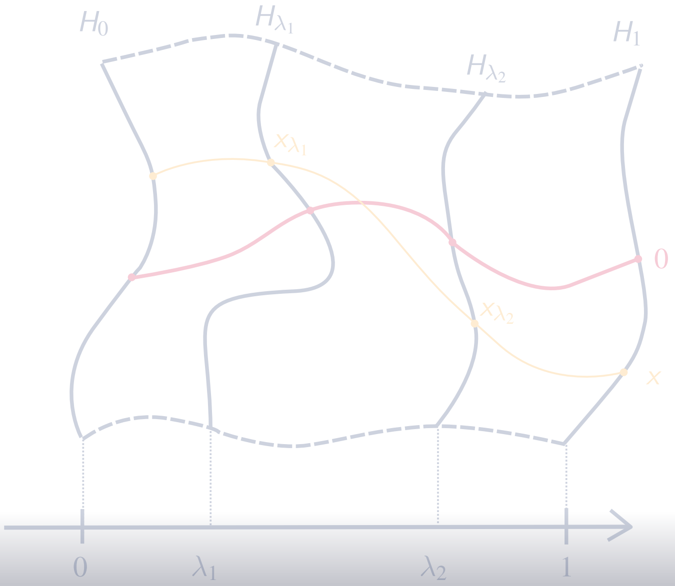
Clases 19 y 20: Repaso de la Unidad I

Funciones y gráficas

Brian Villegas Villalpando

brvillea@gmail.com
brian.villegas@edu.uaa.mx



Álgebra Matricial, 1°B Ing. Biomédica
Semestre Agosto-Diciembre 2025

Sección 1

Definiciones

Definición de función

Una **función** f asigna a cada elemento x de un conjunto $D \subset X$, llamado dominio, un ÚNICO elemento $f(x)$ en un conjunto Y, llamado contradominio. Esta asignación se denota de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f : D \subset X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 1

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

Definición de función inyectiva

Una función

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es **inyectiva** si cualesquiera dos elementos distintos del dominio tienen distinto valor funcional, es decir, si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ejemplo 2 (Contraejemplo)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Definición de función sobreyectiva

Una función

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es **sobreyectiva** si para toda $y \in Y$ existe una $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 3 (Contraejemplo)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Definición de función biyectiva

Una función

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es **biyectiva** si para toda $y \in Y$ existe una ÚNICA $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 4

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

Definición de función constante

Una función

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es **constante** si existe una $c \in Y$ tal que $f(x) = c$ para toda $x \in X$.

Ejemplo 5

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3 \end{aligned}$$

Definición de función definida por partes

Una función

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

está **definida por partes** si su dominio está dividido y para cada división se tiene una regla de correspondencia, donde la relación resultante sigue siendo una función.

Ejemplo 6

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (x-1)^2+3, & x \in [1, +\infty), \\ 2x+1, & x \in (-\infty, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Definición de función polinomial

Una función

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto P(x) \end{aligned}$$

es **polinomial** si existen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_n \neq 0$ tales que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Al número $n \in \mathbb{N}_0$ se le llama el grado de P.

Ejemplo 7

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x^5 + x + 2 \end{aligned}$$

Definición de funciones racionales

Una función

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es **racional** si existen polinomios P y Q tales que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \forall x \in D.$$

Ejemplo 8

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{x^5 - 1} \end{aligned}$$

Definición de ceros de funciones

Dada una función

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

decimos que $x \in D$ es un **cero** de f si $f(x) = 0$.

Ejemplo 9

Dada una función cuadrática $x \mapsto ax^2 + bx + c$ los ceros de la función se pueden calcular usando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observaciones

1. Un polinomio $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado n tiene a lo más n ceros reales.
2. Una función de tipo
$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$
se denomina de valor real y variable real.

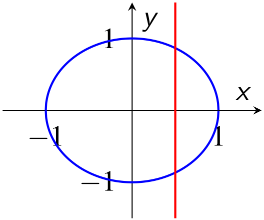
Sección 2

Métodos de líneas verticales y horizontales

Función o no función

El método de líneas verticales se puede usar para determinar si una relación graficada en el plano cartesiano es una función o no. Para esto hacemos lo siguiente:

1. Trazar una línea vertical que corte a la gráfica
2. Si al menos una de esas líneas corta la gráfica en más de un punto, entonces la relación no es una función.



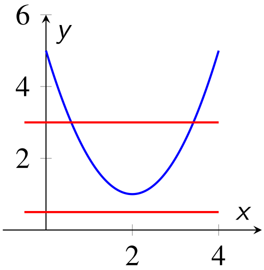
Funciones inyectivas y sobreyectivas

Dada una función

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

el método gráfico para determinar si esta es inyectiva o sobreyectiva consiste en dibujar líneas horizontales:

1. Si al menos una línea corta a la gráfica en más de un punto, entonces la función no es inyectiva.
2. Si al menos una línea nunca corta la gráfica, entonces la función no es sobreyectiva.



Sección 3

Gráficas y bosquejos

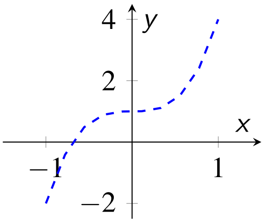
Graficando por medio de tabulación

Dada una regla de correspondencia, digamos

$$x \mapsto f(x) = 3x^3 + 1,$$

podemos graficar la función calculando las parejas por medio de tabulación:

1. Elegimos cualesquiera puntos de interés en el dominio.
2. Realizamos los cálculos de la regla de correspondencia.
3. Graficamos las parejas encontradas.
4. Entre más puntos calculemos, mejor será la aproximación de la gráfica



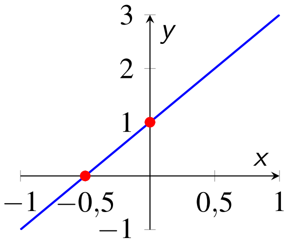
Bosquejo de funciones lineales

Consideremos una función lineal

$$x \mapsto ax + b, \qquad a \neq 0.$$

Para bosquejar esta función podemos considerar los siguientes dos puntos:

1. La pareja $(0, b)$, donde la función intercepta al eje vertical.
2. La pareja $(-b/a, 0)$, donde la función intercepta al eje horizontal.



