Transformadas em Sinais e Sistemas Lineares
Séries de Fourier - Resumo

Diego Paolo Ferruzzo Correa

1 As Séries de Fourier

Uma função $x(t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0$, com $T_0, \omega_0 \in \mathbb{R}^+$, tal que: $x(t + T_0) = x(t)$, pode ser representada pelas Séries de Fourier, da seguinte forma:

1. Série de Fourier Complexa:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{jk\omega_0 t}, \tag{1}$$

onde:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)dt$$
$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

2. Série de Fourier Trigonométrica:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\right), \tag{2}$$

onde:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)dt,$$
$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt,$$
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t)\operatorname{sen}(k\omega_0 t)dt.$$

3. Série de Fourier Compacta:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), \tag{3}$$

onde:

$$c_0 = a_0,$$
$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$
$$\theta_k = -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

A relação entre os coeficientes das três séries de Fourier é dada por:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \\ a_0 &= c_0 = X_0, \\ a_k &= 2\operatorname{Re}(X_k) \\ b_k &= -2\operatorname{Im}(X_k), \\ c_k &= 2|X_k|, \\ \theta_k &= -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = \angle X_k. \end{aligned} \tag{4}$$

2 Simetria e Paridade de $x(t)$

2.1 Paridade par de $x(t)$

Se $x(t)$ é par, isto é, se $x(t) = x(-t)$, e $x(t) = x(t + T_0)$, $T_0 \in \mathbb{R}^+$, então o coeficiente X_k da série exponencial na equação (3):

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{a_k}{2},$$

ou, ainda,

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt,$$

note que, $\mathrm{Re}(X_k) = X_k = a_k/2$ e $\mathrm{Im}(X_k) = 0$, assim, os coeficientes das séries na equação (4) resultam:

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 = X_0, \\
a_k &= 2\,\mathrm{Re}(X_k) = 2X_k \\
b_k &= -2\,\mathrm{Im}(X_k) = 0, \\
c_k &= 2|X_k| = |a_k|, \\
\theta_k &= -\tan^{-1}\left(\frac{0}{a_k}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

2.2 Paridade ímpar de $x(t)$

Se $x(t)$ é ímpar, isto é, se $x(t) = -x(-t)$, e $x(t) = x(t+T_0)$, $T_0 \in \mathbb{R}^+$, então o coeficiente X_k da série exponencial na equação (3), resulta em:

$$\begin{aligned}
X_k &= -\,j\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt \\
&= -\,j\frac{b_k}{2},
\end{aligned}$$

ou, ainda:

$$X_k = -j\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt,$$

note que agora, $\mathrm{Re}(X_k) = 0$ e $\mathrm{Im}(X_k) = -b_k/2$, assim, os coeficientes das séries na equação (4) resultam:

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 = X_0 = 0, \\
a_k &= 2\,\mathrm{Re}(X_k) = 0 \\
b_k &= -2\,\mathrm{Im}(X_k), \\
c_k &= 2|X_k| = |b_k|, \\
\theta_k &= -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{0}\right) = \angle X_k.
\end{aligned} \tag{6}$$

3 Exemplo

Obtenha as Séries de Fourier para o sinal mostrado na figura 1, obtenha o gráfico o espectro de Amplitude ($k\times c_k$) e de Fase ($k\times\theta_k$) e escreva um programa em Matlab para obter os gráficos do sinal na forma da Série Exponencial com $k = \pm 2$, ± 10, ± 50 e ± 500.

