



THÉORÈME DE TRANSLATION PLANE DE BROUWER ET GÉNÉRALISATIONS DU THÉORÈME DE POINCARÉ-BIRKHOFF

LUCIEN GUILLOU

(Received 1 October 1991; in revised form 16 July 1993)

DANS cet article nous donnons d'abord une nouvelle preuve du théorème de translation plane, puis nous montrons comment en déduire deux généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff. Dans la première (Théorème 5.1), nous considérons un homéomorphisme de l'anneau sans point fixe et préservant l'orientation et nous montrons qu'il existe une courbe fermée simple essentielle disjointe de son image ou un arc essentiel disjoint de son image. Dans la seconde, nous donnons une version topologique d'un théorème de J. Franks [27] concernant les plongements homotopes à l'identité d'un anneau dans un autre (Théorème 6.1).

1. ENONCÉ DU THÉORÈME DE TRANSLATION PLANE

Soit t un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sans point fixe et préservant l'orientation. Tout d'abord, Brouwer [9, Theorem 3: lire les trois lignes précédant l'énoncé du théorème] a cru qu'une telle transformation du plan était toujours conjuguée à la translation $\tau(x, y) = (x + 1, y)$ (i.e. il existe φ homéomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que $\varphi t \varphi^{-1} = \tau$). Mais il se corrigeait rapidement [13, errata p. 777], [14, note p. 37] et donnait l'exemple suivant [14, Beispiel p. 40], [16], [17, p. 220] montrant qu'il n'en est pas ainsi.

Les courbes \mathcal{C}_c d'équation $x = (1/y(y - 1)) + c$, c constante réelle, sont deux à deux disjointes et remplissent la bande $0 < y < 1$ de \mathbb{R}^2 . La transformation $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définit par

$$t(x, y) = \begin{cases} (x + 1, y) & \text{si } y \geq 1 \\ (x - 1, y) & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

et par $t(x, y) = (x', y')$ si $0 < y < 1$ et $(x, y) \in \mathcal{C}_c$ où $y' < y$ et où la longueur de l'arc de \mathcal{C}_c de (x, y) à (x', y') vaut 1, n'est pas conjuguée à τ (Fig. 1).

En effet, l'arc vertical figuré ci-dessus rencontre toutes ses images par les puissances de t , ce qui n'est le cas d'aucun compact sous les puissances d'une translation.

Puisque le théorème de translation a une preuve plus facile pour les homéomorphismes qui se plongent dans un flot C^1 (cf. la Remarque 1.3), signalons l'exemple suivant d'un homéomorphisme h (d'ailleurs C^∞) qui n'admet même pas de racine carrée (Fig. 2).

Sur la réunion des 2-disques fermés de rayon 1, $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$, h est translation vers la gauche, $h(B_i) = B_{i-1}$, et hors de cette réunion h est obtenue en suivant sur une distance π les lignes indiquées. On pourrait aussi remplacer les disques B_i par n'importe quel compact cellulaire et ses translatés. Il n'existe pas d'homéomorphisme φ tel que $\varphi^2 = h$ car le point de tangence de deux disques B_i et B_{i+1} "ne sait où aller" par φ (voir [37] et [2]).

L'énoncé du théorème finalement obtenu par Brouwer [14] nécessite une définition.

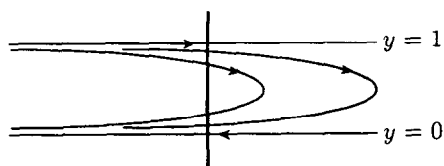


Fig. 1.

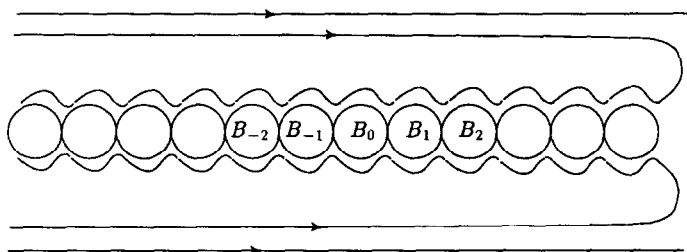


Fig. 2.

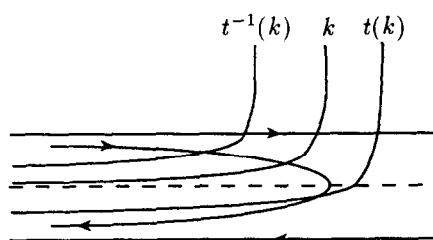


Fig. 3.

1.1. *Définition.* Un **domaine de translation** pour t est un ouvert connexe bordé par k et $t(k)$ où k est une droite plongée proprement (donc fermée) telle que $t^{-1}(k)$ et $t(k)$ soient dans des composantes distinctes de $\mathbb{R}^2 - k$ (le domaine ne rencontre pas son image) (Fig. 3).

1.2. THÉORÈME DE TRANSLATION PLANE. Soit t un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sans point fixe et préservant l'orientation. Alors tout point de \mathbb{R}^2 appartient à un domaine de translation pour t .

De plus, la preuve présentée ici montrera qu'on peut choisir la droite k sous-complexe de toute triangulation de \mathbb{R}^2 dont l'étoile de chaque sommet est libre.

Signalons au passage que des caractérisations dans le même esprit des homéomorphismes conjugués à une translation (soit: admettant un domaine de translation D avec $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} t^n(D) = \mathbb{R}^2$) ont été données un peu plus tard par Kérékjártó [33], [36] et Sperner [42]. Voir aussi Andréa [2]. Leurs preuves s'avèrent bien plus faciles que celle du théorème de translation plane.

1.3. *Remarque.* Si t est plongé dans un flot C^1 , le théorème de translation a une preuve rapide: on considère le champ de vecteurs orthogonal à celui définissant le flot qui contient t . Ce champ sur \mathbb{R}^2 est sans zéro et donc, d'après la théorie de Poincaré-Bendixon, toute orbite de ce flot orthogonal est propre. Une telle orbite est une ligne k comme cherchée.

2. REMARQUES HISTORIQUES

Dans cet article, nous commençons par donner une preuve complète du théorème de translation plane. La preuve donnée par Brouwer [14] a toujours été considérée comme très difficile à suivre, sinon incomplète ou même fautive, cf. e.g. [42, p. 9 note 1] ou [40, p. 277]. Aussi, dans les années 20, plusieurs auteurs, W. Scherrer [39], B.v. Kérékjártó [34], I. Terasaka [43] et E. Sperner [42] ont publié des preuves, soit de lemmes nécessaires à la preuve [42], soit du théorème en admettant un certain nombre de résultats préliminaires [39], [43], soit complètes [34]. Mais l'accord n'est pas encore réalisé: Kérékjártó [36, p. 226] critique sévèrement Sperner [42], et R. Barrar [4, p. 336] en 1967 trouve encore "long and hard to follow" les preuves données par Sperner [42] et Kérékjártó [34] d'un résultat crucial (ici Théorème 3.3), qui dit que les trajectoires sont sans point double.

Quoi que l'on pense des arguments avancés par Brouwer (et aujourd'hui ils paraissent tous essentiellement récupérables), tous les lemmes et concepts importants se trouvent clairement dégagés chez lui. Aussi la preuve que nous proposons, comme la sienne et toutes celles connues, se divise en deux parties.

Dans la première (paragraphe 3), en suivant grosso modo Sperner [42], nous montrons d'abord que les trajectoires sont sans point double. La nouveauté est un lemme de point fixe (généralisant [42, Satz 2]) qui permet d'une part de lisser l'exposé de Sperner et par ailleurs d'obtenir aisément un Lemme-clé (3.8) qui donne immédiatement les propriétés topologiques essentielles des trajectoires.

De l'absence de point double sur les trajectoires, on déduit immédiatement que tous les points errent sous t (i.e. tout point du plan possède un voisinage V tel que $V \cap t^n(V) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$). Ce résultat est très souvent la seule information donnée par le théorème de Brouwer que l'on utilise dans les travaux récents sur la dynamique des homéomorphismes de surfaces (cf. e.g. J. Franks [26, 27, 28] et H. Winkelkemper [44]).

Ceci a incité récemment M. Brown [18] et A. Fathi [24] à donner chacun leur preuve de ce résultat. Ces preuves introduisent des idées de "perturbation" dans le sujet, mais elles me semblent moins directes que celle présentée ici.

Dans la deuxième partie (paragraphe 4), on conclut la démonstration du théorème de translation plane. La nouveauté ici est la considération d'une triangulation (localement finie) de \mathbb{R}^2 , dont les 2-simplexes sont libres, entièrement déterminée dès le début de la démonstration (une partie E de \mathbb{R}^2 est *libre* si $E \cap t(E) = \emptyset$ et *critique* si $\dot{E} \cap t(\dot{E}) = \emptyset$ et $\bar{E} \cap t(\bar{E}) \neq \emptyset$). Cette preuve s'inspire de celle de Terasaka [43], mais cet auteur construit une suite de carrés critiques (plus rares que les parties libres) dont chaque élément dépend du choix du précédent. La preuve de Kérékjártó [34] contient les mêmes difficultés, plus d'autres. Signalons d'autre part une preuve toute récente de J. Franks [29] s'appuyant sur la construction de fonctions de Lyapounov.

Le théorème de translation plane n'est, malgré son importance, qu'un résidu des tentatives de Brouwer pour prouver un énoncé plus général auquel il a été conduit en étudiant le 5e problème de Hilbert sous la forme suivante: Soit un groupe localement compact qui agit effectivement sur une variété, est-ce un groupe de Lie? (ce problème n'est pas encore complètement résolu, voir C. T. Yang [47]). Il a montré que la réponse est oui si la variété est un cercle ou une droite [8] et le cas où la variété est une surface l'a conduit (voir par exemple [12, p. 199]) à un "théorème de translation généralisé" concernant les homéomorphismes des surfaces fermées orientées, ayant un nombre fini de points fixes, et affirmant (en première approximation) qu'il existe un ouvert connexe invariant sur lequel l'homéomorphisme est conjugué à une "translation" [9]. Malheureusement, la preuve esquissée par Brouwer [9] de ce résultat ne tient pas. En particulier, il suppose que tout

compact connexe du plan est frontière commune d'au plus deux ouverts du complémentaire (il donnera lui-même le premier contre-exemple à cette assertion peu de temps après [10]).

L'énoncé même du "théorème généralisé" [9, p. 179] et [11, p. 295] n'est pas sans ambiguïté. Brouwer définit "*a transformation domain*" comme un ouvert connexe libre maximal (en un sens flou [11, p. 286]) pour ces propriétés et énonce "*an arbitrary continuous one-one transformation of a two sided surface in itself with invariant indicatrix [ce qui veut dire: préservant l'orientation] possesses a transformation domain, which either breaks the connection of the surface, or joins two points invariant for the transformation*". Kérékjártó [35, p. 237] en propose la version suivante: "Soient h un homéomorphisme préservant l'orientation d'une surface orientée, n'ayant qu'un nombre fini de points fixes et \tilde{h} un relèvement de h au revêtement universel (homéomorphe à \mathbb{R}^2) de la surface privée de ses points fixes. Alors on peut construire un domaine de translation périodique (relativement aux transformations du revêtement) ayant pour frontière deux droites propres se projetant sur la surface en deux courbes fermées ou un domaine de translation bordé par deux droites propres, toutes deux convergeant dans les deux sens vers deux points fixes (qui peuvent éventuellement coïncider)".

