar os casos onde temos  $n + 1$ .

<sup>19</sup>Ainda vamos estudar mais pra frente sobre essa técnica, mas não é difícil entender o que ta rolando.

Suponha um elemento  $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ , este será contado  $\binom{n}{1}$  no primeiro somatório.

$$\sum_{i=1}^n |A_i|$$

$\binom{n}{2}$  vezes no segundo:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

E assim por diante, o mesmo para o terceiro, pro quarto, etc.

Como vimos anteriormente, subtraímos a interseção entre  $n$  conjuntos se  $(2|n)^{20}$ , isto é,  $n$  é par, e somamos se  $(2 \nmid n)^{21}$ . Ao fazermos isso garantimos que o elemento  $x$  será contado um única vez. Portanto podemos abstrair a regra como sendo:

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \binom{n}{4} \dots + (-1)^{p-1} \binom{n}{p} \quad (3.1)$$

Como podemos garantir que essa fórmula resulta no que queremos? Bom, para isso precisamos lembrar de uma propriedade das combinações onde  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Isso implicaria que se fizermos  $\binom{n}{0} - (3.1) = 0$ , está correto pois sabemos que  $\binom{n}{0} = 1$ . Assim, está provado o Princípio da Inclusão-Exclusão, caso queira pode fazer prova por PIF.

### 3.8 Contando Multiconjuntos

No decorrer deste capítulo já aprendemos muitas coisas, Combinações, Arranjos, Permutações, etc. Porém como pode passar em sua cabeça ainda não sabemos trabalhar com elementos repetidos nos conjuntos, sim, sabemos que conjuntos não permitem repetições. Portanto é necessário introduzir um novo elemento da matemática, os **multiconjuntos**.

Nos multiconjuntos as repetições são permitidas e a ordem com que os elementos estão dispostos dentro dele não importa tal qual nos conjuntos. Isso faz deles um híbrido entre conjuntos e listas.

Dos conjuntos ainda conserva-se uma propriedade, a **cardinalidade**, a ideia é exatamente a mesma, a cardinalidade é a quantidade de elementos do multiconjuntos. A outra propriedade dos multiconjuntos é a **multiplicidade**, esta por sua vez é a quantidade de vezes que um elemento qualquer repete-se dentro do multiconjuntos.

<sup>20</sup>Essa notação quer dizer "é divisível por 2", ou seja, par.

<sup>21</sup>Essa notação quer dizer "não é divisível por 2", ou seja, ímpar.

**Fato 3.8.1** (Contagem de Multiconjuntos)

Sejam  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  a multiplicidade de cada um dos  $n$  elementos do multiconjuntos  $A$ , o número total de permutações possíveis é dado por:

$$\frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_n!}$$

Com a boa compreensão que temos da contagem de subconjuntos esse parte fica muito fácil de ser compreendida porque o mecanismo é exatamente o mesmo.

Temos um multiconjuntos de  $n$  elementos. Portanto, ignorando os elementos repetidos, o número de permutações que temos desse multiconjuntos é  $n! = n(n-1)\dots(n-n)!$ .

Lembre-se do que fizemos na parte contagem de subconjuntos, nós eliminamos conjuntos que "davam na mesma" dividindo a fórmula da combinação pela cardinalidade dos subconjuntos, faremos algo bem semelhante aqui.

Vamos usar a palavra "banana" como exemplo, se ignorarmos os que "a" repete-se três vezes e "n" repete-se duas vezes, então o número de combinação possíveis são  $6! = 720$ . Agora vamos fixar as letras "b" e "a" e permutar apenas as letras "n" então teremos:

BA $N$ ANA  
BA $N$ ANA

Obviamente permanecem a mesma palavra mesmo trocando "N" de lugar, e o número de palavras que permanecem iguais é o fatorial da cardinalidade de "N" dentro do multiconjunto. Agora pense se realmente permutássemos todo o multiconjunto, nós teríamos sempre essas duas combinações somente com ambos os N's mudando de lugar, portanto podemos dividir  $6!$  pela cardinalidade de "N" que no caso é 2.

