LISTA DE EXERCÍCIOS
Álgebra Linear – 3º. Semestre
Prof. João Neto
Tecnologia em DSM

1. Para combater a subnutrição infantil, foi desenvolvida uma mistura alimentícia composta por três tipos de suplementos alimentares: **I**, **II** e **III**. Esses suplementos, por sua vez, contêm diferentes concentrações de três nutrientes: A, B e C. Observe as tabelas a seguir, que indicam a concentração de nutrientes nos suplementos e a porcentagem de suplementos na mistura, respectivamente.

Nutriente	**Concentração dos Suplementos Alimentares (g/kg)**		
	I	II	III
A	0,2	0,5	0,4
B	0,3	0,4	0,1
C	0,1	0,4	0,5

Suplemento Alimentar	**Quantidade na Mistura (%)**
I	45
II	25
III	30

A quantidade do nutriente C, em g/kg, encontrada na mistura alimentícia é igual a:

a) 0,235
b) 0,265
c) 0,275
d) 0,295

2. Uma fábrica decide distribuir os excedentes de três produtos alimentícios A, B e C a dois países da América Central, P_1 e P_2. As quantidades, em toneladas, são descritas mediante a matriz Q:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{array}$$

Para o transporte aos países de destino, a fábrica recebeu orçamentos de duas empresas, em reais por toneladas, como indica a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1ª empresa} \\ \leftarrow \text{2ª empresa} \end{array}$$

a) Efetue o produto das duas matrizes, na ordem que for possível. Que elemento da matriz produto indica o custo de transportar o produto A, com a segunda empresa, aos dois países?
b) Para transportar os três produtos aos dois países, qual empresa deveria ser escolhida, considerando que as duas apresentam exatamente as mesmas condições técnicas? Por quê?

3. Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) -2.
b) -1.
c) 1.
d) 2.

4. Uma matriz quadrada de ordem n é chamada triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Os elementos de uma matriz triangular superior T, de ordem 3, onde $i \leq j$, são obtidos a partir da lei de formação $t_{ij} = 2i^2 - j$. Sendo $A = [-1 \ \ 1 \ \ 1]$ uma matriz de ordem 1×3 e A^t sua transposta, o produto $A \cdot T \cdot A^t$ é a matriz 1×1 cujo único elemento vale

a) 0.
b) 4.
c) 7.
d) 28.

5. Sendo x, y e z números reais, considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ x & 2 & 0 & 0 \\ y & z & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Supondo que $x = 1$, $y = 1$ e $z = -2$, calcule o produto de matrizes $A \cdot B$.
b) Para quais valores de x, y e z a matriz B é a inversa da matriz A?

6. A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST**, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, respectivamente. A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{pmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{pmatrix}$, que, numericamente, corresponde a $M = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes $N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}$. O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida: $M = B \cdot N = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$.

a) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e a mensagem a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

b) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e o destinatário recebe a matriz codificada $N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}$, qual foi a mensagem enviada?

7. Considere uma matriz A com 3 linhas e 1 coluna, na qual foram escritos os valores $1, 2$ e $13,$ nesta ordem, de cima para baixo. Considere, também, uma matriz B com 1 linha e 3 colunas, na qual foram escritos os valores $1, 2$ e $13,$ nesta ordem, da esquerda para a direita. Calcule o determinante da matriz obtida pelo produto de $A \times B.$

8. Uma matriz A $(m \times n)$ é uma tabela retangular formada por $m \times n$ números reais $(a_{ij}),$ dispostos em m linhas e n colunas. O produto de duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$ é uma matriz $C = (c_{ij})_{m \times p},$ em que o elemento c_{ij} é obtido da multiplicação ordenada dos elementos da linha $i,$ da matriz $A,$ pelos elementos da coluna $j,$ da matriz $B,$ e somando os elementos resultantes das multiplicações. A soma de matrizes é comutativa, ou seja, $A + B = B + A.$ Faça a multiplicação das matrizes A e $B,$ e verifique se esse produto é comutativo, ou seja: $A \times B = B \times A.$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gabarito:

Resposta da questão 1: [D]
Resposta da questão 2:
a) 100000
b) A empresa 2.
Resposta da questão 3: [A]
Resposta da questão 4: [D]
Resposta da questão 5:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{cases} 3x + 4 = 1 \\ 3y + 2z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}.$

Em consequência, como para tais valores de x, y e z a condição $B \cdot A = I_4$ também é cumprida (verifique!), segue o resultado.

Resposta da questão 6:

a)
$$\begin{aligned} N &= A \cdot M \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) A mensagem é $M = \begin{pmatrix} S & E & G & U \\ N & D & A & * \end{pmatrix}$

Resposta da questão 7: $\det(A \times B) = 0.$

Resposta da questão 8: O produto de A e B não é comutativo.