Cet énoncé est faux pour certains homéomorphismes du tore sans point fixe si l'on demande que les deux courbes fermées soient disjointes (cf. plus bas). Kérékjártó [35, p. 238] en a annoncé une preuve qui n'est jamais parue, sauf dans le cas particulier qui correspond à la version topologique du théorème de Poincaré–Birkhoff [34]. En effet, si l'on considère un homéomorphisme h de S^2 muni de deux points fixes et préservant l'orientation, alors l'énoncé de Brouwer se réduit à celui de Poincaré–Birkhoff si de plus h préserve un anneau séparant les deux points fixes et sur les disques complémentaires de l'anneau se réduit à des rotations "tournant dans des sens opposés" (Fig. 4) (voir le paragraphe 5).

Il serait déjà intéressant de traiter les homéomorphismes de la sphère isotopes à l'identité (relativement aux points fixes). En tout cas, l'énoncé est vrai pour le temps 1 d'un flot C^1 sur la sphère n'ayant qu'un nombre fini de singularités (brièvement: on considère le champ Y orthogonal au champ X du flot. Si Y admet une trajectoire fermée c'est gagné. Sinon, par Poincaré–Bendixon, Y admet une trajectoire qui joint deux singularités de Y . Si aucune orbite de X ne recoupe cet arc deux fois c'est gagné, sinon on fabrique une transversale fermée à X).

Remarquons que, à la différence de ce qui se passe pour le théorème de translation plane, le "théorème généralisé" ne dit pas que tout point du revêtement universel de la surface privée de ses points fixes est dans un domaine de translation. Et ce n'est pas possible: dans le cas particulier précédent, les points des disques où h est une rotation ne sont pas revêtus par des points appartenant à un tel domaine. En effet, soit \tilde{h} un relevé de h à \mathbb{R}^2 le revêtement universel de $S^2 - \{\text{points fixes}\}$ qui pousse en des sens opposés sur les deux composantes du bord de la bande $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ préimage de l'anneau dans S^2 . Alors, un domaine de translation dans \mathbb{R}^2 pour \tilde{h} ne peut rencontrer les deux composantes du bord de cette bande. Soit donc un domaine de translation contenu dans $\{y > -1\}$ et contenant un point avec $y > 1$. Il est bordé par une droite propre L de \mathbb{R}^2 (et son image par \tilde{h}) se projetant sur S^2 en

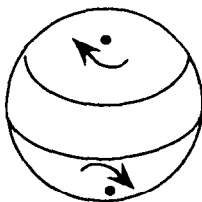


Fig. 4.

une courbe fermée ou un arc joignant un des points fixes à lui-même. Dans les deux cas, cette droite L partage \mathbb{R}^2 en deux régions et on regarde la composante non bornée de l'intersection de la région ne contenant pas les points avec $y \leq -1$ et du demi-plan $y \geq 1$. Cette intersection est envoyée strictement dans elle-même par \tilde{h} (où \tilde{h}^{-1} ce qui ne change pas l'argument) et contenue dans le demi-plan $y \geq 1$ où \tilde{h} est une translation. Ce qui est impossible comme on voit en considérant un point d'ordonnée maximum sur L ou d'abscisse maximum sur $\{y = 1\}$ selon le cas.

Slaminka [40] a montré une version forte de l'énoncé pour le cas particulier d'un homéomorphisme libre de la sphère S^2 ayant un nombre fini de points fixes (libre au sens de M. Brown [9]: pour tout disque $D \subset S^2$, si $h(D) \cap D = \emptyset$, alors $h^n(D) \cap D = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$). Et ce résultat a été étendu à toute surface compacte (voir [30]). Notons encore que le cas général des homéomorphismes de S^2 ayant deux points fixes est lié à la conjecture de Winkelkemper [45] (résolue dans [31]) sur les homéomorphismes de l'anneau ouvert.

Un autre cas particulier du "théorème généralisé" lié à des études récentes est celui d'un homéomorphisme h du tore T^2 préservant l'orientation et sans point fixe. L'énoncé dit alors qu'il existe une courbe fermée simple k non homotope à zéro, disjointe de son image par h . En particulier, un homéomorphisme de T^2 homotope à l'identité, préservant la mesure de Lebesgue et le centre de gravité, devrait posséder au moins un point fixe. Ce dernier fait a été prouvé récemment par J. Franks [26, Cor. 3.3] et Le Calvez [38] a montré qu'un tel homéomorphisme avait trois points fixes (si h est en plus un difféomorphisme ce résultat remonte à Conley et Zehnder [22]). Ce résultat avait aussi été annoncé par Slaminka [41]. D'ailleurs, l'énoncé de Brouwer implique déjà l'existence de deux points fixes pour de tels homéomorphismes.

Cependant, M. Bestvina et M. Handel ont construit un exemple d'homéomorphisme du tore homotope à l'identité, sans point fixe, préservant l'orientation mais pour lequel n'existe aucune courbe fermée simple non homotope à zéro et disjointe de son image. Cet exemple s'appuie sur la notion de convexe de rotation. Notons encore qu'un tel exemple n'est pas réalisable comme temps 1 d'un flot (voir [7]).

Dans cet article, nous nous contenterons, à la Kérékjártó [34], de déduire le théorème de Poincaré–Birkhoff (et diverses généralisations) du théorème de translation.

Pour d'autres preuves topologiques de ce théorème, voir par exemple [4], [5], [6], [20], [21], [27, 28].

3. THÉORIE DES TRAJECTOIRES

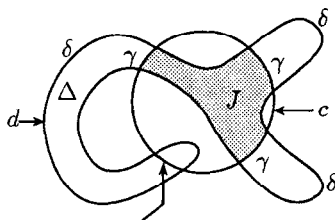
On considère deux disques topologiques fermés C et D de \mathbb{R}^2 et leurs bords respectifs c et d . On suppose que $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ et que $C \neq C \cup D \neq D$, et on choisit une composante $\overset{\circ}{J}$ (d'adhérence notée J) de $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D}$.

Dans cette situation, nous dirons que D débord de C le long d'un arc $\gamma \subset c$ si $\gamma \subset FrJ$, $\overset{\circ}{\gamma} \subset \overset{\circ}{D}$ et si γ a ses extrémités dans d (Fig. 5).

Les extrémités d'un arc γ de débordement déterminent sur d un arc δ qui ne rencontre pas $\overset{\circ}{J}$ et $\gamma \cup \delta$ est une courbe fermée simple qui borde un disque Δ tel que $\overset{\circ}{\Delta} \cap \overset{\circ}{J} = \emptyset$.

On note que tous les points de D hors de J sont dans un tel disque Δ , qu'il y a au plus une famille dénombrable d'arcs de débordement, notés γ_i , $i \in \mathbb{N}$, et que lorsque $i \rightarrow \infty$, $\text{diamètre}(\gamma_i) \rightarrow 0$, $\text{diamètre}(\delta_i) \rightarrow 0$ et $\text{diamètre}(\Delta_i) \rightarrow 0$, où δ_i et Δ_i sont les arcs de d et les disques associés aux γ_i .

On note enfin que FrJ , étant obtenue de d en substituant aux arcs δ_i les arcs γ_i correspondants, est une courbe fermée simple et donc que J est homéomorphe à un disque.



Le long de cet arc D ne déborde pas.

Fig. 5.

3.1. LEMME DE POINT FIXE. *Si dans la situation précédente, un homéomorphisme préservant l'orientation $f: C \rightarrow D$ vérifie $\delta_i \not\subset f(\gamma_i)$ et $f(\gamma_i) \not\subset \delta_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors f a un point fixe.*

Preuve. Remarquons que $f(\gamma_i) \cap \delta_i$ est vide, réduit à un arc ou deux arcs disjoints (éventuellement dégénérés) en même temps que $f(\gamma_i) \cap \gamma_i$ est vide, réduit à un point ou deux points. Donc, pour tout i , il existe une rétraction ρ_i de Δ_i sur γ_i telle que $\rho_i(f(\gamma_i) \cap \delta_i) = f(\gamma_i) \cap \gamma_i$. Soit $F: J \rightarrow J$ définie par $F(p) = f(p)$ si $f(p) \in J$ et $F(p) = \rho_i(f(p))$ si $f(p) \in \Delta_i$. Alors, F est continue car diamètre $(\Delta_i) \rightarrow 0$; donc F a un point fixe p_0 car J est un disque (par un autre théorème célèbre de Brouwer!). De plus, $F(\gamma_i) \cap \gamma_i$ est vide, ou une extrémité de γ_i , ou les deux extrémités de γ_i . Donc, f préservant l'orientation, F n'a pas de point fixe sur γ_i . Maintenant si $f(p_0) \notin J$, alors $f(p_0) \in \Delta_i - \gamma_i$ pour un certain i , donc $F(p_0) \in \gamma_i$ et $p_0 = F(p_0)$ aussi, ce qui est une contradiction. Donc, $f(p_0) \in J$ et $f(p_0) = F(p_0) = p_0$. \square

REMARQUE. Le Lemme 3.1 est précisé dans l'appendice. Notons qu'on a en fait trouvé un point fixe dans J .

Définitions

- (1) Un **arc de translation** est un arc simple α d'extrémités p et $t(p)$ (pour un $p \in \mathbb{R}^2$) tel que $\alpha \cap t(\alpha) \subset \{p, t(p)\}$ (on va voir, Théorème 3.3, qu'alors on a automatiquement $\alpha \cap t(\alpha) = \{t(p)\}$).
- (2) Une **trajectoire** l est la courbe engendrée par un arc de translation α sous l'action de t : $l = l(\alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} t^n(\alpha)$.

On conviendra d'orienter les trajectoires de sorte que si $l = l(\alpha)$, α soit orienté positivement de p vers $t(p)$.

3.2. LEMME. *Par tout point a du plan passe un arc de translation (et donc une trajectoire).*

Preuve. Soit $D(r)$ le disque centré en a de rayon r et soit $\rho = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid D(r) \cap t(D(r)) = \emptyset\}$. Alors, $\rho > 0$ car $a \neq t(a)$, $D(\rho) \cap t(D(\rho)) = \text{Fr}(D(\rho)) \cap t(\text{Fr}(D(\rho)))$ et $\dot{D}(\rho) \cap t(\dot{D}(\rho)) = \emptyset$. Soit $q \in \text{Fr}(D(\rho)) \cap t(\text{Fr}(D(\rho)))$ et posons $q = t(p)$ où $p \in \text{Fr}(D(\rho))$. La réunion des rayons pa et aq est alors un arc de translation. \square

3.3. THÉORÈME. *Les trajectoires sont sans point double.*

3.4. COROLLAIRE. *Pour tout $n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, t^n est sans point fixe. En d'autres termes, un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 préservant l'orientation et sans point fixe est sans point périodique.* \square

Preuve. Si la trajectoire $l = l(\alpha)$ où α est d'extrémités p et $t(p)$ a un point double, alors $\alpha - \{t(p)\} \cap t^n(\alpha - \{t(p)\}) \neq \emptyset$ pour au moins un $n \geq 1$. Soit k le plus petit de tels n et soit q le premier point de α sur $t^k(\alpha)$ à partir de $t^k(p)$. Par définition des arcs de translation, on a $k \geq 2$.

On a $q \neq t(p)$ et la courbe $c = qt(p) \cup t(\alpha) \cup \dots \cup t^{k-1}(\alpha) \cup t^k(p)q$, où $qt(p)$ est l'arc de q à $t(p)$ sur α et $t^k(p)q$ l'arc de $t^k(p)$ à q sur $t^k(\alpha)$, est une courbe fermée simple qui borde un disque C . Si $d = t(c)$ et $D = t(C)$, les courbes c et d ont l'arc $t(q)q \subset t(\alpha) \cup \dots \cup t^k(\alpha)$ en commun et donc, puisque t préserve l'orientation, $\dot{C} \cap \dot{D} \neq \emptyset$. On dénote par \tilde{J} la composante de $\dot{C} \cap \dot{D}$ ayant l'arc $t(q)q$ dans son bord. On est alors dans la situation du lemme de point fixe (Fig. 6).