Agora vamos fazer o mesmo com a letra "A" (vou tentar deixar mais fácil de identificá-los nas combinações):

BA<sub>1</sub>NA<sub>2</sub>NA<sub>3</sub>  
BA<sub>1</sub>NA<sub>3</sub>NA<sub>2</sub>  
BA<sub>2</sub>NA<sub>1</sub>NA<sub>3</sub>  
BA<sub>2</sub>NA<sub>3</sub>NA<sub>1</sub>  
BA<sub>3</sub>NA<sub>1</sub>NA<sub>2</sub>  
BA<sub>3</sub>NA<sub>2</sub>NA<sub>1</sub>

E novamente seguimos a mesma lógica, para as várias combinações da palavra "banana" teremos o fatorial da multiplicidade de "A" em palavras que

dão na mesmo, então podemos dividir  $6!$  por  $3!$ , para eliminar as palavras iguais.

Porém já sabemos que o número de permutações não é  $6!$ , mas sim  $\frac{6!}{2!}$ , agora é só dividir isso por  $3!$ , então,  $\frac{6!}{2!3!}$ .

Agora o **Fato 3.8.1** ficou bem mais intuitivo.

### 3.9 Os Princípios da Divisão e da Casa dos Pombos

Estamos chegando ao fim de nossa caminhada pelos fundamentos matemático do nosso curso faltam apenas mais alguns conceitos em nossa bagagem matemática para seguirmos adiante, um deles é o **Princípio da Divisão**.

Para isso é preciso introduzir uma nova notação,  $\lfloor x \rfloor$  é o *floor* (vou manter o termo em inglês) é o número inteiro menor que  $x$  mais próximo  $x$ . E  $\lceil x \rceil$  é o *ceiling*, ou seja, o número inteiro maior que  $x$  mais próximo de  $x$ .

Agora imagine que você possui 15 bolinhas e 10 recipientes e queira dispô-las dentro de cada recipiente, quantas bolinhas cada recipiente terá? Bem, podemos simplesmente dividir o número de bolinhas pelo número de recipientes,  $\frac{15}{10} = 1,5$ . Ok, isso não está completamente errado, mas pelo menos da forma que estamos trabalhando não temos 0,5 bolinhas, esse valor é a média de bolinhas por recipiente, isso quer dizer que na verdade cada recipiente possui pelo menos uma. Disso segue:

**Fato 3.9.1** (O Princípio da Divisão)

Suponha  $n$  objetos dispostos em  $k$  caixas.

Então pelo menos uma caixa possui  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  objetos ou mais, e pelo menos uma caixa possui  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  objetos ou menos.

Agora suponha  $n$  pombos que ao final da tarde voam de volta para seu viveiro onde existem  $k$  casinhas, o que ocorre se  $n > k$  ou  $n < k$ ? No primeiro caso  $\frac{n}{k} > 1$ , isso é, existe pelo menos uma casinha que possui mais que um pombo, no segundo caso  $\frac{n}{k} < 1$  o que significa que ao menos uma casinha está vazia. Disso surge:

**Fato 3.9.2** (O Princípio da Casa dos Pombos)

Suponha  $n$  objetos dispostos em  $k$  caixas.

Se  $n > k$ , então pelo menos uma caixa possui mais que dois objetos.

Se  $n < k$ , então pelo menos uma caixa está vazia.

Sabemos que parece bobo ter que definir isso, mas o próprio Hammack dá

uma boa explicação que não tiraríamos uma única vírgula:

Like the multiplication, addition and subtraction principles, the division and pigeonhole principles are intuitive and obvious, but they can prove things that are not obvious. The challenge is seeing where and how to apply them.<sup>22</sup>

