Aula 4
Transformada Discreta Wavelet
DWT

barbon@uel.br

Conteúdo:

1) Wavelets
2) Wavelet da Família de Haar
3) Wavelet da Família Daubechies
4) Aplicações.

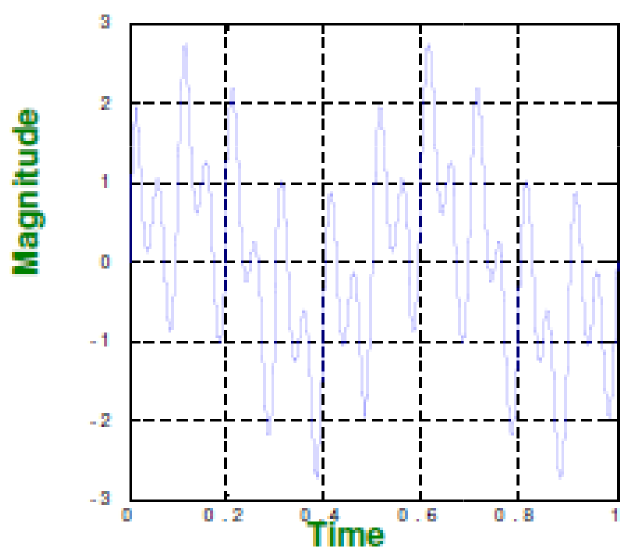
barbon@uel.br

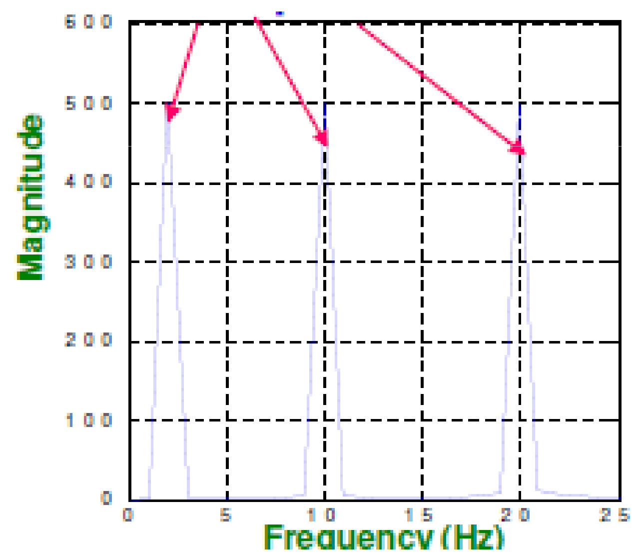
Transformada de Fourier:

- Representa um sinal como uma série de senos e cossenos;
- Considera o sinal todo;
- É apropriado para sinais estacionários (frequência não muda com o tempo)

