Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Informática

Teoria da Computação N - INF05501

Trabalho 4 - Redução de Problemas

Bruno Samuel Ardenghi Gonçalves — 550452
João Pedro Müller Alvarenga — 577252
Matheus Luís de Castro — 314943

Prof. Rodrigo Machado
2024/2

1

PP
Entrada: um par (M, w), sendo M uma máquina de Turing sobre o alfabeto Σ, e $w \in \Sigma^*$ uma palavra de entrada para M.
Pergunta: $w \in (\text{ACEITA}(M) \cup \text{REJEITA}(M))$?

PAT
Entrada: uma máquina de Turing M.
Pergunta: $\text{ACEITA}(M) = \Sigma^*$?

Teorema. PAT *é indecidível.*

Demonstração. Vamos construir uma redução $r : \text{PP} \Rightarrow \text{PAT}$ tal que, dada uma instância (M, w) de PP, produzimos uma nova máquina de Turing M' como entrada para PAT. A redução deve satisfazer:

$$(M, w) \in \mathcal{Y}(\text{PP}) \iff M' \in \mathcal{Y}(\text{PAT})$$

.
A máquina M' opera da seguinte forma para uma entrada t:

1. Simula M com entrada w:
   - Se M para (aceitando ou rejeitando), aceita.
   - Se M não para, M' entra em loop infinito.

Agora mostramos que r é uma redução correta:

- **Caso 1:** Se $(M, w) \in \mathcal{Y}(\text{PP})$, ou seja, M para com w, então M' aceita qualquer $t \in \Sigma^*$. Assim, $\text{ACEITA}(M') = \Sigma^*$ e, portanto, $M' \in \mathcal{Y}(\text{PAT})$.
- **Caso 2:** Se $(M, w) \in \mathcal{N}(\text{PP})$, ou seja, M não para com w, então M' entra em loop infinito para qualquer $t \in \Sigma^*$. Assim, $\text{ACEITA}(M') = \emptyset \neq \Sigma^*$ e, portanto, $M' \in \mathcal{N}(\text{PAT})$.

Como a redução r está corretamente definida e sabemos que PP é indecidível, segue que PAT também é indecidível. $\square$

2

PP
Entrada: um par (M, w), sendo M uma máquina de Turing sobre o alfabeto Σ, e $w \in \Sigma^*$ uma palavra de entrada para M.
Pergunta: $w \in (\text{ACEITA}(M) \cup \text{REJEITA}(M))$?

PAPV
Entrada: uma máquina de Turing M sobre alfabeto Σ.
Pergunta: $\varepsilon \in \text{ACEITA}(M)$?

Teorema. PAPV *é indecidível.*

Demonstração. Vamos construir uma redução $r : \text{PP} \Rightarrow \text{PAPV}$ tal que, dada uma instância (M, w) de PP, produzimos uma nova máquina de Turing M' como entrada para PAPV. A redução deve satisfazer:

$$(M, w) \in \mathcal{Y}(\text{PP}) \iff M' \in \mathcal{Y}(\text{PAPV})$$

.
A máquina M' opera da seguinte forma para uma entrada t:

1. Simula M com entrada w:
- Se M para (aceitando ou rejeitando), aceita.
- Se M não para, M' entra em loop infinito.

Agora mostramos que r é uma redução correta:

- **Caso 1:** Se $(M, w) \in \mathcal{Y}(\text{PP})$, ou seja, M para com w, então M' aceita qualquer $t \in \Sigma^*$, incluindo ε. Assim, $\varepsilon \in \text{ACEITA}(M')$ e, portanto, $M' \in \mathcal{Y}(\text{PAPV})$.
- **Caso 2:** Se $(M, w) \in \mathcal{N}(\text{PP})$, ou seja, M não para com w, então M' entra em loop infinito para qualquer $t \in \Sigma^*$, incluindo ε. Assim, $\varepsilon \notin \text{ACEITA}(M')$ e, portanto, $M' \in \mathcal{N}(\text{PAPV})$.

Como a redução r está corretamente definida e sabemos que PP é indecidível, segue que PAPV também é indecidível. $\square$

3

PP
Entrada: um par (M, w), sendo M uma máquina de Turing sobre o alfabeto Σ, e $w \in \Sigma^*$ uma palavra de entrada para M.
Pergunta: $w \in (\text{ACEITA}(M) \cup \text{REJEITA}(M))$?

PLAU
Entrada: uma máquina de Turing M sobre alfabeto Σ.
Pergunta: $\text{ACEITA}(M) = \{w\}$ (conjunto unitário contendo w), para um $w \in \Sigma^*$ qualquer?

Teorema. PLAU *é indecidível.*

Demonstração. Vamos construir uma redução $r : \text{PP} \Rightarrow \text{PLAU}$ tal que, dada uma instância (M, w) de PP, produzimos uma nova máquina de Turing M' como entrada para PLAU. A redução deve satisfazer:

$$(M, w) \in \mathcal{Y}(\text{PP}) \iff M' \in \mathcal{Y}(\text{PLAU})$$

.
A máquina M' opera da seguinte forma para uma entrada t:

1. Verifica se $t = w$:
- Se $t = w$, continua.
- Se $t \neq w$, rejeita.

2. Simula M com entrada w:
- Se M para (aceitando ou rejeitando), aceita.
- Se M não para, M' entra em loop infinito.

Agora mostramos que r é uma redução correta:

- **Caso 1:** Se $(M, w) \in \mathcal{Y}(\text{PP})$, ou seja, M para com w, então M' aceita t se, e somente se, $t = w$. Assim, $\text{ACEITA}(M') = \{w\}$ e, portanto, $M' \in \mathcal{Y}(\text{PLAU})$.
- **Caso 2:** Se $(M, w) \in \mathcal{N}(\text{PP})$, ou seja, M não para com w, então M' rejeita para entradas diferentes de w ou entra em loop infinito para $t = w$. Assim, $\text{ACEITA}(M') = \emptyset$ e, portanto, $M' \in \mathcal{N}(\text{PLAU})$.

Como a redução r está corretamente definida e sabemos que PP é indecidível, segue que PLAU também é indecidível. $\square$