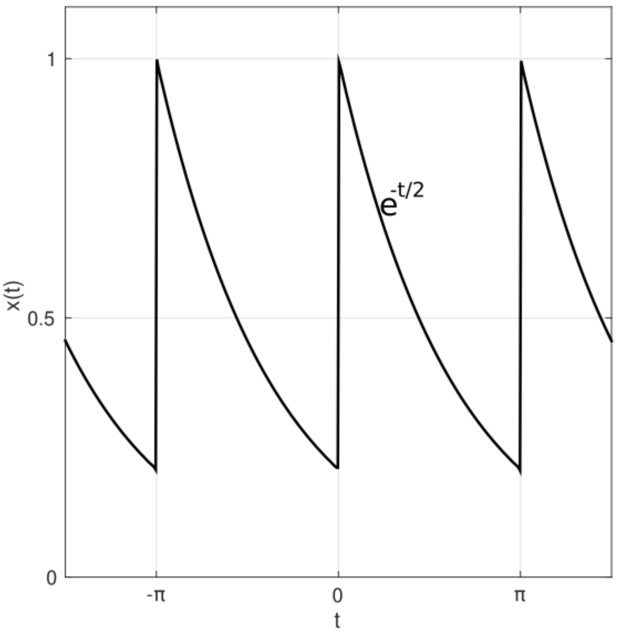


Fig. 1: Sinal períodico.

Sol.: Primeiro, identificamos o período do sinal $x(t)$, $T_0 = \pi$, com $\omega_0 = 2$, a seguir, calculamos o coeficiente X_k da Série Exponencial:

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}e^{-j2kt}dt, \\
X_k &= \frac{2\left(1-e^{-\pi/2}\right)}{\pi\left(1+16k^2\right)}(1-j4k)
\end{aligned}$$

Das equações (4), computamos os coeficientes das séries trigonométrica e compacta:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\left(1-e^{-\pi/2}\right) = c_0, \\
a_k &= \frac{4\left(1-e^{-\pi/2}\right)}{\pi\left(1+16k^2\right)}, \\
b_k &= \frac{16k\left(1-e^{-\pi/2}\right)}{\pi\left(1+16k^2\right)}, \\
c_k &= \frac{4\left(1-e^{-\pi/2}\right)}{\pi\sqrt{1+16k^2}}, \\
\theta_k &= -\tan^{-1}(4k).
\end{aligned}$$

A série trigonométrica é:

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\left(1 - e^{-\pi/2}\right)\Bigg(1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2}{1+16k^2}\left(\cos(2kt) + 4k\,\mathrm{sen}(2kt)\right)\Bigg),$$

a série compacta:

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\left(1 - e^{-\pi/2}\right)\Bigg(1 + \sum_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+16k^2}} \cos\left(2kt - \tan^{-1}(4k)\right)\Bigg),$$

e série exponencial:

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\left(1 - e^{-\pi/2}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1-j4k}{1+16k^2}e^{j2kt}.$$

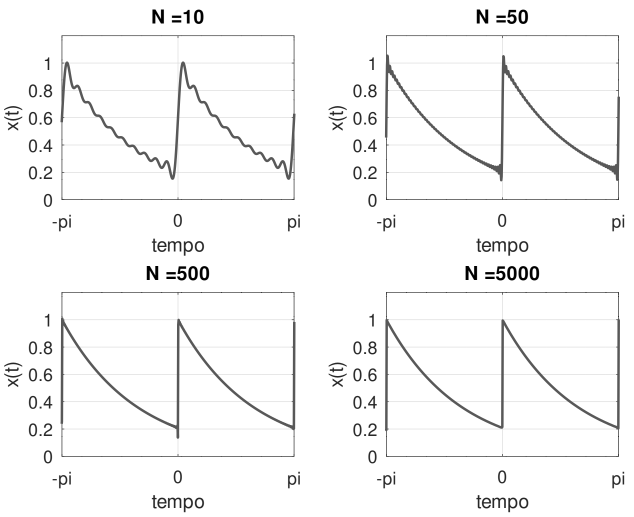
O código Octave é:

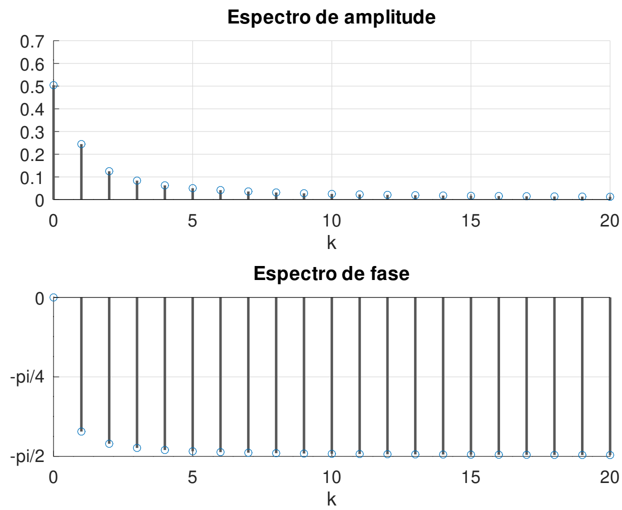
```
# autor: Diego Ferruzzo
# =====================
# Exemplo do resumo das Séries de Fourier
# ========================================
clear all
close all
clc
# parâmetros
T0 = pi;
w0 = 2*pi/T0;
# A série complexa
X0 = 2*(1-exp(-pi/2))/pi;
Xk =@(k) (2*(1-exp(-pi/2)).*(1-j*4.*k))./(pi*(1 + 16.*k.^2));
# A série trigonométrica
a0 = X0;
ak =@(k) 2*real(Xk(k));
bk =@(k) -2*imag(Xk(k));
# A série compacta
c0  = X0;
ck  =@(k) 2*sqrt((real(Xk(k))).^2+(imag(Xk(k))).^2);
thk =@(k) angle(Xk(k));

# os gráficos
# ===========
# definimos uma base de tempo
t = -2*T0:0.01:2*T0;
# definimos vários N
N = [10 50 500 5000];
x = zeros(length(N), length(t));
# para as séries trigonométrica e compacta
x(:,:) = X0;
for r=1:length(N)
  for k=1:N(r)
    # a SF trigonométrica
    x(r,:) = x(r,:) + ak(k)*cos(k*w0.*t) + bk(k)*sin(k*w0.*t);
    # a SF compacta
    #x(r, :) = x(r, :) + ck(k)*cos(k*w0.*t + thk(k));
```

```
   endfor
endfor
#
# para a série complexa
#x(:,:) = X0;
#for r=1:length(N)
#  M = [[-N(r):-1] [1:N(r)]];
#  for s=1:length(M)
#    k = M(s);
#    x(r,:) = x(r,:) + Xk(k)*exp(j*k*w0.*t);
#   endfor
#endfor
#
figure(1);
for i=1:length(N)
  subplot(2,2,i);
  plot(t, x(i,:), 'linewidth',2);
  grid on;
  title(strcat('N = ',num2str(N(i))));
  xlabel('tempo');
  ylabel('x(t)');
  ylim([0 1.2]);
  xlim([-pi pi]);
  xticks([-pi 0 pi]);
  xticklabels({'-pi', '0', 'pi'});
  set(gca, 'fontsize', 14);
endfor
#
# Os espectros de magnitude e fase
K = 20; # número de harmônicos
ks = 1:20;
figure(2);
subplot(2,1,1);
stem([0 ks], [c0 ck(ks)], 'linewidth', 2);
grid on;
xlabel('k');
title('Espectro de amplitude');
set(gca, 'fontsize', 14);

subplot(2,1,2);
stem([0 ks], [0 thk(ks)], 'linewidth', 2);
grid on;
xlabel('k');
title('Espectro de fase');
ylim([-pi/2 0]);
yticks([-pi/2 -pi/4 0]);
yticklabels({'-pi/2','-pi/4','0'});
set(gca, 'fontsize', 14);
```


N =10
N =50
N =500
N =5000
x(t)
tempo
-pi
0
pi
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Espectro de amplitude
Espectro de fase
k
0
5
10
15
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
-pi/4
-pi/2