2 Hz + 10 Hz + 20Hz

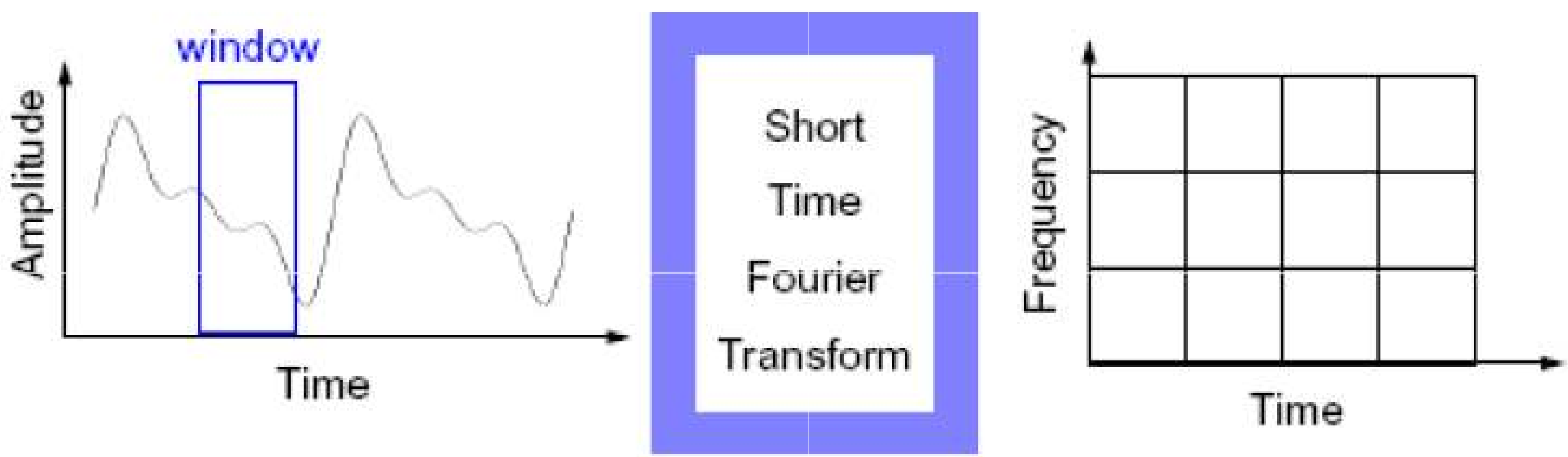
Estacionário





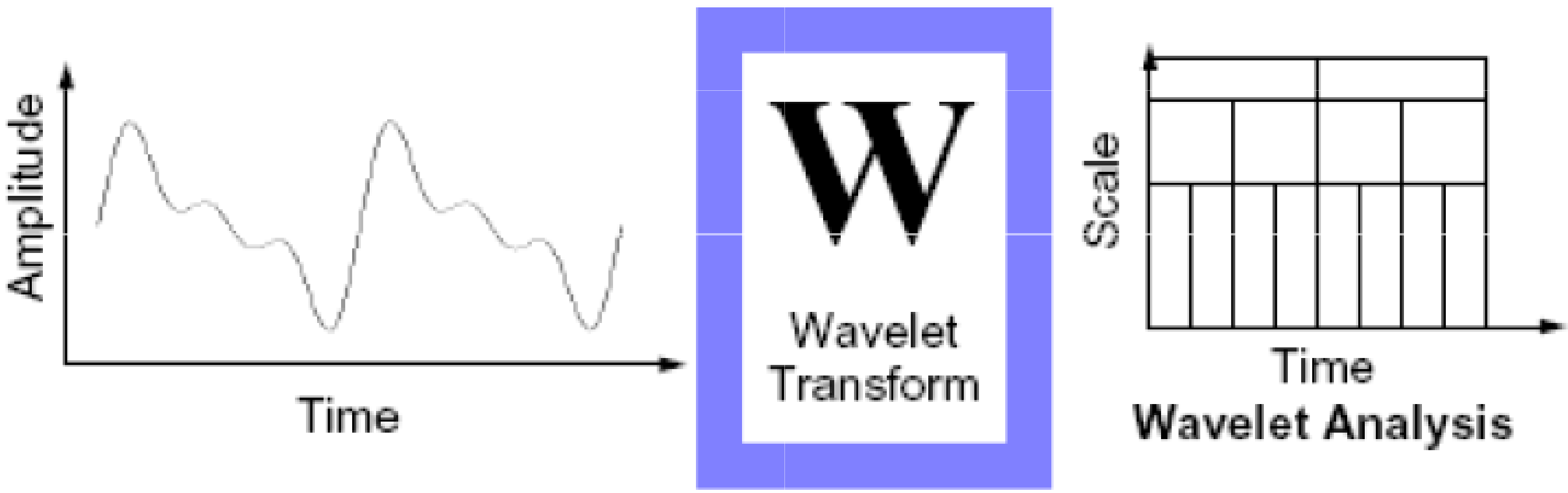
Alternativas:

- **Trasformada de Fourier de Tempo Curto** (Short Time Fourier Transform), janelando o sinal em pontos estacionários. (1946)
- Mas se as janelas tivessem comprimentos variados devidos aos critérios de linearidade do sinal?
- Janela pequena = pouca informação;
- Janela grande = diminuição da estacionaridade;



Alternativas:

- Transformada em janelas com tamanhos variados = Wavelet;
- Janelas grandes com informações sobre altas frequências;
- Janelas menores com informações sobre baixas frequências;



Wavelet

- Pequena onda (de comprimento finito);

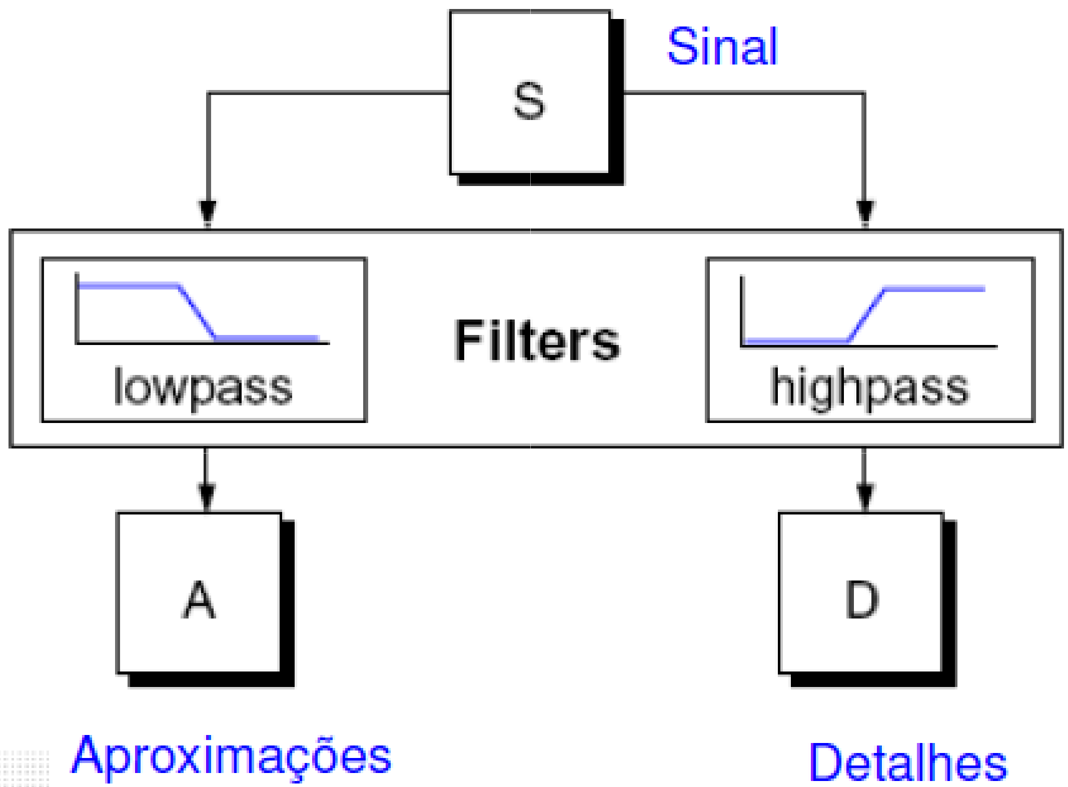
- Wavelet Mãe é a função que analisa o sinal.

- A DWT de um sinal discreto f[], contendo n amostras (pontos), é um outro sinal discreto y[], também de n pontos.

-O sinal transformado (y[]) contém informações sobre as frequências que compõe o sinal original (f[]), e também onde tais frequências se localizam dentro de f[].

-DWT é um processo de filtragem digital no domínio do tempo (via convolução discreta) seguida de downsampling por 2.

