Un algorithme polynomial pour le calcul de point fixe d'un opérateur max-affine

Bruno Scherrer*

26 décembre 2025

On considère un système d'équations de type point fixe d'un opérateur max-affine sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall i, \quad x_i = \max_{k \in K_i} [T^{(k)} x]_i \tag{1}$$

où pour tout k, et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $T^{(k)} y$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la ième coordonnée est:

$$[T^{(k)} y]_i = \sum_j a_{ij}^{(k)} y_j + b_i^{(k)}.$$

On va décrire un algorithme itératif indexé par t afin de trouver l'ensemble X^* (éventuellement vide) des solutions au l'équation (1).

A $t = 0$, pour tout i, on définit $K_i^{(0)} = K_i$.

A chaque étape t, on considére le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \max_{i, k \in K_i^{(t)}} \quad & x_i - [T^{(k)} x]_i \\ \text{sous les contraintes: } \forall i, \quad \forall k \in K_i^{(t)}, \quad & x_i \geq [T^{(k)} x]_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Il est facile de voir que c'est un programme linéaire.

Soient $z^{(t)}$ l'optimum du problème (2) et $(x^{(t)}, i^{(t)}, k^{(t)})$ un couple d'indices d'une solution optimale.

Si $z^{(t)} = 0$, l'algorithme est terminé et l'ensemble X^* est l'ensemble des x qui satisfont

$$\forall i, \quad \forall k \in K_i^{(t)}, \quad x_i = [T^{(k)} x]_i,$$

ce qui définit un singleton ou un polytope.

Si $z > 0$, on met à jour les ensembles comme suit:

$$\begin{aligned} K_{i^{(t)}}^{(t+1)} &= K_{i^{(t)}}^{(t)} \backslash \{k^{(t)}\} \\ \forall i \neq i^{(t)}, \quad K_i^{(t+1)} &= K_i^{(t)} \end{aligned}$$

Si $K_{i^{(t)}}^{(t+1)}$ est vide, alors l'algorithme termine et l'ensemble X^* est l'ensemble vide.

Cet algorithme s'arrête après au plus $\sum_i K_i - n$ itérations et résolutions de programmes linéaires. En récrivant le système (1) à l'aide de $n \sum_i \lceil \log_2 K_i \rceil$ variables et des max sur deux paramètres, le nombre de programmes linéaires à résoudre devient $(n-1) \sum_i \lceil \log_2 K_i \rceil$.

*INRIA, bruno.scherrer@inria.fr

La validité de l'algorithme résulte du fait (vrai à l'itération 0, et hérité d'itération en itération) que dans la mesure où l'ensemble des contraintes du programme linéaire (2) contient l'ensemble des solutions X^*, alors pour tout $x^* \in X^*$, on a à chaque étape t,

$$x^*_{i^{(t)}} - [T^{(k^{(t)})} x^*]_{i^{(t)}} \;\geq\; x^{(t)}_{i^{(t)}} - [T^{(k^{(t)})} x^{(t)}]_{i^{(t)}} \;=\; z \;> 0.$$

Autrement dit, la contrainte correspondant aux indices $(i^{(t)}, k^{(t)})$ n'intervient pas dans la caractérisation de X^*. Et on peut donc la supprimer.

On peut résoudre un programme linéaire en temps $\tilde{O}(n^3 L)$. Par conséquent, l'algorithme décrit ici a pour complexité polynomiale $\tilde{O}(n^4 L)$. On en déduit notamment qu'il permet de résoudre en temps polynomial plusieurs problèmes qui peuvent s'écrire sous la forme (1):

- les jeux stochastiques sur un graphe γ-actualisé (avec une dépendance en $\log \frac{1}{1-\gamma}$) ;
- le jeu du coût moyen γ-actualisé (avec une dépendance en $\log \frac{1}{1-\gamma}$) ;
- le jeu du coût moyen (par réduction au jeu du coût moyen γ-actualisé avec $\gamma = 1 - \frac{1}{4n^3 W}$ où W est une borne sur le coût entier) ;
- le jeu de parité avec d priorités (par réduction au jeu du coût moyen avec un cout max W en n^d) ;
- les problèmes de complémentarité linéaire avec une P-matrice (sans dépendance forte vis-à-vis du spectre de la matrice).