Boa noite!

Sejam bem-vindos!

Álgebra Linear

Prof. Me **João** Eichenberger **Neto**

Formado em Licenciatura

26 anos de carreira

(14 anos em Fatec's)

UNICAMP

joao.eichenberger@fatec.sp.gov.br

O que você vai precisar?

- Lápis, caneta, borracha;
- Caderno;
- Régua;
- Calculadora científica;
- Download/Impressão dos materiais disponibilizados;
- Ter um livro de Matemática Básica "por perto" quando for estudar sozinho(a);
- Alguns minutos na semana para estudar.

O que você vai estudar?

Vetores, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Matrizes, Determinantes, Dependência Linear, Autovalores e Autovetores, Diagonalização.

Cronograma

19/fev	Apresentação da disciplina (Plano de Curso) Matrizes
26/fev	Matrizes/Apresentação do Projeto
04/mar	Matrizes: Determinantes
11/mar	Matrizes: Determinantes
18/mar	Matriz Inversa
25/mar	Aula de exercícios
01/abr	Sistemas Lineares
08/abr	Atividade pré-prova
15/abr	P1
22/abr	Semana da Carreira
29/abr	Devolução da P1 e discussão de resultados/Entrega do Projeto
06/mai	Vetores e espaços vetoriais
13/mai	Combinação linear
20/mai	Transformações lineares
27/mai	Autovalores e autovetores
03/jun	Diagonalização
10/jun	Atividade pré-prova
17/jun	P2
24/jun	Substitutiva
01/jul	Encerramento do semestre

Como será a avaliação?

- 2 provas (P1* e P2*) * 15/04 * 17/06
  * 10 pontos
  * 80% da nota de cada bimestre
- 2 notas para Trabalhos/Pré Prova (T1 e T2)
  * 10 pontos
  * 20% da nota de cada bimestre

$$\text{Nota} = 0{,}4 \cdot P1 + 0{,}1 \cdot T1 + 0{,}4 \cdot P2 + 0{,}1 \cdot T2$$

Se Nota $\geq$ 6,0	Se Nota < 6,0	* Conteúdo do bimestre
Aprovado(a)	Substitutiva*	* Prova do bimestre

O que é uma Matriz?

Tabelas utilizadas para guardar informações, distribuídas em linhas e colunas.