### 3.10 Prova Combinatorial

No decorrer desse capítulo provamos diversas relações combinatoriais como:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Porém existem outras relações interessantes que ainda podemos provar por aqui, por exemplo:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Suponha um conjuntos  $S = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e  $|S| = 2n$ , se quiser combinar seus elementos  $n$  a  $n$  pode selecionar  $k$  elementos de  $A$  e  $n - k$  de  $B$ , pois  $k + (n - k) = n$ , então pelo **Princípio da Multiplicação**  $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ . Como  $0 \leq k \leq n$ , temos que:

$$\binom{2n}{n} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{0 \text{ de } A} \underbrace{\binom{n}{n}}_{n \text{ de } B} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{1 \text{ de } A} \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n-1 \text{ de } B} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{n \text{ de } A} \underbrace{\binom{n}{0}}_{0 \text{ de } B}$$

Sabemos que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , teremos:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \blacksquare$$

<sup>22</sup>Tradução: "Como os princípios da multiplicação, adição e subtração, o princípio da divisão e da casa dos pombos são intuitivos e obvios, mas eles podem provar coisas que não são óbvias. O desafio é ver onde e como aplicá-los."

**Parte II**

**Como Provar Afirmações  
Condicionais**



## 4

# Prova Direta

Quando estudamos matemática é muito comum nos depararmos com provas, saber lê-las é muito importante para a compreensão de princípios matemática e teoremas,. Tão importante quanto saber ler uma prova é saber fazê-la, o processo de provar afirmações mostra que, além de ter entendido, você consegue transmitir esse conhecimento, com o tempo e prática conseguirá fazer boas demonstrações.

Como o objetivo do curso é um preparatório para uma matemática bem diferente do que vemos durante o Ensino Médio (ou até mesmo em algumas graduações, infelizmente), fugindo da maneira mecânica e da memorização de fórmulas, é de extrema importância que essa parte não seja omitida, agora vamos entender o que são **teoremas**, **definições**, **colorários**, etc, e algumas técnicas de **demonstração**.

### 4.1 Teoremas

No decorrer do nosso curso já vimos alguns teoremas e suas provas, e todos seguem um padrão, são proposições **condicionais**. Relembrando um pouco de nosso estudo de lógica, as condicionais seguem o formato "Se P, então Q", boa parte dos teoremas são escritos exatamente assim, mas são facilmente compreendidos dessa maneira.

Vamos usar o **Teorema Binomial** como exemplo:

**Teorema 3** (Teorema Binomial)

Seja  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , logo:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Repare que podemos trocar "Seja" por "Se" e "logo" por "então" sem que haja a perda ou distorção do significado.

O valor  $n$  ser um número natural e maior do que zero é a condição para que o restante do teorema seja verdadeiro, logo, é uma relação condicional. Você pode fazer esse exercício com outros teoremas, substituindo os termos utilizados e vendo se o significado altera-se.

Outro caso possível são os teoremas **bicondicionais** ( $\Leftrightarrow$ ), exemplo:

#### **Teorema 4**

$n$  é par se, e somente se,  $n^2$  é par.

Aqui temos duas condições, é fácil vermos que um é condição para o outro, por isso, bicondicional.

Mas não somente teoremas seguem essas estruturas lógicas, sempre iremos nos deparar com outros termos na nossa jornada pela matemática, por isso precisamos dar o significado certinho de cada um deles.

**Teorema:** reservado para afirmações mais importantes.

**Proposições:** ainda uma afirmação, mas de significância inferior.

**Colorário:** consequência imediata de um teorema ou proposição.

**Lema:** teorema com propósito de melhorar outro.

## 4.2 Definições

Nessa sessão não iremos nos prolongar, é muito simples, aqui haverão algumas observações e nada que vá muito além disso.

É sempre importante ressaltar a importância de definições precisas, uma técnica de demonstração é a por **absurdo** onde primeiro negamos o teorema e disso chegamos à uma conclusão que contradiga uma definição.

As definições servem que fuçamos de ambiguidades e confusões, ao ler e escrever uma prova é preciso que ambos concordem com as definições envolvidas, falar o mesmo "idioma" é obrigatório.

Outra coisa que precisamos ressaltar é que **não tem como provar uma definição**, definições tem apenas o papel de comunicar o que é o que, não há como demonstrar.

### 4.3 Prova Direta

As provas diretas são aquelas que partimos direto da condição para a conclusão, sem tentar chegar a um absurdo por exemplo.

