SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Magdalena Stanušić

Bruno Sačarić

Mario Šaško

**PARTICIJE PRIRODNOG BROJA**

Projekt iz programske potpore

Mentor: Andrea Aglić Aljinović

U Zagrebu, siječanj 2019

Sadržaj

[1. Uvod 3](#_Toc535066934)

[2. Particije prirodnog broja 3](#_Toc535066935)

[2.1. Općenito o particijama 3](#_Toc535066936)

[2.1.1. Definicije 3](#_Toc535066937)

[2.1.2. Primjeri 4](#_Toc535066938)

[2.2. Generiranje svih particija 6](#_Toc535066939)

[2.2.1. Broj particija 6](#_Toc535066940)

[2.2.2. Algoritam za generiranje svih particija 7](#_Toc535066941)

[2.3. Generiranje particija od *m* elemenata 8](#_Toc535066942)

[3. Grafički prikaz 9](#_Toc535066943)

[3.1. Ferrerovi dijagrami 9](#_Toc535066944)

[3.2. Konjugirane particije 9](#_Toc535066945)

[4. Programska implementacija 9](#_Toc535066946)

[5. Zaključak 9](#_Toc535066947)

[6. Literatura 9](#_Toc535066948)

# Uvod

# Particije prirodnog broja

## Općenito o particijama

### Definicije

**Definicija 1.** Neka je te i . **Particija broja**  je uređena -torka prirodnih brojeva

za koju vrijedi

Broj naziva se **težina particije**, a brojeve nazivamo **dijelovima particije**.

Broj zovemo **duljina particije** i označavamo s .

**Definicija 2.** Particiju težine kratko zapisujemo kao . Skup svih particija označavamo s , to jest

a broj svih mogućih particija od s , odnosno .

**Definicija 3.** Neka je te i . Broj svih particija duljine označava se s , to jest

Iz same definicije particije i broja svih mogućih particija jasno je da će funkcija particije ubrzano rasti što nas dovodi do problema kombinatorne eksplozije.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Tablica 1. Broj particija prirodnog broja

**Teorem 1.** Za svaki vrijedi

Pri čemu je najveći dio u particiji .

### Primjeri

**Primjer 1.** Broj 5 ukupno ima 7 particija:

}

**Primjer 2.** Particije broja 8 duljine:













Uočimo:

**Primjer 3.** Postoji 11 particija broja 6:

Vrijednosti funkcije za sve su

Sada ispišimo sve one particije kojima je najveći dio jednak i:

Uočimo da je vrijednost funkcije jednaka broju particija od čiji je najveći dio jednak za sve

**Primjer 4.** Postoji 15 particija broja 7:

Opet ćemo usporediti broj particija duljina s brojem particija čiji je najveći dio jednak . Konstruiramo sljedeću tablicu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Particije za koje je najveći dio jednak |
|  |  | (1,1,1,1,1,1,1) |
|  |  | (2,2,2,1), (2,2,1,1,1), (2,1,1,1,1,1) |
|  |  | (3,3,1), (3,2,2), (3,2,1,1), (3,1,1,1,1) |
|  |  | (4,3), (4,2,1), (4,1,1,1) |
|  |  | (5,2), (5,1,1) |
|  |  | (6,1) |
|  |  | (7) |

I u ovom slučaju vrijedi da je vrijednost funkcije jednaka broju particija od čiji je najveći dio jednak za sve

Svojstvo uočeno u primjerima 3. i 4. vrijedi i općenito. (Teorem 1.)

## Generiranje svih particija

### Broj particija

Kao što smo do sada pokazali, broj particija raste vrlo brzo sa sve većim prirodnim brojem te dolazi do kombinatorne eksplozije.

Da ne bismo morali svaki put tražiti sve particije prirodnog broja kako bismo našli sami broj particija uvelike je pomogao matematičar Srinivasa Ramanujan.

Srinivasa Ramanujan poznati je indijski matematičar koji je živio za vrijeme britanske vladavine Indijom. Rođen je 22. listopada 1887. godine u Erodu, a preminuo je 26. travnja 1920 u 33. godini života u Kumbakonamu. Iako nije imao nikakvo formalno matematičko obrazovanje značajno je pridonio matematičkoj analizi, teoriji brojeva i beskonačnim nizovima, uključujući rješenja matematičkih problema koja su se smatrala nerješivima.

Tijekom njegovog kratkog života samostalno je razvio približno 3 900 matematičkih rezultata, većinom identiteta i jednadžbi. Gotovo sve njegove tvrdnje su se dokazale istinitima.