Wavelet

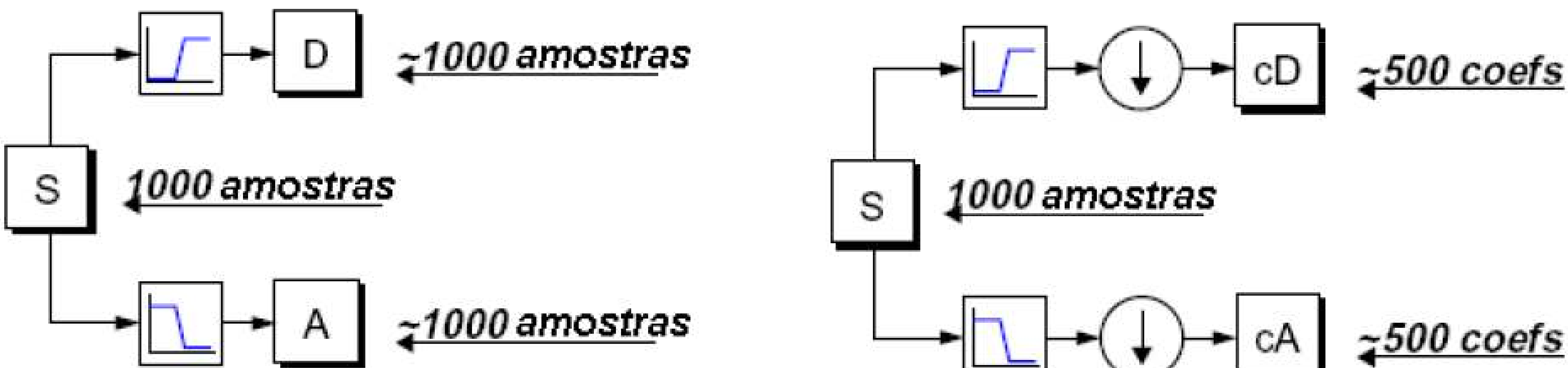


- Componentes de alta escala e baixa freqüência do sinal
- Componentes de pequena escala e alta freqüência do sinal

Wavelet

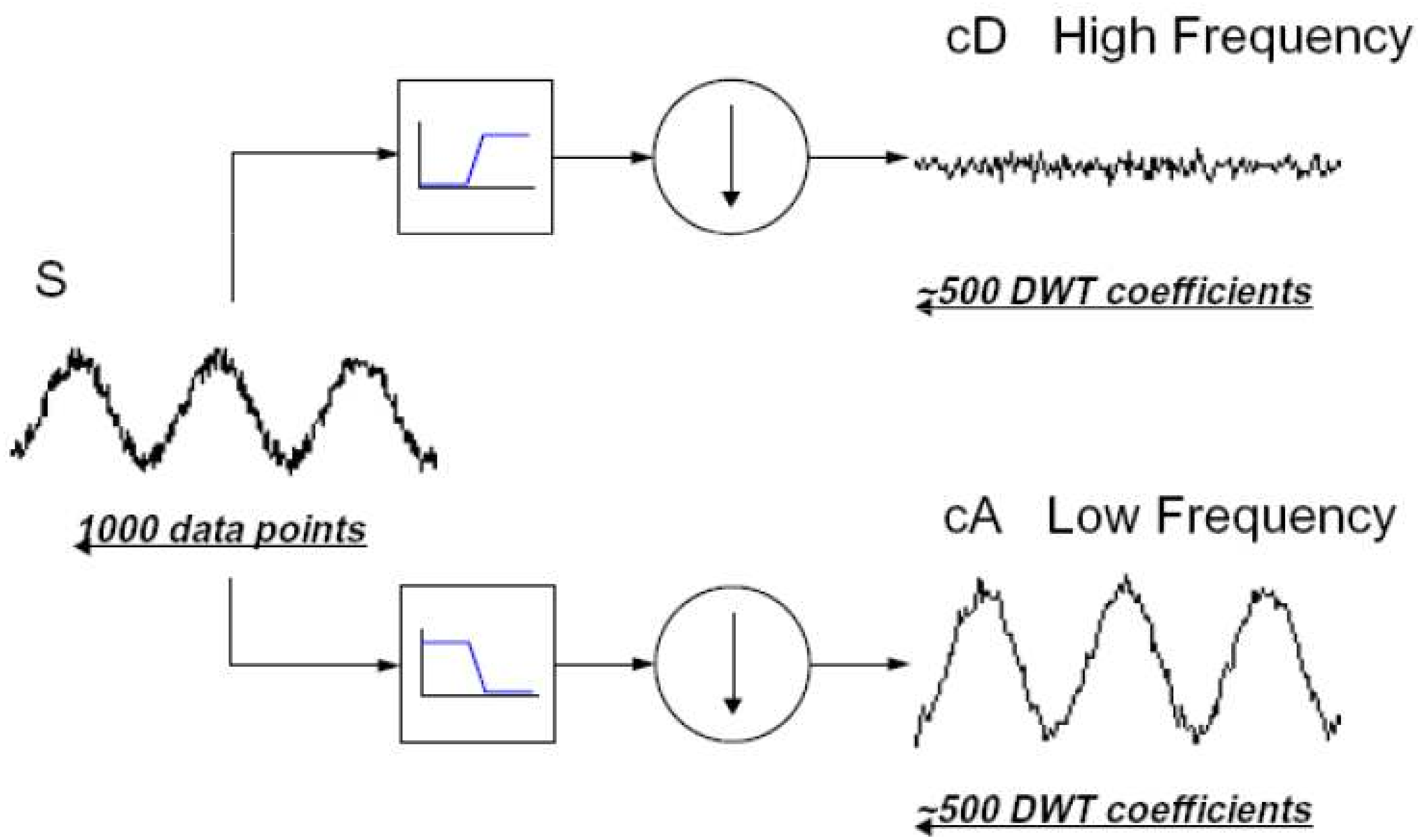
- Algoritmo de Mallat (1988), implementa a análise de wavelets usando filtros, também conhecidos como ***two-channel subband coder.***

Não é adequado!