Mas também não é tão simples assim, já sabemos o começo e o final do teorema ou proposição, nosso objetivo é desenvolver a prova partindo da condição obedecendo-as e as definições envolvidas na demonstração.

Um exemplo é a proposição:

**Proposição 1**

Se  $x$  é ímpar,  $x^2$  é ímpar.

Sua demonstração é bem simples e fácil de ser lida:

**Demonstração 4.3.1**

Um número  $x$  ímpar é por definição se  $x = 2a + 1$ , então  $x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ .

Seja  $b = 2a^2 + 2a$ , então  $x^2 = 2b + 1$ , ou seja, um número ímpar. ■

Nosso exercício aqui será analisar a demonstração acima.

Pimeiro chamamos a definição de um número ímpar, e repare que em nenhum momento ela é violada, fazemos uma álgebra simples para aparecer o que queremos, a definição de um número ímpar novamente.

Repare no ■ ao final da prova, a partir de agora o verá direto e é importante saber o que significa. Seu significado é abreviado como Q.E.D, que vem a expressão do latim "Quod erat demonstrandum", numa tradução livre, "como se queria demonstrar".

É importante que pegue algumas proposições simples como essa que provamos acima para que exercite essa habilidade, comece do básico para desenvolver o raciocínio e aos poucos aumente a dificuldade. Isso será inevitável em sua trilha pela matemática, com o tempo se verá insatisfeito com as provas de livros e conseguirá escrever as suas.

### 4.4 Uso de casos

Podemos usar os casos é de grande ajuda quando precisamos seguir um processo diferente caso um número seja negativo ou positivo, par ou ímpar, etc.

Pode ser que essas diferenças exijam diferentes tratamentos, mas é impor-

tante lembrar que é essencial que a generalidade da prova não seja perdida.  
Exemplo:

**Proposição 2**

Todo múltiplo de 4 é igual à  $1 + (-1)^n(2n - 1)$  para alguns  $n \in \mathbb{N}$

**Demonstração 4.4.1**

**Caso 1:** se  $n$  é par, então  $(-1)^n = 1$ , um número  $x$  é par se  $x = 2a$ , portanto  $1 + (2(2a) - 1) = 4a$ ,  $\forall a$

**Caso 2:** seja  $n$  um número ímpar, logo  $n = 2a + 1$  e  $(-1)^n = -1$ , portanto  $1 - 2n + 1 = -2n + 2 = -2(2a + 1) + 2 = -4a$

Portanto  $1 + (-1)^n(2n - 1)$  é múltiplo de 4  $\forall n$ , seja ele par ou ímpar. ■

## 4.5 Tratamento de Casos Semelhantes

Pode ser que hajam enganos e utilizemos duas provas diferentes de maneira desnecessária, isso deixa cansativo e tedioso de ser lida, temos que cuidar com os casos em que não existe essa necessidade.

O exemplo que temos no livro é ótimo para vermos isso:

**Proposição 3**

Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$  com paridades opostas, então  $a + b$  é ímpar.

Nesse caso poderíamos fazer no caso 1 com  $a$  sendo par e  $b$  ímpar, no caso 2 o contrário, mas ficaria massante de ler, portanto em respeito ao leitor omitirei essa parte.

**Demonstração 4.5.1**

Se  $a = 2a$  e  $b = 2a + 1$ , então  $a + b = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1$ , como  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ ,  $a + b$  é um número ímpar por definição. ■

## 5

# Prova Contra-positiva

## 5.1 Prova Contrapositiva

As provas diretas partem de uma proposição  $P$  para a conclusão  $Q$  mostrando sem desvios, porém agora aprenderemos uma nova técnica, onde supomos de  $\sim Q$  e concluimos  $\sim P$ .

Pela tabela verdade fica fácil ver que  $P \Rightarrow Q$  e  $\sim Q \Rightarrow \sim P$  são **lógicamente equivalentes**.

Se escrever uma tabela verdade ficará fácil de ver.

