

1. Escreva os sistemas a seguir na forma matricial.

$$a) \begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Equação matricial**  
das Incógnitas

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

↑  
↓  
dos Coeficientes      dos Termos independentes

1. Escreva os sistemas a seguir na forma matricial.

$$b) \begin{cases} -3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 4 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Equação matricial**  
das Incógnitas

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

↑  
↓  
dos Termos independentes  
↓  
dos Coeficientes

2. Encontre os valores de  $x$  e  $y$  que resolvem o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 6x - 3y = 1 \\ -3x + 6y = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

$\det(A)$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{-3}{27} = -\frac{1}{9}$$

3. Calcule o valor de y que no sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$\det(A) = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-2+2)-(-2)}{-4} = \frac{1}{2}$$

# Classificação de um Sistema Linear

<b>SPD</b>	<b>Solução Única</b> "possível e determinado"	<b>Pode ser resolvido pelo método de Cramer</b>	<b><math>D = \det A \neq 0</math></b>
<b>SPI</b>	<b>Infinitas Soluções</b> "possível e indeterminado"	<b>Equações Equivalentes</b> "Falta(m) equação(ões)"	<b><math>D = \det A = 0</math></b>
<b>SI</b>	<b>Não tem Solução</b> "impossível"	<b>Inconsistência</b> "equações que se contradizem"	<b><math>D = \det A = 0</math></b>

4. Para que valores de  $k$  o sistema é possível e determinado (SPD)?

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky - z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

***solução única***

$$\det(A) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(0 - 2 + 2k) - (k^2 - 1 + 0) \neq 0$$

$$-k^2 + 2k - 1 \neq 0$$

$$k^2 - 2k + 1 \neq 0$$

$$k \in R \text{ tal que } k \neq 1$$

## Sistemas Homogêneos

$$S_1: \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + 5y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

SPD

$$S = \{(0;0;0)\}$$

Solução Trivial

SPI

Solução trivial + Soluções Próprias

Sistema Linear  
**Homogêneo**



**Não** pode ser  
**SI**

Se  $D \neq 0 \rightarrow$  Sistema possível determinado  
Se  $D = 0$   $\begin{cases} \rightarrow$  Sistema possível indeterminado  
ou  
 ~~$\rightarrow$  Sistema impossível~~

$$S_1: \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0 \quad \text{SPD}$$

$$S = \{(0;0)\}$$

$$S_2: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + 5y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1/2 \end{vmatrix} = 36,5 \neq 0 \quad \text{SPD}$$

$$S = \{(0;0;0)\}$$



1. Escreva os sistemas a seguir na forma matricial

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 0 \\ -2x = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

2. Resolva os sistemas a seguir utilizando a regra de Cramer.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

3. (FGV) O sistema linear nas incógnitas  $x, y, z$

$$\begin{cases} x - y = 10 + z \\ y - z = 5 - x \\ z + x = 7 + y \end{cases} \text{ pode ser escrito na forma}$$

matricial  $AX = B$ , em que:  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Nessas condições, calcule o determinante de  $A$ .

**Ilustração 1** do que faremos a seguir...

Uma pessoa consumiu 2 salgados e 3 refrigerantes na cantina e gastou R\$ 16,50. No dia seguinte pediu 2 salgados e 4 refrigerantes na mesma cantina, sem que os preços tivessem sido reajustados, e gastou R\$ 20,00. Quanto custa um refrigerante? Quanto custa um salgado?

x: preço do salgado

y: preço do refrigerante

$$\begin{cases} \cancel{2x} + 3y = 16,50 \\ \cancel{2x} + 4y = 20,00 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{aligned} 2x + 3.3,50 &= 16,50 \\ 2x &= 6,00 \quad , \text{ portanto } x = 3,00 \end{aligned}$$

---

$$- y = - 3,50 \quad , \text{ portanto } y = 3,50$$

Assim, o refrigerante custa R\$ 3,50 e o salgado custa R\$ 3,00

**Ilustração 2** do que faremos a seguir...

Uma pessoa possui o valor de **R\$ 105,00** na carteira composto apenas por notas de R\$ 5,00 e de R\$ 20,00. Sabendo que há um total de 9 cédulas na carteira quantas são as notas de R\$ 20,00?

