

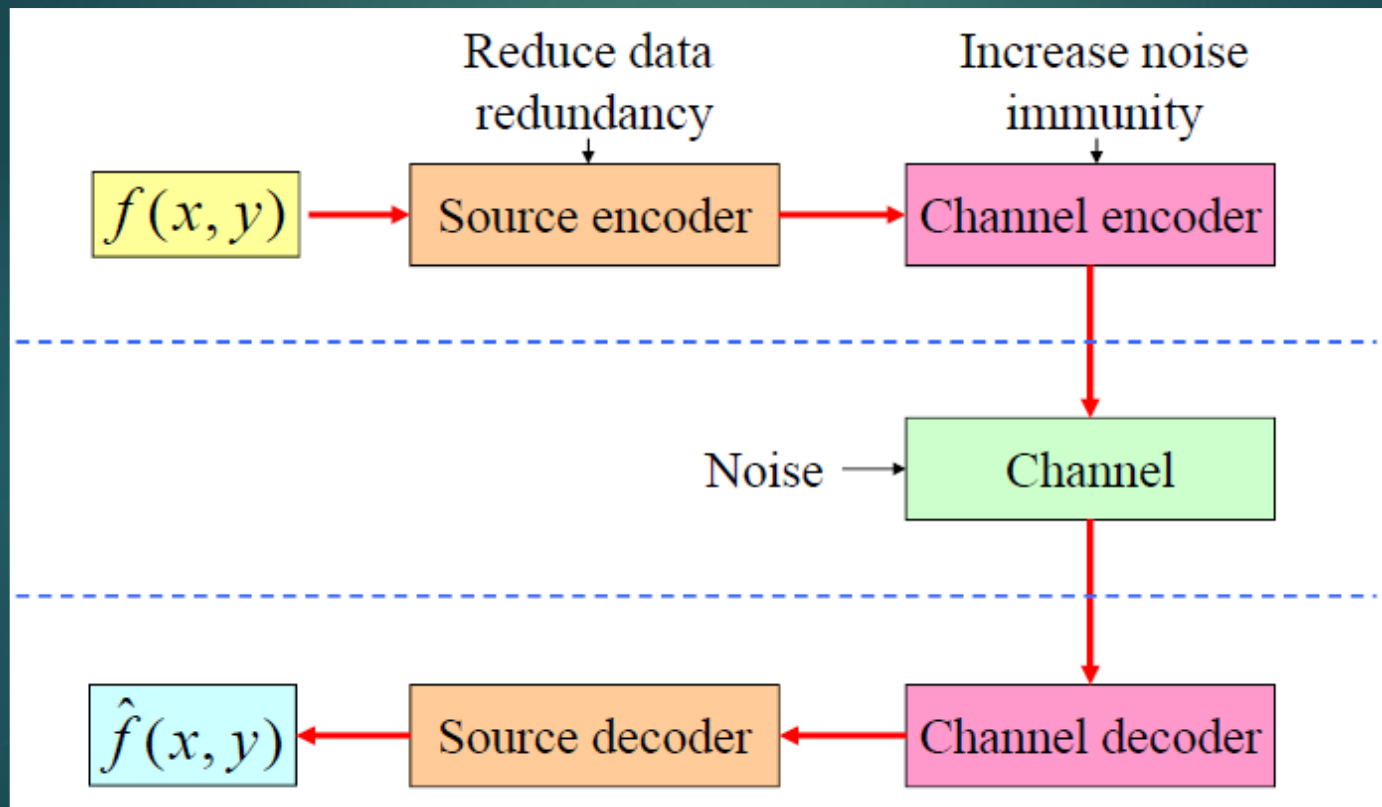
INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA (DWT) EM CODIFICAÇÃO VISUAL

UFABC - ESTI019 – Codificação de Sinais Multimídia
Profs. Celso S. Kurashima e Mário Minami

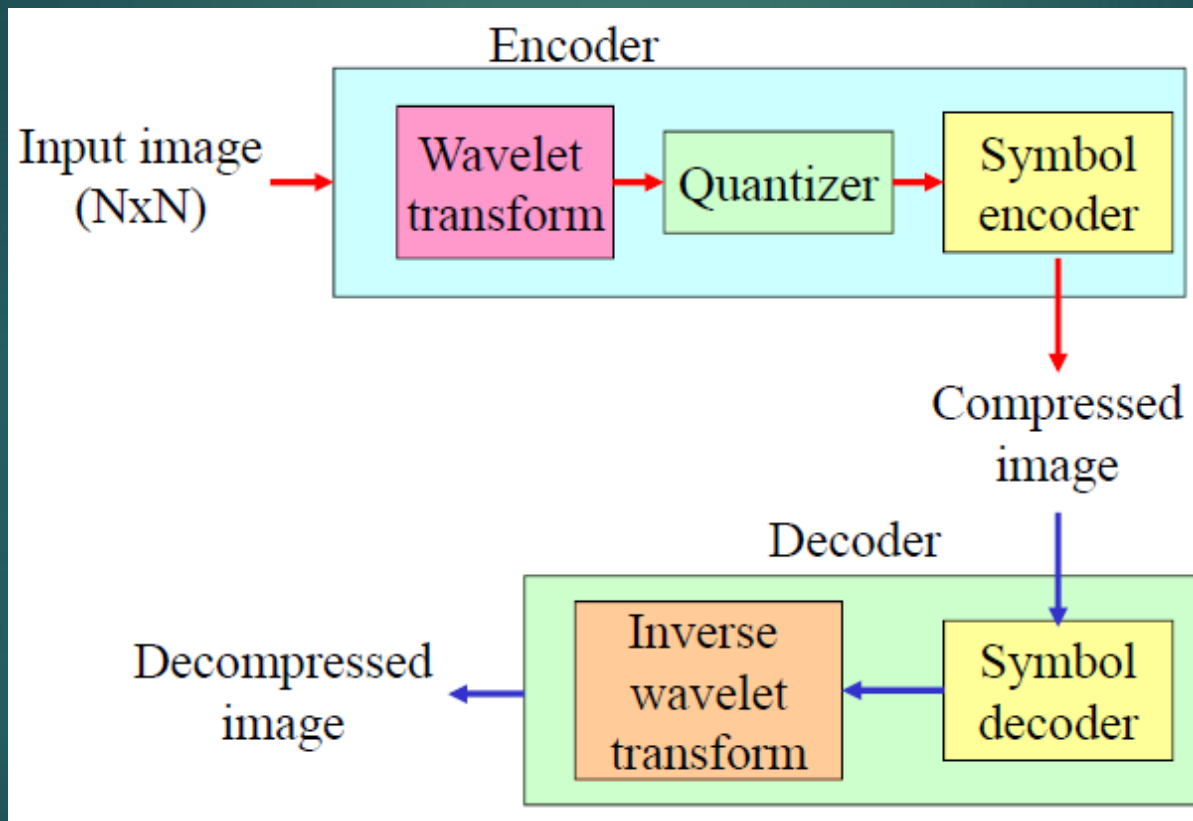
Sumário

- ▶ Conceitos de Transformada Wavelet
- ▶ Codificação por Subbandas
- ▶ Wavelet Haar
- ▶ Referências

Modelo geral de codificação de fonte



Modelo de codificação de imagem com transformada wavelet



Revisão Rápida:

- ▶ Transformada de Fourier

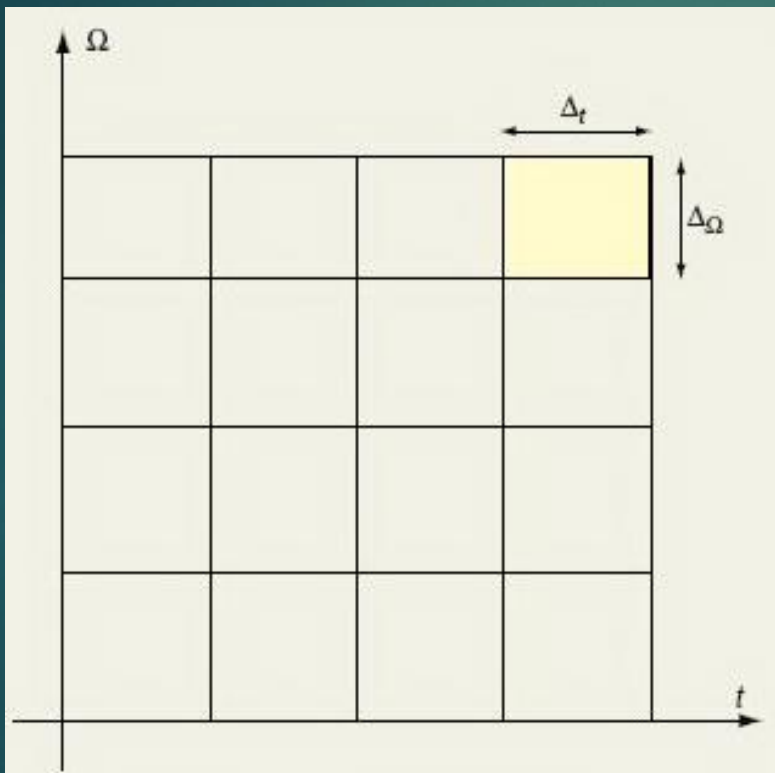
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$$

- ▶ Perdemos a informação das variações temporais
- ▶ Uma opção para termos alguma informação temporal → STFT

Revisão Rápida

6

- ▶ O plano tempo-frequência para a STFT é uniforme



Resolução constante

em todas as frequências

Transformada Wavelet (WT) de Tempo Contínuo

- ▶ FT & STFT usam “**wave**” para analisar o sinal
- ▶ WT usa “**wavelet com energia finita**” para analisar o sinal
- ▶ O Sinal a ser analisado é multiplicado por uma função wavelet, a transformada é calculada para cada segmento
- ▶ A “largura” da resolução de análise muda com cada componente espectral

Transformada Wavelet Contínua (CWT)