Vamos fazer alguns exemplos para simplificar a compreensão

### Proposição 4

Se  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

**Prova:** Suponha que  $n$  seja ímpar, ou seja,  $n = 2a + 1, a \in \mathbb{Z}$ , então  $n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 2a + 1 = 2(2a^2 + a) + 1 \therefore n^2$  é ímpar.

### Proposição 5

Suponha  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Se  $a^2(b^2 - 2b)$  é ímpar, então  $a, b$  são ímpares.

**Prova:** Suponha  $a, b$  pares tq.  $a = 2x$  e  $2y$ , então:

$$a^2(b^2 - 2b) = 4x^2(4y^2 - 4y) = 16x^2y^2 - 16x^2y = 2(8x^2y^2 - 16x^2y).$$

Logo,  $a^2(b^2 - 2b)$  é par

## 5.2 Congruência dos Inteiros

### Definição 5.2.1 (n-Módulo Congruente)

Dados  $a, b$  e  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que são  $n$ -módulo congruentes de  $n|(a - b)$ . Expressamos como  $a \equiv b \pmod{n}$ . Se  $a$  e  $b$  não são  $n$ -módulo congruentes

expressamos como  $a \not\equiv b \pmod{n}$

O que isso nos diz é que se  $a \equiv b \pmod{n}$ , então o resto da divisão de  $a/n$  e  $b/n$  são iguais.

Isso é fácil de mostrar, se  $a = xn + r$  e  $b = yn + r$ , então  $a - b = n(x - y)$  como podemos dividir ambos os lados da equação por  $n$  e ainda ter valores inteiros, então  $a \equiv b \pmod{n}$ .

### 5.3 A Escrita Matemática

Uma observação importante a ser feita antes de começar a leitura dessa sessão é que praticamente apenas traduzimos os enunciados das "normas", pois não vimos boa maneira para resumir. Mas ainda assim tornamos o conteúdo acessível e respeitando o trabalho de Richard Hammack.

Ao escrever provas temos que nos atentar tanto ao rigor matemático quanto à clareza, para isso existem boas práticas para a escrita matemática que recomendamos que sejam seguidas. São elas:

**01. Comece as frases com palavras, não símbolos matemática**

**02. Termine as sentenças com pontos** (mesmo que terminem com símbolos matemáticos).

**03. Separe símbolos e expressões com palavras.**

**04. Evite mal-uso de símbolos.**

**05. Evite uso desnecessário de símbolos.**

**06. Faça uso da primeira pessoa do plural.**

**07. Use voz ativa.**

**08. Explique cada novo símbolo.**

**09. Cuidado com os "isso".**

**10. "Desde", "porque", "como", "para", "então",** são palavras muito comuns em provas, porém num geral significam a mesma coisa quando utilizamos a forma condicional  $Q \Rightarrow P$ .

**11. "Assim", "portanto", "logo", "consequentemente**, outras palavras que aparecem muito frequentemente nas provas, porém são mais comum nos finais.

**12. Clareza é o padrão-ouro da escrita matemática.**

## 6

# Prova por Contradição

## 6.1 Provando Afirmações com Contradição

A Prova por Contradição já foi mencionada nos capítulos anteriores e aprenderemos ela no decorrer desse capítulo.

Ela consiste em assumir que o que quer provar seja falso leva à uma contradição, então o modelo é mais ou menos assim: **Proposição  $P$**

Assuma  $\sim P$

.

Então  $C \wedge \sim C$

Perceba que  $C \wedge \sim C$  é a contradição que buscamos, pois algo não pode ser e não-ser ao mesmo tempo. Essa relação fica muito mais simples de ser compreendida numa tabela verdade.