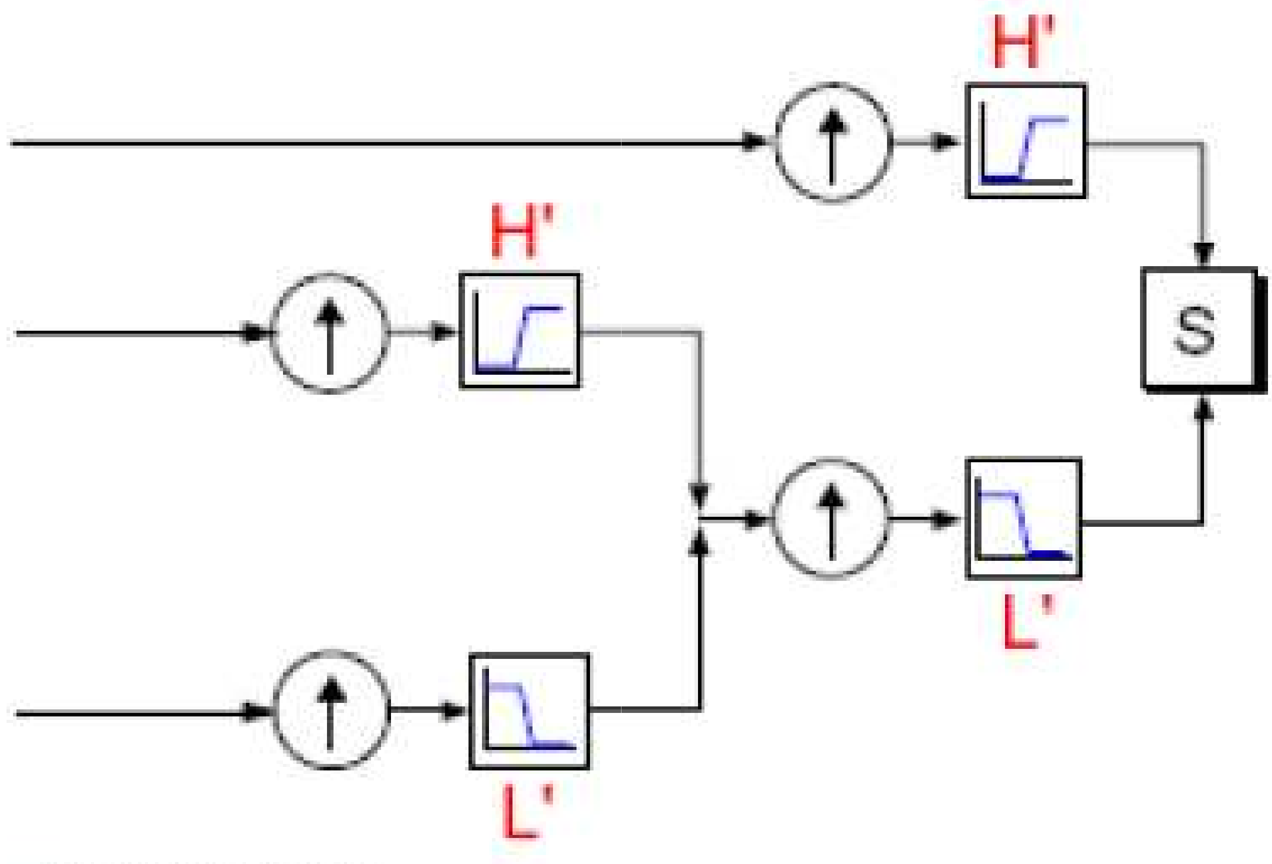
Wavelet

- Algoritmo de Mallat (1988), implementa a análise de wavelets usando filtros, também conhecidos como ***two-channel subband coder.***



Wavelet

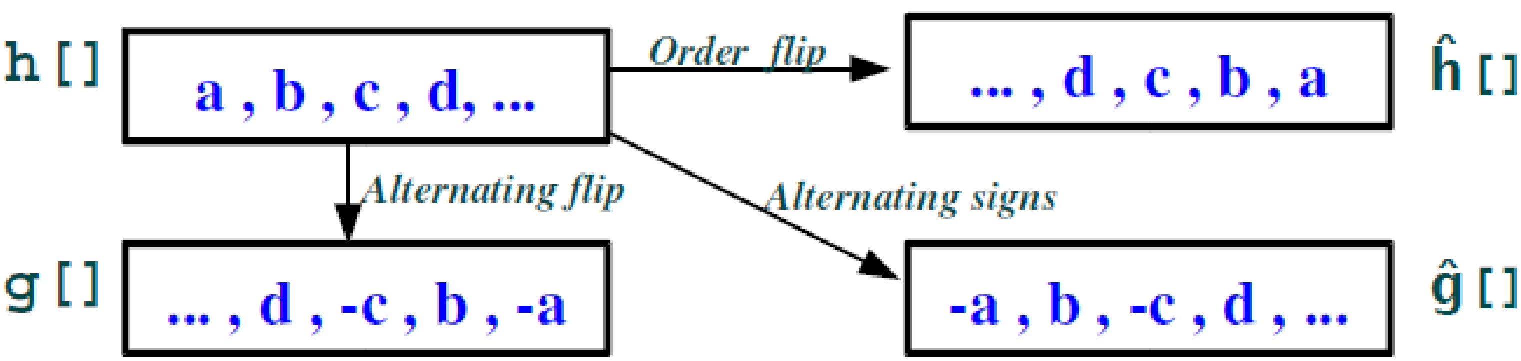
Para recompor o sinal, basta aplica a inversa, onde ao invés do downsampling, seria aplicado o upsampling.



