Sumários detalhados das aulas TP de Sistemas Multimédia 2023/2024

Tomás Oliveira e Silva

Estão previstas as seguintes aulas teóricas:

Data	Tema
18/09	Introdução e motivação.
25/09	Séria clássica de Fourier.
02/10	Série discreta de Fourier.
09/10	TBD
16/10	TBD
23/10	TBD
30/10	TBD
06/11	TBD
13/11	TBD
20/11	TBD
27/12	TBD
04/12	TBD
11/12	TBD
18/12	TBD

Estão previstas as seguintes aulas práticas:

Datas	Tema
20/09 e 21/09	Apresentação da Disciplina. Introdução ao Matlab (slides + guião número 1)
27/09 e 28/09	Sinusoides e revisões sobre número complexos (guião número 2)
04/10 e 13/10	Decomposição de sinais em série de Fourier (guião número 3)
11/10 e 20/10	Transformada discreta de Fourier (guião número 4)
18/10 e 27/19	Amostragem e reconstrução de sinais (guião número 5)
25/10 e 03/11	Manipulação do espetro de sinais (guião número 6)
08/11 e 09/11	Primeiro teste prático
15/11 e 16/11	Processamento de sinais áudio (guião número 7)
22/11 e 23/11	Codificação de informação (guião número 8)
29/11 e 30/11	Codificação eficiente de informação (guião número 9)
06/12 e 07/12	Compressão de ficheiros de imagem, parte 1 (guião número 10)
13/12 e 14/12	Compressão de ficheiros de imagem, parte 2 (guião número 11)
20/12 e 21/12	Segundo teste prático

Nota prévia. Estes sumários não substituem a frequência das aulas TP.

Aula do dia 18 de setembro de 2023 (tablet)

Regras de avaliação:

- Um teste teórico final, a ser feito na época de exames, a valer 50% da nota. O teste tem doze perguntas de 2 valores cada, e contam as dez melhores respostas.

- Dois testes práticos, a serem feitos em grupos de 2, um a meio do semestre e outro no fim do semestre, cada um deles valendo 25% da nota.

O conceito de sinal. Amostragem e quantização. Problemas relacionados com a amostragem demasiado lenta de sinais (rodas de carros em filmes paradas ou a rodar ao contrário, idem para pás de helicópteros).

Na amostragem uniforme substitui-se a variável t ($t \in \mathbb{R}$) por nT_s ($n \in \mathbb{Z}$), onde T_s é o período de amostragem.[1] Assim, amostrar o sinal $x(t)$ corresponde a se obter as amostras $x(nT_s)$. Em particular, com um tom puro de f_o Hertz (ciclos por segundo), temos

$$\sin(2\pi f_o t) \quad\rightarrow\quad \sin(2\pi f_o n T_s) = \sin\left(2\pi \frac{f_o}{F_s} n\right).$$

Note que nesta última expressão o que importa é a razão $\frac{f_o}{F_s}$. Mais concretamente, os tons puros

$$\sin\left(2\pi \frac{f_o + kF_s}{F_s} n\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

são indistinguíveis. Se $\left|\frac{f_o}{F_s}\right| < \frac{1}{2}$ é possível determinar inequivocamente a frequência f_o a partir das amostras do sinal ($k = 0$). Em geral, é sempre possivel encontrar um k de modo a que $\left|\frac{f_o+kF_s}{F_s}\right| < \frac{1}{2}$. Ao reproduzir o tom, é essa frequência, entre $-F_s/2$ e $+F_s/2$, que vai ser ouvida (*aliasing*).

No fim da aula foi feita uma demonstração de áudio sobre o *aliasing*. Usando o *script* Matlab apresentado a seguir, foi criado um sinal com uma frequência que aumenta linearmente com o tempo. Inicialmente ouve-se uma tom com uma frequência a aumentar, mas a partir de uma certa altura (quando a frequência do tom ultrapassa metade da frequência de amostragem), a frequência do tom começa da diminuir.

Conteúdo do ficheiro `SM_2023_09_18.m`:

```
f0=200;                  % frequency of the sinosoid
Fs=8000;                 % sampling frequency
t=(0:5*Fs)/Fs;           % time instants for 5 seconds
x=sin(2*pi*f0*t);        % the sinusoid
sound(x,Fs);             % output sound

help chirp               % how to use chirp()
x=chirp(t,500,2,4000);   % a chirp signal
sound(x,Fs);
```

Devido à presença de um aluno Erasmus, que mais tarde optou por outra unidade curricular, a aula foi lecionada em Inglês.

[1] Letra s de *sampling* (a aula foi lecionada em Inglês). Em Português seria T_a, letra a de amostragem.

Aula do dia 25 de setembro de 2023 (tablet)

Em matemática usa-se `i` para designar a unidade imaginária (uma das raízes quadradas de -1). Em eletrotecnia a letra i é geralmente usada para designar uma intensidade de corrente, pelo que é usual na área de processamento digital de sinal, que teve o pessoal da eletrotecnia como principais fundadores, usar em sua vez a letra j:

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1}.$$

É essa convenção que vamos usar em Sistemas Multimédia.

É fundamental conhecer as seguintes fórmulas:

$$e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x, \quad \cos x = \frac{e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}.$$

Estas fórmulas são uma consequência imediata dos desenvolvimentos em série de Taylor das funções exponencial, co-seno e seno.