- ▶ **Wavelet: função de limitada no tempo** com **média zero** (possibilita análise de sinais transientes)
- ▶ Utiliza a combinação de wavelets (funções base) para analisar funções arbitrárias
- ▶ Wavelet mãe $\Psi(t)$: pelo escalamento e translação da wavelet mãe, obtemos as outras funções para a transformação (wavelet filha, $\Psi_{a,b}(t)$)

$$\underline{\psi_{a,b}(t)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

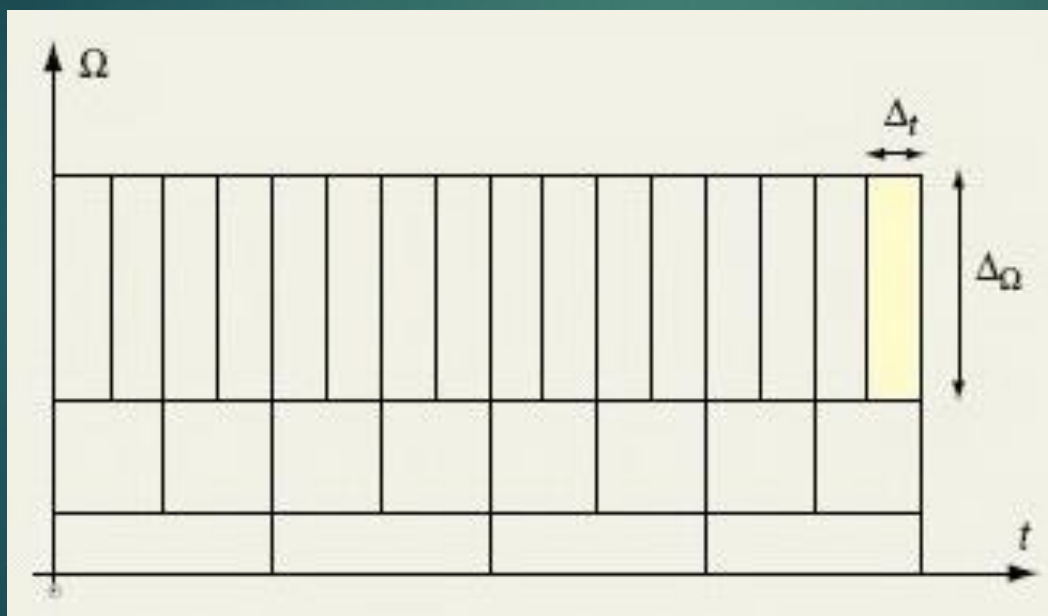
- ▶ Pelo **produto interno** da wavelet filha com $f(t)$, calculamos o **coeficiente wavelet**

$$w_{a,b} = \langle \psi_{a,b}, f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b} f(t) dt$$

- ▶ A reconstrução $f(t)$ com o coeficiente wavelet se dá com:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{a,b} \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

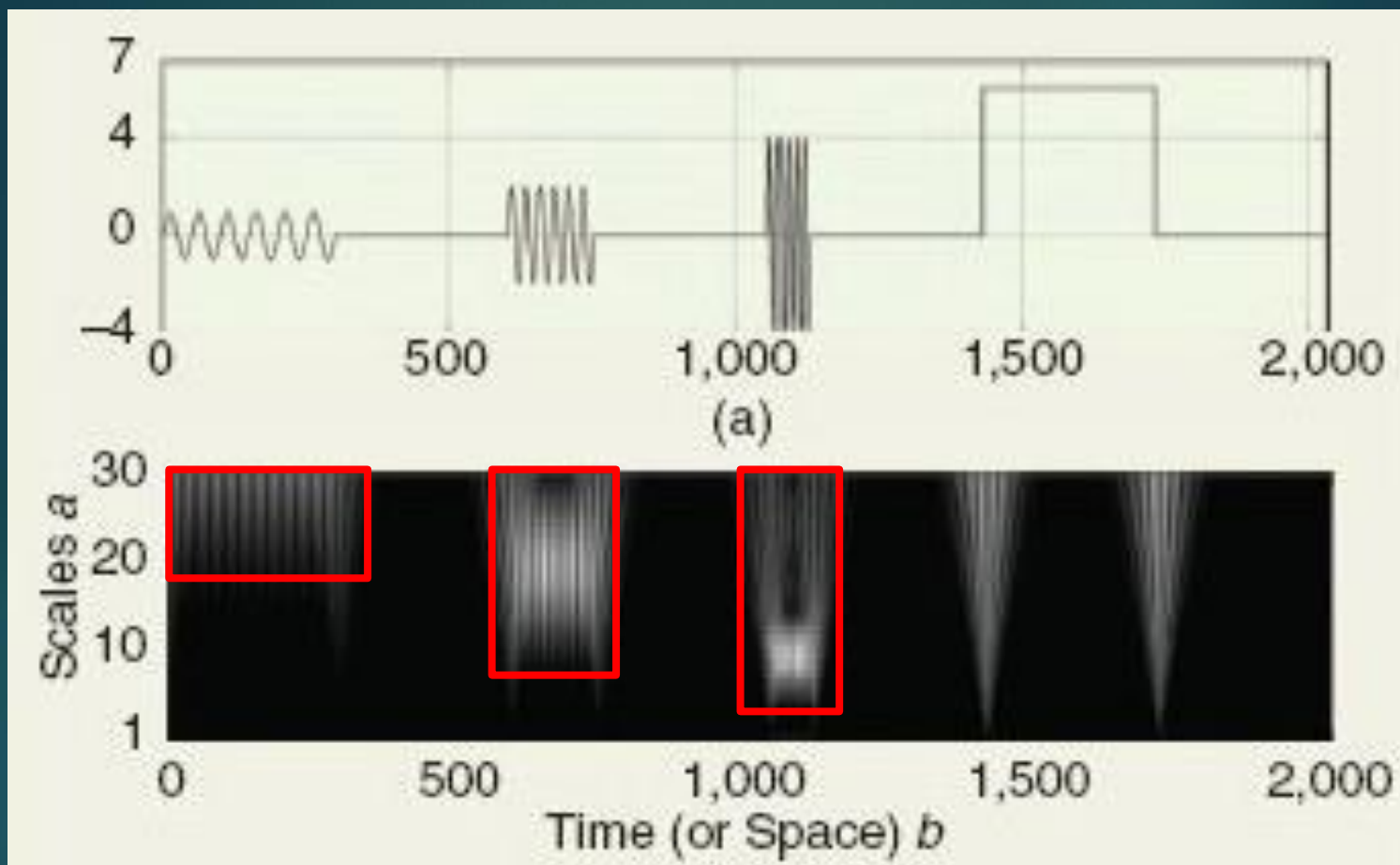
- ▶ **Análise Adaptativa** do sinal
 - Em **altas frequências**, a **janela** é **estreita**, o valor de **a** deve ser **pequeno**
- ▶ Plano tempo-frequência da WT(Heisenberg)



multi-resolução:

Em frequências
diferentes

análise com
resolução variável



window

 a

▶ Baixa freq.

▶ Alta freq.

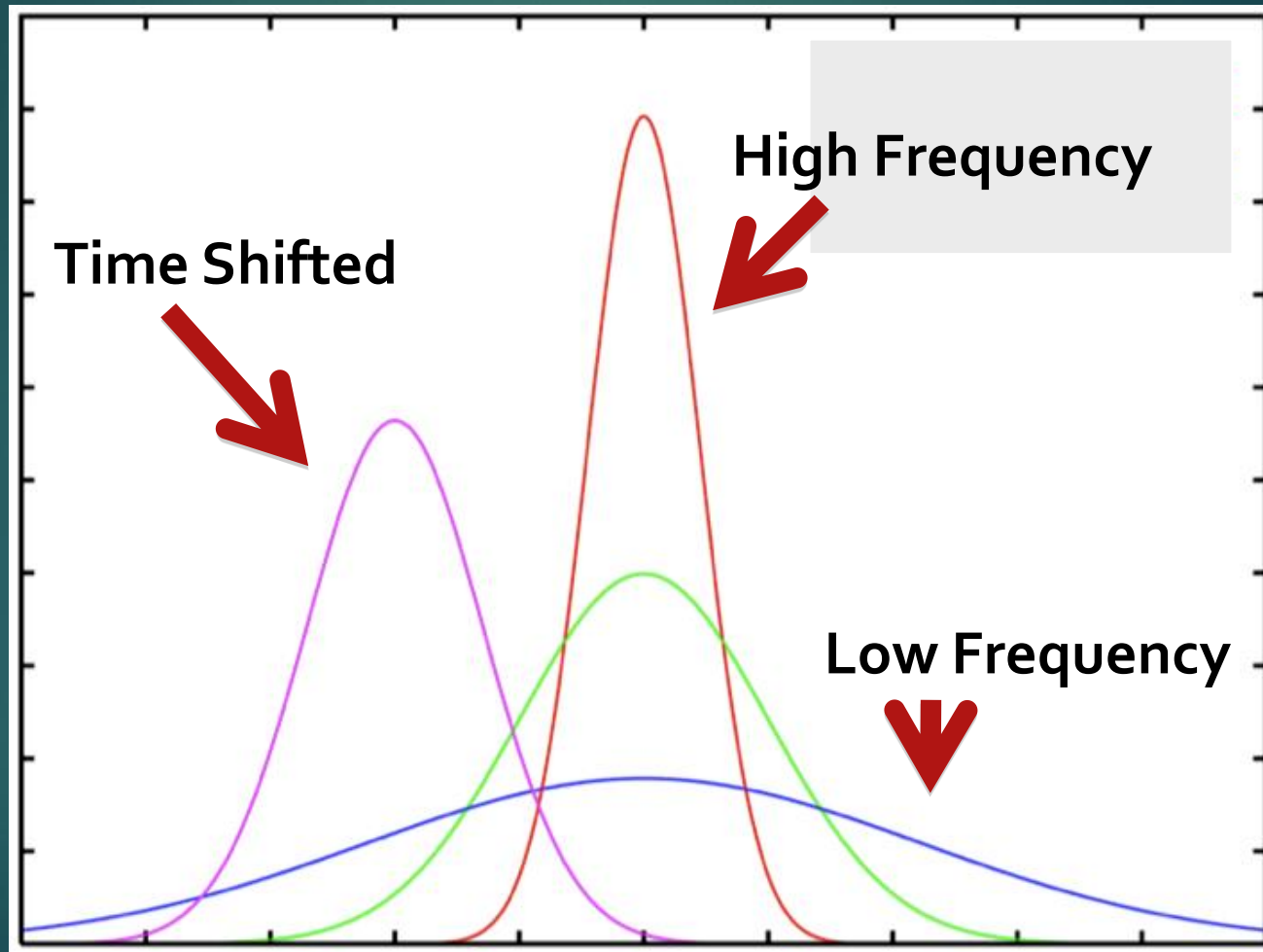
grande

pequeno

Janelas Gaussianas para S-Transform

12

EST1019 - Multimidia



Discrete Wavelet Transform (DWT)

