# Soluciones: Ejercicios en Álgebra Matricial

Ingeniería Biomédica 1°B
Universidad Autónoma de Aguascalientes, Agosto-Diciembre 2025
Profesor: Brian Villegas Villalpando
**Tarea 2** (Fecha de entrega: **Lunes 1 de Septiembre**, 8:00 am)

---

**Instrucciones:** Escribe clara y ordenadamente los procedimientos necesarios para justificar la respuesta. Se ponderará con un 10% a un resultado correcto y con un 90% a un procedimiento correcto.

---

**Problema 2.1 (Dominios naturales I, 10 puntos)**
Encuentra la función *natural* asociada a las siguientes reglas de correspondencia. Los incisos (c) y (d) son opcionales, y servirán como puntaje extra en la tarea.

(a) $x \mapsto f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

(b) $x \mapsto f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

(c) $x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x}}$

(d) $x \mapsto f(x) = \sqrt{x(4-x)}$

(e) $x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x-12}$

*Hint:* Para los incisos (c) y (d) puedes bosquejar gráficas (usando lo aprendido en la Semana 3) y considerar un análisis similar al del Problema 2.5.

*Solución.* (a) Consideramos la regla $x \mapsto f(x) = 1/(1-x)^2$. Para que $\frac{1}{(1-x)^2}$ sea un número real, necesitamos que $(1-x)^2$ sea distinto a cero. Esto ocurre cuando $x \neq 1$. Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

(b) Consideremos la regla $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$. Para que $\frac{x}{x^2-1}$ sea un número real, necesitamos que $(x^2-1)$ sea distinto de cero. Esto ocurre cuando $x \neq 1$ y $x \neq -1$. Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{x^2-1}. \end{aligned}$$

(e) Consideremos la regla $x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4x-12}$. Para que $\frac{x+1}{x^2-4x-12}$ sea un número real, necesitamos que $(x^2-4x-12)$ sea distinto de cero. Esto ocurre cuando $(x+2)(x-6)$ es distinto de cero, es decir, cuando $x \neq -2$ y $x \neq 6$. Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 6\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{x+1}{x^2-4x-12}. \end{aligned}$$

(c) Para que $\sqrt{\frac{5-x}{x}}$ sea un número real, necesitamos que $\frac{5-x}{x}$ sea positivo y que $x \neq 0$. Si graficaramos $\frac{5-x}{x}$ (ustedes deben bosquejar la gráfica), nos daríamos cuenta de que la función de $x \mapsto \frac{5-x}{x}$ es mayor o igual a cero en el intervalo $(0, 5]$. Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} f : (0, 5] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\frac{5-x}{x}}. \end{aligned}$$

(d) Para que $\sqrt{x(4-x)}$ sea un número real, necesitamos que $x(4-x)$ sea mayor o igual a cero. Si graficamos $x(4-x)$ (ustedes deben bosquejar la gráfica), nos daríamos cuenta que la función de $x \mapsto x(4-x)$ es mayor o igual a cero en el intervalo $[0,4)$. Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} f : (0,4] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x(4-x)}. \end{aligned}$$

□

**Problema 2.2 (Función o no función, 10 puntos)**
En las siguientes figuras, el trazo azul representa una relación graficada en el plano cartesiano. Determina si las siguientes relaciones son funciones y justifica tu razonamiento. Para aquellas que no sean una función, modifica la figura (remueve puntos) de tal forma que la resultante pueda ser la gráfica de una función; hay más de una forma de hacerlo, pero solo debes mencionar una.

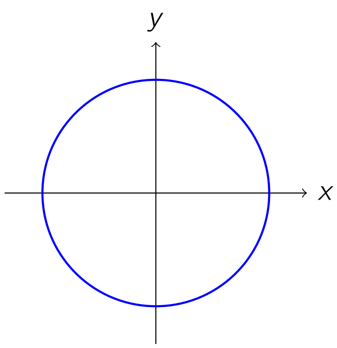



Figure 1:

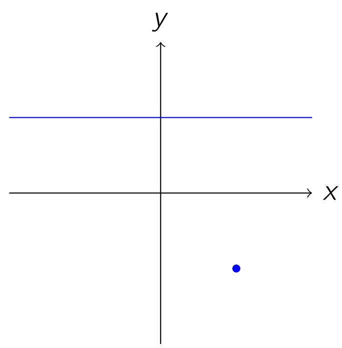



Figure 2:

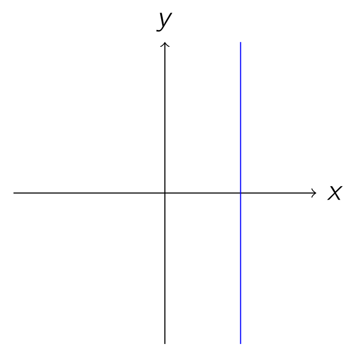
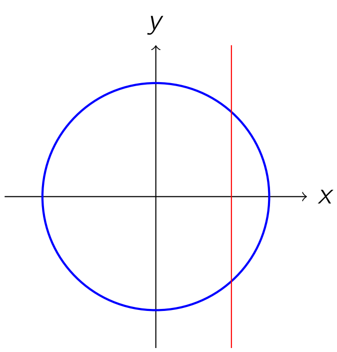
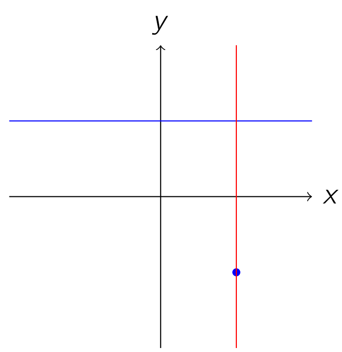
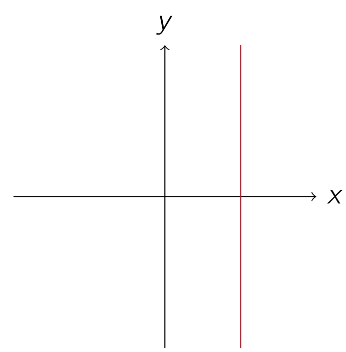



Figure 3:

*Solución.* En estos problemas se debe utilizar el método de las líneas verticales. Si existe una línea vertical que intercepte al trazo de la relación en más de un punto, entonces no es una función. Las siguientes figuras muestran tal línea usando un trazo rojo en cada caso.

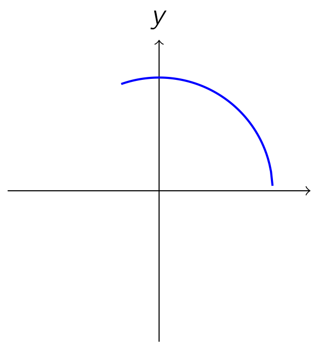


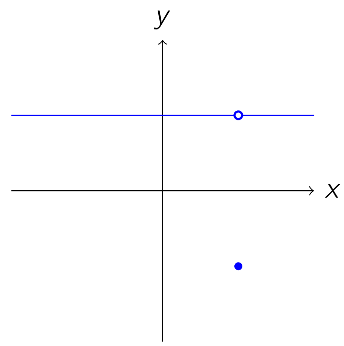



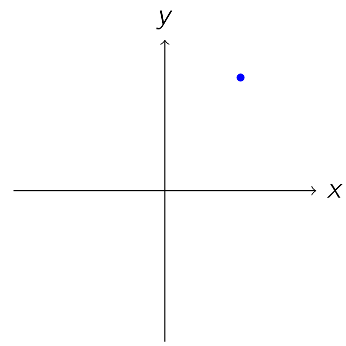




Para modificar (solo removiendo puntos) las figuras de tal manera que la resultante sea la gráfica de una función, podemos hacer lo siguiente (figuras en la siguiente página). En la primer figura, solo dejamos un sector del círculo. En la segunda, removemos el punto donde la línea roja y el trazo horizontal azul se interceptan. En la tercera, solo dejamos un punto.

□




**Problema 2.3 (Imágenes de funciones, 10 puntos)**
Basándote en la información proporcionada por cada figura, determina la imagen de cada función (natural) asociada a la regla de correspondencia.

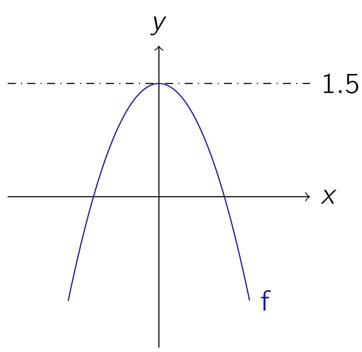



Figure 4: $x \mapsto -2x^2 + 1.5$

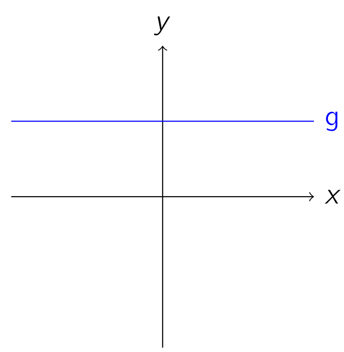



Figure 5: $x \mapsto 1$

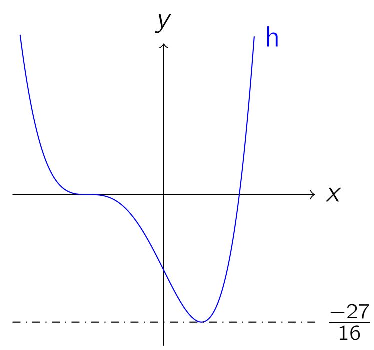



Figure 6: $x \mapsto (x^2 - 1)(x + 1)^2$

*Solución.* De la Figura 4, podemos ver que la función tiene un valor máximo de 1.5 y que tiende a menos infinito. Por lo tanto, la imagen de $f$ es