Wavelet

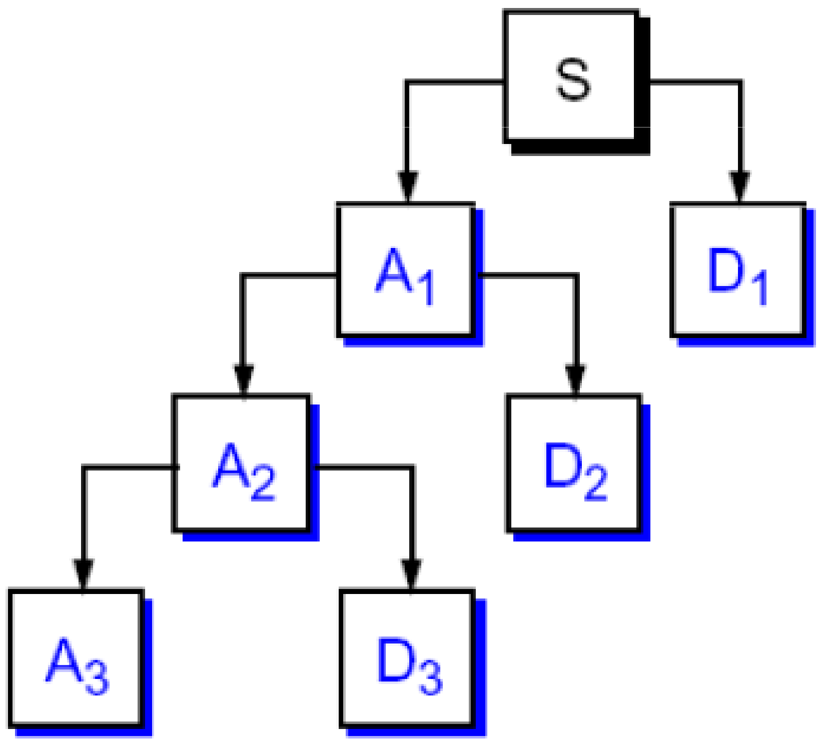
O filtro passa-baixas (h[]) e passa-altas (g[]) são chamados de filtros de análise. Já para o processo de inversãro (IDWT) os filtros são chamados de síntese.

são absolutamente inter-dependentes, ou seja, a partir de um deles, os demais estão plenamente definidos:



Wavelet

O resultado da aplicação da DWT deve considerar somente os ramos da árvore de decomposição.



$$S \approx A_1 + D_1$$
$$\approx A_2 + D_2 + D_1$$
$$\approx A_3 + D_3 + D_2 + D_1$$

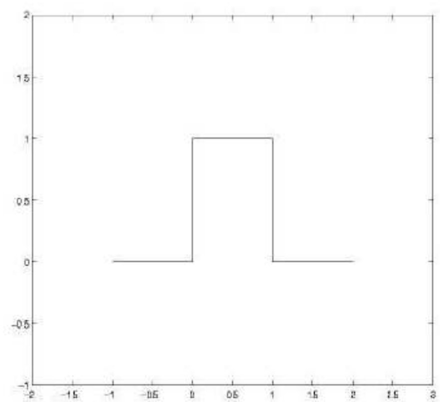
Wavelet

Transformada Wavelet de Haar:

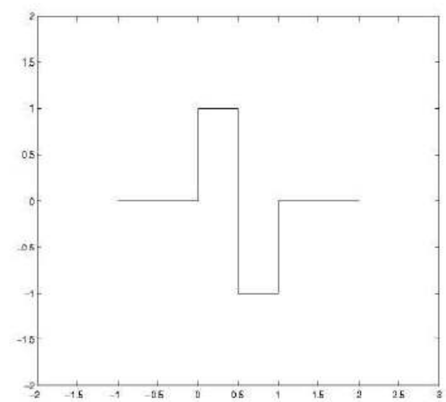
- Alfred Haar, 1910;
- É a mas simples das tranformadas;
- Os filtros tem suporte 2.

- filtros de análise:
  - $h[\,] = \{1/\sqrt{2}\ ,\ 1/\sqrt{2}\}$ (passa-baixas)
  - $g[\,] = \{1/\sqrt{2}\ ,\ -1/\sqrt{2}\}$ (passa-altas)

- filtros de síntese:
  - $\hat{h}[\,] = \{1/\sqrt{2}\ ,\ 1/\sqrt{2}\}$
  - $\hat{g}[\,] = \{-1/\sqrt{2}\ ,\ 1/\sqrt{2}\}$