13

- ▶ Vantagem sobre a CWT: **reduz a complexidade computacional** (separável nas freqs H & L)
- ▶ **Produto interno** de $f(t)$ e parâmetros discretos de a & b

$$a = a_0^{-m}, \quad b = nb_0 a_0^{-m} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

- ▶ Se $a_0=2$, $b_0=1$, temos a wavelet

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{m/2} \psi(a_0^m t - nb_0) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n)$$

Discrete Wavelet Transform

14

- ▶ Os coeficientes da DWT

$$w_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle = a_0^{m/2} \int f(t) \psi(a_0^m(t) - nb_0) dt$$

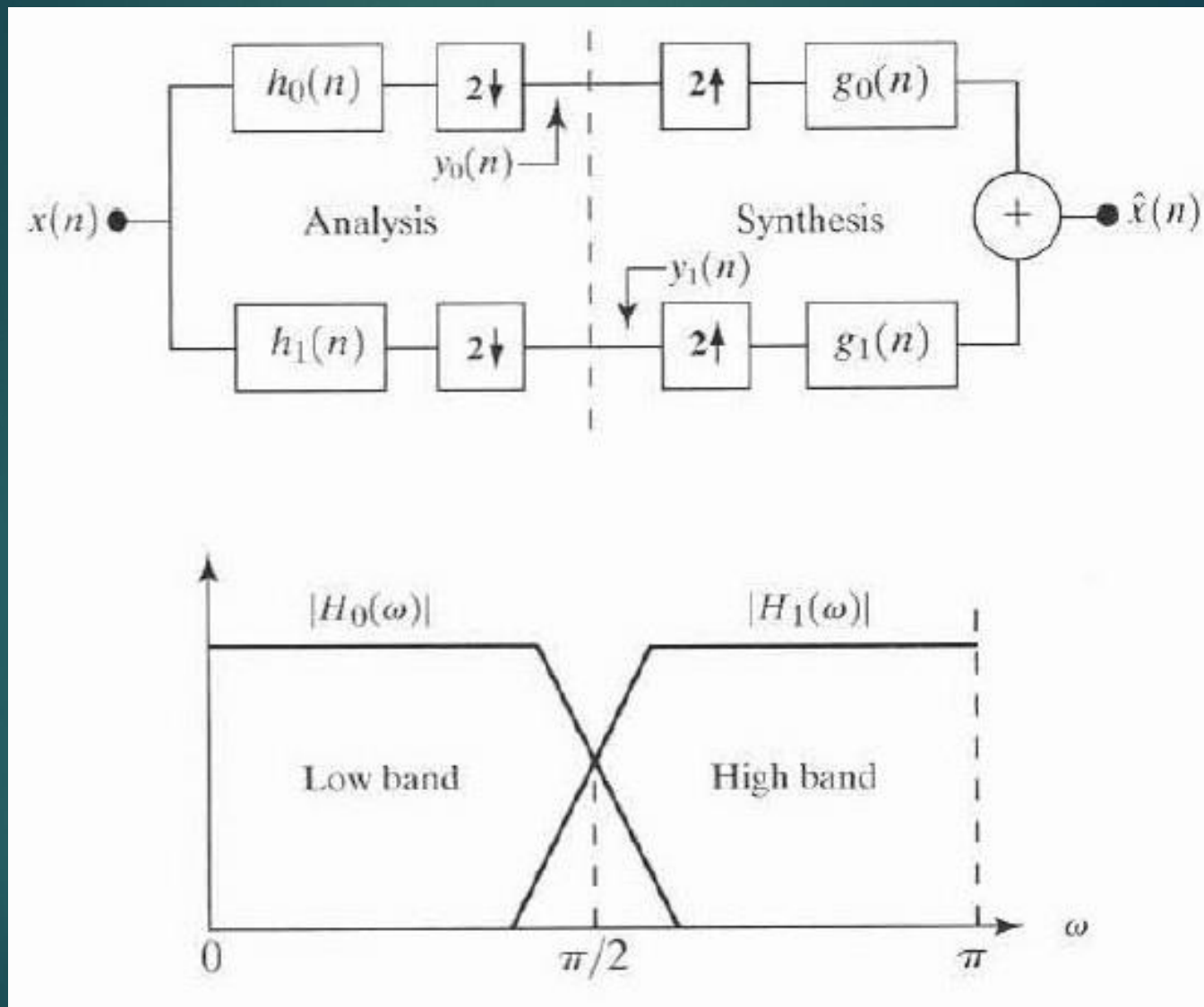
- ▶ A reconstrução de $f(t)$ a partir dos coeficientes da wavelet:

$$f(t) = \sum_m \sum_n w_{m,n} \psi_{m,n}(t)$$

Codificação em Subband

15

EST1013 - Multimídia



Para filtros com coeficientes reais, as soluções para a **reconstrução perfeita**, ou seja, $\hat{x}(n) = x(n)$, são:

$$\begin{cases} g_0(n) = (-1)^n h_1(n) \\ g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n) \end{cases}$$

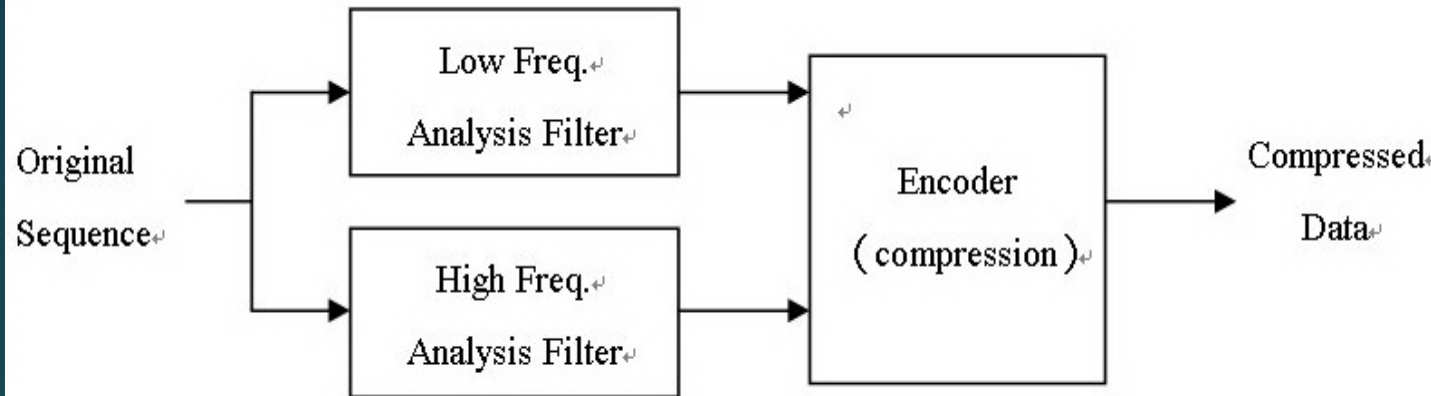
Ou

$$\begin{cases} g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n) \\ g_1(n) = (-1)^n h_0(n) \end{cases}$$

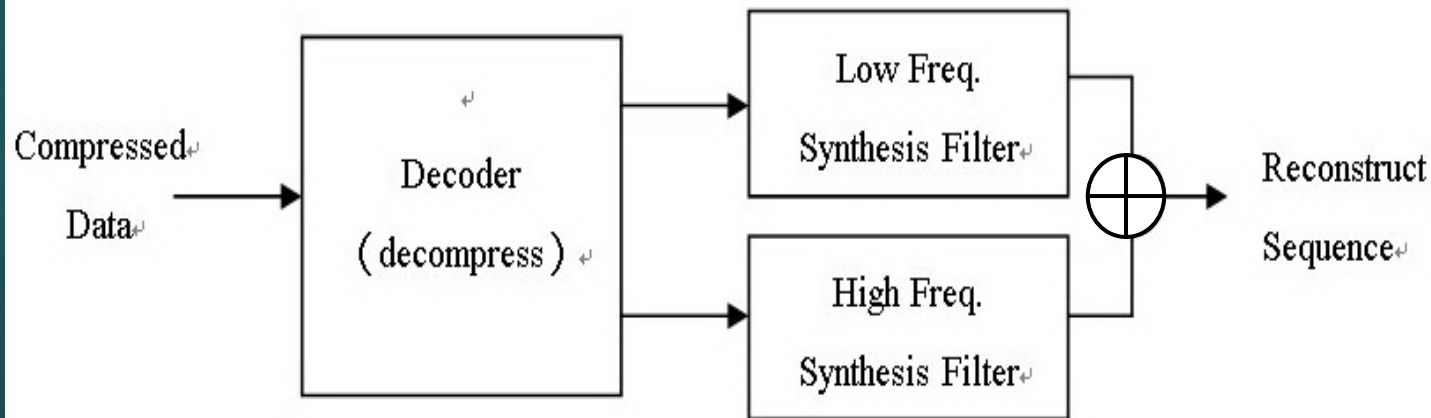
Compressão por WT

17

EST1019 - Multimídia



Wavelet Decomposition & Compression



Wavelet Decompression & Synthesis

Wavelet de Haar (a mais antiga e simples)