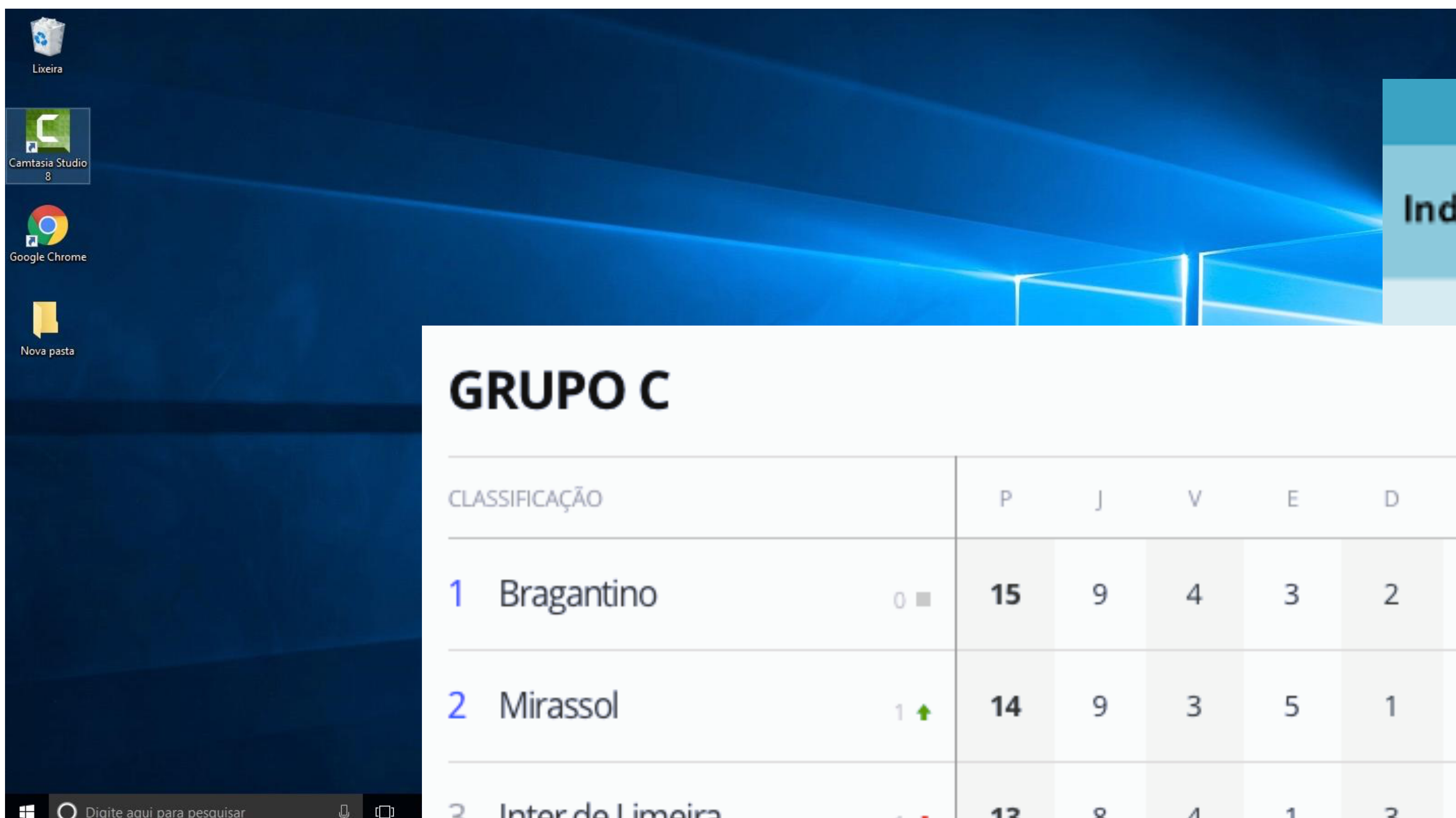

Tabela B		
Indivíduo	X: Massa corporal (kg)	Y: Consumo anual de água (L)
1	90	850
		400
		300
		550
		490
		350

GRUPO C

CLASSIFICAÇÃO			P	J	V	E	D	GP	GC	SG	%	ÚL
1	Bragantino	0	**15**	9	4	3	2	11	8	3	55	
2	Mirassol	1 ↑	**14**	9	3	5	1	16	11	5	51	
3	Inter de Limeira	1 ↓	**13**	8	4	1	3	13	9	4	54	
4	Corinthians	0	**10**	9	3	1	5	11	11	0	37	

Matematicamente falando...

Grupo ordenado de números que se apresentam dispostos nas linhas e colunas de uma tabela

Forma Explicita (ou Tabular)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0,3 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0{,}3 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

a_{23} A_{2x3} b_{31} B_{3x3} c_{22} c_{14} C_{3x4}

Matriz A
tipo 2 por 3
(***duas*** linhas e
três colunas)

Matriz B
Quadrada de ordem 3
(***três*** linhas e
três colunas)

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots \; a_{ij} \; \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Quantidade de linhas

Quantidade de colunas

coluna j

linha i

Forma Implícita (ou Indexada)

Como a que aparece no Exemplo abaixo

$$A = (a_{ij})_{2x3},\ a_{ij} = 4i + j$$

os elementos da Matriz A

estão dispostos em 2 linhas e 3 colunas,

e cada elemento pode ser obtido utilizando essa fórmula

$A = (a_{ij})_{2x3},\ a_{ij} = 4i + j$

$a_{12} = ?$

$a_{21} = ?$

como $a_{ij} = 4i + j$ temos que,

$a_{12} = 4.1 + 2 = 6$

(o elemento que ocupa a linha **1** *e coluna* **2** *da Matriz A vale* 6*)*

tente o outro...

$a_{21} = 4.2 + 1 = 9$

(o elemento que ocupa a linha **2** *e coluna* **1** *da Matriz A vale* 9*)*

Outros exemplos: Escreva as matrizes a seguir na forma tabular.

$A = (a_{ij})_{2x2},\ a_{ij} = 2i - j$

$$\begin{array}{ccc} & j=1 & j=2 \\ i=1 & \left(\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\right) \\ i=2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & j=1 \\ \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a_{11} = 2.1 - 1 = 1$

$a_{12} = 2.1 - 2 = 0$

$a_{21} = 2.2 - 1 = 3$

$a_{22} = 2.2 - 2 = 2$

$B = (b_{ij})_{3x1},\ b_{ij} = 7 + i$

$$\begin{array}{cc} & j=1 \\ \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$b_{11} = 7 + 1 = 8$