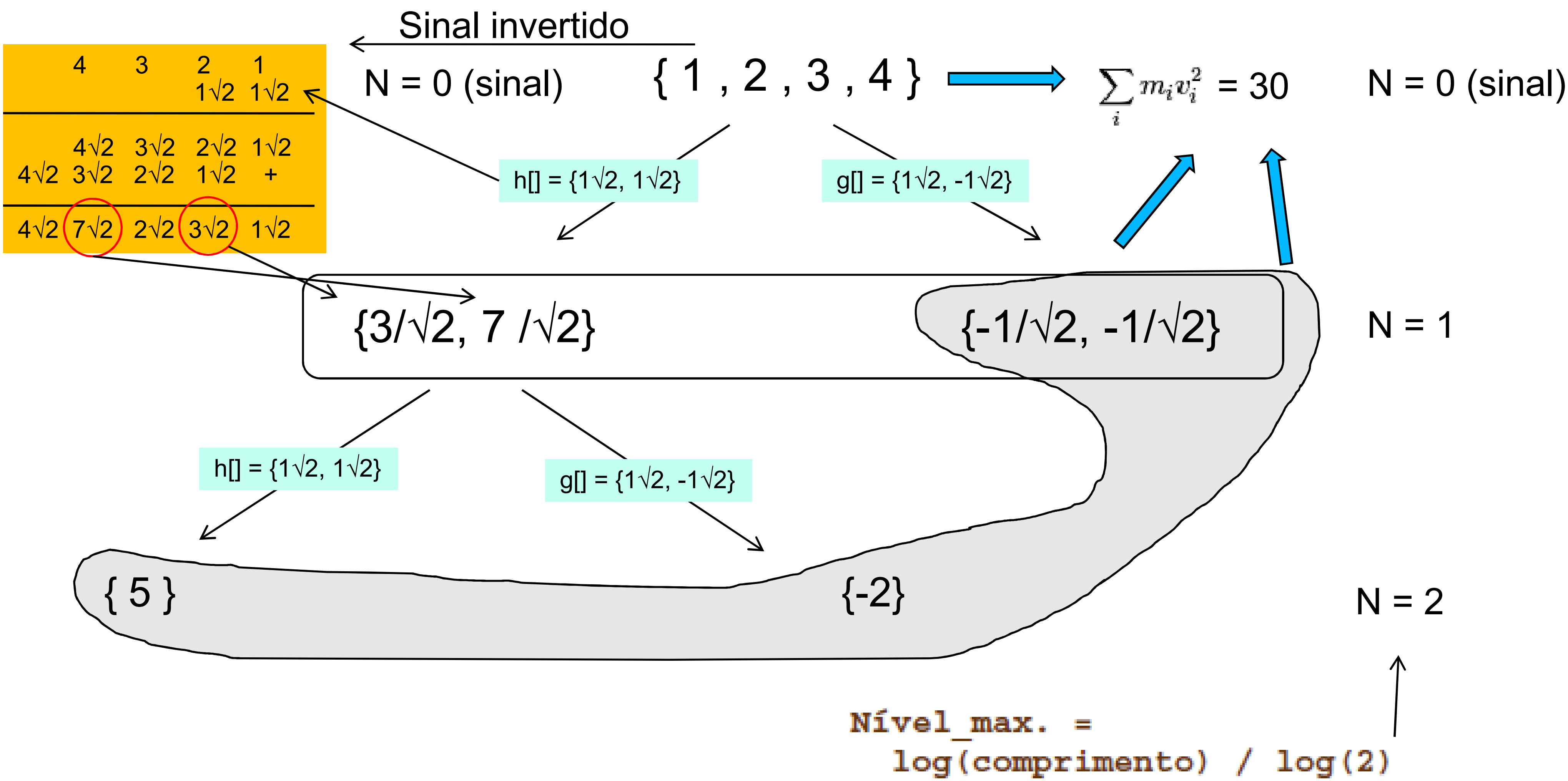
Função *scaling* de Haar



Função *wavelet* de Haar

Wavelet

Transformada de Haar, exemplo para o sinal {1, 2, 3, 4}



Wavelet

Transformada Wavelet de HAAR, exemplo para o sinal {5 7 3 1} = { 8, 4, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$}, com energia 84 e nível máximo 4.

Exercício:
f[] = {56, 40, 8, 24, 48, 48, 40, 16}

Wavelet

Transformada Wavelet da família Daubechies

- Criada por Ingrid Daubechies;
- Suporte compacto e decaimento suave;
- Exemplo com filtro de suporte 4:
- O filtro de análise de Daubechies tem sempre suporte par e maior que 4, conforme o exemplo.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h_k k^b = 0\ , \quad \sum_{k=0}^{n-1} h_k = 2\ , \quad \sum_{k=0}^{n-1} h_k h_{k+2l} = 0\ ,$$

$$\begin{cases} -1h_3 + 1h_2 - 1h_1 + 1h_0 = 0 \\ -3h_3 + 2h_2 - 1h_1 + 0h_0 = 0 \\ 1h_3 + 1h_2 + 1h_1 + 1h_0 = 2 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 \end{cases}$$

Wavelet

Transformada Wavelet da família Daubechies

Exemplo com suporte 4:

h[]= {0.68301270189222, 1.18301270189222, 0.31698729810778, -0.18301270189222}

g[]= {-0.18301270189222, -0.31698729810778, 1.18301270189222, -0.68301270189222}

Exemplo com suporte 4 após normalização:

h[] = {0.482962913145, 0.836516303738, 0.224143868042, -0.129409522551}

g[] = {-0.129409522551, -0.224143868042, 0.836516303738, -0.482962913145}

$\hat{h}$[] = {-0.129409522551, 0.224143868042, 0.836516303738, 0.482962913145}

$\hat{g}$[] = {-0.482962913145, 0.836516303738, -0.224143868042, -0.129409522551}

Wavelet

Outras Transformadas Wavelets:

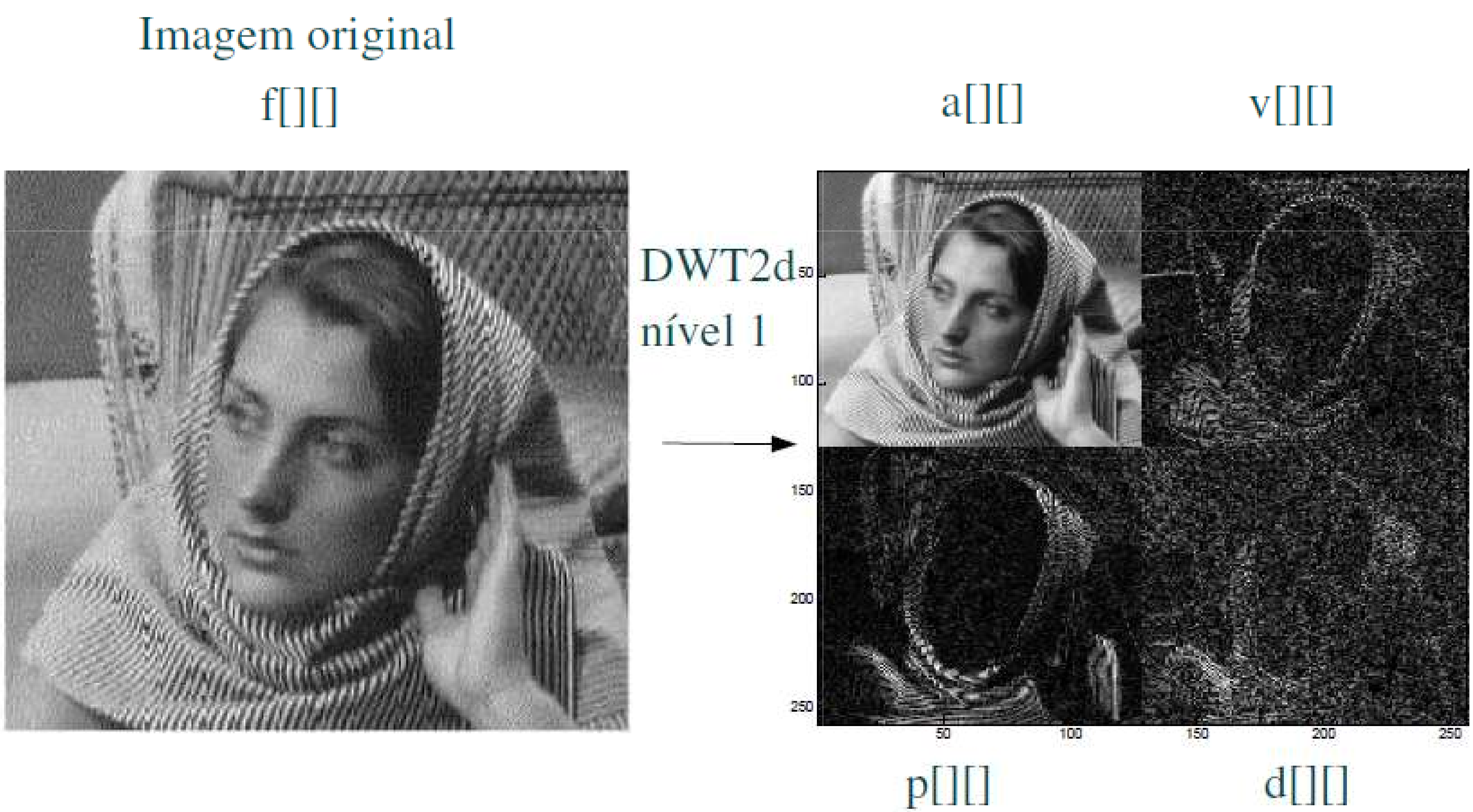
- Beylkin: Filtros com 18 coeficientes otimizados para sinais de áudio;

- Vaidyanathan: Filtros com 24 coeficientes otimizados para sinais de áudio;

- Mexican Hat, Morlet, Spline, Gaussian, Shannon, Meyer, Biorthogonal;

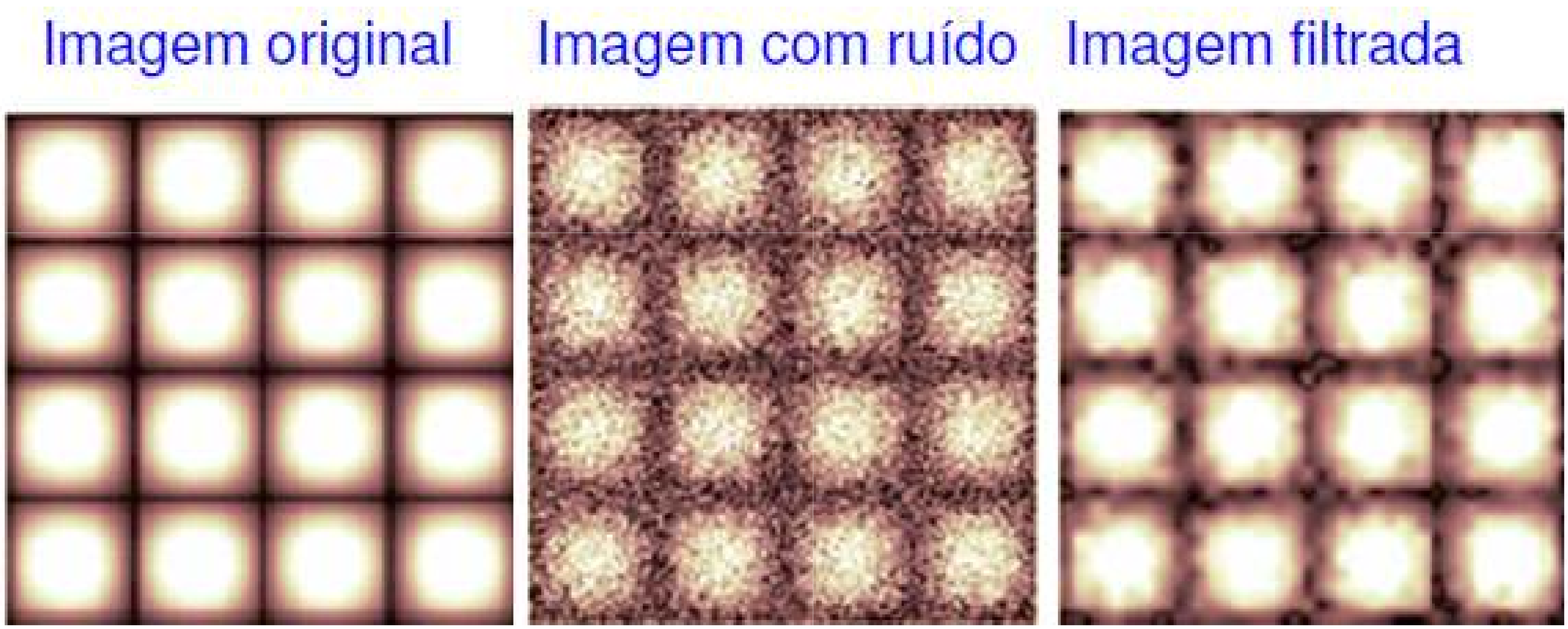
Wavelet

Aplicações (compactação):