18

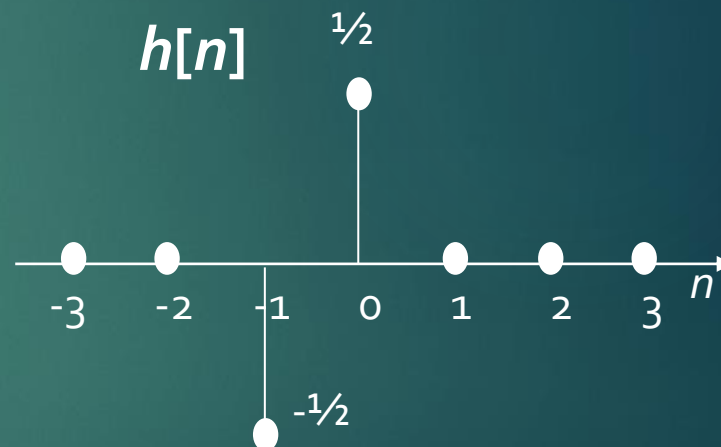
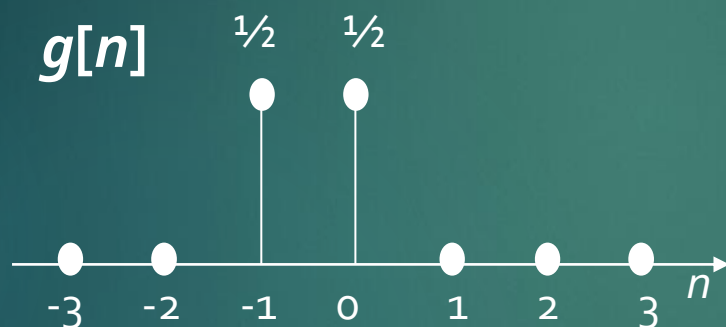
EST1019 - Multimídia

$$g[n] = 1/2 \text{ para } n = -1, 0$$

$$g[n] = 0 \text{ c.c.}$$

$$h[0] = 1/2, \quad h[-1] = -1/2,$$

$$h[n] = 0 \text{ c.c.}$$



logo

$$x_{1,L}[n] = \frac{x[2n] + x[2n+1]}{2}$$

(Média de 2 pontos)

$$x_{1,H}[n] = \frac{x[2n] - x[2n+1]}{2}$$

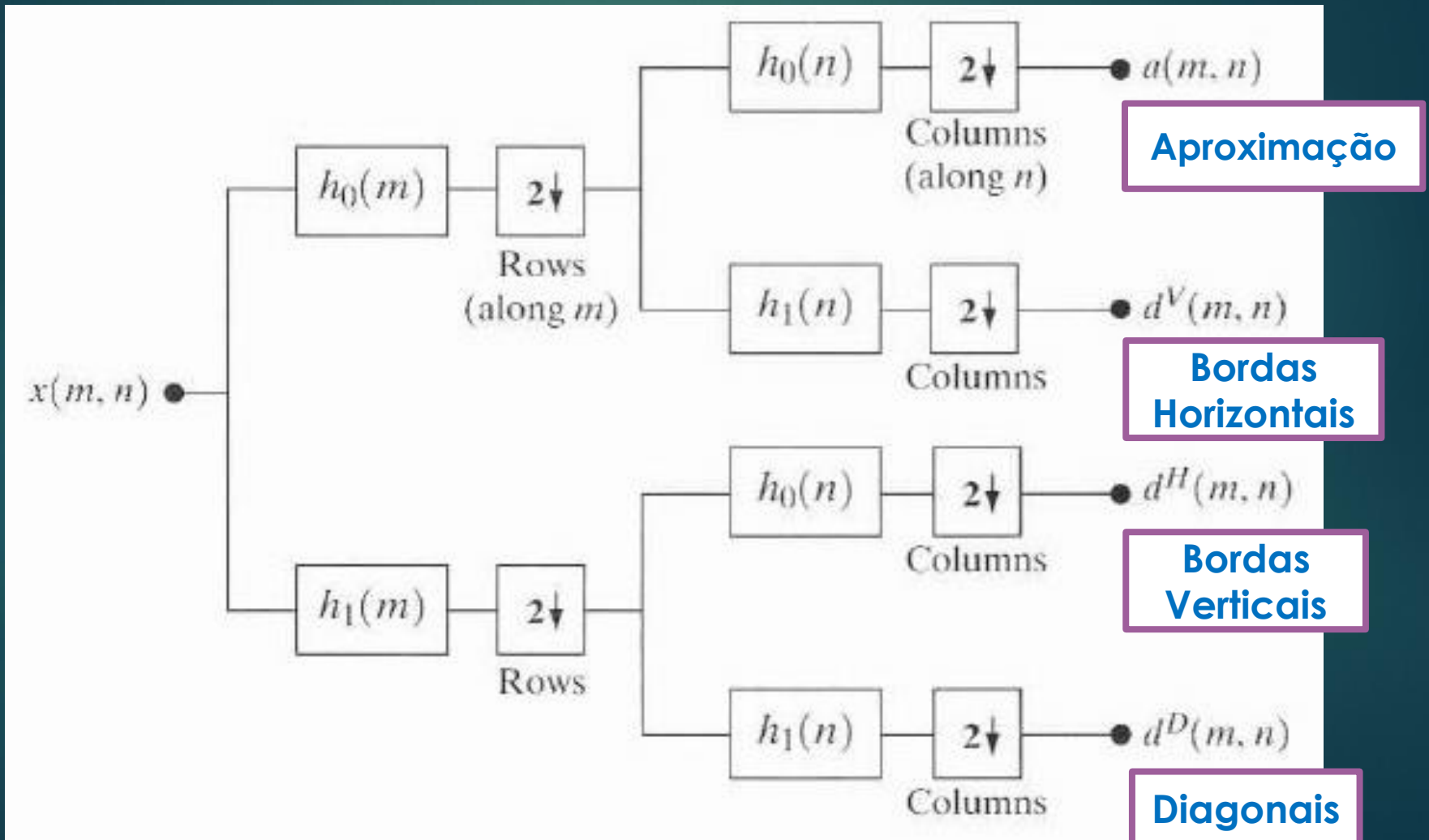
(diferença de 2 pontos)

Transformada de Haar

- ▶ Dois passos
 1. Separação Horizontal
 2. Separação Vertical

2-D (Análise bidimensional)

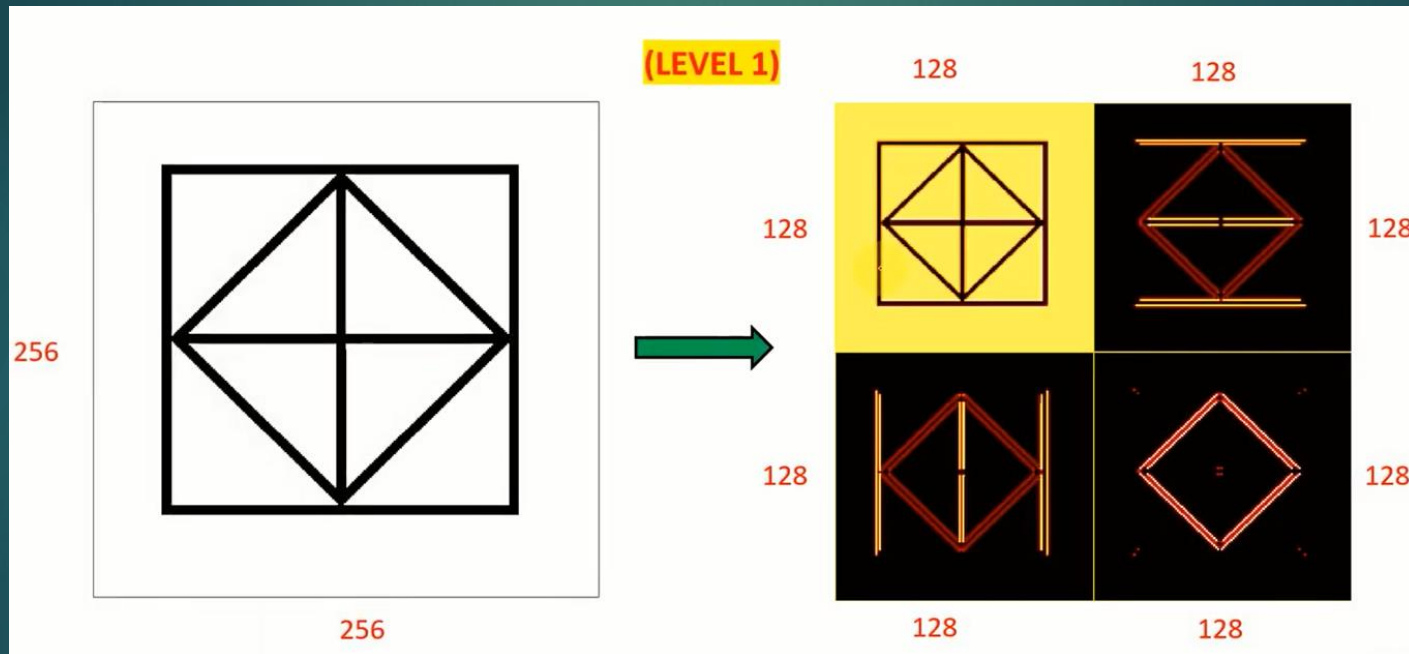
20



Exemplo ilustrativo:

21

EST1019 - Multimídia



Transformada Haar

22

Passo 1:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| | | | |



| A+B | C+D | A-B | C-D |
|-----|-----|-----|-----|
| L | | H | |

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) |
| (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) |
| (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) |

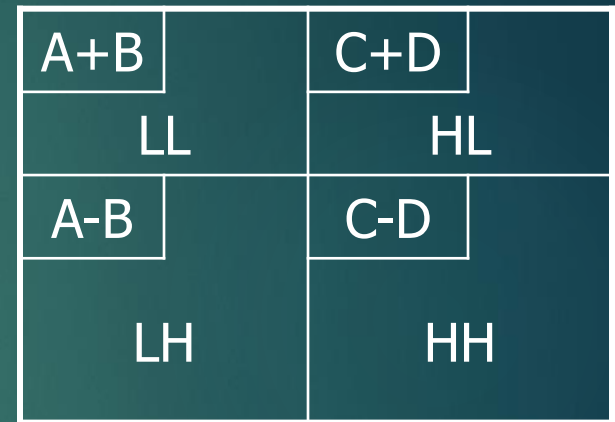
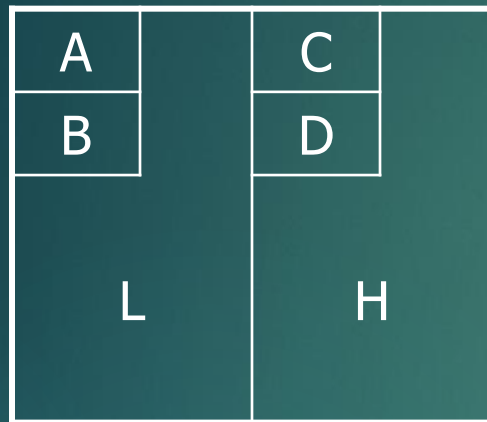


| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) |
| (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) |
| (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) |

