Em seus estudos verá teoria dos conjuntos incontáveis vezes em diversas campos. Em especial a Análise Real (que é para o que estamos nos preparamos), todo livro que se preze tem um capítulo específico apenas para conjuntos. Isso nos revela o quão relevante e importante é o estudo dos conjuntos.
Conforme for avançando na matemática verá muitas provas envolvendo conjuntos, álgebra linear, abstrata, análise. Por isso é importante que aprender a ler e compreender provas envolvendo-os.
Caso seja necessário revise os primeiros capítulos do Projeto Matemática.

## 0.1 Como provar que $a \in A$

Sabemos que um conjunto é determinado por uma regra $P(x)$, os elementos do conjunto universo que obedeçam essa $P(x)$ são elementos desse conjunto. Então, dados um conjunto qualquer:

$$A = \{x : P(x)\}$$

Para provar que um $x \in A$ temos que mostrar que $x$ satisfaz a condição $P(x)$.
**Exemplo:** Prove que $x \in A$ para $x = 5$ onde $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 4\}$. *Prova:* Dados dois números $a$ e $b$, $a \geq b$ se, e somente se, $a - b > 0$. Supondo que $5 \leq 4$ então $5 - 4 \leq 0$, o que claramente é um absurdo. ■

## 0.2 Como provar que $A \subset B$

Acabamos de ver como provar que um elemento faz parte de um conjunto o que é bem simples. Porém, como provar que um conjunto é subconjunto de outro? Ainda sim, muito simples.
Vamos relembrar que $A$ é um subconjunto de $B$ se todo elemento de $A$ é também elemento de $B$. Em notação matemática:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in B$$

Sabendo que o conjunto $A$ é determinado por uma sentença qualquer $P(x)$ e o conjunto $B$ por uma sentença qualquer $Q(x)$, $A \in B \Leftrightarrow [P(x) \Rightarrow Q(x)]$, é importante lembrar que a recíproca não precisa ser verdadeira, já que se dadas todas as condições $B$ é pelo menos tão grande quanto $A$, ou seja, existem elementos em $B$ que não satisfazem $P(x)$.

Então, para provarmos precisamos mostrar que se $x$ satisfaz $P(x)$ também o faz com $Q(x)$, isso para todo $\in A$.
**Exemplo:** Seja $A = \{x \in \mathbb{N} : 2|x\}$, e $B = \{x \in \mathbb{N} : x^n = 2a\forall a, n \in \mathbb{Z}$. Prove que $A \subset B$:

*Prova:* Se 2 é divisir de $x$ como a primeira sentença determina então $x = 2b, \forall b \in \mathbb{Z}$, ou seja, é um número par. Supondo que existe $n$ tal que $x^n = 2a + 1$ teremos que:

$$(2b)^n = (2b)_1(2b)_2 \dots (2b_n) = 2a + 1$$

Porém se assumirmos que $c = 2^{n-1}b^n$, então podemos reescrever $(2b)^n = 2c$, isso implicaria que:

$$2c = 2a + 1$$

A dúvida que fica: Existe $a$ inteiro que torne isso possível? Bom, não, observe que:

$$a = \frac{2c - 1}{2} = c - \frac{1}{2}$$

Porém $c$ é um número inteiro qualquer, então $a \notin \mathbb{Z}$, o que contradiz a definição do conjunto $B$. Logo, $A \in B$. $\blacksquare$

## 0.3 Provando que $A = B$

A igualdade entre conjuntos depende que $A \subset B$ e $B \subset A$. Assim, para provar que um conjunto é igual à outro utilizamos o mesmo princípio da seção anterior, porém realizamos para ambas as partes da igualdade.
A estrutura seria algo mais ou menos assim:

**Teorema** $A = B$
*Prova*: $\forall x \in A$ ... $x \in B$; e
$\forall x \in B$ ... $x \in A$
Portanto, $A = B$ $\blacksquare$
Um exemplo para que fique mais claro:

**Teorema 1**
Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos quaisquer, então:

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

*Prova*:

$$\begin{aligned}
(A - B) \times C &= \{(x, y) | x \in (A - B) \land y \in C\} && \text{(Def. de } \times\text{)} \\
&= \{(x, y) | x \in A \land x \notin B \land y \in C\} && \text{(Def. de -)} \\
&= \{(x, y) | x \in A \land x \notin B \land y \in C \land y \in C\} && P = P \land P \\
&= \{(x, y) | (x \in A \land y \in C) \land (x \notin B \land y \in C)\} && \text{Rearranjo} \\
&= (A \times C) - (B \times C) && \text{(Def. de } \times \text{ e -)} \blacksquare
\end{aligned}$$