La courbe c est union de $t(q)q \subset c \cap d$ et de l'arc $qt(q)$. Donc tout arc $\gamma \subset c$ de débordement est inclus dans $qt(q)$. Si on a de plus $\gamma \subset qt(p)$, alors on a aussi $t(\gamma) \subset t(q)t^2(p) \subset c \cap d$ ($k \geq 2$) et γ vérifie l'hypothèse du lemme de point fixe. Si γ rencontre l'arc $t(p)t(q)$, alors γ contient l'arc $t(p)t(q)$ en entier. En effet, par définition de q , ou bien l'arc pq (éventuellement dégénéré) de α ne rencontre pas \dot{C} et $t(p)t(q)$ ne rencontre pas \dot{D} (Fig. 3.2(a)) ou bien pq est inclus dans C et $t(p)t(q)$ est inclus dans D (Fig. 3.2(b)). Soit $\delta \subset d$ l'arc correspondant à γ . Alors $t(q)$, $t^2(p)$ et q se succédant sur c , $t^2(q)$, $t^3(p)$ et $t(q)$ se succèdent sur d , et donc $t(\gamma) \subset t(q)t^2(q)$ ne contient pas δ . D'autre part, δ ne peut contenir $t(\gamma)$ qui contient $t^2(p) \in c \cap d$. Donc le lemme de point fixe s'applique et donne une contradiction. \square

3.5. PROPOSITION. Si D est un disque fermé tel que $D \cap t(D) = \emptyset$, alors $D \cap t^n(D) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Autrement dit, les points errent sous t et par conséquent $\{t^n(p) | n \in \mathbb{Z}\}$ est sans point d'accumulation pour tout $p \in \mathbb{R}^2$.

Preuve. On peut supposer que D est la boule fermée $D(1)$ de rayon 1. Si $q \in D \cap t^n(D)$ ($n \neq -1, 0, 1$), alors q et $t^{-n}(q)$ appartiennent à $D(1)$. Soit $\rho = \sup\{r \in \mathbb{R} | D(r) \cap t(D(r)) = \emptyset\}$. Soit $s \in \text{Fr}(D(\rho)) \cap t(\text{Fr}(D(\rho)))$ et posons $s = t(u)$ où $u \in \text{Fr}(D(\rho))$. En joignant, dans $\dot{D}(\rho)$, u à s en passant par q et $t^{-n}(q)$, on construit comme dans le Lemme 3.2 un arc de translation α et une trajectoire $l(\alpha)$ se recoupant puisque $q \in \alpha \cap t^n(\alpha)$ (Fig. 7).

Supposons par ailleurs que q soit un point d'accumulation de $\{t^n(p) | n \in \mathbb{Z}\}$. Soit D un disque tel que $q \in \dot{D}$ et $D \cap t(D) = \emptyset$. Par hypothèse, il existe $k, l \in \mathbb{Z}$, $k > l$, tels que $t^k(p)$, $t^l(p) \in D$ et donc $t^k(p) = t^{k-l}(t^l(p)) \in t^{k-l}(D) \cap D$. Contradiction. \square

3.6. PROPOSITION. (a) Toute trajectoire l est une sous-variété de \mathbb{R}^2 . Autrement dit, étant donné un point p de l et un arc $\lambda \subset l$ tel que $p \in \overset{\circ}{\lambda}$, il existe un voisinage V de p dans \mathbb{R}^2 tel que $V \cap l = V \cap \lambda$. En particulier $\bar{l} - l$ est fermé.

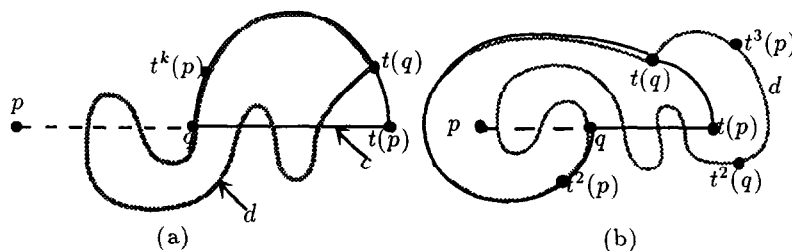


Fig. 6.

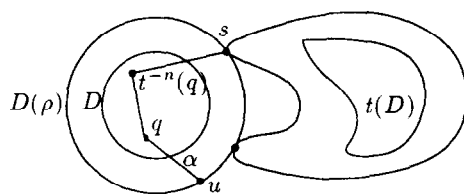


Fig. 7.

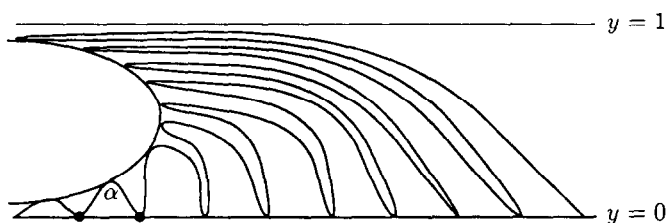


Fig. 8.

(b) Soit Λ la composante connexe du complémentaire de $\bar{l} - l$ qui contient l . Alors, l divise Λ en deux ouverts connexes par arcs de frontière commune (dans Λ) l .

3.7. *Remarque.* Une trajectoire l n'est pas nécessairement une sous-variété fermée de \mathbb{R}^2 . Soit $\bar{l} - l$ peut être non vide. En effet dans l'exemple de la Fig. 1, la trajectoire $l = l(\alpha)$ engendrée par l'arc de translation figuré ci-dessus (Fig. 8) vérifie $\bar{l} - l = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Preuve de 3.6. (a) Si un tel voisinage V de p n'existait pas, il existerait une suite de points $p_n \in l - \dot{\lambda}$ telle que $p_n \rightarrow p$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Choisissons un arc de translation $\alpha \subset l$ tel que $p \in \overset{\circ}{\alpha}$. Il existe des $k_n \in \mathbb{Z}$ tels que $t^{k_n}(p_n) \in \alpha$ et on peut supposer que $t^{k_n}(p_n)$ tend vers un point q de α . Puisque l'arc pq est disjoint de son image par t , il existe un disque D contenant pq dans son intérieur tel que $D \cap t(D) = \emptyset$ et donc, d'après 3.5, tel que $D \cap t^n(D) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Mais pour n grand, $p_n \in D \cap t^{-k_n}(D)$. Contradiction.

(b) Tout d'abord, $\Lambda - l$ n'est pas connexe par arcs. En effet, considérons un arc simple $\mu \subset \Lambda$ d'extrémités p et q coupant l en un seul point r (un tel arc existe par (a)). Si $\Lambda - l$ était connexe, on pourrait joindre p à q dans $\Lambda - l$ par un arc λ . En extrayant alors de μ et λ des arcs convenables, on obtiendrait une courbe fermée simple c coupant l en un seul point r . Mais alors une des composantes de $l - \{r\}$ serait toute entière dans le compact bordé par c , ce qui contredit la Proposition 3.5 (les points errent).

D'autre part, tout point s de $\Lambda - l$ peut être joint à p ou à q dans $\Lambda - l$. Il suffit pour cela de joindre s à un point de l dans Λ par un arc v . Puisque $v \subset \Lambda$, v ne rencontre pas les points d'accumulation de l et on peut en extraire un arc v' de s à l ayant seulement une extrémité s' sur l . Maintenant on peut supposer que v' et l'arc $s'r$ de l sont des segments linéaires orthogonaux et l'on peut joindre un point s'' de v' proche de s' à p (ou q) dans $\Lambda - l$ en suivant parallèlement $s'r$ (puisque l ne s'accumule pas sur $s'r$). \square

3.8. **LEMME CLÉ.** Soit λ un arc simple d'extrémités p et q et μ un arc de trajectoire de mêmes extrémités vérifiant $t(p) \in \overset{\circ}{\mu}$. Si $\lambda \cup \mu$ forme une courbe fermée simple, alors $\lambda \cap t(\lambda) \neq \emptyset$.

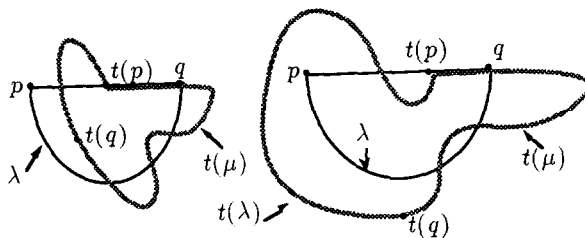


Fig. 9.

Preuve. Supposons $\lambda \cap t(\lambda) = \phi$ et posons $c = \lambda \cup \mu$, $d = t(c)$. Désignons par C le disque bordé par c et par $D = t(C)$ celui bordé par d . Les courbes c et d ont l'arc $t(p)q = t(\mu) \cap \mu$ en commun et puisque t préserve l'orientation, C et D sont du même côté de cet arc. On dénote par \dot{J} la composante de $\dot{C} \cap \dot{D}$ ayant l'arc $t(p)q$ dans son bord.

Le but est d'obtenir une contradiction avec l'hypothèse $t(\lambda) \cap \lambda = \phi$ grâce au lemme de point fixe.

Remarquons d'abord que $t(q)$ est extérieur à C si et seulement si p est intérieur à D (notons que $t(q) \notin c$ et $p \notin d$) (Fig. 9).

Soit alors $\gamma \subset c$ un arc de débordement et δ l'arc correspondant sur d . Puisque $t(p)q \subset c \cap d$, il n'y a que trois cas possibles:

ou bien $\gamma \subset pt(p) \subset \mu$ et alors $\delta \subset t(\lambda)$ (car $t(\mu) \cap \mu = \phi$), donc $t(\gamma) \cap \delta \subset t(\mu \cap \lambda) = \phi$;

ou bien $\gamma \subset \lambda$ et alors $\delta \subset t(\mu)$ (car $t(\lambda) \cap \lambda = \phi$), donc $t(\gamma) \cap \delta \subset t(\lambda \cap \mu) = \phi$;

ou bien $p \in \dot{\gamma}$ et alors, d'après la remarque précédente, $t(q) \in \dot{\delta}$. Par conséquent d'une part $t(p) \in t(\dot{\gamma})$ alors que $t(p) \in c \cap d$ qui ne rencontre pas $\dot{\delta}$ et donc $t(\gamma) \not\subset \delta$; et d'autre part $q \in c \cap d$, donc $q \notin \dot{\gamma}$ et $t(q) \notin t(\dot{\gamma})$, mais $t(q) \in \dot{\delta}$ donc $\delta \not\subset t(\gamma)$.

Dans tous les cas, les hypothèses du lemme de point fixe sont vérifiées. \square

4. PREUVE DU THÉORÈME DE TRANSLATION

Rappelons qu'une partie E de \mathbb{R}^2 est **libre** si $E \cap t(E) = \phi$.

Soit a un point de \mathbb{R}^2 et α un arc de translation passant par a .

La preuve réclame les deux lemmes suivants:

4.1. LEMME. *Il existe une triangulation K de \mathbb{R}^2 dont α est un sous-complexe et dont toute étoile est libre (l'étoile d'un sommet de K est l'union des 2-simplexes de K possédant ce sommet).*

Preuve. On peut supposer que α est un segment linéaire. On triangule alors \mathbb{R}^2 en triangles équilatéraux de côtés isométriques à α de sorte que α soit côté d'un de ces triangles. On écrit ensuite \mathbb{R}^2 comme union d'un disque et de couronnes: $\mathbb{R}^2 = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n \cup \dots$ où C_0 est l'union des triangles ayant un sommet commun avec α et C_n , $n \geq 1$, l'union des triangles ayant un sommet commun avec C_{n-1} sans être dans C_{n-1} .