Uz pomoć britanskog matematičara Godfreya Harolda Hardyja 1918. godine pronašao je asimtotsku relaciju za ,

Ta relacija nam je iznimno važna jer smanjuje složenost algoritma za pronalaženje broja particija na svega te su za to potrebni minimalni resursi.

### Algoritam za generiranje svih particija

Particija prirodnog broja može se definirati kao niz nenegativnih prirodnih brojeva takav da je . Najjednostavniji način za generiranje svih pariticija, i jedan od najbržih, je obilaženje u obrnutom leksikografskom poretku. Počinjemo s te završavamo s .

Na primjer, particije broja su

Ukoliko se particija ne sastoji samo od broja , završava s nakon kojeg slijede nula ili još jedinica. Dakle, sljedeća najmanja particija u leksikografskom poretku dobiva se zamjenom sufiksa sa za odgovarajući ostatak . Proces se prilično učinkovit ukoliko pratimo najveći indeks takav da te upotpunimo ostatak s jedinicama.

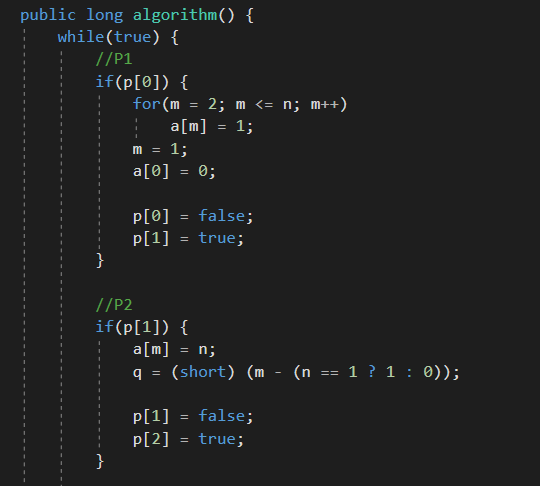
**Algoritam P** (Particije broja u obrnutom lekisikografskom poretku)

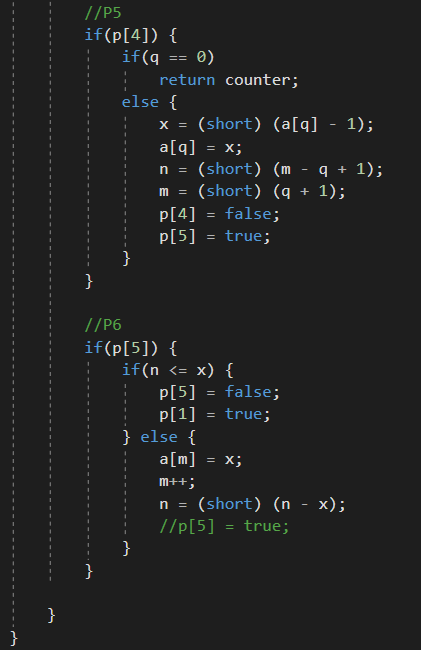
Za dani broj ovaj algoritam generira sve particije gdje je i . Vrijednost postavljena je na .

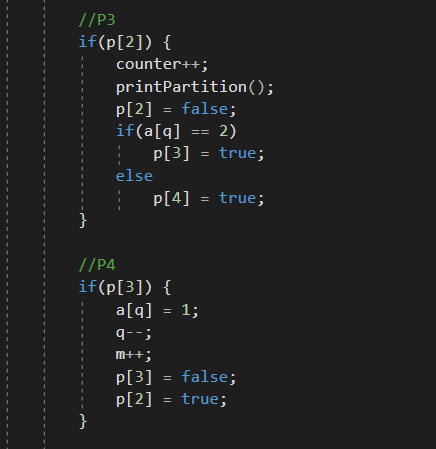
1. [Iniciliziraj] Postavi za . Zatim postavi i .
2. [Sačuvaj posljednji dio] Postavi i .
3. [Posjeti] Posjeti particiju , zatim idi na korak P5 ako je .
4. [Promjeni u ] Postavi te se vrati na korak P3
5. [Smanji ] Zaustavi algoritam ako je . Inače postavi
6. [Kopiraj ukoliko je potrebno] Ako je vrati se na korak P2. Inače postavi i ponovi ovaj korak.