Transformada Haar

23

Passo 2:



| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) |
| (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) |
| (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) |

L

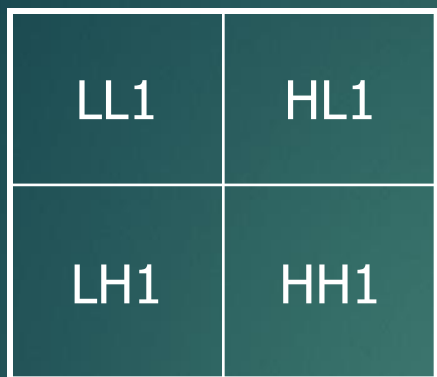
H



| LL | | HL | |
|-------|-------|-------|-------|
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) |
| (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) |
| (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) |

LH

HH



1º nível



2º nível

Parte MAIS
IMPORTANTE da
imagem



3º nível

Exemplo:

| | | | |
|----|----|----|----|
| 20 | 15 | 30 | 20 |
| 17 | 16 | 31 | 22 |
| 15 | 18 | 17 | 25 |
| 21 | 22 | 19 | 18 |

Imagem Original O



| | | | |
|----|----|----|----|
| 35 | 50 | 5 | 10 |
| 33 | 53 | 1 | 9 |
| 33 | 42 | -3 | -8 |
| 43 | 37 | -1 | 1 |

1ª separação horizontal

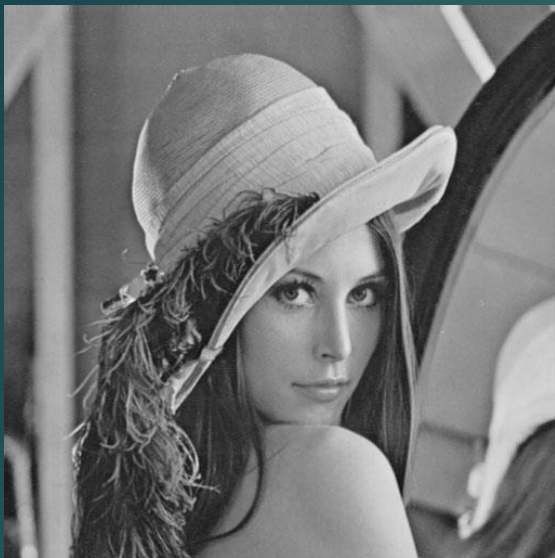
| | | | |
|-----|-----|----|----|
| 68 | 103 | 6 | 19 |
| 76 | 79 | -4 | -7 |
| 2 | -3 | 4 | 1 |
| -10 | 5 | -2 | -9 |

1ª separação vertical



| | | | |
|-----|-----|----|----|
| 326 | -38 | 6 | 19 |
| 16 | -32 | 2 | -7 |
| 2 | -3 | 4 | 1 |
| -10 | 5 | -2 | -9 |

Resultado da DWT
de 2º Nível



Original
Image

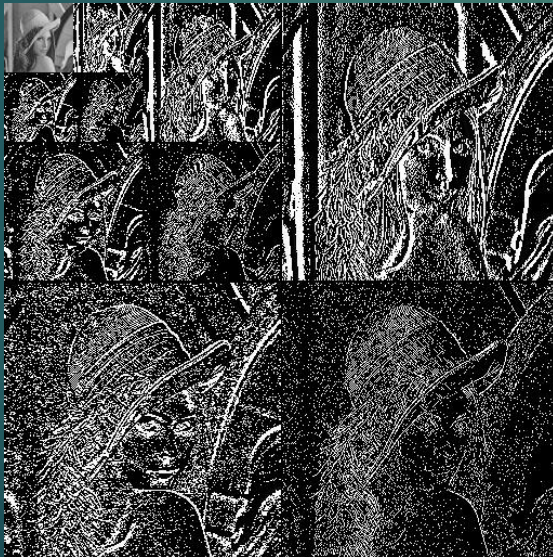
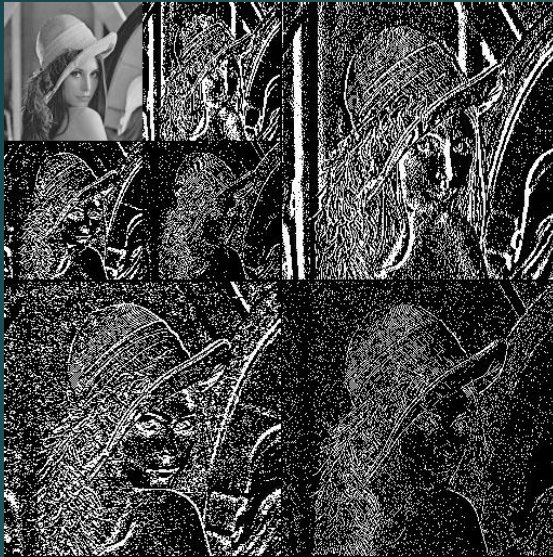