Subdivisons maintenant C_0 en K'_0 de sorte que les étoiles de K'_0 soient libres, puis C_1 en K'_1 de sorte que les étoiles de K'_1 soient libres ainsi que les ensembles union d'une étoile de K'_0 et d'une étoile de K'_1 qui se rencontrent. On modifie alors K'_0 en K_0 de la manière suivante. Si Δ est un 2-simplexe de K'_0 qui a un côté sur $C_0 \cap C_1$, on projette le barycentre de Δ sur tous ses sommets et sur ceux introduits par K'_1 sur $\Delta \cap C_1$ (Fig. 10).

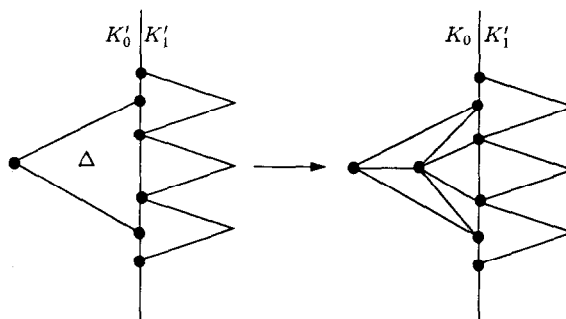


Fig. 10.

Une opération semblable sur K'_1 donne une triangulation K''_1 de C_1 telle que $K_0 \cup K''_1$ soit une triangulation de $C_0 \cup C_1$. Ensuite on subdivise C_2 en K'_2 de sorte que les étoiles de K'_2 soient libres ainsi que les ensembles union d'une étoile de K''_1 et d'une étoile de K'_2 qui se rencontrent. On modifie K''_1 près de $C_1 \cup C_2$ comme on a modifié K'_0 pour obtenir K_1 et, de même, K'_2 pour obtenir K''_2 . Ces dernières modifications ne touchent pas à K_0 . On continue ainsi pour obtenir une triangulation K de \mathbb{R}^2 telle que $K|_{C_n} = K_n$. \square

4.2. LEMME. Soit $l = l(\alpha)$ une trajectoire et K une triangulation de \mathbb{R}^2 , dont α est un sous-complexe et dont toute étoile est libre. Alors, de chaque côte de α , il y a au moins un triangle de K adjacent à α , sans point commun avec $\bar{l} - \alpha$.

Preuve. Orientons l'arc de translation $\alpha = pt(p)$ de p vers $t(p)$ et regardons les triangles de K adjacents à α d'un côté de α . Le premier rencontre $t^{-1}(\alpha)$ (en p au moins) et le dernier $t(\alpha)$. Donc, si tous les triangles considérés rencontrent $t^{-1}(\alpha)$ ou $t(\alpha)$, il y en a deux consécutifs, de sommet commun q , dont l'union rencontre à la fois $t^{-1}(\alpha)$ et $t(\alpha)$. Cela n'est pas possible. En effet, dans ce cas, un arc irréductible λ dans l'étoile de q de $t^{-1}(\alpha)$ à $t(\alpha)$ ne rencontrant pas α vérifierait les hypothèses du lemme clé et donc $\lambda \cap t(\lambda) \neq \emptyset$ mais l'étoile de q est libre.

Supposons maintenant qu'un triangle Δ ne rencontrant ni $t^{-1}(\alpha)$ ni $t(\alpha)$ rencontre $\bar{l} - \alpha$ en un point r . Soit B un disque centré en r si petit que $B \cap t(B) = B \cap t(\Delta) = B \cap t^{-1}(\Delta) = B \cap (t^{-1}(\alpha) \cup \alpha \cup t(\alpha)) = \emptyset$. Alors, $\Delta \cup B$ est libre et $\Delta \cup B$ contient un arc simple joignant α et $l \cap (\Delta \cup B)$ qui contredit le lemme-clé. \square

Preuve du Théorème de translation. Soit $\alpha_0 = p_0 t(p_0)$ un arc de translation passant par a et soit $l_0 = l(\alpha_0)$ la trajectoire engendrée par α_0 . D'après la Proposition 3.6, l_0 découpe la composante connexe Λ_0 de $\mathbb{R}^2 - (\bar{l}_0 - l_0)$ qui la contient en deux régions Λ_0^g et Λ_0^d invariantes par t et de frontière commune (dans Λ_0) l_0 .

Nous allons construire une demi-droite, homéomorphe à $[0, +\infty[$, d'origine un point de α_0 , libre et proprement plongée dans Λ_0^d (à l'exception de son origine).

Pour cela, considérons une triangulation K de \mathbb{R}^2 , donnée par le Lemme 4.1, dont toutes les étoiles sont libres et dont α_0 est un sous-complexe. Et soit Δ_0 un triangle (donné par le Lemme 4.2) de $\Lambda_0^d \cup l_0$ adjacent à α_0 qui ne rencontre pas $\bar{l}_0 - \alpha_0$. On construit alors un arc α_1 constitué de l'arc dans α_0 de p_0 au premier point de Δ_0 (disons r_0), de l'arc dans α_0 du dernier point de Δ_0 (disons t_0) à $t(p_0)$ et de l'arc de r_0 à t_0 dans $\text{Fr} \Delta_0 - \alpha_0$. Puisque Δ_0 ne rencontre ni $t^{-1}(\alpha_0)$ ni $t(\alpha_0)$, l'arc α_1 est de nouveau un arc de translation de p_0 à $t(p_0)$. cf. Fig. 11.

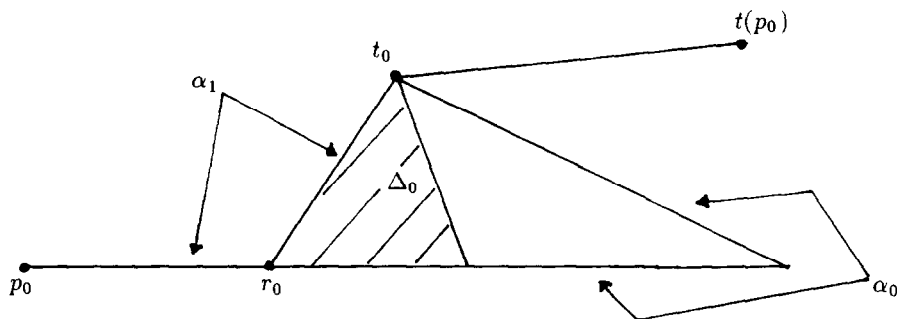


Fig. 11.

L'arc α_1 engendre une trajectoire $l_1 = l(\alpha_1) \subset \Lambda_0^d \cup l_0$ qui détermine une région Λ_1 (la composante connexe de $\mathbb{R}^2 - (\bar{l}_1 - l_1)$ qui contient l_1). On a $l_0 \subset \Lambda_1$ car sinon $l_0 - l_1$ rencontrerait \bar{l}_1 et on aurait un arc libre (dans l_0) de l_1 à \bar{l}_1 , ce qui n'est pas possible (cf. le second paragraphe de la preuve du Lemme 4.2). D'après la Proposition 3.7, l_1 divise Λ_1 en deux régions. On note Λ_1^d celle qui ne rencontre pas l_0 et Λ_1^q l'autre. On a alors $\Lambda_0^d \supset \Lambda_1^d$ et $\Lambda_1^q \supset \Lambda_0^q$; en effet, si Λ_1^d n'était pas inclus dans Λ_0^d , un arc irréductible de $l_1 - l_0 \subset \Lambda_0^d$ à un point de $\Lambda_1^d - \Lambda_0^d$ dans Λ_1^d devrait couper \bar{l}_0 , ce qui donnerait un point de l_0 dans Λ_1^d . Comme α_1 est un sous-complexe de K , on peut de nouveau appliquer le Lemme 4.2 et construire un nouvel arc de translation α_2 de p_0 à $t(p_0)$. On continue ainsi pour obtenir une suite de triangles libres Δ_n , d'arcs de translation α_n de p_0 à $t(p_0)$, de trajectoires $l_n = l(\alpha_n)$ et de régions Λ_n^d invariantes par t avec $\Lambda_n^d \supset \Lambda_{n+1}^d$ et $\Delta_n \subset \Lambda_n^d \cup l_n - \Lambda_{n+1}^d$.

Donc tous les Δ_n sont distincts et si $L \subset K$ est le sous-complexe union des Δ_n , L est libre. Pour tout $n \geq 1$, un côté de Δ_n est sur α_{n-2} ou sur Δ_{n-1} et par suite chacune des composantes connexes de L a un côté en commun avec α_0 . Donc ces composantes sont en nombre fini. Soit H l'une d'entre elles contenant une infinité de triangles. Alors, le 1-squelette de H contient une ligne plongée k^d issue de $q^d \in \alpha_0$ qui fournit la demi-droite cherchée.

De même, on construit dans Λ_0^q une ligne k^q issue d'un point $q^q \in \alpha_0$ proprement plongée et libre.

On considère enfin $k = k^d \cup q^q q^d \cup k^q$ où $q^q q^d$ est l'arc de q^q à q^d dans α_0 . C'est une droite proprement plongée dans \mathbb{R}^2 avec $t^{-1}(k)$ et $t(k)$ dans des composantes distinctes de $\mathbb{R}^2 - k$ (déjà α_0 a ses extrémités de part et d'autre de k). Si $a \notin k$, on a terminé. Si $a \in k$, il suffit de modifier k près de a . \square

4.3. Remarques. (a) On peut renforcer légèrement l'énoncé du théorème de Brouwer de la manière suivante: étant donné une triangulation quelconque K de \mathbb{R}^2 suffisamment fine pour que l'étoile de chaque sommet soit libre, on peut trouver une droite k sous complexe de K formant avec $t(k)$ la frontière d'un domaine de translation.

En effet, si D est un disque voisinage d'un sommet p de K assez petit pour ne contenir aucun triangle de K , on peut étendre ce disque en lui ajoutant un "doigt" voisinage d'un arc du 1-squelette se dirigeant vers $t(p)$ et si mince qu'il ne contient aucun triangle. Lorsque ce doigt sera assez long, le disque D' obtenu vérifiera $\bar{D}' \cap t(\bar{D}') = \emptyset$ et $D' \cap t(D') \neq \emptyset$. Alors comme en 3.2 l'on construira un arc de translation α dans D' s'écrivant comme union de trois arcs α_- , α_0 , α_+ , avec α_0 sous complexe de K et α_- et α_+ chacun inclus dans un triangle de K . Pour un tel arc de translation, le raisonnement de 4.2 se répète (on considère tous les triangles adjacents à un côté de α_0 et ceux contenant α_- et α_+) pour donner un triangle adjacent à α_0 et ne rencontrant pas $\bar{l}(\alpha) - \alpha$. La preuve du théorème de translation se poursuit alors sans modification, chaque nouvel arc de translation α_n rencontré étant du même type que α .

(b) Bien que l'on ait rédigé la preuve précédente en utilisant une triangulation de \mathbb{R}^2 , il est clair que l'on aurait pu aussi travailler avec n'importe quelle décomposition de \mathbb{R}^2 en un CW-complexe localement fini dont toutes les cellules fermées sont plongées et dont l'étoile de chaque 0-cellule est libre.

5. HOMÉOMORPHISMES SANS POINT FIXE DE L'ANNEAU

Ce paragraphe est le résultat d'une collaboration avec C. Bonatti.

Notons A l'anneau $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$. Une courbe fermée est *essentielle* si elle est non homotope à zéro. Un arc simple α dans A est *essentiel* si $\alpha \cap \partial A = \partial \alpha$ et si α joint les deux composantes de ∂A .