Primijetimo da je operacija prelaska s jedne particiju na sljedeću poprilično jednostavna ako je broj žoperacija prelaska s jedne particiju na sljedeću poprilično jednostavna ako je broj prisutan u particiji. U tom slučaju korak P4 jednostavno promjeni tu u i doda još jednu na desnu stranu. Ovaj prigodna situacije je, na sreću, dosta česta. Na primjer, gotovo 79% svih particija sadrži broj kad je .

### Programska implementacija

U nastavku je prikazana slika programskog kôda gdje je implementiran prethodno objašnjen algoritam. Oznake P1 do P5 označuju u kojem se koraku algoritma nalazimo, a[m] je dio particije.





## 

***Slika 1.*** *Kôd algoritma za generiranje svih particija (Algoritam P)*

## Generiranje particija od *m* elemenata

### Algoritam za generiranje particija od m elemenat

Ukoliko želimo generirati particije određene duljine dostupan nam je ovaj jednostavan algoritam. Sljedeća metoda posjećuje particije *colex* redoslijedom, točnije leksikografskim redoslijedom reflektiranog niza .

**Algoritam H** (Particije broja od elemenata)

Za dani prirodni broj , ovaj algoritam generira sve -torke (takve da gdje je . Granična vrijednost spremljena je u .

1. [Inicijaliziraj] Postavi i za . Također postavi .
2. [Posjeti] Posjeti particiju ,zatim odi na korak H4 ukoliko vrijedi .
3. [Ugađanje Postavi te se vrati na korak H2
4. [Pronađi ] postavi i . Zatim, dok je postavi i .
5. [Povećaj Zaustavi ukoliko je . Inače postavi .
6. [Ugađanje ] Dok je postavi i . Naposljetku postavi te se vrati na korak H2.

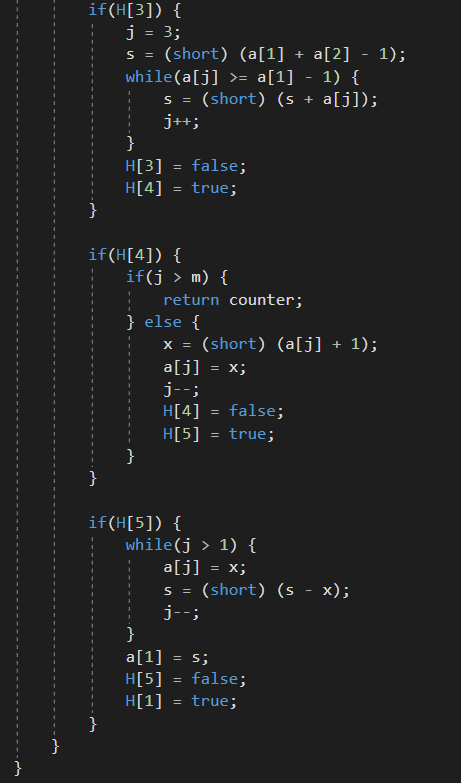
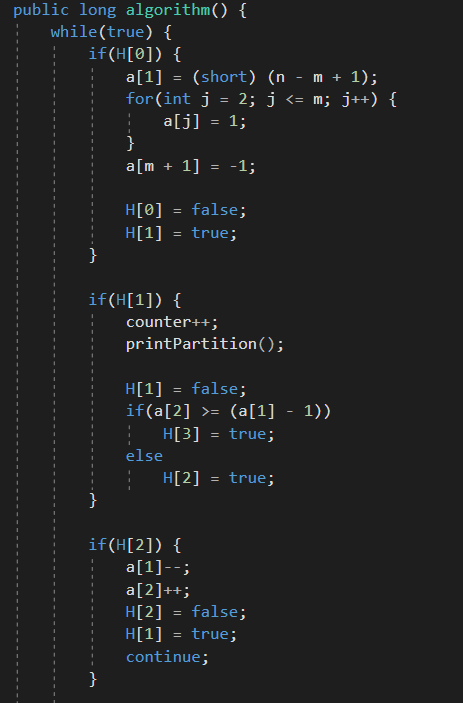
Na primjer, za i particije koje su posjećene su

Osnovna ideja je ta da *colex* redoslijed ide od jedne particije do sljedeće tako da se nađe najmanji takav da može biti povećan bez mijenjanja . Za novu particiju vrijedit će i i ti će se uvjeti ispuniti jedino ako je . Nadalje, za najmanju sljedeću particiju po *colex* redoslijedu vrijedi .

Korak H3 se bavi slučajem kada je , što je dosta često. I zaista, vrijednost od je gotovo uvijek poprilično mala.