Diz-se que uma função $x(t)$ é periódica com período T quando

$$x(t+T) = x(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O período fundamental é o período mínimo possível. Todos os períodos dessa função são múltiplos do período fundamental.

Da unidade curricular de Cálculo 2, devem saber que uma função periódica suficientemente regular (contínua, por exemplo), pode ser expressa na seguinte soma de co-senos e senos (série clássica de Fourier):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(2\pi k\frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right).$$

Existem fórmulas para os coeficientes a_k e b_k que não vamos reproduzir aqui, pois é muito mais prático usar as exponenciais complexas $e^{\mathrm{j}2\pi k\frac{t}{T}}$ em vez dos co-senos e senos. De facto, temos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\mathrm{j}2\pi k\frac{t}{T}}, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-\mathrm{j}2\pi k\frac{t}{T}}\,dt.$$

A convergência de

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{\mathrm{j}2\pi k\frac{t}{T}}$$

para $x(t)$ não é, em geral, nem uma convergência uniforme nem mesmo uma convergência pontual, é uma convergência em norma.

Para quem quer saber mais

Uma maneira elegante de abordar a série clássica de Fourier consiste em definir uma classe de funções (espaço vetorial das funções periódicas de período T) e em definir um produto interno entre duas funções desse espaço vetorial:

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t)\,dt,$$

onde um asterisco designa conjugação complexa (mesma parte real, parte imaginária com sinal contrário). O produto interno induz uma norma,

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t)\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt},$$

e apenas as funções periódicas com norma finita pertencem ao espaço vetorial. Constata-se facilmente que as funções

$$x_k(t) = e^{\mathrm{j}2\pi k\frac{t}{T}}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

são ortonormais, isto é, temos

$$\langle x_u(t), x_v(t)\rangle = \delta_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se } u = v, \\ 0, & \text{se } u \neq v. \end{cases}$$

É mais complicado provar que este conjunto de funções é completo, isto é, que qualquer função $x(t)$ que pertence ao espaço vetorial pode ser expressa por uma combinação linear destas funções:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k x_k(t). \tag{1}$$

Como as funções $x_k(t)$ são ortonormais, é muito simples calcular c_k:

$$c_k = \langle x(t), x_k(t)\rangle.$$

Como o quadrado da norma de $x(t)$, que é dada por $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$, é finito, o quadrado da norma da aproximação de $x(t)$ por uma versão truncada de (1),

$$e_n(t) = x(t) - \sum_{k=-n}^{+n} c_k x_k(t) = \sum_{|k|>n} c_k x_k(t)$$

é $\sum_{|k|>n} |c_k|^2$ e converge para zero quando n tende para infinito. É por isso que se diz que a convergência é em norma.

É possível verificar (faça-o) que

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{e que} \quad b_k = \mathrm{j}(c_k - c_{-k}).$$

Para o sinal de período T (aqui $0 < a < \frac{T}{2}$)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < a, \\ 0, & a \leqslant |t| \leqslant \frac{T}{2}, \\ x(t-T), & \text{se } t > \frac{T}{2}, \\ x(t+T), & \text{se } t < -\frac{T}{2}, \end{cases}$$

os coeficientes c_k são dados por

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-\mathrm{j}2\pi k\frac{t}{T}}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-a}^{+a} e^{-\mathrm{j}2\pi k\frac{t}{T}}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\left.\frac{e^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{T}t}}{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{T}}\right|_{-a}^{+a} \\ &= \frac{\sin\left(2\pi k\frac{a}{T}\right)}{\pi k}. \end{aligned}$$

Esta fórmula dá o resultado correto também para $k = 0$:

$$\lim_{k\to 0} c_k = \frac{2a}{T} = \text{valor médio da função } x(t).$$

No fim da aula foi feita uma demonstração desta função periódica com séries truncadas de Fourier com cada vez mais termos. Usando o *script* Matlab apresentado a seguir, verificou-se que as séries truncadas com cada vez mais termos aproximavam, em geral, cada vez melhor $x(t)$, mas que junto das descontinuidades desta função a amplitude do erro não diminuia (mas o pico ficava cada vez mais estreito). A isto chama-se fenómeno de Gibbs.

Conteúdo do ficheiro `SM_2023_09_25.m`:

```
% signal parameters
T=2;
a=0.3;
% time instants
t=(-1000:1000)/1000*(1.5*T);
% approximation with only the n=0 term
x=c(0,T,a)*ones(size(t));
plot(t,x);
grid on;
axis([-1.5*T,+1.5*T,-0.2,+1.2]);
title('n=0');
drawnow;
for n=1:100
  % adding the n and -n terms
  x=x+c( n,T,a)*exp(1j*2*pi* n*t/T) + ...
      c(-n,T,a)*exp(1j*2*pi*-n*t/T);
  pause(0.1);
  plot(t,real(x));
  grid on;
  axis([-1.5*T,+1.5*T,-0.2,+1.2]);
  title(sprintf('%d <= n <= %d',-n,n));
  drawnow;
end

% the expansion coefficients
function cn = c(n,T,a)
  if n==0
    cn = 2*a/T;
  else
    cn = sin(2*pi*n*a/T)/(pi*n);
  end
end
```

Desafio: qual é a amplitude do pico de erro junto da descontinuidade?