5.1. THÉORÈME. *Soit $H: A \rightarrow A$ un homéomorphisme sans point fixe préservant l'orientation. Alors,*

*il existe une courbe simple fermée essentielle c dans A telle que $H(c) \cap c = \emptyset$,
ou il existe un arc simple essentiel α dans A tel que $H(\alpha) \cap \alpha = \emptyset$.*

5.2. Remarques.

- (1) Les deux cas du théorème ne sont pas exclusifs.
- (2) Un homéomorphisme $H: A \rightarrow A$ préservant l'orientation et sans point fixe est isotope à l'identité.
- (3) Il y a des exemples de M. Herman [32] et R. Fokkink et L. Oversteegen [25] de difféomorphismes C^∞ de l'anneau sans point périodique et préservant l'aire mais non conjugués à une rotation.

Le Théorème 5.1 est une généralisation de la version topologique du théorème de Poincaré–Birkhoff. Rappelons-en l'énoncé.

Soit π la projection de la bande $B = \mathbb{R} \times [0, 1]$ sur l'anneau $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$. On note $\tau: B \rightarrow B$ la translation $\tau(x, y) = (x + 1, y)$. Les composantes du bord de B (resp. A) sont $\partial_0 B = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $\partial_1 B = \mathbb{R} \times \{1\}$ (resp. $\partial_0 A = \pi(\partial_0 B)$ et $\partial_1 A = \pi(\partial_1 B)$).

Appelons *distorsion* (“twist homeomorphism”) un homéomorphisme $H: (A; \partial_0 A, \partial_1 A) \hookrightarrow (A; \partial_0 A, \partial_1 A)$ tel que H ou H^{-1} admet un relevé $h: (B; \partial_0 B, \partial_1 B) \hookrightarrow (B; \partial_0 B, \partial_1 B)$ qui vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) < x < \varphi_0(x)$ si $h(x, i) = (\varphi_i(x), i)$, $i = 0, 1$.

5.3. THÉORÈME DE POINCARÉ–BIRKHOFF. *Une distorsion de l'anneau A sans point fixe admet dans A une courbe simple fermée libre et non homotope à zéro.*

5.4. Remarque. La version originelle du théorème de Poincaré–Birkhoff concerne les distorsions de l'anneau préservant l'aire (usuelle) et conclut à l'existence de deux points fixes. La version topologique énoncée ici conduit à un seul point fixe, mais il n'est pas possible de faire mieux car, pour t petit, le temps t du flot figuré ci-dessous (cf. Fig. 12) est une distorsion de l'anneau (ne préservant pas l'aire!) avec un seul point fixe bien que toute courbe fermée simple non homotope à zéro rencontre son image.

Le théorème de Poincaré–Birkhoff est un corollaire immédiat du Théorème 5.1, mais nous allons d'abord montrer que le théorème de Poincaré–Birkhoff se déduit très rapidement du théorème de translation plane de Brouwer puisque l'argument nous sera nécessaire pour la Preuve de 5.1.

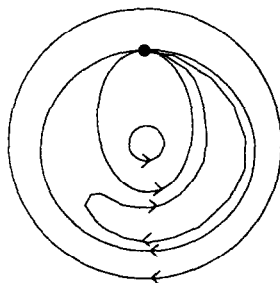


Fig. 12.

Preuve du Théorème 5.3. On pose $h(x, i) = (\varphi_i(x), i)$ pour $i = 0, 1$ et on continue de désigner par h l'extension de h à \mathbb{R}^2 définie par $h(x, y) = (\varphi_1(x), y)$ si $y \geq 1$ et $h(x, y) = (\varphi_0(x), y)$ si $y \leq 0$.

Soit K une triangulation de A dont toute étoile est libre sous H . On en déduit une triangulation L de \mathbb{R}^2 invariante par τ , induisant une triangulation de B et dont toute étoile est libre sous h .

Notons que $\partial_0 B$ est une trajectoire pour h . Donc selon la preuve du théorème de translation plane, il existe une demi-droite k proprement plongée dans le demi-plan $y \geq 0$, libre sous h , issue d'un sommet de $\partial_0 B$, contenue dans le 1-squelette de la triangulation L de \mathbb{R}^2 et dans l'ouvert $y > 0$ à l'exception de son origine.

Vu l'hypothèse de distorsion, elle ne peut rencontrer $\partial_1 B$, donc $k \subset B - \partial_1 B$ et k sépare B en deux ouverts connexes R_1 et R_2 dont l'un, R_1 , contient $\partial_1 B$. On suppose que $h(k) \subset R_2$ (sinon on considère h^{-1}). Soit alors $R \subset R_1$ la composante connexe de $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \tau^n(R_1)$ qui contient $\partial_1 B$. Tout sous-complexe compact N de L ne contient qu'un nombre fini d'arcs simples dans son 1-squelette, donc il existe $m = m(N)$ tel que $N \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau^n(k)) = N \cap (\bigcup_{|n| \leq m} \tau^n(k))$. Par suite la frontière de R est incluse dans le 1-squelette de $L \cap (B - \partial_1 B)$ et constitue une courbe simple. Elle est d'autre part clairement invariante sous τ . Enfin, elle est libre sous h car si σ est un 1-simplexe de $\text{Fr}(R)$, il existe d'après l'argument précédent un m tel que $\sigma \subset \tau^m(k)$, donc $h(\sigma) \subset h\tau^m(k) = \tau^m(h(k)) \subset \tau^m(R_2) \subset B - \bar{R}$. Par conséquent, cette frontière descend dans l'anneau A sur une courbe fermée simple qui satisfait au théorème. \square

Nous aurons besoin du lemme suivant dû à Winkelkemper [45].

5.5. LEMME. *Un homéomorphisme sans point fixe $h: (B; \partial_0 B, \partial_1 B) \rightarrow$ commutant à τ est conjugué à une translation si et seulement si il y a un arc essentiel disjoint de son image par h dans B .*

Preuve. Soit α un tel arc et supposons, sans perte de généralité, que $\varphi_i(x) > x$ pour $i = 0, 1$ si $h(x, i) = (\varphi_i(x), i)$ pour $i = 0, 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$, soit B_n la composante de $B - h^n(\alpha)$ à droite de $h^n(\alpha)$. On a $\bigcap_{n \geq 0} B_n = \emptyset$. En effet, supposons que $p \in \bigcap_{n \geq 0} B_n$ et soit $m \geq 0$ tel que p soit à gauche de $\tau^m(\alpha)$. Alors, $h^{-n}(\tau^m(\alpha)) = \tau^m(h^{-n}(\alpha))$ est aussi à gauche de $\tau^m(\alpha)$, donc $\{h^{-n}(p), n \geq 0\}$ se trouve dans le compact de B bordé par α et $\tau^m(\alpha)$, ce qui contredit que les points errent sous h (Proposition 3.5). De même, si B'_n est la composante de $B - h^n(\alpha)$ à gauche de $h^n(\alpha)$, $\bigcap_{n \leq 0} B'_n = \emptyset$. Par conséquent si F est la partie bornée fermée de B bordée par α et $h(\alpha)$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(F) = B$ et F est homéomorphe à $[0, 1] \times [0, 1]$. On conclut facilement. \square

Preuve du Théorème 5.1. Considérons comme dans la preuve du théorème de Poincaré–Birkhoff l'extension sans point fixe h à \mathbb{R}^2 d'un relevé de H à B et L une triangulation de \mathbb{R}^2 invariante par τ , induisant une triangulation de B et dont toute étoile est libre sous h (mais maintenant h est seulement sans point fixe sur $\partial_0 B \cup \partial_1 B$). Faisons l'hypothèse qu'il n'existe pas dans A de courbe fermée essentielle disjointe de son image. Alors la construction, comme dans le théorème de Poincaré–Birkhoff, d'une demi-droite k libre sous h issue d'un sommet de $\partial_0 B$ et incluse dans le 1-squelette de L , conduit à un arc essentiel γ tel que $\gamma \cap h(\gamma) = \phi$ car si k restait dans $B - \partial_1 B$ la preuve du théorème de Poincaré–Birkhoff conduirait à une courbe fermée simple essentielle dans A disjointe de son image sous H .

Ce qui précède est vrai quel que soit le relevé h de H . Considérons maintenant le relevé h tel que $h(b_0) \in]b_0, \tau(b_0[\subset \partial_0 B$ où $b_0 = (0, 0)$. Alors si $b_1 = (0, 1)$, on a aussi $h(b_1) \in]b_1, \tau(b_1[\subset \partial_1 B$. En effet, si $h(b_1)$ était à gauche de b_1 , alors H serait une distorsion et le théorème de Poincaré–Birkhoff contredirait l'hypothèse en cours. D'autre part si $h(b_1)$ était à droite de $\tau(b_1)$, alors $\tau^{-1}h$ serait un relevé de H montrant encore que H est une distorsion. En conclusion, pour tout $z \in \partial_0 B \cup \partial_1 B$, on a $z < h(z) < \tau(z)$ et donc aussi $z < \tau h^{-1}(z)$.

Remarquons aussi que τh^{-1} est conjugué à la translation τ . En effet, dans le cas contraire, d'après le Lemme 5.5, il n'existerait aucun arc essentiel dans B disjoint de son image par τh^{-1} et la preuve du théorème de Poincaré–Birkhoff appliquée à τh^{-1} contredirait encore l'hypothèse en cours.

Considérons alors le domaine connexe U à droite de γ dans B et posons $V = \bigcup_{n \geq 0} (\tau h^{-1})^n(U) = \bigcup_{n \geq 0} \tau^n h^{-n}(U)$. Puisque τh^{-1} est conjuguée à τ , il existe $m \geq 0$ tel que $V = \bigcup_{m \geq n \geq 0} \tau^n h^{-n}(U)$. Par conséquent si γ' est la frontière (dans B) de la composante non bornée de $B - \bar{V}$, c'est un arc essentiel inclus dans $\text{Fr } V$. On a clairement $\tau h^{-1}(\bar{V}) \subset \bar{V}$, donc $\tau h^{-1}(\gamma') \subset \bar{V}$ et $\tau(\gamma') \subset h(\bar{V})$. D'autre part, puisque $h(\bar{U}) \subset U$, on a $h(\bar{V}) = \bigcup_{m \geq n \geq 0} \tau^n h^{-n}(h(\bar{U})) \subset V$ et donc $h(\gamma') \cap \gamma' = \phi$.

On a la situation suivante (Fig. 13).

D'où, en appliquant h au second diagramme de la Fig. 13, la Fig. 14.

En conséquence, $\gamma' \cap \tau^n(\gamma') = \phi$ pour tout $n \neq 0$ et γ' se projette sur l'anneau A en un arc plongé essentiel α . De même, $h(\gamma') \cap \tau^n(h(\gamma')) = \phi$ pour $n \neq 0$ et $h(\gamma')$ se projette sur $H(\alpha)$. D'autre part, $h(\gamma') \cap \tau^n(\gamma') = \phi$ pour $n \neq 1$, donc $H(\alpha)$ ne rencontre α que par sa gauche. Plus précisément, si $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$, après conjugaison, on peut supposer que $\alpha = \{0\} \times [0, 1]$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H(\alpha)$ ne rencontre pas $]0, \varepsilon[\times [0, 1]$ (Fig. 15).

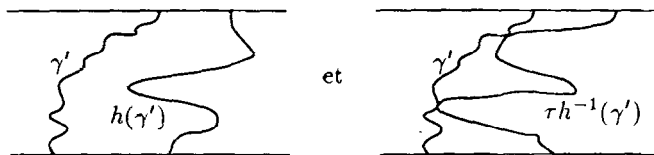


Fig. 13.



Fig. 14.

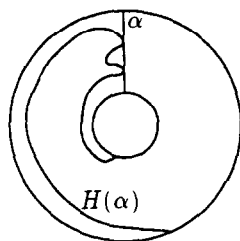


Fig. 15.