$b_{21} = 7 + 2 = 9$

$b_{31} = 7 + 3 = 10$

1. A temperatura da cidade de Porto Alegre – RS foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante 6 dias. Cada elemento a_{ij} da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9,4 & 8,1 & 12,4 & 15,7 & 13 & 11,7 \\ 12,2 & 10,5 & 15 & 18,2 & 14,2 & 13,1 \\ 15,7 & 13,2 & 17,5 & 21 & 16,3 & 18,5 \end{bmatrix}$$

corresponde à temperatura observada no tempo i do dia j. Com base nos dados da matriz analise as seguintes proposições:

I. A temperatura mínima registrada está na posição a_{12}
II. A maior variação de temperatura registrada entre os tempos 1 e 2 aconteceu no primeiro dia.
III. A temperatura máxima registrada está na posição a_{34}

Estão corretas as afirmativas
a) I e III apenas.
b) I e II apenas.
c) II e III apenas.
d) I, II e III.

Igualdade entre matrizes

Matrizes são iguais se tem os mesmos elementos nas mesmas posições

2. Calcule os valores de x, y e z para que as matrizes A e B, a seguir, ***sejam iguais***.

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & 2x - y \\ x^3 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -8 & x + 3y - 2z \end{pmatrix}$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

$$2x - y = -11 \Leftrightarrow y = -4 + 11 \Leftrightarrow \boxed{y = 7}$$

$$\boxed{z = 6}$$

Matriz Transposta

3. Calcule os valores de a e de b a matriz A ***seja igual à transposta*** de B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+2b & 3 \\ 5a & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 2 \quad 4} \\ \boxed{-1 \quad -3 \quad 10} \end{pmatrix} \text{ é a transposta de } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 5 & 12 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A_{mxn} \longrightarrow A^t_{nxm}$$

$$a_{ij} \longrightarrow a^t_{ji}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 20 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A = B^t \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=5 \quad \therefore b = \dfrac{1}{2} \\ 5a = 20 \quad \therefore \ \text{a} = 4 \end{cases}$$

Matrizes especiais

Uma ***Matriz*** é chamada de ***Nula*** quando todos os elementos são nulos, ou seja, iguais a zero.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F é uma matriz nula 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A é uma matriz nula 3x3

Uma ***Matriz Linha*** é aquela que possui exatamente uma linha e n colunas, ou seja é do tipo 1xn.

$$\mathbf{B} = [\,2\ 4\ 6\,]$$

B é uma matriz linha 1 x 3

Uma ***Matriz Coluna*** é aquela que possui m linhas e exatamente uma coluna , ou seja é do tipo mx1.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

D é uma matriz coluna 4 x 1

Importante: Matrizes Linha e/ou Coluna são, usualmente, utilizadas para representar VETORES.

Matrizes especiais

Uma ***Matriz*** é chamada de ***Quadrada*** quando ***m = n***, ou seja, quando a quantidade de linhas (m) for igual à quantidade de colunas (n)

Uma matriz quadrada de ***Ordem n*** tem ***n*** linhas e ***n*** colunas

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

...é uma matriz **Quadrada** de **Ordem 4**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

... é uma matriz **Quadrada** de **Ordem 3**

Se uma matriz é **Quadrada** de **Ordem n**

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

... os elementos destacados estão na...

→ Diagonal Principal $i = j$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

... e há apenas "zeros" (Triângulo de Zeros) abaixo ou acima da diagonal principal...

... chamamos a Matriz de Triangular.

Se uma matriz é **Quadrada** de **Ordem n**

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

... e há apenas "zeros" (Triângulo de Zeros) abaixo e acima da diagonal principal...

... chamamos a Matriz de Diagonal.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Todos iguais

Matriz Escalar

I
d
e
n
t
i
d
a
d
e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Representada por I_n

Corresponde ao 1 (um) da álgebra convencional...

Tente isso...

1. (Unesp 2002) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz ao lado descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, i, j = 1, 2, 3. Analisando a matriz, podemos afirmar que,

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) a quantidade de produtos do tipo P2 vendidos pela loja L2 é 11.
b) a quantidade de produtos do tipo P1 vendidos pela loja L3 é 30.
c) a soma das quantidades de produtos do tipo P3 vendidos pelas três lojas é 40.
d) a soma das quantidades de produtos do tipo Pi vendidos pelas lojas Li, i = 1,2,3, é 52.
e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P1 e P2 vendidos pela loja L1 é 45.

2. Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz $M=(m_{ij})$ tipo 3x2 Após o sorteio, notou-se que esses números obedeceram à regra $m_{ij}=4i-j$. Calcule o valor da soma de todos os elementos dessa matriz.

Gabarito: 1. E 2. 36