$P$	$C$	$\sim P$	$\sim C$	$C \wedge \sim C$	$(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$
V	V	F	F	F	T
V	F	F	V	F	T
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

Vamos fazer alguns exemplos para entender como funciona na prática:

### Definição 6.1.1

Um número real  $x$  é racional se  $\exists a, b \in \mathbb{Z}$  tq.  $x = \frac{a}{b}$

Um número real  $x$  é irracional se  $\nexists a, b \in \mathbb{Z}$  tq.  $x = \frac{a}{b}$

### Proposição 6

O número  $\sqrt{6}$  é irracional



*Prova:* Assuma que  $\sqrt{6}$  é racional, então:

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b}$$

Vamos supor que  $\frac{a}{b}$  esteja completamente reduzida (ou seja, seu **Máximo Divisor Comum** é 1), isso é, não temos  $a$  e  $b$  pares. Elevamos ambos os lados da equação ao quadrado:

$$6 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 6b^2$$

Como podemos ver  $a^2$  é múltiplo de 3, logo  $a$  é múltiplo de 6 (Verifique), então pode ser escrito como  $a = 6x$ .

$$(6x)^2 = 6b^2 \Rightarrow 36x^2 = 6b^2 \Rightarrow 6x^2 = b^2$$

Então  $b^2$  é múltiplo de 6, logo  $6|b$ .

Portanto  $a$  e  $b$  são múltiplos de 6, o que viola nossa suposição, ou seja, uma contradição ■

## 6.2 Provando Afirmações Condicionais por Contradição

Nessa sessão trabalharemos com as afirmações condicionais, o processo é bem semelhante e novamente mostraremos uma tabela verdade para mostrar equivalência lógica, mas antes vamos ao modelo da prova:

**Proposição**  $P \Rightarrow Q$

*Prova:* Assuma  $P \Rightarrow \sim Q$

.

.

.

$(C \wedge \sim C)$

Como já sabemos  $\sim (P \Rightarrow Q)$  e  $P \Rightarrow \sim Q$  são logicamente equivalentes, mas mesmo assim vamos visualizar isso.

$P$	$Q$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\sim (P \Rightarrow Q)$	$P \Rightarrow \sim Q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V

E novamente vamos por em prática:

**Proposição 7**

Dados  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , então  $a^2 + 4b - 2 \neq 0$

*Prova:* Suponha que  $a^2 + 4b - 2 = 0$  isso implica que  $a^2 + 4b = 2$ , logo:

$$a = \sqrt{2 - 4b} \quad (1)$$

$$b = \frac{2 - a^2}{4} \quad (2)$$

Substituindo (2) em  $a^2 + 4b - 2 = 0$ :

$$a^2 + a^2 + 2 - 2 = 0$$

**6.3 Combinando Técnicas****6.4 Uma Advertência**

As Provas por Contradição são realmente poderosas, porém o estudante deve sempre dar preferência por outras técnicas, essa é um último recurso caso uma Prova Direta ou Contrapositiva não tenha funcionado.

**Parte III**

**Mais Sobre Provas**

## 7

# Prova de Afirmações Não-Condicionais

No capítulo anterior aprendemos a provar afirmações condicionais, mesmo que sejam a massiva maioria dos teoremas sigam esse padrão, não são todos. Durante seus estudos na matemática verá muitos teoremas que são bicondicionais, do tipo  $P \Leftrightarrow Q$ , e com certeza, em algum momento, precisará prová-los. E esse é o objetivo deste capítulo.

### 7.1 Prova de Se, e somente se

Pelos nossos estudos de lógica sabemos que  $P \Leftrightarrow Q$  é equivalente a  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ . Portanto para provarmos esse tipo de proposição é necessário que tanto  $P \Rightarrow Q$  e  $Q \Rightarrow P$  sejam verdadeiros.

É válido lembrar que pode utilizar a técnica que preferir para provar as condições.

#### Proposição 8

Suponha  $x \in \mathbb{Z}$ . Então  $x$  é par se, e somente se  $3x + 5$  for ímpar.

*Prova:* Se  $x = 2a$ , então  $3(2a) + 5$ , sabemos que 5 é um número ímpar e pode ser escrito como  $4 + 1$ . Substituímos isso na equação e:

$$3(2a) + 4 + 1 = 6a + 4 + 1 = 2(3a + 2) + 1$$

Reciprocamente. Se  $3x + 5 = 2(a) + 1$ , então:

$$3x + 5 = 2a + 1$$

$$3x = 2a - 4$$

$$x = 2 \left( \frac{a - 2}{3} \right) \quad \blacksquare$$

## 7.2 Afirmações equivalentes

Ao estudarmos matemática podemos encontrar teoremas que sejam equivalentes. Porém ainda assim precisamos provar que sejam equivalentes.