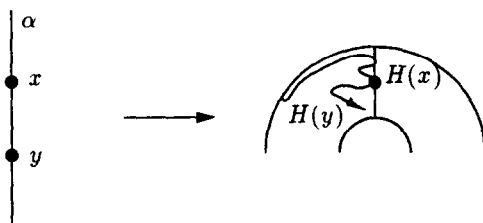


Fig. 16.

Dans la dernière étape de la preuve, nous allons montrer comment modifier α pour obtenir un arc essentiel α' vérifiant $\alpha' \cap H(\alpha') = \emptyset$.

Pour cela, posons $X_n = \bigcap_{i \geq 0} H^i(\alpha)$ et $X = \bigcap_{n \geq 0} X_n$. Alors X est un fermé de α et $h(X) \subset X$. De plus, puisque $H(\alpha)$ ne touche α que d'un côté sans le traverser, h préserve l'ordre naturel sur $X \subset \alpha$ (cf. Fig. 16).

Toute application croissante d'un fermé de $[0, 1]$ dans lui-même ayant un point fixe, on déduit que $X = \emptyset$ et donc $X_n = \emptyset$ pour un certain $n \geq 1$. Si $X_1 = \emptyset$, on a terminé. Montrons que si $n > 1$, on peut trouver un arc α' tel que l'ensemble X'_{n-1} correspondant soit vide.

On a $H(X_{n-1}) \cap \alpha = X_n = \emptyset$. Soit W un δ -voisinage de X_{n-1} dans α . Ce voisinage est constitué d'un nombre fini d'arcs disjoints dans α . Remplaçons ces arcs par des arcs de même extrémités mais à droite de α c'est-à-dire d'intérieurs inclus dans $]0, \delta] \times [0, 1]$ pour $\delta < \varepsilon$. On obtient ainsi un nouvel arc α' . Vérifions que $X'_{n-1} = \emptyset$.

Pour cela, notons que $H(\alpha) \cap \alpha' \subset X_1 - X_{n-1}$ et que α' et α coïncident hors du δ -voisinage de X_{n-1} , il suit que $H(\alpha')$ et $H(\alpha)$ diffèrent seulement dans un voisinage de $H(X_{n-1})$. Si δ est assez petit, ce dernier voisinage ne rencontre ni α ni α' et donc $\alpha' \cap H(\alpha') = \alpha' \cap H(\alpha) \subset X_1 = \alpha \cap H(\alpha)$. Par conséquent, $H^i(\alpha') \cap H^{i+1}(\alpha') \subset H^i(\alpha) \cap H^{i+1}(\alpha)$ pour $i \geq 0$ et $X'_p \subset X_p$ pour $p \geq 1$. D'où $X'_{n-1} = \alpha' \cap H(\alpha') \cap X'_{n-1} \subset \alpha' \cap H(\alpha') \cap X_{n-1} = \alpha' \cap H(\alpha) \cap X_{n-1} \subset (X_1 - X_{n-1}) \cap X_{n-1} = \emptyset$. \square

6. PLONGEMENTS TORSADÉS DE L'ANNEAU

Soit $H: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-b, b]$, $0 < a < b$, un plongement topologique (c'est-à-dire une application continue injective) homotope à l'inclusion. On dira que H est un plongement *torsadé* si H (ou H^{-1}) admet un relevé $h: \mathbb{R} \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R} \times [-b, b]$ qui vérifie $p_1 h(z) < p_1(z)$ pour $x \in \mathbb{R} \times \{a\}$ et $p_1 h(z) > p_1(z)$ si $z \in \mathbb{R} \times \{-a\}$ (où $p_1: \mathbb{R} \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la première projection).

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant qui est une version topologique du Théorème 4.2 de Franks [27] exactement comme le Théorème 5.3 ici est une version topologique du classique énoncé de Poincaré-Birkhoff.

6.1. THÉORÈME. Si $H: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-b, b]$, $0 < a < b$, est un plongement torsadé sans point fixe, alors il existe une courbe fermée simple essentielle c dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-a, a]$ telle que $H(c) \cap c = \emptyset$.

Preuve. Soit $h: \mathbb{R} \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R} \times [-b, b]$ un relevé de H tel que $p_1 h(z) < p_1(z)$ si $z \in \mathbb{R} \times \{a\}$ et $p_1 h(z) > p_1(z)$ si $z \in \mathbb{R} \times \{-a\}$.

6.2. LEMME. Il existe une extension $\tilde{h}: \mathbb{R} \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [-b, b]$ de h en un homéomorphisme \tilde{h} , commutant à la translation τ ($\tau(x, y) = (x + 1, y)$) et vérifiant $p_1 \tilde{h}(z) < p_1(z)$ si $z \in \mathbb{R} \times [a, b]$ et $p_1 \tilde{h}(z) > p_1(z)$ si $z \in \mathbb{R} \times [-b, a]$ (et donc sans point fixe).

Preuve du Lemme (d'après J. Franks [27]): Le théorème d'extension des isotopies topologiques de Edwards et Kirby [23] donne un homéomorphisme $\hat{H}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-b, b]$ qui étend H et qui est l'identité sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{-b, b\}$. Cet homéomorphisme se relève en un homéomorphisme $\hat{h}: \mathbb{R} \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [-b, b]$ qui étend h . Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, sur $\mathbb{R} \times [a, a + \varepsilon] \cup \mathbb{R} \times [-a - \varepsilon, -a]$, on ait $|p_1 \hat{h}(z) - p_1(z)| > 0$. Soit $M > \sup_{z \in \mathbb{R} \times ([-b, -a] \cup [a, b])} |p_1 \hat{h}(z) - p_1(z)|$ et soit $\rho: [-b, b] \rightarrow [-1, 1]$ une fonction continue croissante qui vaut 0 si $-a \leq y \leq a$, +1 si $y \leq -a - \varepsilon$ et -1 si $y \geq a + \varepsilon$. Soit alors $g: \mathbb{R} \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [-b, b]$ l'homéomorphisme donné par $g(z) = g(x, y) = (x + M\rho(y), y)$ et posons $\tilde{h} = \hat{h}g$. Alors \tilde{h} convient. En effet $\tilde{h} = h$ sur $\mathbb{R} \times [-a, a]$; si $a \leq |y| \leq a + \varepsilon$ et $z = (x, y)$, $|p_1 \tilde{h}(z) - p_1(z)| = |p_1 \hat{h}(g(z)) - x| = |p_1 \hat{h}(g(z)) - p_1(g(z)) + M\rho(y)| > 0$; et si $a + \varepsilon \leq |y| \leq b$, $|p_1 \tilde{h}(z) - p_1(z)| = |p_1 \hat{h}(x \pm M, y) - x| = |p_1 \hat{h}(x \pm M, y) - (x \pm M) \mp M| \geq M - |p_1 \hat{h}(g(z)) - p_1(g(z))| > 0$. \square

Remarque. Il n'est pas difficile d'obtenir directement un homéomorphisme $\hat{h}: \mathbb{R} \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [-b, b]$ qui étend h sans utiliser le théorème de Edwards et Kirby. En effet, soit A un point de $\mathbb{R} \times \{a\}$ dont l'image est d'ordonnée maximale parmi celle des points de $\mathbb{R} \times \{a\}$. Soit $B = \tau^{-1}(A)$ et soient C et D les points de $\mathbb{R} \times \{b\}$ de même abscisse que A et B respectivement. Soit aussi J le disque bordé par

- (1) les segments verticaux joignant $h(A)$ à un point de $\mathbb{R} \times \{b\}$ (qui sera par définition $\tilde{h}(C)$) et $h(B)$ à un point de $\mathbb{R} \times \{b\}$ (qui sera $\tilde{h}(D)$),
- (2) le segment $\tilde{h}(C)\tilde{h}(D) \subset \mathbb{R} \times \{b\}$, et
- (3) l'arc $h(AB) \subset h(\mathbb{R} \times \{a\})$.

On définit alors \tilde{h} sur le rectangle $ABCD$ comme étant n'importe quel homéomorphisme de ce rectangle sur J qui coïncide avec h sur l'arc $AB \subset \mathbb{R} \times \{a\}$. On définit ensuite \tilde{h} sur $\mathbb{R} \times [a, b]$ tout entier par périodicité, puis de la même manière sur $\mathbb{R} \times [-b, -a]$. \square

Donné le Lemme 6.2, la preuve du Théorème 6.1 copiera celle du Théorème 5.3 de Poincaré-Birkhoff si l'on sait construire une demi-droite libre sous \tilde{h} , contenue dans $\mathbb{R} \times [-a, a]$ à l'exception d'un arc initial contenu dans $\mathbb{R} \times [-b, -a]$, et sous complexe du 1-sequelette d'une triangulation de \mathbb{R}^2 invariante par la translation τ et induisant des triangulations de $\mathbb{R} \times [-a, a]$ et $\mathbb{R} \times [-b, b]$. (La construction qui suit s'inspire des idées de "deviation of the path" de Kérékjártó [34].)

Pour construire une telle demi-droite, considérons donc une triangulation comme ci-dessus qui soit de plus suffisamment fine pour que l'étoile de chaque sommet soit libre sous \tilde{h} . Si $B_0 = (0, -b)$ et $B_1 = (0, b)$, on peut supposer aussi que l'arc $\lambda = B_0B_1$ est sous complexe du 1-squelette de la triangulation. Suivons alors λ à partir de B_0 jusqu'au premier point C de λ tel que $B_0C \cap \tilde{h}(B_0C) \neq \emptyset$. Notons que C existe vu que H est torsadé. De plus, puisque $p_1 \tilde{h}(z) > p_1(z)$ pour $z \in \mathbb{R} \times [-b, -a]$, on a $C \in \mathbb{R} \times]-a, b[$.

L'arc $B_0C \subset \lambda$ contient $\tilde{h}(C)$ ou $\tilde{h}^{-1}(C)$ mais pas les deux car, dans ce cas, l'arc γ de $\tilde{h}^{-1}(C)$ à $\tilde{h}(C)$ intérieur à B_0C serait libre, ce qui contredirait la Proposition 3.5 (cf. Fig. 17). Si l'on pose $D = \tilde{h}^{\pm 1}(C)$ selon le cas, l'arc $\mu = CD \subset B_0C \subset \lambda$ est un arc de translation vertical. Donc, puisque \tilde{h} et \tilde{h}^{-1} ne préservent pas l'abscisse des points de $\mathbb{R} \times [-b, -a] \cup \mathbb{R} \times [a, b]$, nécessairement μ est inclus dans $\mathbb{R} \times]-a, a[$.

La trajectoire $l(\mu)$, engendrée par μ et \tilde{h} , détermine une région Λ incluse dans $\mathbb{R} \times [-b, b]$ elle-même divisée en Λ^- et Λ^+ par $l(\mu)$ (cf. la Proposition 3.7(b)). On choisit Λ^- de sorte que Λ^- contienne l'arc B_0D . Bien que μ ne soit pas nécessairement une union exacte de 1-simplexes, μ est inclus dans le 1-squelette de la triangulation choisie de \mathbb{R}^2 et comme en 4.3.a) on conclut à l'existence d'un triangle adjacent à μ , d'intérieur contenu dans Λ^+ . Et ensuite la preuve du théorème de translation permet d'obtenir une demi-droite k sous complexe de la triangulation proprement plongée dans \mathbb{R}^2 , incluse dans Λ^+ à l'exception de son origine qui est un sommet F de μ et contenue dans $\mathbb{R} \times [-a, a]$ à son début. Remarquons que $B_0F \cup k$ est libre sous \tilde{h} puisque $B_0F \subset \Lambda^-$ et $k - \{F\} \subset \Lambda^+$. Pour conclure la preuve du Théorème 6.1, il nous suffit de montrer que l'on peut modifier la construction de k de sorte que k ne sorte jamais de $\mathbb{R} \times [-a, a]$. Nous allons seulement indiquer comment modifier k lorsque k rencontre $\mathbb{R} \times]a, b]$, la procédure étant similaire lorsque k rencontre $\mathbb{R} \times [-b, -a[$.