$$\mathrm{Im}(f) = [-\infty, 1.5].$$

De la Figura 5, podemos ver que la función solo toma un único valor (es constante) y ese valor es 1. Por lo tanto. la imagen de $g$ es

$$\mathrm{Im}(g) = \{1\}.$$

De la Figura 6, podemos ver que la función tiene un valor mínimo de $-27/16$ y que tiende a infinito. Por lo tanto, la imagen de $h$ es

$$\mathrm{Im}(h) = [-27/16, \infty).$$

□

**Problema 2.4 (Funciones inyectivas y sobreyectivas, 10 puntos)**
Usando un *software* para graficar (p.ej. GeoGebra), grafica las siguientes reglas de correspondencia en su dominio natural. Realiza un bosquejo de esta gráfica y determina si las funciones resultantes tienen alguna de las siguientes propiedades: inyectividad, sobreyectividad o biyectividad.

(a) $x \mapsto x - 1$

(b) $x \mapsto x^2 - x + 2$

(c) $x \mapsto \sqrt{x + 2}$

(d) $x \mapsto \frac{2x^3}{x^2+1}$

(e) $x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+1}$

(f) $x \mapsto \frac{3x+5}{1-2x}$

*Solución.* Para este problema se debe usar el método de las líneas horizontales para verificar si la función es inyectiva o sobreyectiva. Voy a omitir las gráficas, pero lo que se debe hacer es exhibir dichas líneas (sobre el bosquejo de la gráfica dibujar las líneas que prueben que la función tiene o no tiene la propiedad) según corresponda. Las conclusiones son las siguientes:

(a) Es biyectiva

(b) No es ni inyectiva ni sobreyectiva

(c) Es inyectiva, pero no sobreyectiva

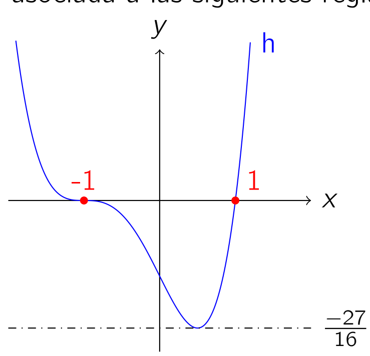
(d) Es biyectiva

(e) No es ni inyectiva ni sobreyectiva

(f) Es inyectiva, pero no sobreyectiva

□

**Problema 2.5 (Dominios naturales II, 10 puntos)**
La siguiente figura muestra la gráfica de la regla de correspondencia $x \mapsto (x^2-1)(x+1)$. Los puntos rojos indican todos los valores de $x$ donde la gráfica cruza el eje horizontal y la línea punteada muestra el mínimo valor funcional de la regla de correspondencia. Usando únicamente la información proporcionada en la figura, encuentra la función *natural* asociada a las siguientes reglas de correspondencia.




(a) $x \mapsto \sqrt{(x^2-1)(x+1)}$

(b) $x \mapsto \frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$

(c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)}}$

*Solución.* Para este problema se debe analizar la información proporcionada por la gráfica.

(a) Para que $\sqrt{(x^2-1)(x+1)}$ sea un número real, debemos asegurar que $(x^2-1)(x+1) \geq 0$. De la figura, podemos ver que esto ocurre en el conjunto

$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} f : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{(x^2-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

(b) Para que $\frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$ sea un número real, necesitamos que el denominador no sea cero, es decir, que $(x^2-1)(x+1) \neq 0$. De la figura, podemos ver que esto ocurre (la función no es cero) cuando $x \neq 1$ y $x \neq -1$. Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{(x^2-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

(c) Para que $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)}}$ sea un número real, necesitamos que el denominador no sea cero y se debe cumplir que $(x^2-1)(x+1) \geq 0$. De la figura, podemos ver que esto ocurre en el conjunto

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Por lo tanto, la función natural asociada es

$$\begin{aligned} h : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)}}. \end{aligned}$$

$\square$