LL

HL

LH

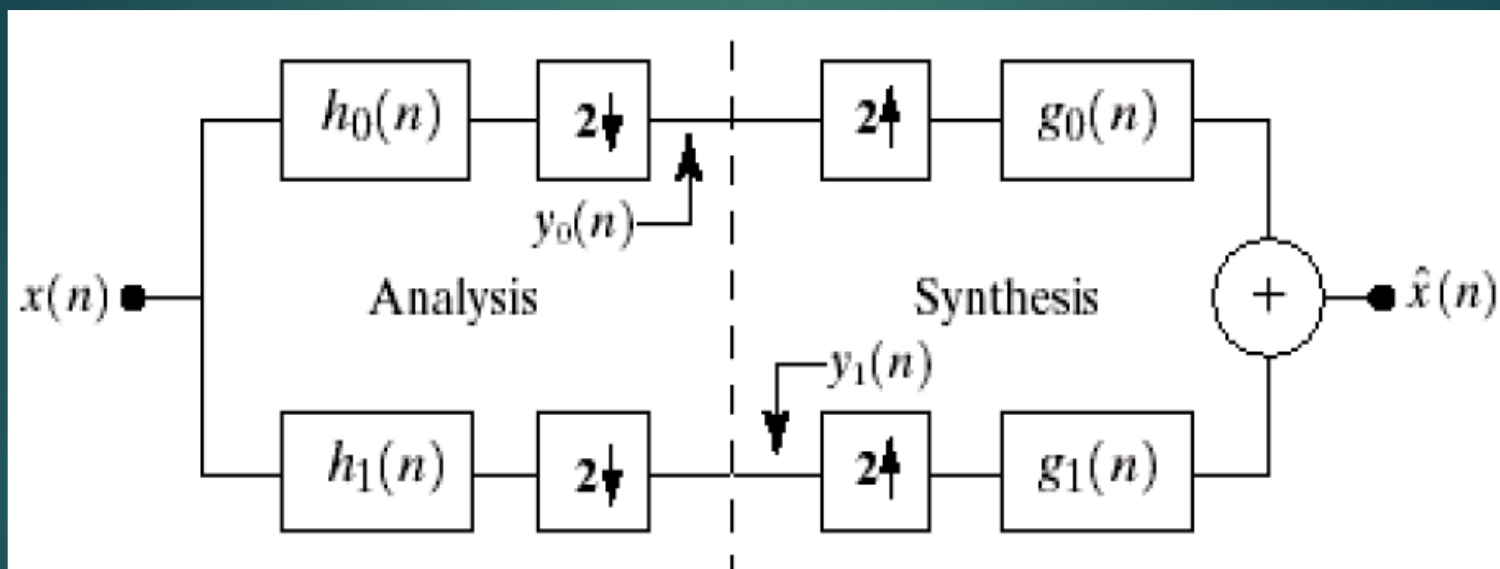
HH



| | | |
|-----|-----|----|
| LL2 | HL2 | HL |
| LH2 | HH2 | |
| LH | | HH |

| | | | |
|-----|-----|-----|----|
| LL3 | HL3 | HL2 | HL |
| LH3 | HH3 | | |
| LH2 | HH2 | | |
| LH | | HH | |

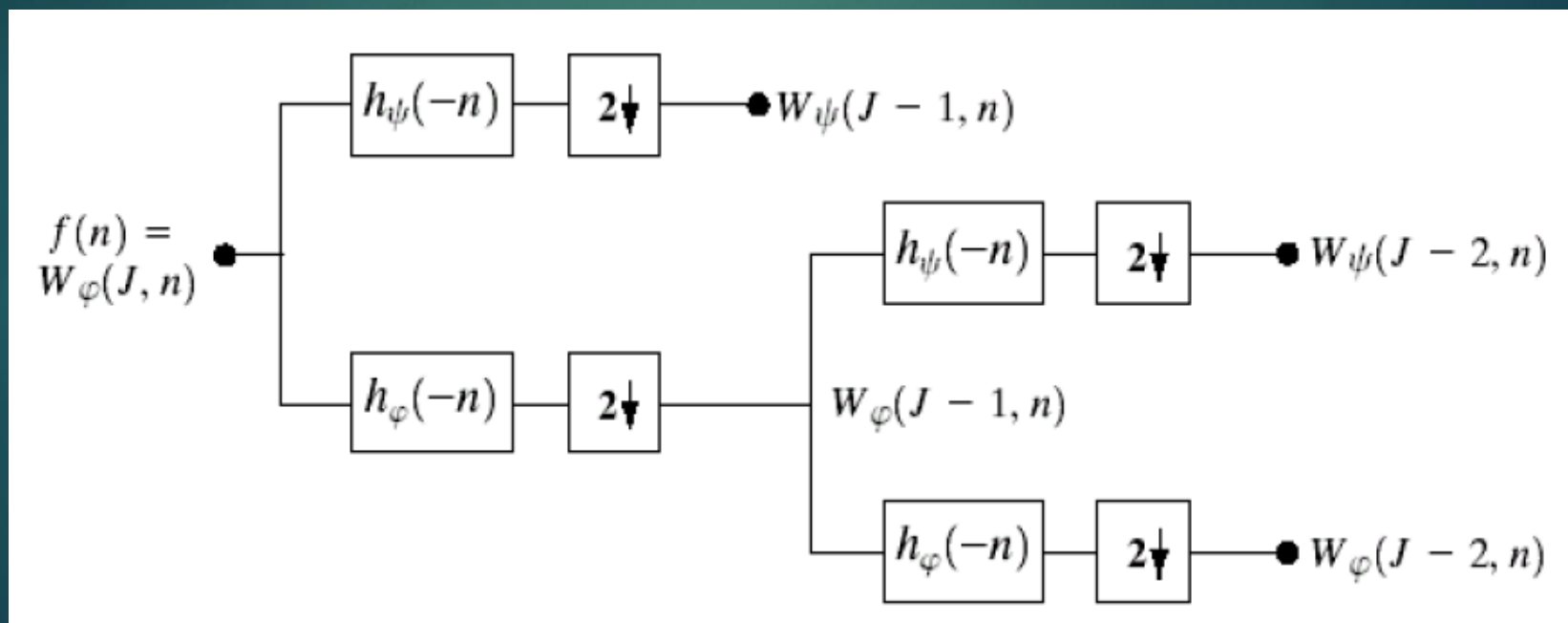
Banco de Filtros da Wavelet Haar de 2 pontos



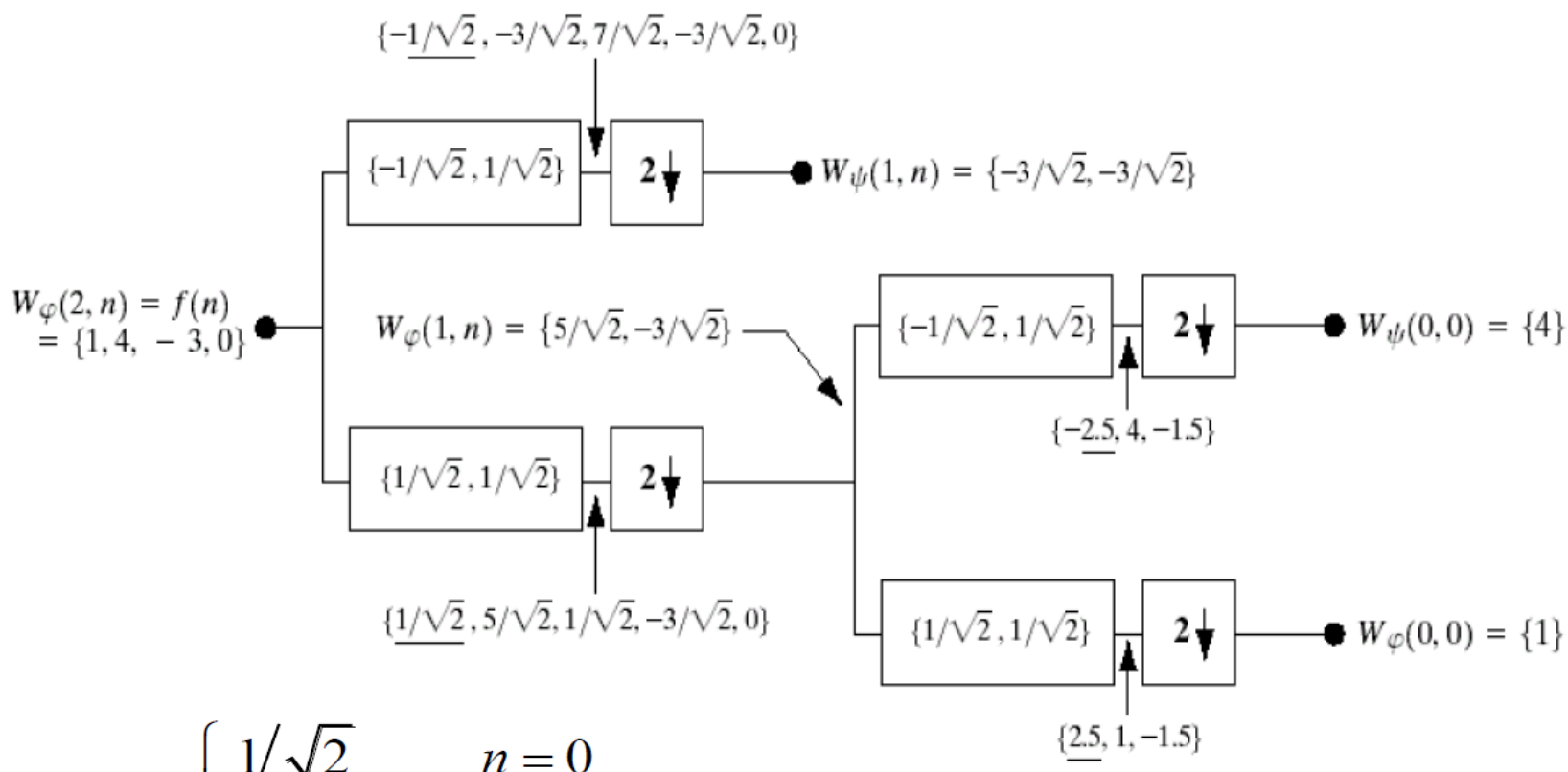
$$h_0 = \left\{ \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right\} \quad h_1 = \left\{ -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right\}$$

$$g_0 = \left\{ \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right\} \quad g_1 = \left\{ \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 \right\}$$

Banco de Filtros da Transformada Rápida Wavelet de Haar em 2 níveis (FWT)



Cálculos de Análise para uma FWT de 2 níveis com sinal 1D

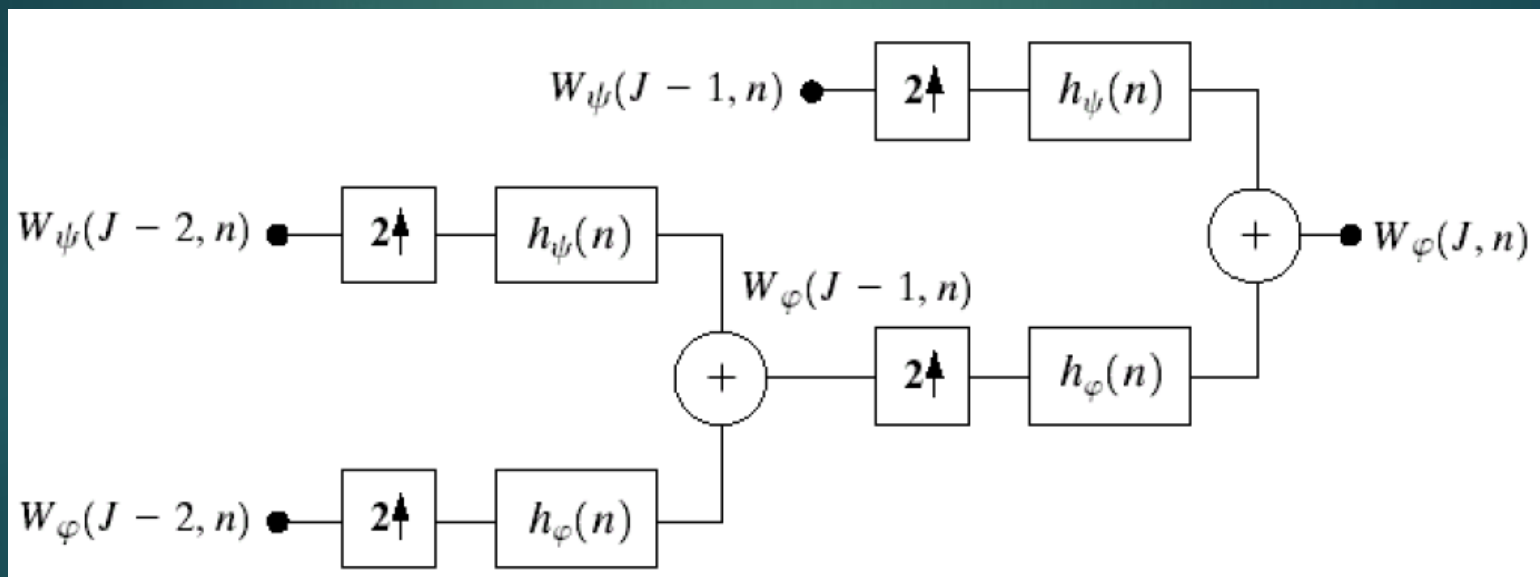


$$h_\psi(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & n = 0 \\ -1/\sqrt{2} & n = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad h_\varphi(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & n = 0, 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