Posons donc $l = B_0F \cup k$ et suivons l à partir de B_0 jusqu'au dernier point B_1 (éventuel) de k tel que FB_1 soit dans $\mathbb{R} \times [-a, a]$. Supposons que B_1 appartient à $\mathbb{R} \times \{a\}$. Suivons ensuite $\mathbb{R} \times \{a\}$ vers la droite à partir de B_1 et appelons λ_1 la demi-droite propre issue de B_0 ainsi décrite. Comme précédemment, suivons alors λ_1 à partir de B_0 jusqu'au premier point C_1 de λ_1 tel que $B_0C_1 \cap \tilde{h}(B_0C_1) \neq \emptyset$. Si C_1 n'existe pas, alors $\mathbb{R} \times \{a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau^n(B_1 \infty)$ où $B_1 \infty \subset \lambda \cap \mathbb{R} \times \{a\}$ est la demi-droite issue de B_1 . Cette demi-droite est libre sous \tilde{h} , donc $\mathbb{R} \times \{a\}$ aussi, et on a terminé. Sinon, puisque l est libre sous \tilde{h} , $C_1 \in \mathbb{R} \times \{a\}$. On a encore deux configurations, selon que $\tilde{h}(C_1)$ ou $\tilde{h}^{-1}(C_1)$ appartient à l'arc B_0C_1 (Fig. 18).

Dans la première éventualité (diagramme de gauche sur la Fig. 18), appelons $\mu_1 \subset \lambda_1$ l'arc de translation de $\tilde{h}(C_1)$ à C_1 , $l(\mu_1)$ la trajectoire engendrée par μ_1 et \tilde{h} , Λ_1^- et Λ_1^+ les régions associées à $l(\mu_1)$ choisies telles que $B_0\tilde{h}(C_1) \subset \Lambda_1^-$. Comme précédemment, un sommet de μ_1 est origine d'une demi-droite k_1 sous-complexe de la triangulation choisie de \mathbb{R}^2 , proprement plongée dans \mathbb{R}^2 et incluse dans Λ_1^+ à l'exception de son origine. Bien sûr, k_1 est contenue dans $\mathbb{R} \times [-a, a]$ à son début si $\mu_1 \subset \mathbb{R} \times]-a, a]$. Si μ_1 rencontre

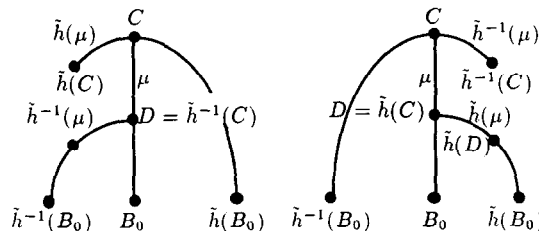


Fig. 17.

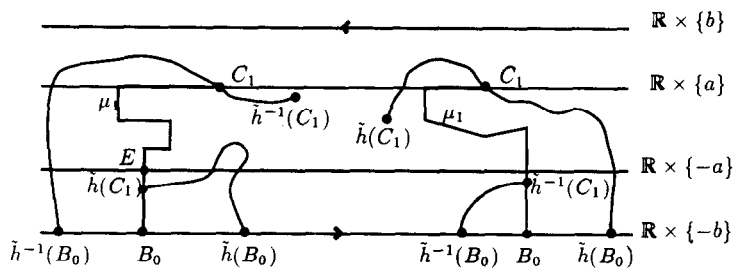


Fig. 18.

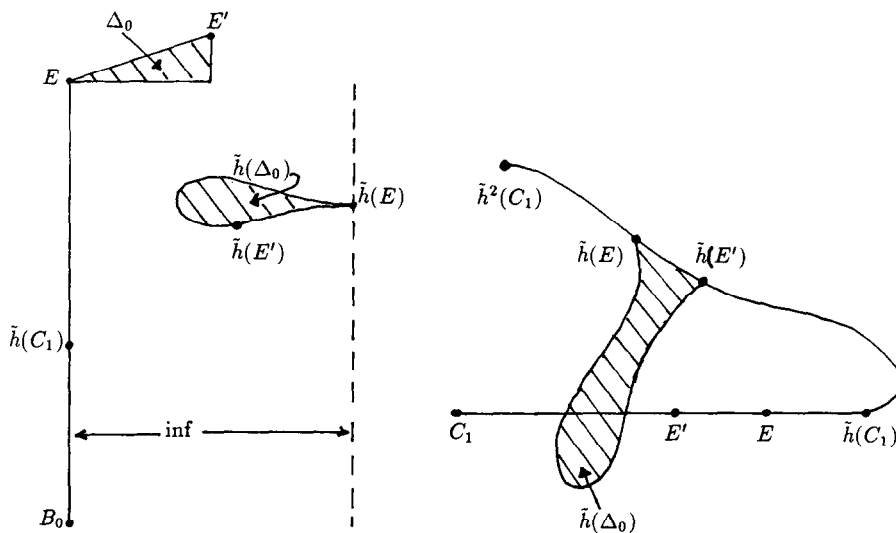


Fig. 19.

$\mathbb{R} \times [-b, a]$, on raisonne comme suit. Suivons μ_1 à partir de $\tilde{h}(C_1)$ et soit E le dernier point de $\mu_1 \cap \mathbb{R} \times \{-a\}$.

Ou bien $\tilde{h}(\mu_1)$ rencontre un triangle adjacent à l'arc $EC_1 \subset \mu_1$ et inclus dans $\bar{\Lambda}_1^+$, et alors aucune demi-droite k_1 construite comme dans le théorème de translation ne peut être issue d'un sommet de l'arc $\tilde{h}(C_1)E \subset \lambda_1$; en effet, dans ce cas, toute chaîne connexe infinie de triangles issue d'un triangle adjacent à $\tilde{h}(C_1)E$ et incluse dans Λ_1^+ doit rencontrer $\tilde{h}(\mu_1)$. Dans ce cas, k_1 est donc nécessairement issue d'un sommet de l'arc EC_1 et est contenue à son début dans $\mathbb{R} \times [-a, a]$.

Ou bien, $\tilde{h}(\mu_1)$ ne rencontre aucun triangle adjacent à $EC_1 \subset \mu_1$ et inclus dans $\bar{\Lambda}_1^+$. Il suffit alors de montrer que $\tilde{h}^{-1}(\mu_1)$ ne rencontre pas le triangle Δ_0 adjacent à EC_1 , inclus dans Λ_1 et contenant E . Cela sera le cas si la triangulation a été choisie suffisamment fine pour que l'on ait $\sup(\text{diam } \Delta, \text{diam } \tilde{h}(\Delta)) < \frac{1}{2} \inf_{z \in \mathbb{R} \times \{-a\}} |p_1 \tilde{h}(z) - p_1(z)|$ pour tout triangle Δ de la triangulation. En effet, dans ce cas, si $\tilde{h}(\Delta_0)$ rencontrait μ_1 cela ne pourrait être que sur l'arc $E'C_1 \subset \mu_1$ où $EE' = \Delta_0 \cap \mu_1$. Mais alors, puisque sur $\mu_1 \cap \tilde{h}(\mu_1)$ l'ordre des points est $C_1, E', E, \tilde{h}(C_1), \tilde{h}(E'), \tilde{h}(E), \tilde{h}^2(C_1)$ et puisque $\tilde{h}(\Delta_0)$ est libre, on aurait une contradiction avec le Lemme-clé 3.8. cf. Fig. 19.

En résumé, dans cette première éventualité on obtient toujours une demi-droite libre k_1 incluse dans Λ_1^+ (à l'exception de son origine) et dans $\mathbb{R} \times [-a, a]$ à son début. On traite de même la seconde éventualité (diagramme de droite sur la Fig. 18) où $\tilde{h}^{-1}(C_1) \in B_0 C_1$ ainsi que les cas où k rencontre $\mathbb{R} \times [-b, a]$.

On considère ensuite, si F_1 est l'origine de k_1 sur μ_1 , la demi-droite $B_0F_1 \cup k_1$ qui est encore libre sous \tilde{h} . Si k_1 est une demi-droite toute entière contenue dans $\mathbb{R} \times [-a, a]$, on a terminé. Sinon, on pose $l_1 = B_0F_1 \cup k_1$ et l'on reprend la discussion précédente avec l_1 au lieu de l . Le progrès est que l'arc μ_2 que l'on obtiendra alors sera dans Λ_1^+ et que si $l(\mu_2)$ est la trajectoire engendrée par μ_2 et \tilde{h} , $l(\mu_2)$ détermine deux régions du plan Λ_2^- et Λ_2^+ avec $B_0F_1 \subset \Lambda_2^-$, la demi-droite k_2 dans Λ_2^+ , $\Lambda_2^- \supset \Lambda_1^-$ et $\Lambda_1^+ \supset \Lambda_2^+$ (voir la preuve du théorème de translation au paragraphe 4). L'on détermine ainsi successivement deux suites $\Lambda_1^+ \supset \Lambda_2^+ \supset \dots \supset \Lambda_n^+ \supset \dots$ et $\Lambda_1^- \subset \Lambda_2^- \subset \dots \subset \Lambda_n^- \subset \dots$ de régions et une suite d'arcs libres sous \tilde{h} , issus de B_0 , sous-complexes de la triangulation $v_1 = B_0F_1, v_2 = B_0F_2, \dots, v_n = B_0F_n, \dots$ avec $v_n \subset \Lambda_n^-$, $v_n | \Lambda_{n-1}^- = v_{n-1}$, v_n rencontre Λ_{n-1}^+ , $v_n - v_1 \subset \mathbb{R} \times [-a, a]$, dont l'union constitue la demi-droite cherchée. Ceci termine la preuve du Théorème 6.1. \square

APPENDICE

Dans cet appendice, nous allons montrer que, dans la situation du lemme de point fixé 3.1, mieux qu'un point fixe, existe une courbe d'indice $+1$ pour l'homéomorphisme f . Des lemmes voisins se trouvent déjà chez Brouwer [14] et Kérékjártó [34]. On en déduit qu'un homéomorphisme h de \mathbb{R}^2 (éventuellement avec point fixe) préservant l'orientation et dont une trajectoire se recoupe admet une courbe fermée simple d'indice 1 ainsi que l'a souligné M. Brown [18] et utilisé J. Franks [27].

On se place donc dans la situation du lemme de point fixé 3.1 dont on garde les notations. En particulier, on a choisi une composante \hat{J} de $\hat{C} \cap \hat{D}$ et on note $j = \text{Fr } J$ sa frontière. C'est une courbe fermée simple.

A.1. LEMME. Si dans la situation du Lemme 3.1 un homéomorphisme préservant l'orientation $f: C \rightarrow D$ sans point fixe sur $c = \partial C$ vérifie $\delta_i \not\subset f(\gamma_i)$ et $f(\gamma_i) \not\subset \delta_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors l'indice de f sur j , noté $\text{ind}(f, j)$, vaut 1.