Suponha os teoremas  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$  e  $(d)$ , e que sejam equivalentes entre si, como demonstrar essa equivalência? Bem, é simples, basta demonstrar que um implica em outro de forma circular.

$$\begin{array}{ccc} (a) & \Rightarrow & (b) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (c) & \Leftarrow & (d) \end{array}$$

E para como estamos lidando com equivalência. precisamos provar que são teoremas bicondicionais, como já realizamos o primeiro passo, precisamos inverter o sentido desse "círculo", e mostrar que:

$$\begin{array}{ccc} (a) & \Leftarrow & (b) \\ \downarrow & & \uparrow \\ (c) & \Rightarrow & (d) \end{array}$$

Assim sabemos que os 4 teoremas são equivalentes, isso é:

$$\begin{array}{ccc} (a) & \Leftrightarrow & (b) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ (c) & \Leftrightarrow & (d) \end{array}$$

## 7.3 Provas de Existência; Provas de existência e unicidade

Vimos até aqui teoremas gerais, como é a maioria dos casos, queremos sempre trabalhar sem perder a generalidade dos nossos teoremas. Teoremas do tipo:

**Teorema:** Seja  $p(x)$  uma função relacional, então  $\forall x, p(x)$  .

.

.

Logo,  $p(x)$  ■

Nessa sessão estamos mais interessados nos teoremas do tipo:

**Teorema:** Seja  $p(x)$  uma função relacional, então  $\exists x tq. p(x)$  .

.

.

Logo, se  $x = k \Leftrightarrow p(x)$  ■

Um exemplo bem simples que podemos dar é:

**Teorema 5**

Existe  $x \in \mathbb{N}$  tal que  $x^x = x$

Queremos provar que existe um único valor de  $x$  que satisfaça nosso teorema, podemos fazer da seguinte maneira:

*Prova:* se  $x = 1$ , então  $1^1 = 1$

Isso é o suficiente pra provar que ela é única? Não, como estamos trabalhando dentro do conjunto dos números naturais então vamos complementar nossa prova e mostrar que para  $x > 1, x^x \neq x$ .

*Prova:* Se  $x = 1$ , então  $1^1 = 1$ .

Suponha  $x = n, n > 1$ , então:

$$n^n = n_1 n_2 n_3 \dots n_n \neq n$$

Agora suponha que  $n^n = n$ . Dividimos por  $n$  e concluímos que:

$$n^{n-1} = 1$$

O que é um absurdo, pois  $n^{n-1} = n_1 n_2 n_3 \dots n_{n-1} = 1$ , se, e somente se,  $n = 1$  ■

Mesmo que esse seja um teorema bem simples dá pra usar um pouco mais a imaginação e inventá-lo um pouco:

**Teorema 6**

Existe  $x \in \mathbb{Z}$  tal que  $x^x = x$

*Prova:* Já provamos que é verdade para  $x = 1$  e para qualquer  $x > 1$  isso é falso. Porém agora estamos trabalhando dentro do conjuntos dos inteiros, isso inclui os números negativos, e conseqüentemente teremos que mostrar que para  $x = \pm 1$  o teorema é verdadeiro:

Se  $x = -1$  então:

$$(-1)^{-1} = \frac{-1}{(-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

Agora suponha que  $x = m, m < -1$ , então  $m^m \neq m$ , porque:

$$m^m = \frac{m}{m^{-m+1}} = \frac{m}{m_1 m_2 \dots m_{-m+1}} = \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_{-m}} \neq m$$

Logo,  $x^x = x \Leftrightarrow x = \pm 1$  ■

## 7.4 Provas contrativas e não construtivas

Provas construtivas e não construtivas diferem em sua maneira de citar exemplos no decorrer de seu desenvolvimento. Uma prova construtiva apresenta um exemplo de forma explícita para provar um teorema, como fizemos com a sessão anterior.