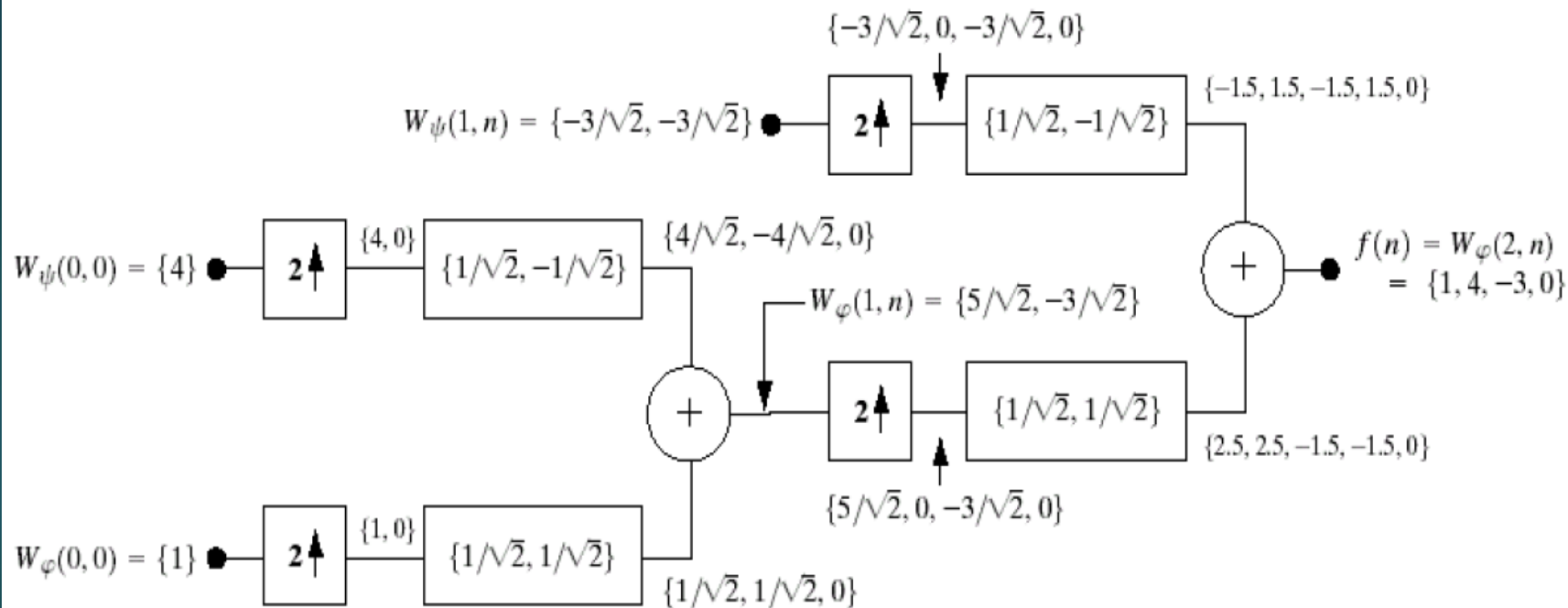
Banco de Filtros de Síntese de FWT 2 níveis