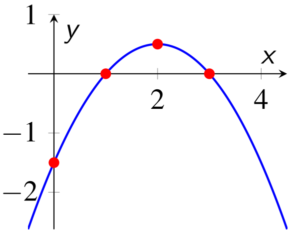
Bosquejo de funciones cuadráticas

Consideremos una función cuadrática

$$x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Si $a > 0$, entonces la función abre hacia arriba. De lo contratio, abre hacia abajo. Para bosquejar esta función podemos considerar los siguientes puntos:

1. El vértice de la parábola, que ocurre en $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.
2. La pareja $(0, c)$, donde la función intercepta al eje vertical.
3. Las raíces (o ceros) de la parábola.



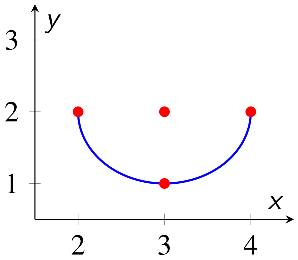
Bosquejo de semicírculos

Consideremos una semicírculo

$$x \mapsto b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}, \quad r > 0.$$

Para bosquejar esta función debemos identificar lo siguiente:

1. El centro (a, b)
2. El radio $r > 0$.
3. Si es un semicírculo superior o inferior dependiendo del signo $\pm$.



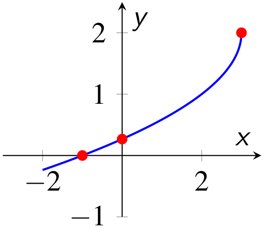
Bosquejo de raices cuadradas

Consideremos la función

$$x \mapsto b + a\sqrt{\pm(x - c)}, \quad a \neq 0.$$

Para bosquejar esta función debemos identificar lo siguiente:

1. El vértice, que ocurre en (c, b).
2. Si $a > 0$, entonces se trata de la parte superior. De lo contrario, es la inferior.
3. Si abre a la derecha o a la izquierda dependiendo del signo $\pm$.
4. Si es posible calcularlos, el cero de la función y el valor cuando $x = 0$.



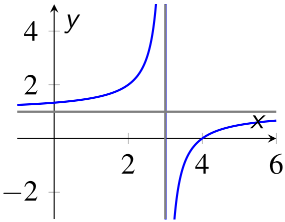
Bosquejo de funciones racionales

Consideremos la función

$$x \mapsto \frac{1}{ax+b} + k, \quad a \neq 0.$$

Para bosquejar esta función debemos identificar lo siguiente:

1. El punto de indeterminación, que ocurre en $x = -b/a$.
2. La asíntota horizontal, que ocurre cuando $y = k$.
3. Si $a > 0$, entonces los trazos están en las esquinas superior derecha e inferior izquierda. De lo contrario, están en la superior izquierda e inferior derecha.



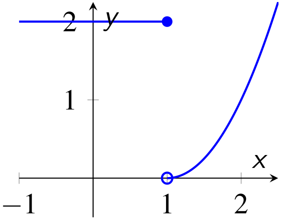
Bosquejo de funciones por partes

Dada una asignación definida por partes, digamos

$$x \mapsto \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, 1] \\ (x-1)^2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

podemos bosquejarla haciendo los bosquejos de cada parte con las restricciones de los dominios. Por ejemplo,

1. Bosquejamos la función constante 2 desde menos infinito hasta 1.
2. Bosquejamos la función $x \mapsto (x-1)^2$ desde 1 hasta más infinito.
3. Los puntos finales se dejan abiertos o cerrados dependiendo de los intervalos.



Sección 4

Dominios naturales

Cálculo algebraico de dominios naturales

Recordemos que las reglas de correspondencia $x \mapsto \frac{1}{x}$ y $x \mapsto \sqrt{x}$ tienen dominio natural $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $[0, +\infty)$, respectivamente. Por lo tanto, dada una regla de correspondencia, digamos $x \mapsto 3x + 1$, el dominio natural de

$$x \mapsto \frac{1}{3x + 1}$$

se obtiene calculando y removiendo los puntos donde el denominador es cero (en este caso, resolviendo la ecuación $3x + 1 = 0$). Mientras que el dominio natural de

$$x \mapsto \sqrt{3x + 1}$$

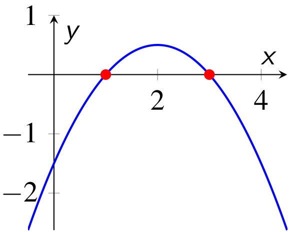
se obtiene considerando únicamente los puntos donde el radicando es mayor o igual a cero (en este caso, resolviendo la desigualdad $3x + 1 \geq 0$). **¿Cómo se calcula el dominio natural de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$?**

Interpretación de gráficas

Una función, digamos

$$x \mapsto \frac{1}{2}(1-(x-2)^2),$$

1. Es cero para los valores de x donde la gráfica intercepta el eje horizontal.
2. Es mayor a cero para los valores de x donde la gráfica está por encima del eje horizontal.
3. Es menor a cero para los valores de x donde la gráfica está por debajo del eje horizontal.



Sección 5

Traller de bosquejo