x notas de



y notas de



$$x + y = 9$$

$$x \cdot 20 + y \cdot 5 = 105$$

Assim,

$$\begin{cases} x + y = 9 & \xrightarrow{\cdot(-5)} \\ 20x + 5y = 105 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -5x - \cancel{5y} = -45 \\ 20x + \cancel{5y} = 105 \end{cases} +$$
$$\hline 15x = 60, \text{ portanto } x = 4$$

Assim, a pessoa possui 4 notas de R\$ 20,00 na carteira

1. Resolva o sistema a seguir.

a) 
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

Operations:  $-3l_1 + l_2$  and  $l_1 + l_3$

$$\begin{array}{r} -3l_1 + l_2 \\ \hline -3x - 3y - 3z = -18 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ \hline -y - 4z = -14 \end{array} + \begin{array}{r} l_1 + l_3 \\ \hline x + y + z = 6 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ \hline 5y - z = 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - 4z = -14 \\ 5y - z = 7 \end{cases}$$

Operation:  $5l_2 + l_3$

$$\begin{array}{r} 5l_2 + l_3 \\ \hline -5y - 20z = -70 \\ 5y - z = 7 \\ \hline -21z = -63 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - 4z = -14 \\ -21z = -63 \end{cases}$$

**Escalonado!**

$$b) \begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 9 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases} \xrightarrow{-2l_1+l_2 \quad -l_1+l_3} \begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ -2y + 4z = -3 \\ -2y + 4z = -2 \end{cases}$$

**Incompatíveis**

**Sistema Impossível**  
**Não tem solução**

$$c) \begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + 3y + z = -3 \\ -x - 2y - 2z = 8 \end{cases} \xrightarrow{-2l_1+l_2 \quad l_1+l_3} \begin{cases} x + y - z = 5 \\ y + 3z = -13 \\ \cancel{y - 3z = 13} \end{cases}$$

**Equivalentes**

**Sistema Possível**  
**e Indeterminado**

**“só tem duas equações, na verdade”**

**Infinitas Soluções**: em função de uma letra

**“mas nem tudo é solução”**

Da linha 2:  $y = -13 - 3z$

Da linha 1:  $x + (-13 - 3z) - z = 5$

$x = 18 + 4z$

**“Particulares”**

Se  $z=0$

$y=-13$  e  $x=18$

Se  $z=-2$

$y=-7$  e  $x=10$

2) Determine os valores de m para que o sistema a seguir seja possível e determinado.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + my - 2z = 2 \\ 3x + 2y - mz = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -2 \\ 3 & 2 & -m \end{vmatrix} = (-m^2 - 6 + 4) - (3m - 4 - 2m)$$

$$-m^2 - m + 2 \neq 0$$

$$m^2 + m - 2 \neq 0$$

Se  $m \neq -2$   
e  $m \neq 1$

SPD

3) Determine os valores de k para que o sistema a seguir seja possível e indeterminado.

$$\begin{cases} 3x + 6y = k & .2 & 6x + 12y = 2k \\ 2x + 4y = 1 & .3 & 6x + 12y = 3 \end{cases}$$

Se  $2k = 3$   
ou seja,  $k = 3/2$

SPI

## Saideira...

Márcia e Marta juntas "pesam" 115kg, Marta e Mônica "pesam" juntas 113kg e Márcia e Mônica "pesam" juntas 108kg.

- a) Qual é a soma dos "pesos" de Márcia, Marta e Mônica?  $x + y + z = ?$   
 b) Qual o peso da Mônica?

x: Márcia  
 y: Marta  
 z: Mônica

$$x + y = 115$$

$$y + z = 113$$

$$x + z = 108$$

+

$$2x + 2y + 2z = 336 \quad \div 2$$

$$x + y + z = 168 \text{ kg} \quad (a)$$

$$115 + z = 168 \quad z = 53 \text{ kg} \quad (b)$$



**Incógnitas**  
 "nas mesmas  
 quantidades"