As não-construtivas apostam mais na capacidade dedutiva dos leitores e normalmente omitem boa parte dos exemplos, sendo bem diretos com a demonstração.

## 8

# Provas Envolvendo Conjuntos

Em seus estudos verá teoria dos conjuntos incontáveis vezes em diversas campos. Em especial a Análise Real (que é para o que estamos nos preparando), todo livro que se preze tem um capítulo específico apenas para conjuntos. Isso nos revela o quão relevante e importante é o estudo dos conjuntos.

Conforme for avançando na matemática verá muitas provas envolvendo conjuntos, álgebra linear, abstrata, análise. Por isso é importante que aprender a ler e compreender provas envolvendo-os.

Caso seja necessário revise os primeiros capítulos do Projeto Matemática.

### 8.1 Como provar que $a \in A$

Sabemos que um conjunto é determinado por uma regra  $P(x)$ , os elementos do conjunto universo que obedeçam essa  $P(x)$  são elementos desse conjunto. Então, dados um conjunto qualquer:

$$A = \{x : P(x)\}$$

Para provar que um  $x \in A$  temos que mostrar que  $x$  satisfaz a condição  $P(x)$ .

**Exemplo:** Prove que  $x \in A$  para  $x = 5$  onde  $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 4\}$ . *Prova:* Dados dois números  $a$  e  $b$ ,  $a \geq b$  se, e somente se,  $a - b > 0$ . Supondo que  $5 \leq 4$  então  $5 - 4 \leq 0$ , o que claramente é um absurdo. ■

### 8.2 Como provar que $A \subset B$

Acabamos de ver como provar que um elemento faz parte de um conjunto o que é bem simples. Porém, como provar que um conjunto é subconjunto de outro? Ainda sim, muito simples.



Vamos relembrar que  $A$  é um subconjunto de  $B$  se todo elemento de  $A$  é também elemento de  $B$ . Em notação matemática:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in B$$

Sabendo que o conjunto  $A$  é determinado por uma sentença qualquer  $P(x)$  e o conjunto  $B$  por uma sentença qualquer  $Q(x)$ ,  $A \subset B \Leftrightarrow [P(x) \Rightarrow Q(x)]$ , é importante lembrar que a recíproca não precisa ser verdadeira, já que se dadas todas as condições  $B$  é pelo menos tão grande quanto  $A$ , ou seja, existem elementos em  $B$  que não satisfazem  $P(x)$ .

Então, para provarmos precisamos mostrar que se  $x$  satisfaz  $P(x)$  também o faz com  $Q(x)$ , isso para todo  $x \in A$ .

**Exemplo:** Seja  $A = \{x \in \mathbb{N} : 2|x\}$ , e  $B = \{x \in \mathbb{N} : x^n = 2a \forall a, n \in \mathbb{Z}\}$ . Prove que  $A \subset B$ :

*Prova:* Se 2 é divisível de  $x$  como a primeira sentença determina então  $x = 2b, \forall b \in \mathbb{Z}$ , ou seja, é um número par. Supondo que existe  $n$  tal que  $x^n = 2a + 1$  teremos que:

$$(2b)^n = (2b)_1(2b)_2 \dots (2b)_n = 2a + 1$$

Porém se assumirmos que  $c = 2^{n-1}b^n$ , então podemos reescrever  $(2b)^n = 2c$ , isso implicaria que:

$$2c = 2a + 1$$

A dúvida que fica: Existe  $a$  inteiro que torne isso possível? Bom, não, observe que:

$$a = \frac{2c - 1}{2} = c - \frac{1}{2}$$

Porém  $c$  é um número inteiro qualquer, então  $a \notin \mathbb{Z}$ , o que contradiz a definição do conjunto  $B$ . Logo,  $A \subset B$ . ■

9

# Contraprova

Here comes some text

10

# Indução Matemática

Here comes some text

## Parte IV

# Relações, Funções e Cardinalidade

11

# Relações

Here comes some text

**12**

# **Funções**

Here comes some text

13

## Provas com Cálculo Infinitesimal

Here comes some text

14

## Cardinalidade de Conjuntos

Here comes some text