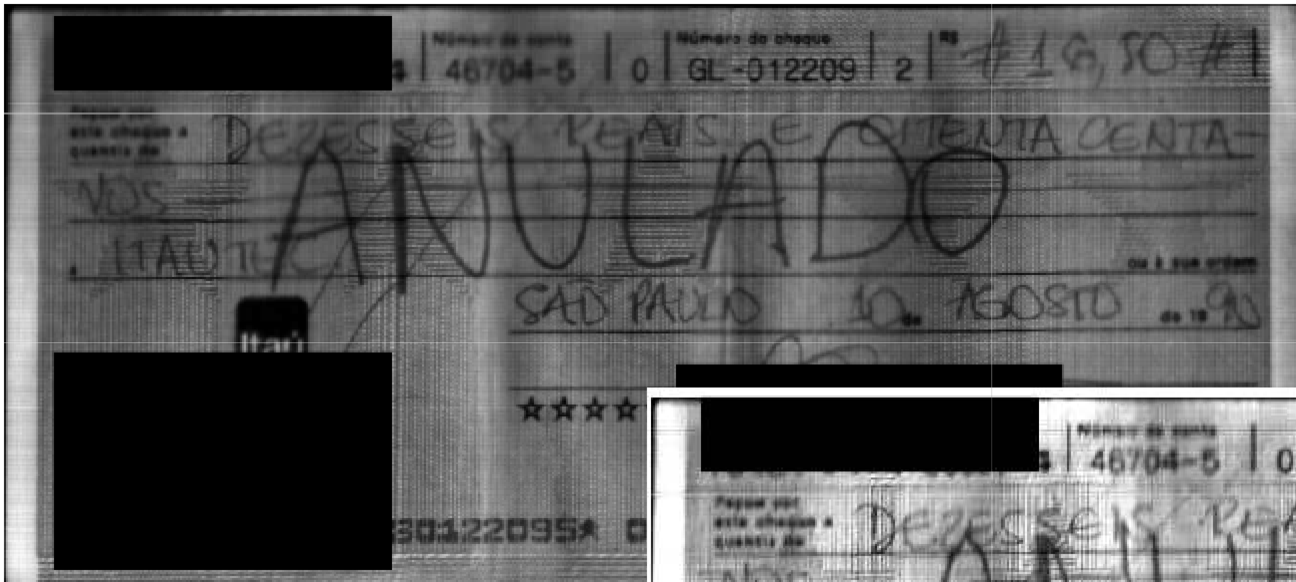
Wavelet

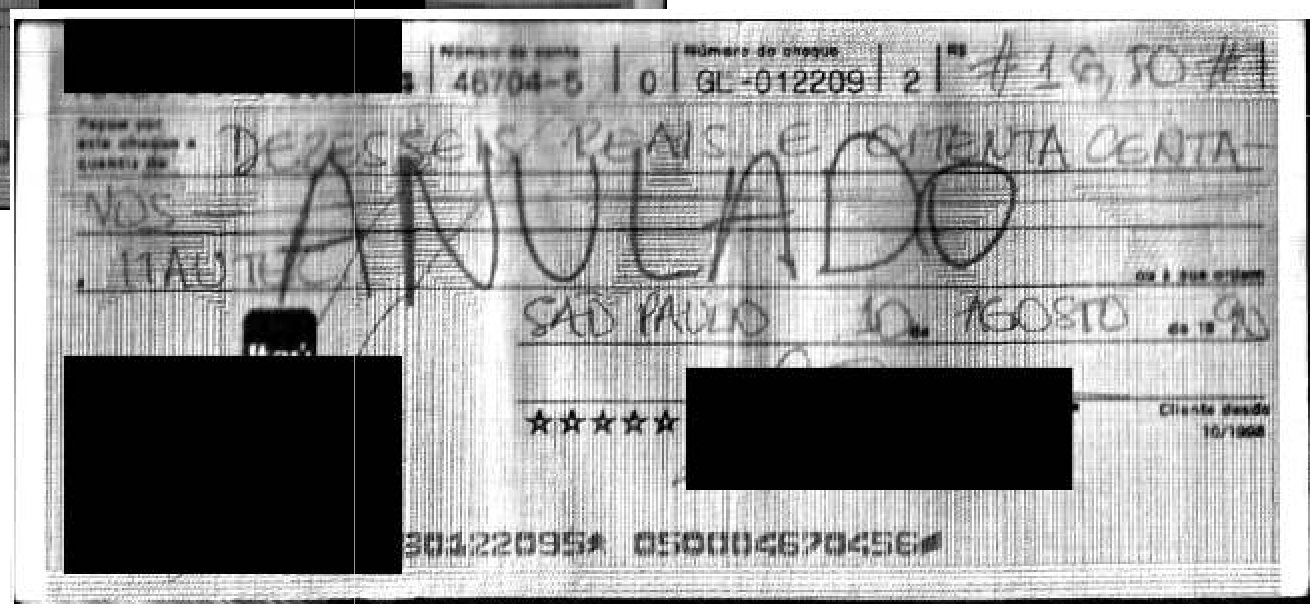
Aplicações (remoção de ruído):



Wavelet

Aplicações (filtragem) com Daubechies 12:





Referências:

Steven W. Smith, “*The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*”

Notas de Aula do Prof. Carlos Alexandre Mello - UFPE

barbon@uel.br