31

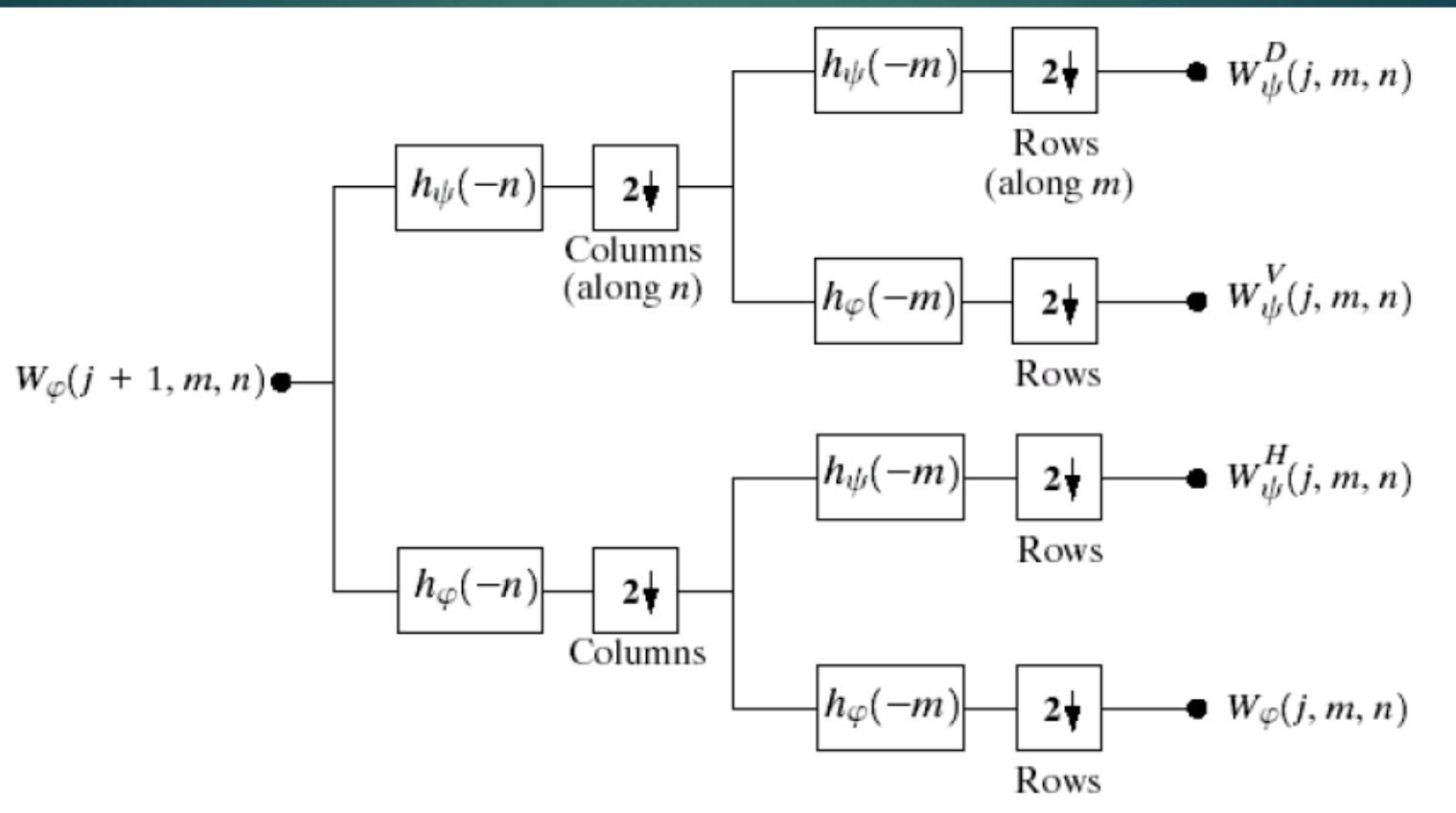
EST1019 - Multímedia



Cálculos de Síntese para FWT 2 níveis do exemplo 1D



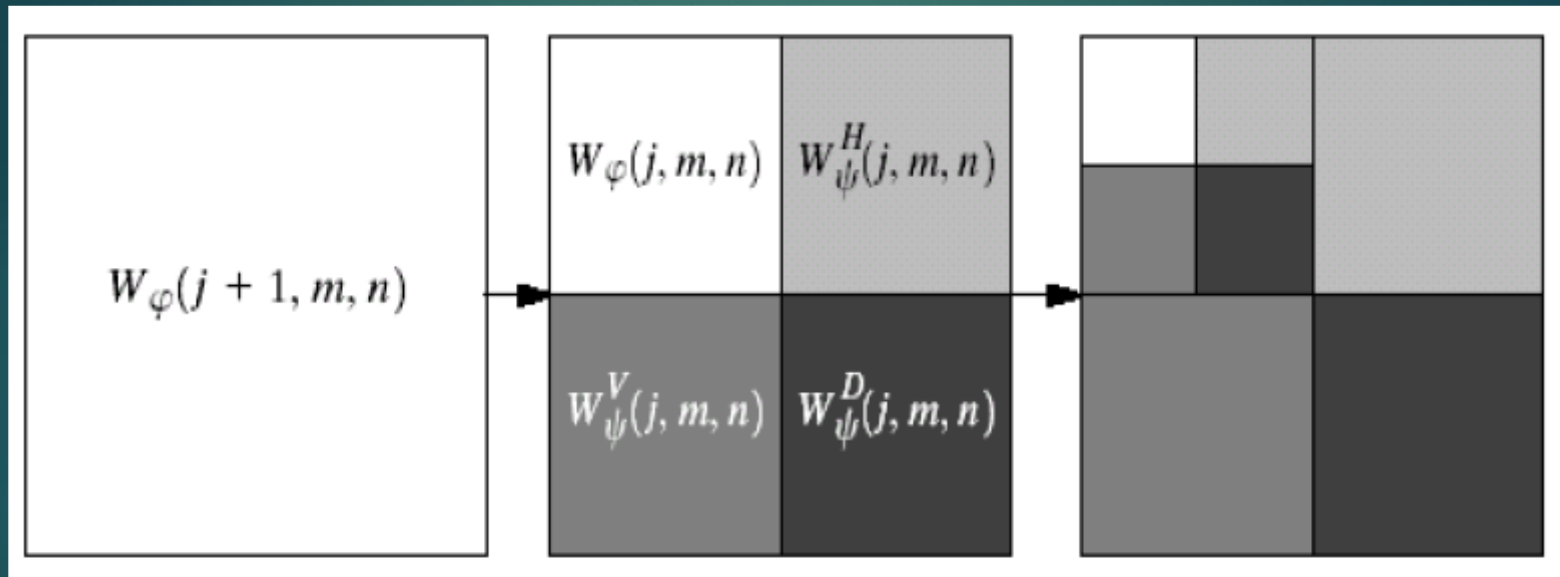
Banco de Filtros de Análise FWT-2D



Decomposição (Análise) 2D por FWT-2D

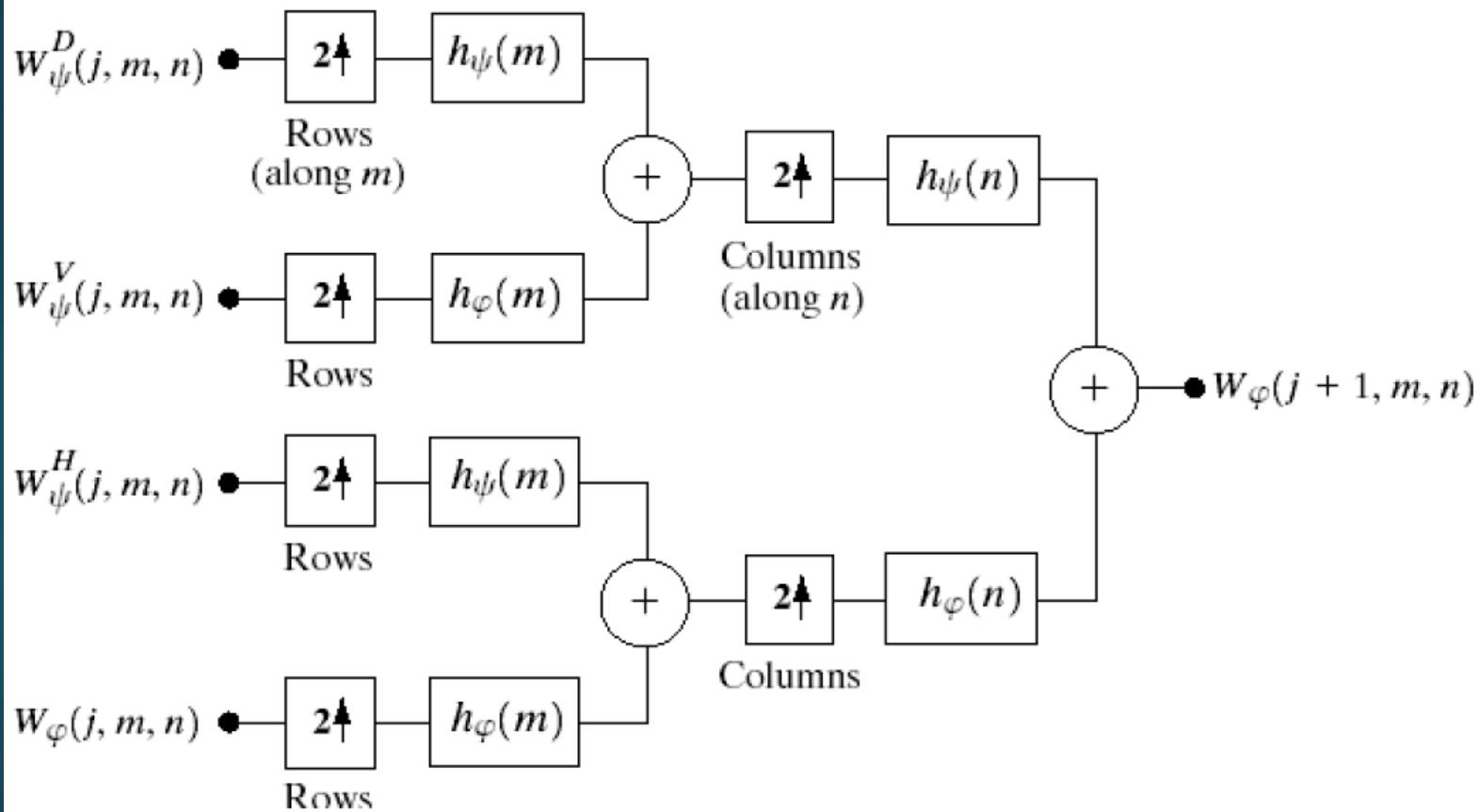
34

EST1019 - Multímedia

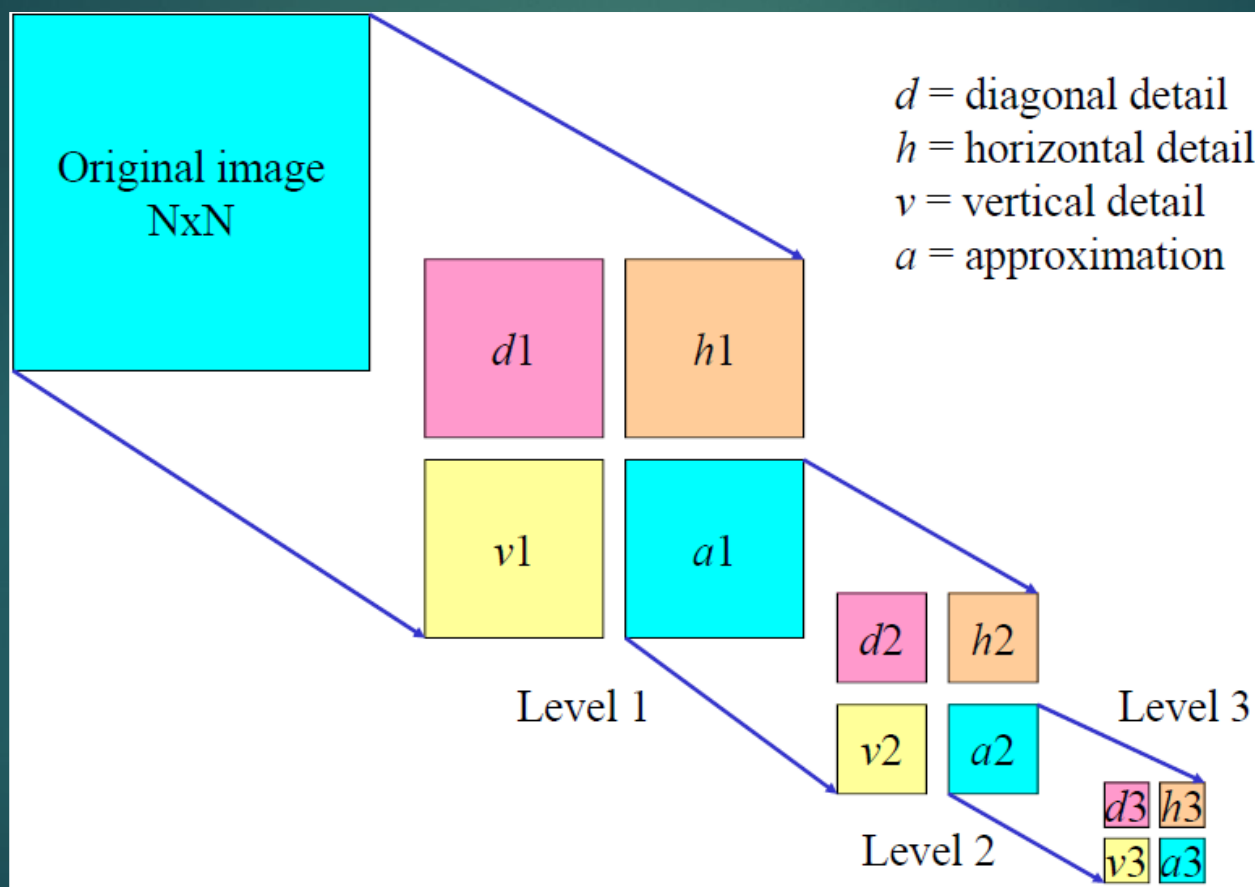


Banco de Síntese FWT-2D

35



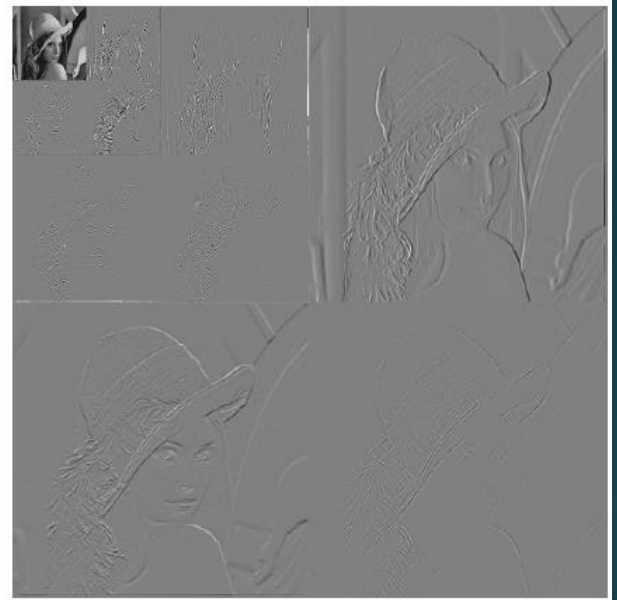
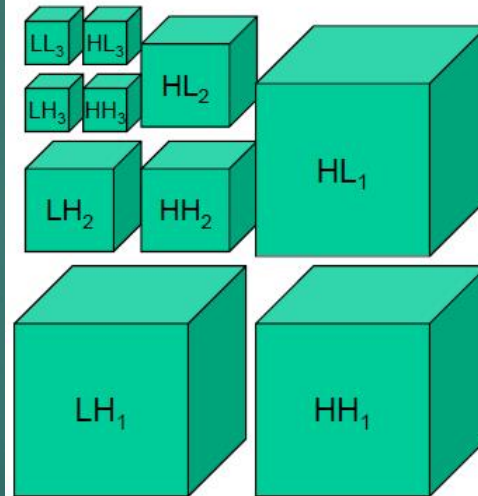
Níveis e detalhes da DWT-2D em imagens



Exemplo de Aplicação da DWT-2D (Fast ou não) em imagens

37

EST1019 - Multimídia



Características da DWT 2D

38

- ▶ DWT é aplicada independentemente e descorrelaciona a imagem (tamanhos de escala), preservando a correlação espacial.
- ▶ DWT-1D = filtro passa-baixa (L) + passa-alta (H)
- ▶ Divide uma linha de pixels em duas sub-bandas,
- ▶ Cada banda contém metade do tamanho original da linha após downsampling.
- ▶ A aplicação dos filtros a imagens bidimensionais gera 4 sub-bandas (LL, LH, HL e HH)
- ▶ sub-banda LL é imagem original com menos resol., com os detalhes filtrados nas outras sub-bandas.
- ▶ Bordas horizontal (LH), vertical (HL) e diagonal (HH) no tamanho da escala definido pela wavelet.

Referências

39

EST1019 - Multimídia

- [1] Kurashima, C. S., Capítulo da Disciplina EST1019, "INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA (DWT) EM CODIFICAÇÃO VISUAL", 2017.
- [2] C.Gargour, M.Gabrea, V. Ramachandran, J.M.Lina, "A short introduction to wavelets and their applications," *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, Vol. 9, No. 2. (05 June 2009), pp. 57-68.
- [3] R. C. Gonzales and R. E. Woods, Digital Image Processing. Reading, MA, Addison-Wesley, 2000.
- [4] Texto sobre a implementação do DWT no JPEG2000:
 - ▶ Christopoulos, C.; Skodras, A.; Ebrahimi, T., "The JPEG2000 still image coding system: an overview," in *Consumer Electronics, IEEE Transactions on* , vol.46, no.4, pp.1103-1127, Nov 2000
doi: 10.1109/30.920468
 - ▶ URL: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=920468&isnumber=19895>