### Programska implementacija

U nastavku je prikazan kôd pomoću kojeg je implementiran prethodni algoritam. Oznake H[0] do H[5] označavaju u kojem se koraku algoritma nalazimo, a a[j] su dijelovi particije.



***Slika 2.*** *Kôd algoritma za generiranje particija od m elemenata (Algoritam H)*

# Grafički prikaz

## Ferrerovi dijagrami

Svaku particiju moguće je prikazati grafički pomoću Ferrerovih dijagrama.

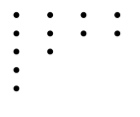
**Definicija 3.1.** Neka je particija od prirodnog broja . **Ferrerov dijagram** je skup svih cjelobrojnih uređenih parova takvih da je

za sve

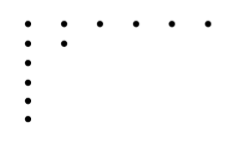
Ferrerovi dijagram za particiju je zapravo skup

gdje je prvi red točkica na Ferrerovom dijagramu, drugi red točkica i tako sve do šti je -ti red točkica.

**Primjer 3.2.** Particija broja prikazana grafički Ferrerovim dijagramom



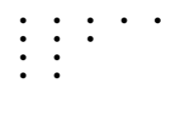
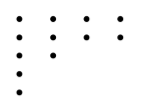
**Primjer 3.3.** Particija broja prikazana grafički Ferrerovim dijagramom



## Konjugirane particije

Konjugirana particija dobiva se tako da se početna particija zrcali te okrene za .

**Primjer 3.4.** Konjugacija particije od broja .



Primijetimo kako smo iz particije od :

Rotacijom za i zrcaljenjem u dijagramu dobili:

Pri čemu je

broj dijelova koji su ,

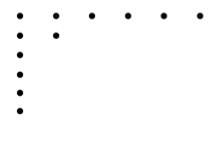
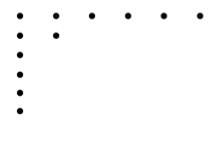
broj dijelova koji su ,

broj dijelova koji su .

Pošto vrijedi slijedi da je jedna particija od n.

**Definicija 3.5.** Kažemo da je particija nastala **konjugiranjem** particije ako je Ferrerov dijagram od dobiven zamjenom stupaca i redaka u Ferrerovom dijagramu particije . Još kažemo da je **konjugirana** particija particije i pišemo .

**Primjer 3.6.** Konjugacija particije od broja



Primijetimo kako je dobiven isti Ferrerov dijagram, dakle -

**Definicija 3.6.** Kažemo da je particija **samokonjugirana** ako je jednaka svojoj konjugiranoj particiji, odnosno ako konjugacijom dobivamo isti Ferrerov dijagram.

## Durfee-ov kvadrat

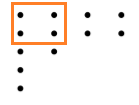
U teoriji brojeva, Durfee-ov kvadrat je atribut particije prirodnog broja.

**Definicija 3.6.** Particija broja ima **Durfee-ov kvadrat** veličine ukoliko je najveći broj takav da particija sadrži barem dijelova s vrijednostima .

Još se može reći, i lakše vizualno zamisliti, da je Durfee-ov kvadrat najveći kvadrat koji se nalazi unutar Ferrerovog dijagrama particije.

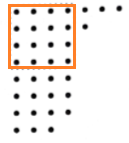
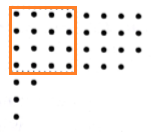
Bočna duljina Durfee-ovog kvadrata poznata je kao **rang** particije.

**Primjer 3.7.** Particija broja ima Durfee-ov kvadrat veličine .



Jasno je iz Ferrerovih dijagrama da particija i njezina konjugirana particija imaju Durfee-ov kvadrat jednake veličine.

**Primjer 3.8.** Particija broja i njezina konjugirana particija imaju Durfee-ov kvadrat veličine .



Particije cijelog broja sadrže Durfee-ove kvadrate sa stranama do i uključujući .

# Zaključak

# Literatura

Barić M. – Particije prirodnih brojeva, diplomski rad, PMF matematički odsjek, 2017.

Aglić Aljinović A. – Ekstremalna kombinatorika, FER 2017./2018.

Martinjak I. – O Eulerovom teoremu o particijama, Osječki matematički list 16 (2016), 1-14

Steven S. Skiena – The algorithm Design Manual, drugo izdanje, New York, SAD, Springer 2008.

Donald Knuth – The art of computer programming Volume 4A, Stanford, SAD, Addison-Wesley

<https://en.wikipedia.org/wiki/Durfee_square>