Preuve. Posons $K = f(J)$ et considérons $f: J \rightarrow K$. On note j et k les bords de J et K respectivement. On a $j \subset c \cup d = c \cup f(c)$ donc f est sans point fixe sur j . D'après 3.1, J contient un point fixe de f , donc $f(J) \cap J \neq \emptyset$. Si $f(j)$ ou $f^{-1}(j)$ est inclus dans J , alors certainement $\text{ind}(f, j) = 1$. Sinon on note v_n , $n \in \mathbb{N}$, les composantes connexes de $k - \hat{J}$. A chaque v_n est associé un arc $\mu_n \subset j$ de mêmes extrémités que v_n et tel que $\mu_n \cup v_n$ forme une courbe fermée simple bordant un disque N_n avec $N_n \cap J = \mu_n$. On a $\text{diam}(N_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. D'autre part, puisque $j \subset C$, on a $k \subset D$ et donc tout arc μ_n est inclus dans un arc $\gamma_{m(n)} \subset c$ de débordement de D et N_n est inclus dans le disque $\Delta_{m(n)}$ associé à $\gamma_{m(n)}$ comme en 3.1 (Fig. A.1). Dans la suite, on conviendra d'oublier les μ_n tels qu'il existe μ_n avec $\mu_n \subset \mu_{n'}$ (ainsi que les v_n et N_n correspondants).

Donc $f: J \rightarrow K$ vérifie $v_n \not\subset f(\mu_n)$ et $f(\mu_n) \not\subset v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $\mu = \mu_n$, il existe une isotopie de plongements $\varphi_t^\mu: v \rightarrow N$, $0 \leq t \leq 1$, telle que $\varphi_0^\mu = \text{id}$, $\varphi_1^\mu(v) = \mu$, $\varphi_t^\mu = \text{id}$ sur $\partial v = \partial v$ et $\varphi_t^\mu(\delta) \subset \hat{N}$ pour $0 < t < 1$. Lorsque $f(\mu) \cap \delta \neq \emptyset$, on impose à φ_t^μ les conditions supplémentaires suivantes. Notons p et q les extrémités de μ ; il y a trois cas de figure pour les positions relatives de v , μ et $f(\mu)$ (Fig. A.2). On note p' et q' les (éventuels) points de $\hat{\mu}$ tels que $f(p') = p$ et $f(q') = q$.

Dans le cas (a) de la Fig. A.2, on demande que $\varphi_1^\mu(pf(q)) = pp'$, dans le cas (b) que $\varphi_1^\mu(f(p)q) = q'q$ et dans le cas (c) que $\varphi_1^\mu(pf(q)) = pq'$ et que $\varphi_1^\mu(f(p)q) = p'q$.

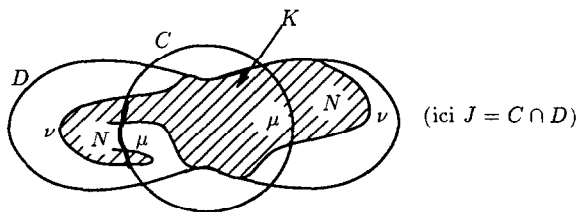


Fig. A.1.

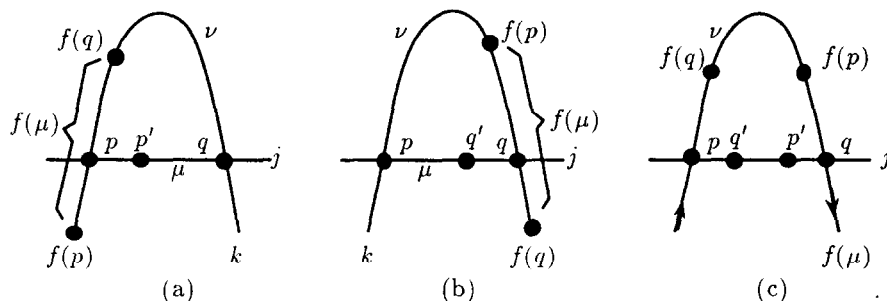


Fig. A.2.

Ces isotopies prolongées par l'identité sur $k - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \nu_n$ donnent une isotopie $\varphi_t: k \rightarrow K$ (car $\text{diamètre}(N_n) \rightarrow 0$) telle que $\varphi_1(k) \subset J$. On vérifie aisément que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi_t \circ f: j \rightarrow K$ est sans point fixe. Donc $\text{ind}(f, j) = \text{ind}(\varphi_1 \circ f, j) = 1$ car $\varphi_1 \circ f(j) \subset J$. \square

Soit maintenant h un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 préservant l'orientation mais éventuellement avec point fixe. Alors, la preuve du Théorème 3.3 et le Lemme A.1 impliquent:

A.2. LEMME. *Si une trajectoire de h a un point double, alors il existe une courbe fermée simple $j \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\text{ind}(h, j) = 1$.*

Remarquons que si x et $h(x)$ sont dans la même composante du complémentaire de l'ensemble des points fixe de h , en particulier si celui-ci est discret, il existe un arc de translation passant par x (et donc une trajectoire passant par x et $h(x)$) (cf. l'argument dans la Remarque 4.3a)). Dans ce cas, le Lemme A.2 s'applique en particulier si x est un point périodique de h .

Dans le même esprit, la preuve du Lemme-clé 3.8 et le Lemme A.1 impliquent

A.3. LEMME. *Si h admet une trajectoire sans point double et s'il existe un arc λ comme dans le lemme-clé tel que $h(\lambda) \cap \lambda = \emptyset$, alors il existe une courbe fermée simple j telle que $\text{ind}(h, j) = 1$.*

Acknowledgements—Je voudrais remercier J. Cerf, P. Le Calvez, A. Marin, F. Paulin pour des lectures attentives du texte, C. Danthony et B. Barbichon pour les figures, L. Siebenmann pour avoir amélioré le théorème de point fixe et surtout, C. Bonatti à qui je dois la plupart des remarques concernant les flots et le Théorème 5.1 qui est le fruit de discussions communes.

RÉFÉRENCES

1. S. A. ANDREA: On homeomorphisms of the plane, and their embedding in flows, *Bull. AMS.* **71** (1965), 381–383.
2. S. A. ANDREA: On homeomorphisms of the plane which have no fixed points, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **30** (1967), 61–74.
3. S. A. ANDREA: The plane is not compactly generated by a free mapping, *Trans. AMS*, **151** (1970), 481–498.
4. R. B. BARRAR: Proof of the fixed point theorems of Poincaré and Birkhoff, *Canad. J. Math.* **19** (1967), 333–343.
5. G. D. BIRKHOFF: Proof of Poincaré geometric theorem, *Trans. AMS*, **14** (1913), 14–22.
6. G. D. BIRKHOFF: An extension of Poincaré's last geometric theorem, *Acta Math.* **47** (1925), 297–311.
7. M. BESTVINA and M. HANDEL: An area preserving homeomorphism of T^2 that is fixed point free but does not move any essential simple closed curve off itself, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **12** (1992), 673–676.
8. L. E. J. BROUWER: Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, I, *Math. Ann.* **67** (1909), 246–267.
9. L. E. J. BROUWER: Continuous one-one transformation of surfaces in themselves, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* **12** (1909), 286–297.
10. L. E. J. BROUWER: Zur analysis situs, *Math. Ann.* **68** (1910), 422–434.
11. L. E. J. BROUWER: Über einendige Stetige Transformationen von Flächen in sich, *Math. Ann.* **69** (1910), 176–180.
12. L. E. J. BROUWER: Die Theorie den endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, II, *Math. Ann.* **69** (1910), 181–203.
13. L. E. J. BROUWER: Continuous one-one transformation of surfaces in themselves, III, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* **13** (1911), 767–777.

14. L. E. J. BROUWER: Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.* **72** (1912), 37–54.
15. L. E. J. BROUWER: Continuous one-one transformation of surfaces in themselves, V, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* **15** (1912), 352–360.
16. L. E. J. BROUWER: Remark on the plane translation theorem, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* **15** (1912), 935–936.
17. L. E. J. BROUWER: *Collected Works*, vol. 2 (H. Freudenthal ed.), North-Holland, 1976.
18. M. BROWN: A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *Houston J. Math.* **10** (1984), 35–41.
19. M. BROWN: Homeomorphisms of two-dimensional manifolds, *Houston J. Math.* **11** (1985), 455–469.
20. M. BROWN and W. D. NEUMANN: Proof of the Poincaré–Birkhoff fixed point theorem. *Mich. Math. J.* **24** (1977), 21–31.
21. P. H. CARTER: An improvement of the Poincaré–Birkhoff fixed point theorem, *Trans. AMS* **269** (1982), 285–299.
22. C. CONLEY and E. ZEHNDER: The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of Arnold, *Invent. Math.* **73** (1983), 33–49.
23. R. E. EDWARDS and R. C. KIRBY: Deformations of spaces of imbeddings, *Ann. Math.* **93** (1971), 63–88.
24. A. FATHI: An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs, *L'enseignement Math.* **33** (1987), 315–322.
25. R. J. FOKKINK and L. G. OVERSTEEGEN: A recurrent nonrotational homeomorphism on the annulus, *Trans. AMS*, **333** (1992), 865–875.
26. J. FRANKS: Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **8*** (1988), 99–107.
27. J. FRANKS: Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem, *Ann. Math.* **128** (1988), 139–151.
28. J. FRANKS: A variation on the Poincaré–Birkhoff theorem, *Contemp. Math.* **81** (1988), 111–117.
29. J. FRANKS: A new proof of the Brouwer plane translation theorem, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **12** (1992), 217–226.
30. L. GUILLOU: A generalized translation theorem for free homeomorphisms of surfaces, Preprint (October 1992).
31. L. GUILLOU: A generalization of the Poincaré–Birkhoff theorem to the open annulus, Preprint (June 1993).
32. M. HERMAN: Construction of some curious diffeomorphisms of the Riemann sphere, *J. London Math. Soc.* **34** (1986), 375–384.
33. B. de KEREKJARTO: On a geometrical theory of continuous groups I, *Ann. Math.*, **27** (1925), 105–117.
34. B. de KEREKJARTO: The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré, *Acta Sci. Math. Szeged*, **4** (1928–29), 86–102.
35. B. de KEREKJARTO: Note on the general translation theorem of Brouwer, *Atti d. Congresso Internaz. d. Mat., Bologna* 1928, 4 (1931), 235–238.
36. B. de KEREKJARTO: Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene, *Acta Sci. Math. Szeged*, **6** (1934), 226–234.
37. B. de KEREKJARTO: Sur le groupe des transformations topologiques du plan, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (1934), 393–400.
38. P. LE CALVEZ: Une généralisation du théorème de Conley–Zehnder aux homéomorphismes du tore de dimension deux, Preprint (December 1992).
39. W. SCHERRER: Translationen über einfach zusammenhängende Gebiete, *Viertelsschr. Naturf. Ges. Zurich*, **70** (1925), 77–84.
40. E. E. SLAMINKA: A Brouwer translation theorem for free homeomorphisms, *Trans. AMS*, **306** (1988), 277–291.
41. E. E. SLAMINKA: Area preserving homeomorphisms of two manifolds, *Contemp. Math.* **81** (1988), 153–167.
42. E. SPERNER: Über die fixpunktfreien abbildungen der Ebene, *Hamburger Math. Einzelschr.* **14** (1993), 1–47.
43. H. TERASAKA: Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes, *Japan J. of Math.* **7** (1930), 61–69.
44. H. E. WINKELNKEMPER: Twist maps, coverings and Brouwer's translation theorem, *Trans. AMS*, **267** (1981), 585–593.
45. H. E. WINKELNKEMPER: A generalization of the Poincaré–Birkhoff theorem, *Proc. AMS*, **102** (1988), 1028–1030.
46. H. E. WINKELNKEMPER: Fixed points with rotation as obstructions to topological transitivity, I, *Topology* **27** (1988), 393–400.
47. C. T. YANG: Hilbert fifth problem and related problems on transformation groups, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. **28**, part 1 (1976), 142–146.

UFR de Mathématiques

Institut Fourier BP 74

38402 Saint Martin-d'Heres cedex

France